



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO : 486

DATA : 27/02/2013

A P P U N T I

STUDENTE : Barberis

MATERIA : Scienze delle Costruzioni II
Prof. Chiaia

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

SCIENZA delle COSTRUZIONI 2

PROGRAMMA del CORSO

1. STRUTTURE IPERSTATICHE

- Metodo degli spostamenti, calcolo automatico dei telai, travi reticolari piane, telai piani a nodi fissi o a traversi rigidi, grigliati piani, telai spaziali
- Metodo degli elementi finiti: Principio di minimo dell'energia potenziale totale
Metodo di Ritz Galerkin, Principio dei lavori virtuali
- Simmetria strutturale
- Telai piani a nodi fissi e nodi spostabili, carichi termici e spostamenti imposti
telai a maglie non ortogonali

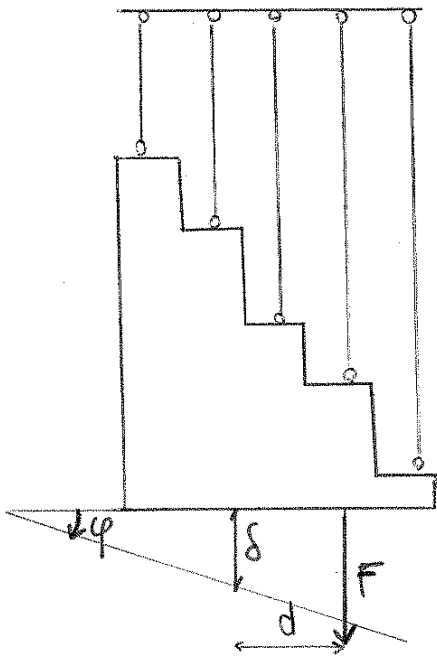
2. STRUTTURE BI- E TRI-DIMENSIONALI

- Travi piane ad asse rettilineo e curvilineo: dualità statico-energetica
Trave su suolo elastico
- lastre piane inflesse: dualità statico-energetica. Equazione di Sophie Germain con condizioni al contorno. Cenni su lastre a doppia curvatura
- lastre di rivoluzione, membrane e gusci sottili, lastre circolari e lastre cilindriche

3. DINAMICA delle STRUTTURE

- Sistemi ad un grado di libertà: oscillazioni libere e oscillazioni smorzate
Sollecitazioni armoniche, periodiche, impulsive e generiche. Oscillatore elastico non-lineare. Oscillatore elasto-plastico
- Sistemi a molti gradi di libertà: rapporto di Rayleigh; metodo di Stodola-Vianello
- Sistemi continui. Analisi modale delle travi inflesse, membrane e lastre vibranti (NO)
- Metodo degli elementi finiti in regime dinamico, dinamica delle strutture intelasate

ESEMPIO 2 :



$$s_i = \frac{X_i l_i}{E_i A_i} = \delta + \varphi x_i$$

x_i = ascissa della trave considerata

$$\begin{cases} F = \sum X_i \\ F \cdot d = \sum X_i \cdot x_i \end{cases}$$

$$X_i = \frac{E_i A_i}{l_i} (\delta + \varphi x_i)$$

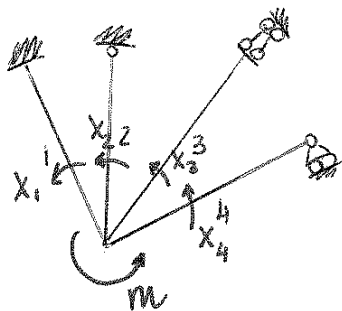
$$\begin{cases} F = \delta \left(\sum \frac{E_i A_i}{l_i} \right) + \varphi \left(\sum \frac{E_i A_i}{l_i} x_i \right) \\ F \cdot d = \delta \left(\sum \frac{E_i A_i}{l_i} x_i \right) + \varphi \left(\sum \frac{E_i A_i}{l_i} x_i^2 \right) \end{cases}$$

MATRICE di RIGIDEZZA

$$\begin{bmatrix} \sum \frac{E_i A_i}{l_i} & \sum \frac{E_i A_i}{l_i} x_i \\ \sum \frac{E_i A_i}{l_i} x_i & \sum \frac{E_i A_i}{l_i} x_i^2 \end{bmatrix}$$

Soffrono di piu' le aste piu' lontane

ESEMPIO 3 : Sistemi di travi in parallelo



φ = rotazione del nodo incastrato dovuta a m

$$\varphi_i = \varphi = \frac{X_i l_i}{c_i E_i I_i}$$

dae c_i e' un coefficiente che dipende dal vincolo cui e' soggetta la trave

$$m = \sum X_i$$

$$X_i = \varphi \frac{c_i E_i I_i}{l_i}$$

$$m = \sum \varphi \frac{c_i E_i I_i}{l_i}$$

$$\varphi = \frac{m}{k}$$

$$X_i = m \frac{c_i E_i I_i}{l_i} / \sum \frac{c_i E_i I_i}{l_i} = m \frac{k_i}{k}$$

$$\begin{cases} c_1 = 4 \\ c_2 = c_4 = 3 \\ c_3 = 1 \end{cases}$$

E' piu' difficile far ruotare una trave incastrata che una incernierata quindi c e' maggiore

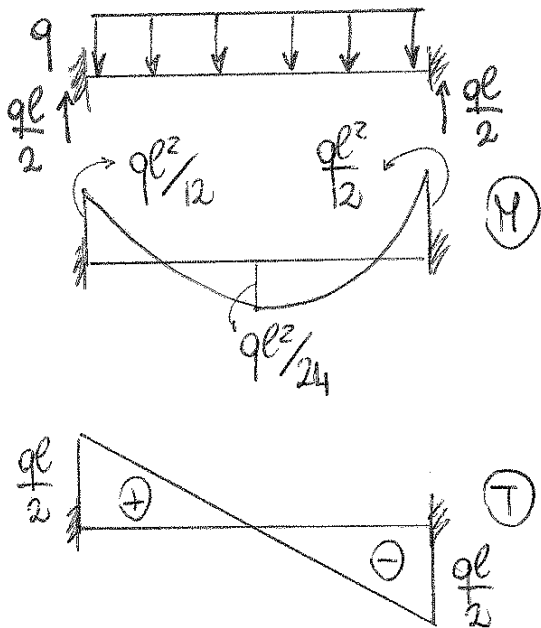
La matrice di rigidezza è simmetrica per il teorema di Betti
 Otteniamo il seguente sistema

$$\begin{bmatrix} H_i \\ T_i \\ N_i \\ H_j \\ T_j \\ N_j \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} \varphi_i \\ v_i \\ w_i \\ \varphi_j \\ v_j \\ w_j \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} H_i^o \\ T_i^o \\ N_i^o \\ H_j^o \\ T_j^o \\ N_j^o \end{bmatrix}$$

↑
 Vettore incognite iperstatiche (Reazioni vincolari)
 ↑
 Matrice di rigidezza
 ↑
 Vettore spostamenti
 ↑
 Vettore forze equivalenti al carico esterno

Il vettore delle forze equivalenti al carico esterno può assumere diversi valori a seconda del tipo di carico

CARICO DISTRIBUITO



$$\begin{bmatrix} -\frac{ql^2}{12} \\ +\frac{ql}{2} \\ 0 \\ +\frac{ql^2}{12} \\ +\frac{ql}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

DISTORSIONI TERMICHE

$$\begin{bmatrix} \frac{2EI\alpha\Delta T}{h} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{2EI\alpha\Delta T}{h} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -EA\alpha\Delta T \\ 0 \\ 0 \\ EA\alpha\Delta T \end{bmatrix}$$

la matrice di espansione e' formata da due matrici identita' e le altre matrici nulle, con il seguente procedimento:

da trave 2-5 avra'

$$[A_{2-5}]^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \leftarrow \text{Nodo 1} \\ 1 & 0 & 0 & \leftarrow \text{Nodo 2} \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \leftarrow \text{Nodo 5} \\ \vdots & \vdots & & & \\ \vdots & \vdots & & & \leftarrow \text{Nodo 10} \end{bmatrix}$$

Avremo quindi

$$[N]^T [k_e] [N] [A_e] \{\delta^e\} = [A_e] (\{Q^e\} + \{F^e\})$$

$$\underbrace{[A_e]^T [N]^T [k_e] [N] [A_e]}_{[k^e]} \{\delta^e\} = \{Q^e\} + \{F^e\}$$

Per l'equilibrio ai nodi deve risultare

$$-\sum \{Q^e\} + \{F\} = \{0\}$$

l'equazione risolvente diventa

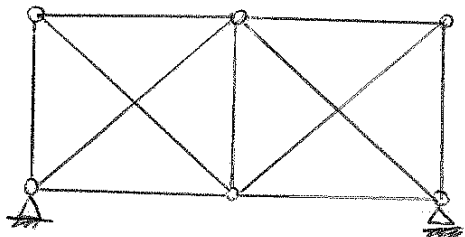
$$\boxed{[K] \{\delta\} = \{F\} + \{F_{eq}\}}$$

vettore delle forze nodali effettive

vettore delle forze nodali equivalenti

sono termini noti

TRAVATURE RETICOLARI PIANE



$$\begin{bmatrix} N_i \\ N_j \end{bmatrix} = EA \begin{bmatrix} \frac{1}{l} & -\frac{1}{l} \\ -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_i \\ w_j \end{bmatrix}$$

Si considerano gli spostamenti nodi
centrera quindi la matrice di
rigidezza locale si riduce

Avremo solo sforzi normali

In genere le travature reticolari
sono caricate solo sui nodi
e quindi il vettore delle forze
equivalenti ai carichi è nullo

Si prosegue con lo stesso procedimento
descritto per il calcolo dei telai piani, introducendo la matrice
di rotazione $[N]$ la matrice di espansione $[A_e]^T$ fino a trovare gli
sforzi normali.

TELAI PIANI a NODI FISSI e a NODI SPOSTABILI

- Telai a nodi fissi: i nodi non si spostano ma ruotano soltanto. Se si trascura la cedevolezza assiale delle travi la matrice di rigidezza locale sarà

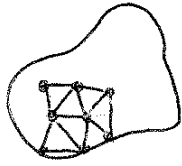
$$\begin{bmatrix} M_i \\ M_j \end{bmatrix} = EI \begin{bmatrix} \frac{4}{l} & \frac{2}{l} \\ \frac{2}{l} & \frac{4}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_i \\ \varphi_j \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M_i^0 \\ M_j^0 \end{bmatrix}$$

- Telai a nodi spostabili: se si hanno travetti orizzontali rigidi i nodi non ruotano ma si spostano orizzontalmente. Avremo

$$\begin{bmatrix} T_i \\ T_j \end{bmatrix} = EI \begin{bmatrix} +\frac{12}{l^3} & -\frac{12}{l^3} \\ -\frac{12}{l^3} & \frac{12}{l^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ v_j \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} T_i^0 \\ T_j^0 \end{bmatrix}$$

METODO degli ELEMENTI FINITI

È un metodo di discretizzazione: si suddivide in dominio in "elementi" (MESH)



si studiano $\{S\}$ spostamenti di un numero discreto n di nodi.

Una volta che $\{S\}$ è noto per interpolazione si costruisce $\{U\}$ funzione di spostamento. $\{U\} = [N]\{S\}$

Da $\{U\}$ per derivazione si trova $\{q\}$ vettore caratteristiche deformative $\{q\} = [D]\{U\} \quad \{E\}$

Da $\{q\}$ attraverso le equazioni costitutive troviamo $\{Q\}$ caratteristiche di sollecitazione. $\{Q\} = [H]\{q\} \quad \{S\}$

I numeri che caratterizzano il sistema sono:

- g = gradi di libertà (dimensione del vettore spostamento)
- d = dimensione del vettore delle caratteristiche deformative $\{q\}$

Per una trave - nel piano $g=3 \quad d=3$
 - nello spazio $g=6 \quad d=6$

Per lastre e solidi $g < d$

METODO di RITZ GALERKIN

Si discretizza il problema esprimendo la funzione incognita $\{ \eta \}$ come somma di funzioni note e linearmente indipendenti $\{ \eta_i \}$

dove $i = 1, 2, \dots, q \times n$

$$\{ \eta \} = \sum_{i=1}^{q \times n} \alpha_i \{ \eta_i \} \quad \alpha_i \text{ diventano le vere incognite}$$

Sostituendo $\{ \eta \}$ all'interno della funzione di energia potenziale totale si ottiene

$$W(\{ \eta \}) = \frac{1}{2} \left(- \sum_{i=1}^{q \times n} \sum_{j=1}^{q \times n} \alpha_i \alpha_j \int_V \{ \eta_i \}^T [L] \{ \eta_j \} dV + \sum_{i=1}^{q \times n} \sum_{j=1}^{q \times n} \alpha_i \alpha_j \int_S \{ \eta_i \}^T [L_0] \{ \eta_j \} ds \right) + \left(\sum_{i=1}^{q \times n} \alpha_i \int_V \{ \eta_i \}^T \{ F \} dV + \sum_{i=1}^{q \times n} \alpha_i \int_S \{ \eta_i \}^T \{ P \} ds \right)$$

In forma più sintetica

$$W(\alpha) = \frac{1}{2} \{ \alpha \}^T [L] \{ \alpha \} - \{ \alpha \}^T \{ F \}$$

dove

$$L_{ij} = - \int_V \{ \eta_i \}^T [L] \{ \eta_j \} dV + \int_S \{ \eta_i \}^T [L_0] \{ \eta_j \} ds$$

$$F_i = \int_V \{ \eta_i \}^T \{ F \} dV + \int_S \{ \eta_i \}^T \{ P \} ds$$

Derivando $W(\alpha)$ rispetto ad α ed uguagliando a zero si trova

$$[L] \{ \alpha \} - \{ F \} = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{[L] \{ \alpha \} = \{ F \}}$$

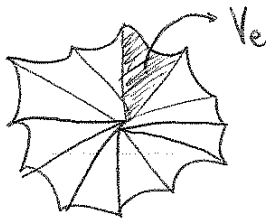
che sarebbe

$$\sum_{i=1}^{q \times n} L_{ij} \alpha_j = F_i$$

Le funzioni $\{ \eta_i \}$ di forma sono definite su sottosistemi dell'intero dominio V

PLV - FEM

Si consideri un dominio elastico V



do si suddivide in sottodomini V_e e ogni elemento contenga m punti nodali.

Nelle zone in cui si hanno intagli o buche si affittisce la mesh.

A ciascuno degli m punti si associa una funzione di forma e quindi una matrice diagonale chiamata



MATRICE DI FORMA di g vettori

$$[N_k] = \begin{bmatrix} N_k & & & \\ & N_k & & \\ & & \ddots & \\ & & & N_k \end{bmatrix} \quad k=1, \dots, m$$

NB: Vale la seguente proprietà

$$[N_k]_j = [S_k]_j = \begin{cases} [I] & j=k \\ [0] & j \neq k \end{cases}$$

• Il campo vettoriale di spostamento e' rappresentabile come

$$\{u_e\} = [N_e] \{S_e\}$$

$g \times 1 \quad g \times (g \times m) \quad (g \times m) \times 1$

g = gradi di libertà
 m = nodi dell'elemento V_e

• Vettore delle caratteristiche deformative $\{q_e\}$

$$\{q_e\} = \frac{\partial}{\partial x_i} [N_e] \{S_e\} = \frac{\partial}{\partial x_i} [N_e] \{S_e\}$$

$\frac{\partial}{\partial}$ = derivata

Definendo $\frac{\partial}{\partial} [N_e] = [B_e]$ avremo

$$\{q_e\} = \begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ \frac{\partial}{\partial x} (g \times m) & (g \times m) \times 1 \end{matrix} [B_e] \{S_e\}$$

NB: $[B_e]$ si calcola per derivazione delle funzioni di forma se queste sono lineari

• Vettore delle caratteristiche statiche $\{Q_e\}$

$$\{Q_e\} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} [H] [B_e] \{S_e\}$$

↪ matrice hessiana

$$\{F_e\} = [A_e] \{F^e\}$$

$$\{P_e\} = [A_e] \{P^e\}$$

Nella relazione di prima ordine allora

$$[K_e] \{\delta^e\} = \{F_e\} + \{P_e\}$$

$$[K_e][A_e] \{\delta^e\} = [A_e] \{F^e\} + [A_e] \{P^e\}$$

Moltiplicando per $[A_e]^T$

$$\underbrace{[A_e]^T [K_e] [A_e]}_{[k^e]} \{\delta^e\} = \underbrace{[A_e]^T [A_e]}_{[1]} (\{F^e\} + \{P^e\})$$

$$[k^e] \{\delta^e\} = \{F^e\} + \{P^e\}$$

Facciamo la somma di tutti gli elementi finiti

$$\sum_e [k^e] \{\delta^e\} = \sum_e (\{F^e\} + \{P^e\})$$

Otteniamo

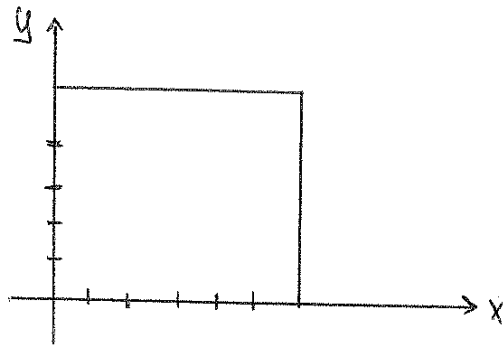
$$\boxed{[K] \{\delta\} = \{F\}}$$

Si è dimostrato come $\boxed{[K] = [L]}$

Metodo di Ritz Galerkin

$$[L] \{\delta\} = \{F\}$$

Per quanto riguarda funzioni a 2 variabili, si può utilizzare lo stesso approccio



si suddivide in $k=h=\Delta$ parti (discretizzazione)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{(x_i; y_j)} = \frac{f(x_{i+1}; y_j) - 2f(x_i; y_j) + f(x_{i-1}; y_j)}{\Delta^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_{(x_i; y_j)} = \frac{f(x_i; y_{j+1}) - 2f(x_i; y_j) + f(x_i; y_{j-1})}{\Delta^2}$$

Avremo quindi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\dots}{\Delta^2} \begin{array}{ccc} i-1; j & i; j & i+1; j \\ 1 & -2 & 1 \end{array}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\dots}{\Delta^2} \begin{array}{ccc} j-1; i & i; j & j+1; i \\ 1 & -2 & 1 \end{array}$$

segue che

$$\nabla^2 f \quad \begin{array}{ccc} & i & i+1 \\ & \textcircled{1} & \\ \textcircled{1} & \textcircled{-4} & \textcircled{1} \\ & \textcircled{1} & \\ & j & j+1 \\ & j-1 & \end{array}$$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

Se consideriamo l'equazione di Sophie-Germain per le lastre avremo

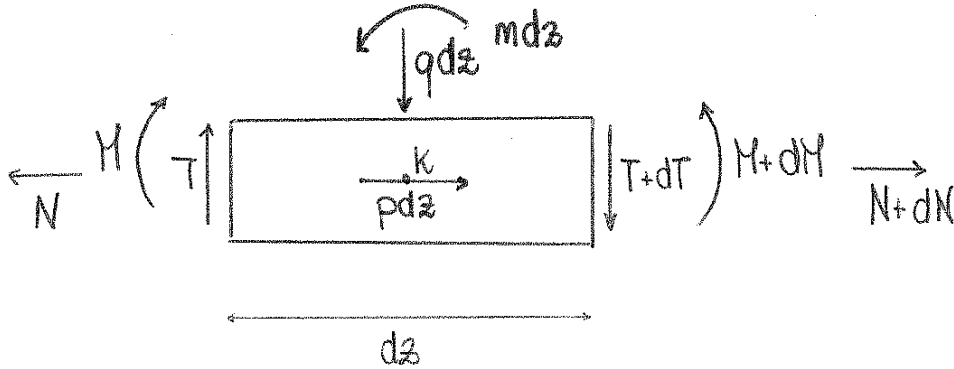
$$\nabla^4 f = \nabla^2(\nabla^2 f)$$

2. STRUTTURE BI-e-TRI-DIMENSIONALI

TRAVI PIANE ad ASSE RETTILINEO

Dualità statico cinematica

■ Descrizione statica



Equazioni di equilibrio

Traslazione verticale

$$\uparrow - qdz + T - (T + dT) = 0 \quad - qdz - dT = 0 \quad dT + qdz = 0 \quad \frac{dT}{dz} + q = 0$$

$$\rightarrow -N + pdz + (N + dN) = 0 \quad dN + pdz = 0 \quad \frac{dN}{dz} + p = 0$$

$$k \odot + mdz - T \frac{dz}{2} - M + (M + dM) - (T + dT) \frac{dz}{2} = 0$$

$$mdz - 2T \frac{dz}{2} + dM - dT \frac{dz}{2} = 0$$

secondo ordine trascurabile

$$m - T + \frac{dM}{dz} = 0$$

$$\frac{dM}{dz} - T + m = 0$$

In forma matriciale

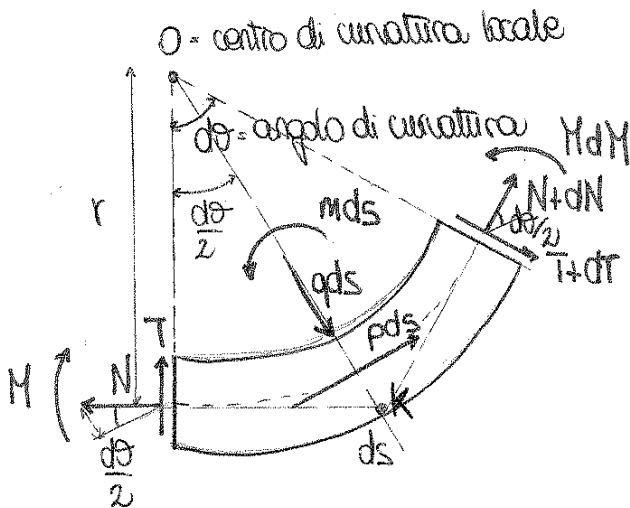
$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dz} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d}{dz} & 0 \\ -1 & 0 & \frac{d}{dz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q \\ p \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[D]^* \{Q\} + \{F\} = \{0\}$$

TRAVI PIANE ad ASSE CURVILINEO

Dualità statico cinematica

Descrizione statica



$$ds = r \cdot d\theta$$

qds = carico distribuito ortogonale alla linea mediana

pds = carico assiale

$m ds$ = coppie distribuite

Equazioni di equilibrio:

Equilibrio radiale

$$+ \downarrow qds - N \sin \frac{d\theta}{2} - (N+dN) \sin \frac{d\theta}{2} - T \cos \frac{d\theta}{2} + (T+dT) \cos \frac{d\theta}{2} = 0$$

$$qds - 2N \sin \frac{d\theta}{2} - dN \sin \frac{d\theta}{2} + dT \cos \frac{d\theta}{2} = 0$$

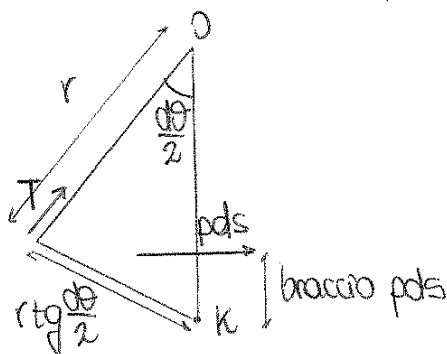
Equilibrio tangenziale

$$\rightarrow pds - N \cos \frac{d\theta}{2} + (N+dN) \cos \frac{d\theta}{2} + T \sin \frac{d\theta}{2} + (T+dT) \sin \frac{d\theta}{2} = 0$$

$$pds + dN \cos \frac{d\theta}{2} + 2T \sin \frac{d\theta}{2} + dT \sin \frac{d\theta}{2} = 0$$

Equilibrio alla rotazione attorno al punto K

$$K \oplus m ds + dM - pds \left(\frac{r}{\cos \frac{d\theta}{2}} - r \right) - T r \operatorname{tg} \frac{d\theta}{2} - (T+dT) r \operatorname{tg} \frac{d\theta}{2} = 0$$



Avremo una curvatura geometrica

$$\chi_{\text{geom}} = \frac{1}{r} = \frac{d\varphi}{ds}$$

E una curvatura meccanica

$$\chi_{\text{mecc.}} = \frac{d\varphi}{ds}$$

Prendendo in considerazione le equazioni cinematiche della trave rettilinea avremo

$$\begin{cases} \gamma = \frac{dv}{ds} + \varphi \\ \varepsilon = \frac{dw}{ds} \\ \chi = \frac{d\varphi}{ds} \end{cases}$$

A queste equazioni avremo una variazione d'angolo da detrarre, una dilatazione assiale aggiuntiva ed una variazione di curvatura

Avremo quindi

$$\begin{cases} \gamma = \frac{dv}{ds} + \varphi - \varphi(w) = \frac{dv}{ds} - \frac{w}{r} + \varphi \\ \varepsilon = \frac{dw}{ds} + \varepsilon(v) = \frac{dw}{ds} + \frac{v}{r} \\ \chi = \frac{d\varphi}{ds} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \gamma \\ \varepsilon \\ \chi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ds} & -\frac{1}{r} & 1 \\ \frac{1}{r} & \frac{d}{ds} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d}{ds} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w \\ \varphi \end{bmatrix}$$

$$[Q] = [A][N]$$

Se il raggio di curvatura e' di molto superiore rispetto alle dimensioni caratteristiche della trave, possiamo utilizzare le stesse equazioni costitutive della trave rettilinea.

Avremo quindi

$$[Q] = [A][N]^*$$

$$[A]^*[Q] + [F]^* = [0]$$

$$[Q] = [H][Q]$$

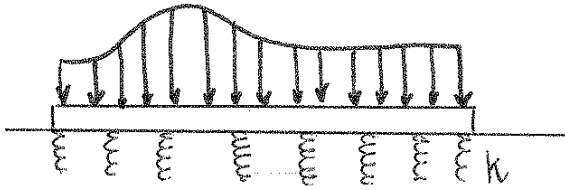
$$e \quad [F]^* = [N][F]$$

$$[N]^* = [N][N]$$

con

$$[N] = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

TRAVE SU SUOLO ELASTICO



Ipotesi di Winkler

↓
Suolo elastico = letto di molle

Reazione del suolo \propto freccia V

CARICHI DISTRIBUITI

k = rigidità della molla equivalente al terreno. Dipende dalle caratteristiche del terreno e dal tipo di fondazione

$$k = k_w \cdot b$$

↓
coefficiente di sottofondo ϕ di Winkler

↘ lunghezza fondazione

Ipotesi di partenza:

$$-k \cdot v = q_{\text{suolo}}$$

Equazione della linea elastica $\frac{d^4 v}{dz^4} = \frac{q + q_{\text{suolo}}}{EI}$

$$\frac{d^4 v}{dz^4} = \frac{q}{EI} - \frac{k v}{EI}$$

Ponendo

$$\beta = \sqrt{\frac{k}{4EI}}$$

$$\frac{d^4 v}{dz^4} + 4\beta^4 v = \frac{q}{EI}$$

EQUAZIONE DIFFERENZIALE TRAVE SU SUOLO ELASTICO

↳ esprime il rapporto tra la rigidità del terreno k e la rigidità della trave EI

la soluzione è data da: integrale particolare + soluzione della omogenea associata su cui assegnare le condizioni al contorno

se $q = C \cdot z^n$ con $n \leq 3 \rightarrow v = \frac{C z^n}{k}$

inoltre $q_{\text{suolo}} = -k v = -q$ il carico si scarica direttamente al suolo

se $n=0$ o $n=1$ la trave è scarica

Avremo quindi

$$V(z) = \frac{FB}{2k} e^{-\beta z} (\cos \beta z + \sin \beta z)$$

Per l'equilibrio alla traslazione verticale: $F = 2 \int_0^{\infty} kv dz$

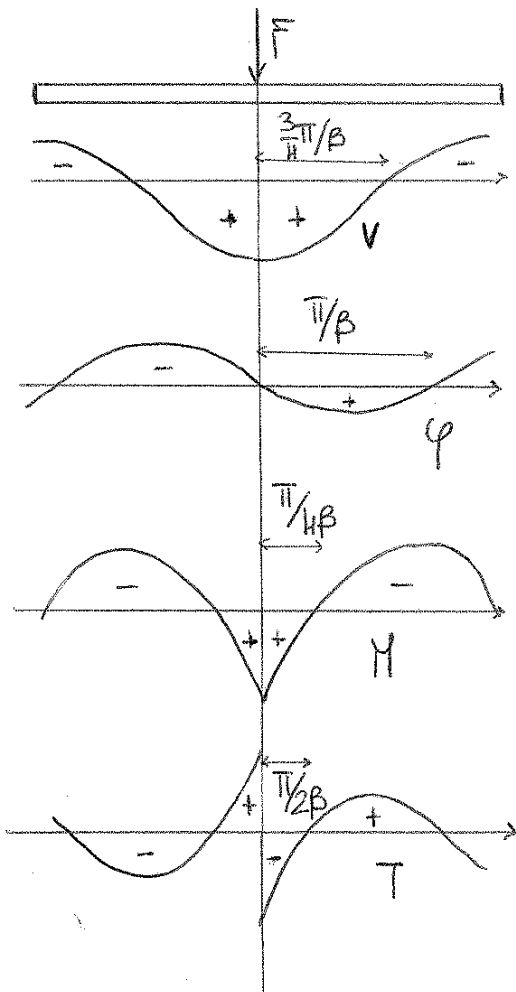
I risultati sono

$$V(z) = \frac{FB}{2k} e^{-\beta z} (\cos \beta z + \sin \beta z) = \frac{FB}{2k} A_{\beta z}$$

$$\varphi(z) = -\frac{dV}{dz} = \frac{FB^2}{k} e^{-\beta z} \sin \beta z = \frac{FB^2}{k} B_{\beta z}$$

$$M(z) = -EI \frac{d^2V}{dz^2} = \frac{F}{4\beta} e^{-\beta z} (\cos \beta z - \sin \beta z) = \frac{F}{4\beta} C_{\beta z}$$

$$T(z) = -EI \frac{d^3V}{dz^3} = -\frac{F}{2} e^{-\beta z} (\cos \beta z) = -\frac{F}{2} D_{\beta z}$$



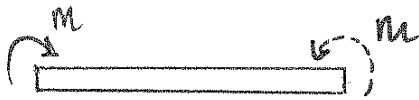
Ad una distanza $\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$ gli effetti provocati dalle forze esterne si annullano poiché $A_{\beta z}, B_{\beta z}, C_{\beta z}$ e $D_{\beta z}$ sono sinusoidi smorzate

Il tratto sollecitato sarà quello $-\lambda \leq z \leq +\lambda$

se $\lambda < l$ allora la trave può essere studiata come illimitata

se $\lambda > l$ l'effetto della forza si ripercuote su tutta la trave

COPPIA APPLICATA



$$l > \lambda$$

$$V(z) = \frac{2\beta^2}{k} m C_{\beta z}$$

$$\varphi(z) = \mp \frac{4\beta^3}{k} m \Delta_{\beta z}$$

$$M(z) = \mp m A_{\beta z}$$

$$T(z) = \mp 2m\beta B_{\beta z}$$

$$l < \lambda$$

$$\frac{V(0)}{H} = \lambda_{FF} = \frac{2\beta^2}{k}$$

$$\frac{\varphi(0)}{H} = \lambda_{MM} = \mp \frac{4\beta^3}{k}$$

In pratica se $l > \lambda$ allora useremo $V(z) = e^{-\beta z} (C_3 \cos \beta z + C_4 \sin \beta z)$
e applicheremo le condizioni al contorno per trovare C_3 e C_4

se $l < \lambda$ useremo $V(z) = e^{\beta z} (C_1 \cos \beta z + C_2 \sin \beta z) + e^{-\beta z} (C_3 \cos \beta z + C_4 \sin \beta z)$
e porremo le condizioni al contorno (4) per trovare C_1, C_2, C_3 e C_4

l'ipotesi cinematica di Kirchhoff genera uno stato deformativo piano
avremo

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \chi_x z \\ \varepsilon_y = \chi_y z \\ \gamma_{xy} = \chi_{xy} z \end{cases}$$

Per uno stato tensionale piano le relazioni costitutive diventano

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) \\ \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \end{cases}$$

In realtà non potremmo avere uno stato deformativo piano e uno stato tensionale piano allo stesso tempo, ma avendo ipotizzato h molto piccolo, le σ_z che si possono sviluppare saranno molto piccole e quindi trascurabili.

Dalle precedenti equazioni ricaviamo le σ_x , σ_y e τ_{xy}

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) \\ \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) \\ \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} \quad \left(G = \frac{E}{2(1+\nu)} \right) \end{cases}$$

Sostituendo i valori di ε_x , ε_y e γ_{xy} avremo

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\chi_x z + \nu \chi_y z) \\ \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\chi_y z + \nu \chi_x z) \\ \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} (\chi_{xy} z) \end{cases}$$

Posso calcolare le caratteristiche della sollecitazione interna M_x, M_y, M_{xy}
per integrazione sullo spessore h .

Dare nello schema precedente:

$$M'_x = M_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} dx$$

$$M'_{xy} = M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx$$

$$T'_x = T_x + \frac{\partial T_x}{\partial x} dx$$

$$M'_{yx} = M_{yx} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} dy$$

$$M'_y = M_y + \frac{\partial M_y}{\partial y} dy$$

$$T'_y = T_y + \frac{\partial T_y}{\partial y} dy$$

Scrivendo equilibrio lungo z avremo

$$\downarrow -T_x dy + \left(T_x + \frac{\partial T_x}{\partial x} dx\right) dy + \left(T_y + \frac{\partial T_y}{\partial y} dy\right) dx - T_y dx + q dx dy = 0$$

$$\frac{\partial T_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial T_y}{\partial y} dy dx + q dx dy = 0$$

$$\frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} + q = 0$$

Scrivendo equilibrio intorno all'asse X

$$\oplus M_{xy} dy - \left(M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx\right) dy + M_y dx - \left(M_y + \frac{\partial M_y}{\partial y} dy\right) dx + T_y dx \cdot \frac{dy}{2} + \left(T_y + \frac{\partial T_y}{\partial y} dy\right) dx \cdot \frac{dy}{2} = 0$$

$$\cancel{M_{xy} dy} - \cancel{M_{xy} dy} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx dy + \cancel{M_y dx} - \cancel{M_y dx} - \frac{\partial M_y}{\partial y} dy dx + T_y dx dy + \frac{\partial T_y}{\partial y} dx \frac{dy^2}{2} = 0$$

$$-\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx dy - \frac{\partial M_y}{\partial y} dy dx + T_y dx dy = 0$$

infinitesimo di ordine superiore

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - T_y = 0$$

Analogamente l'equilibrio attorno all'asse y darà

$$\frac{\partial M_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} - T_x = 0$$

$$M_{xy} = M_{yx}$$

Si possono scrivere le EQUAZIONI COSTITUTIVE

$$\begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{6}Gh & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{6}Gh & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta & \nu\Delta & 0 \\ 0 & 0 & \nu\Delta & \Delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\Delta}{2}(1-\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \\ \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{bmatrix}$$

$$\{Q\} = [H]\{q\}$$

Avremo quindi in forma compatta

$$\{q\} = [\partial]\{\gamma\}$$

$$[\partial^*]\{Q\} + \{F\} = \{0\}$$

$$\{Q\} = [H]\{q\}$$

Combiniamole

$$[\partial^*][H]\{q\} + \{F\} = \{0\}$$

$$[\partial^*][H][\partial]\{\gamma\} + \{F\} = \{0\}$$

$[\alpha]$

operatore di d'Almeida

Il problema elastico della lastra inflessa sarà

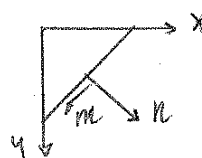
$$\left\{ \begin{array}{l} [\alpha]\{\gamma\} = -\{F\} \quad \forall p \in S \\ ([N]^T[H][\partial])\{\gamma\} = \{p\} \quad \forall p \in \mathcal{C}_p \\ \{\gamma\} = \{\gamma_0\} \quad \forall p \in \mathcal{C}_v \end{array} \right\} \text{ Condizioni al contorno}$$

Dove \mathcal{C}_v e' la porzione in cui sono presenti i vincoli

\mathcal{C}_p e' la porzione su cui sono assegnate le condizioni statiche

$$[N]^T = \begin{bmatrix} n_x & n_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_x & 0 & n_y \\ 0 & 0 & 0 & n_y & n_x \end{bmatrix}$$

versori normali al contorno

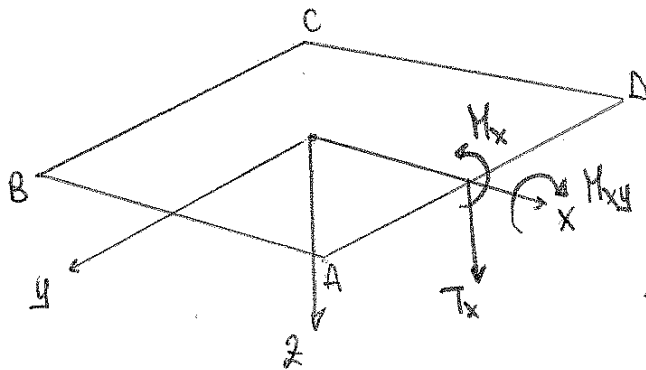


Ruolo del coefficiente di Poisson



Nelle lastre è impedito questo tipo di comportamento
 la lastra è sempre più rigida di un sistema di travi affiancate.

CONDIZIONI AL CONTORNO dell' EQUAZIONE di SOPHIE GERMAIN



φ_x = rotazione attorno a y

<ul style="list-style-type: none"> ■ $M_x = \bar{M}_x \quad \circ \quad \varphi_x = 0$ ■ $M_{xy} = \bar{M}_{xy} \quad \circ \quad \varphi_y = 0$ ■ $T_x = \bar{T}_x \quad \circ \quad W = 0$ 	}	<p>Tali condizioni valgono solo se γ_x e $\gamma_y \neq 0$</p> $\gamma_x = \frac{\partial W}{\partial x} + \varphi_x$ $\gamma_y = \frac{\partial W}{\partial y} + \varphi_y$	<p>altrimenti le ultime 2 relazioni non sono linearmente indipendenti</p>
--	---	---	---

con il principio dei lavori virtuali si dimostra che:

• sui lati // a y :

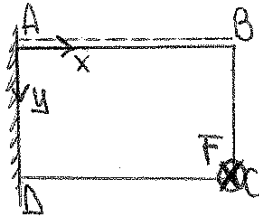
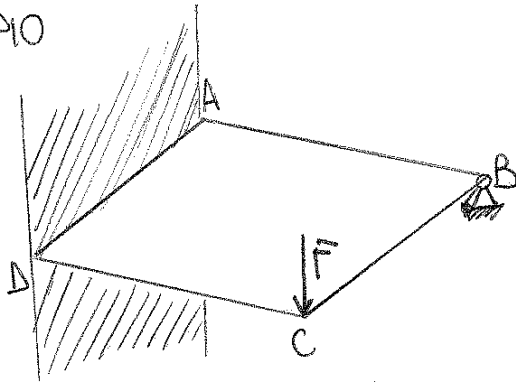
$$\left\{ \begin{array}{l} M_x = \bar{M}_x \quad \circ \quad \frac{\partial W}{\partial x} = -\varphi_x = 0 \\ T_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = \bar{V}_x \quad \circ \quad W = 0 \end{array} \right.$$

• sui lati // a x :

$$\left\{ \begin{array}{l} M_y = \bar{M}_y \quad \circ \quad \frac{\partial W}{\partial y} = -\varphi_y = 0 \\ T_y + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = \bar{V}_y \quad \circ \quad W = 0 \end{array} \right.$$

• In A, B, C, D : $F = |2M_{xy}|$ oppure $W = 0$

ESEMPIO



Scrivere le condizioni al contorno

$$\overline{AB} \parallel a x \rightarrow \begin{cases} M_y = \overline{M}_y = 0 \\ W = 0 \end{cases}$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) = 0 \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0$$

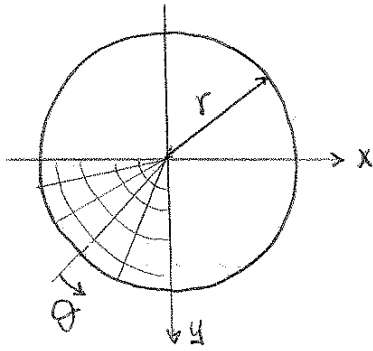
$$\overline{BC} \parallel a y \begin{cases} M_x = \overline{M}_x = 0 \\ \overline{V}_x = T_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

$$\overline{CD} \parallel a x \begin{cases} M_y = \overline{M}_y = 0 \\ \overline{V}_y = T_y + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

$$\overline{AD} \parallel a y \begin{cases} \varphi_x = 0 \\ W = 0 \end{cases}$$

In C avremo $F = -2M_{xy}$

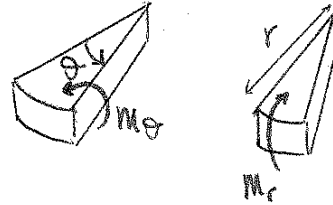
LASTRE CIRCOLARI



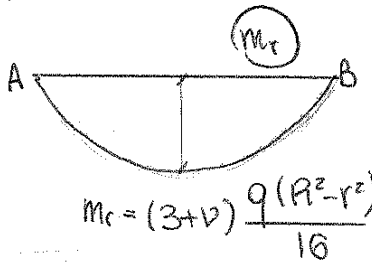
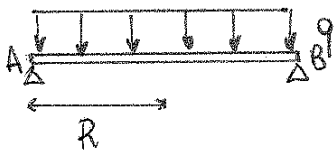
Sono lastre in cui e' massimo il comportamento a lastra, come le lastre quadrate.

Si studiano strisce radiali e circolari nelle direzioni θ e r .

M_θ
 M_r } momenti

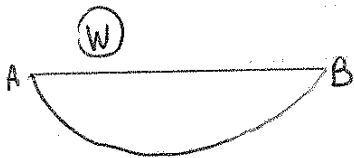


se il carico e' assial-simmetrico $M_{re} = 0$
e il taglio e' presente solo sui piani radiali

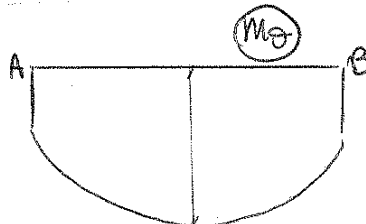


$$M_{r \max} = (3+\nu) \frac{qR^2}{16}$$

$$M_r = (3+\nu) \frac{q(R^2-r^2)}{16}$$



$$W = \frac{q}{64D} (R^2-r^2) \left(\frac{5+\nu}{1+\nu} (R^2-r^2) \right)$$



$$M_{\theta \max} = M_{r \max}$$

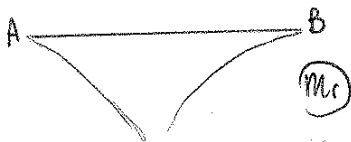
$$M_\theta = \frac{q}{16} \left[(3+\nu)R^2 - (1+3\nu)r^2 \right]$$

Il momento della lastra e' piu' piccolo di una trave appoggiata, stesso vale per la flessione (sono piu' o meno la metà)

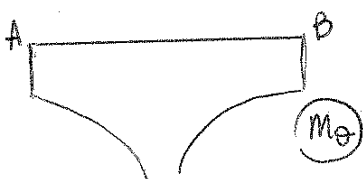


Andamento esponenziale col massimo in corrispondenza del carico

$$M_r = (1+\nu) \frac{P}{4\pi} \log \frac{R}{r}$$



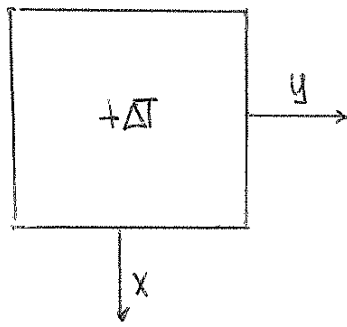
$$M_\theta = \frac{P}{4\pi} \left[(1+\nu) \log \frac{R}{r} + (1-\nu) \right]$$



$$W = \frac{P}{16\pi D} \left[\frac{3+\nu}{1+\nu} (R^2-r^2) - 2r^2 \log \frac{R}{r} \right]$$



DEFORMAZIONI TERMICHE nelle LASTRE PIANE



lastra con variazione termica lungo lo spessore

la soluzione sarà membranale, non nasceranno momenti

Equazioni costitutive

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} \left[(\epsilon_x - \alpha \Delta T) + \nu (\epsilon_y - \alpha \Delta T) \right]$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} \left[\nu (\epsilon_x - \alpha \Delta T) + (\epsilon_y - \alpha \Delta T) \right]$$

Il comportamento dipende dai vincoli cui è soggetta la lastra

■ LASTRA COMPLETAMENTE INCASTRATA

le deformazioni ϵ_x e ϵ_y sono impedite

$$\epsilon_x = 0$$

$$\epsilon_y = 0$$

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} \left[-\alpha \Delta T (1+\nu) \right]$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} \left[-\alpha \Delta T (1+\nu) \right]$$

■ LASTRA INCASTRATA LUNGO X $\epsilon_x = 0$

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} \left[(-\alpha \Delta T) + \nu (\epsilon_y - \alpha \Delta T) \right]$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} \left[-\nu \alpha \Delta T + (\epsilon_y - \alpha \Delta T) \right]$$

■ LASTRA LIBERA

$$\epsilon_x = \alpha \Delta T$$

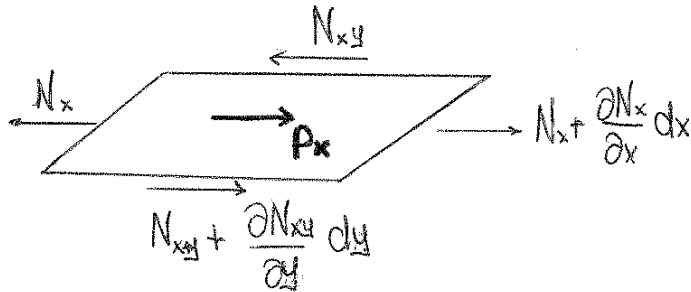
$$\sigma_x = 0$$

$$\epsilon_y = \alpha \Delta T$$

$$\sigma_y = 0$$

COMPORTAMENTO MEMBRANALE

Le strutture a doppia curvatura hanno comportamento membranale, cioè vi sono solo sforzi normali



Equilibrio alla trazione lungo l'asse x

$$(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx) dy - N_x dy + (N_{xy} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} dy) dx - N_{xy} dx + P_x dx dy = 0$$

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + P_x = 0$$

In forma matriciale

lungo l'asse y avremo

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + P_y = 0$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Con il PLV si ottengono le seguenti equazioni cinematiche

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \chi_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

Lo stato di tensione è piano

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu \epsilon_y) \\ \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_y + \nu \epsilon_x) \\ \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \chi_{xy} \end{cases}$$

$$\Delta = \frac{h^3 E}{12(1-\nu^2)}$$

Equazioni costitutive

$$\begin{aligned} N_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz = \sigma_x \cdot h = \frac{12\Delta}{h^2} (\epsilon_x + \nu \epsilon_y) \\ N_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz = \sigma_y \cdot h = \frac{12\Delta}{h^2} (\epsilon_y + \nu \epsilon_x) \\ N_{xy} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dz = \frac{6(1+\nu)\Delta}{h^2} \chi_{xy} \end{aligned}$$

LASTRA di RIVOLUZIONE CARICATA SIMMETRICAMENTE

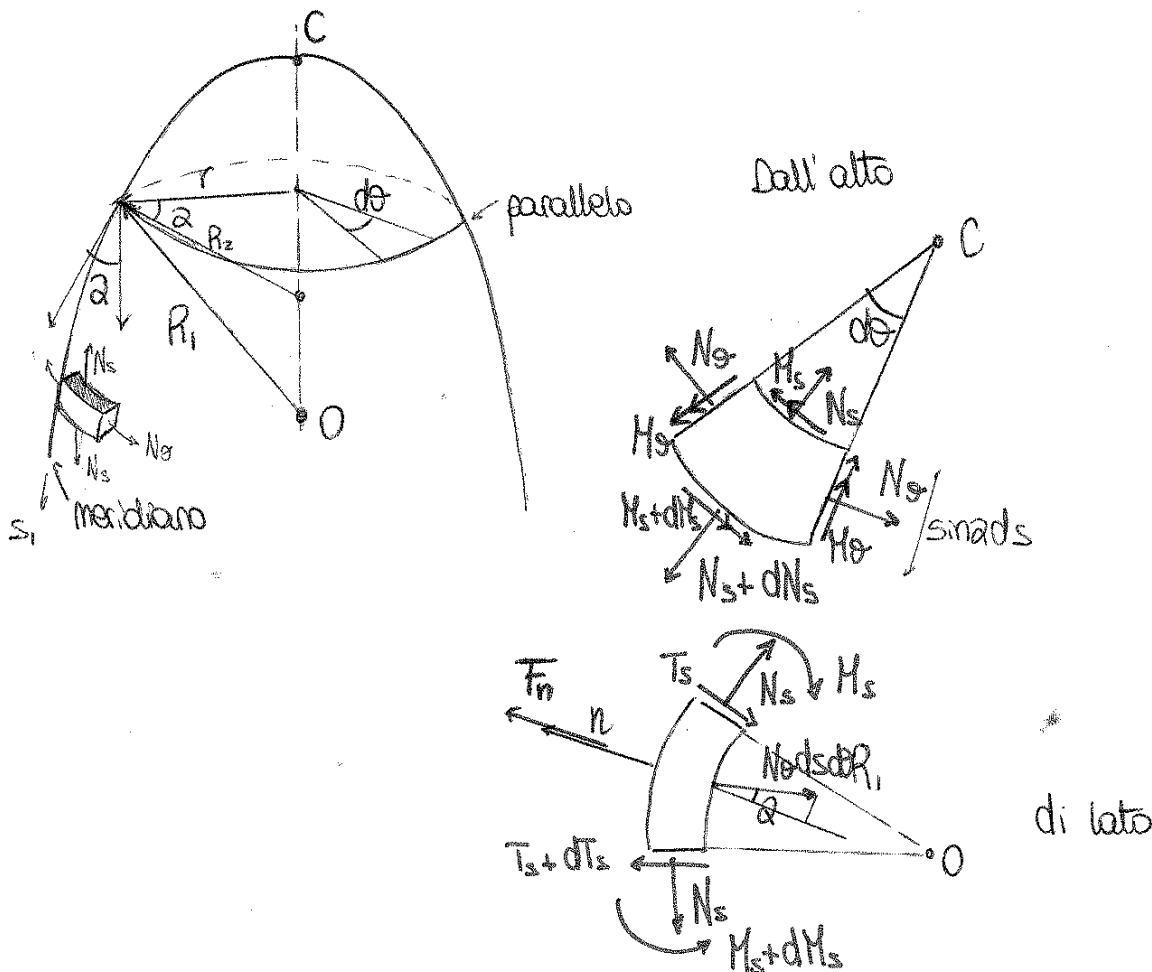
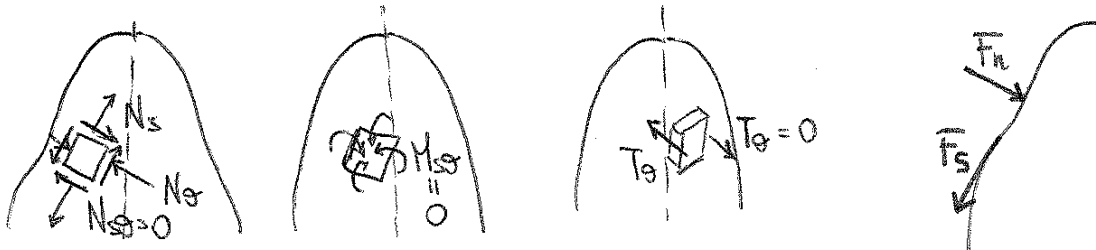
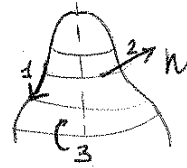
Se la lastra di rivoluzione viene caricata simmetricamente

$$\left. \begin{aligned} N_{\theta} &= 0 \\ T_{\theta} &= 0 \\ M_{\theta} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ per simmetria}$$

Le condizioni di equilibrio alla traslazione lungo paralleli e alla rotazione attorno ai meridiani sono identicamente soddisfatte.

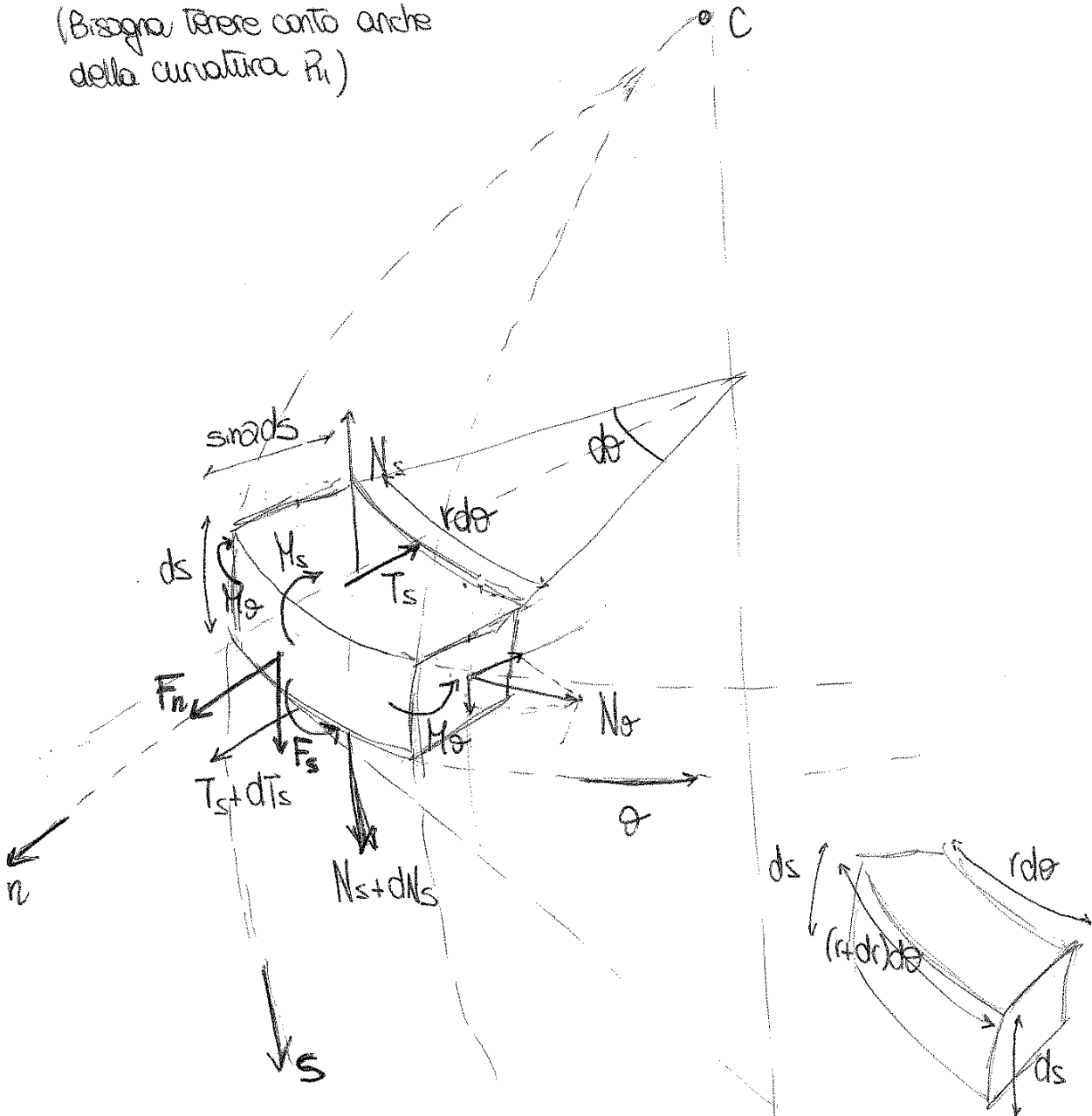
Saranno quindi necessarie solo 3 equazioni di equilibrio

1. traslazione lungo i meridiani
2. traslazione lungo la normale n
3. rotazione attorno ai paralleli



Disegno tridimensionale

(Bisogna tenere conto anche della curvatura R_1)

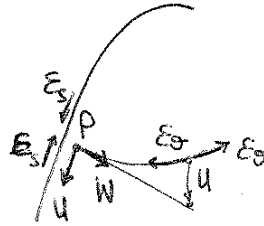


MEMBRANE e GUSCI SOTTILI

- Membrane: prive di rigidità flessionale e prive di rigidità a compressione possono sostenere unicamente sforzi di trazione
- Gusci (o volte): prive di rigidità flessionale, possono sostenere unicamente sforzi di compressione

Equazioni cinematiche

$$\begin{bmatrix} \epsilon_s \\ \epsilon_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ds} & \frac{1}{R_1} \\ \frac{\sin \alpha}{r} & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix}$$



u = spostamenti lungo i meridiani
 w = spostamenti ortogonali alla superficie

Le equazioni statiche sono

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{ds} & -\frac{\sin \alpha}{r} \\ -\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_s \\ N_\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ F_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-\frac{1}{R_1} N_s - \frac{1}{R_2} N_\theta + F_n = 0$$

$$\boxed{\frac{N_s}{R_1} + \frac{N_\theta}{R_2} = F_n}$$

Relazione algebrica fondamentale

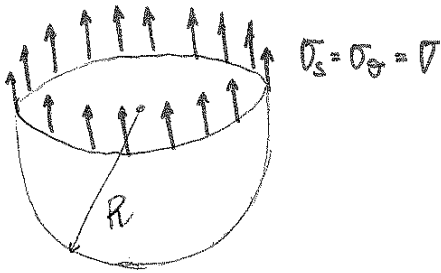
$$\frac{dN_s}{ds} - N_\theta \frac{\sin \alpha}{r} = 0$$

Troviamo N_θ dalla relazione algebrica fondamentale

$$\frac{N_\theta}{R_2} = F_n - \frac{N_s}{R_1}$$

$$N_\theta = R_2 F_n - \frac{R_2}{R_1} N_s = R_2 \left(F_n - \frac{N_s}{R_1} \right)$$

Membrana sferica



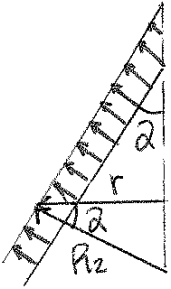
$$R_1 = R_2 = R$$

$$\sigma_s = \sigma_\theta = \sigma$$

$$\frac{\sigma}{R} + \frac{\sigma}{R} = \frac{p}{h}$$

$$\sigma = \frac{pR}{2h}$$

Membrana conica



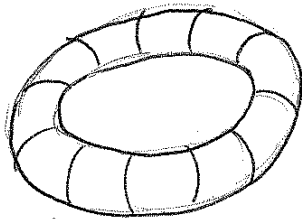
$$R_1 \rightarrow \infty$$

$$R_2 = \frac{r}{\cos \alpha}$$

$$\frac{\sigma_\theta}{R_2} = \frac{p}{h}$$

$$\sigma_\theta = \frac{pr}{h \cos \alpha}$$

Membrana toroidale



$$r = r_0 + R_1 \cos \alpha$$

$$R_2 = \frac{r}{\cos \alpha}$$

$$\frac{\sigma_s}{R_1} + \frac{\sigma_\theta}{R_2} = \frac{p}{h}$$

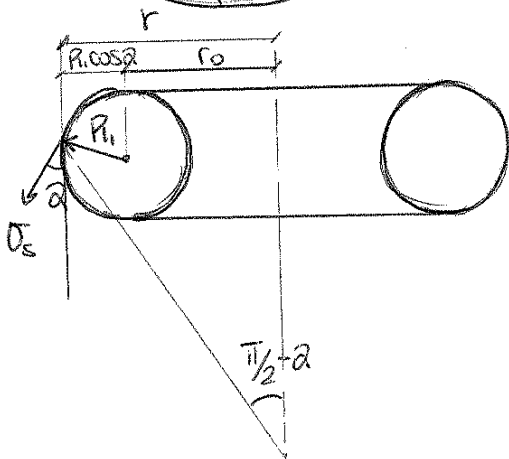
$$\frac{\sigma_s}{R_1} + \frac{\sigma_\theta}{r} \cos \alpha = \frac{p}{h}$$

Minima tensione per $\alpha = 0$

$$\sigma_s = \frac{pR_1}{2h} \frac{2r_0 + R_1}{r_0 + R_1}$$

Massima tensione per $\alpha = \pi$

$$\sigma_s = \frac{pR_1}{2h} \frac{2r_0 + R_1}{r_0 - R_1}$$



$$\sigma_\theta = \frac{pR_1}{2h}$$

Dall'equazione

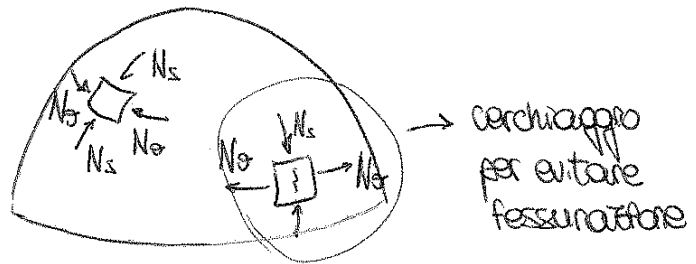
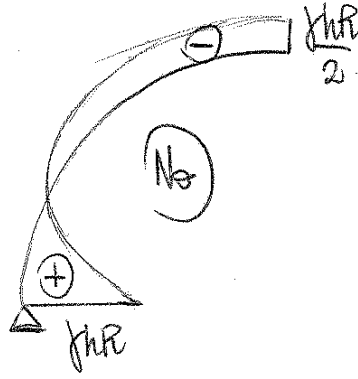
$$\frac{N_s}{R} + \frac{N_o}{R} = F_n$$

$$F_n = -\gamma \cdot h \cdot \sin \alpha$$

sostituendo

$$N_o = -N_s + F_n \cdot R = + \frac{\gamma h R}{1 + \sin \alpha} - \gamma h R \sin \alpha = \frac{1 - \sin \alpha - \sin^2 \alpha}{1 + \sin \alpha} \gamma h R$$

N_o cambia di segno.



Richiamo del teorema di Green

$$\int_A \frac{\partial f}{\partial x} dx dy = \oint_C f dy$$

se $f = g \cdot h$

$$\int_A \frac{\partial g}{\partial x} \cdot h dx dy + \int_A g \frac{\partial h}{\partial x} dx dy = \oint_C g h dy$$

se sostituiamo le equazioni statiche F_s , F_n e M_s nel lavoro virtuale esterno, otteniamo termini del tipo

$$\int_A -\frac{dN_s}{ds} u_s d\theta ds r = - \int_A \frac{dN_s}{ds} (u_s r) d\theta ds$$

se applichiamo il teorema di Green ad una espressione del genere otteniamo ($N_s = q$, $(u_s r) = h$)

$$- \int_A \frac{dN_s}{ds} (u_s r) d\theta ds = \int_A N_s \frac{d}{ds} (u_s r) d\theta ds - \oint_C N_s u_s r d\theta =$$

$$= \int_A N_s \left(\frac{du_s}{ds} r + u_s \frac{dr}{ds} \right) d\theta ds - \oint_C N_s u_s r d\theta = \int_A N_s \left(\frac{du_s}{ds} r + u_s \sin \alpha \right) d\theta ds +$$

$$- \oint_C N_s u_s r d\theta = \int_A N_s \left(\frac{du_s}{ds} + u_s \frac{\sin \alpha}{r} \right) r d\theta ds - \oint_C N_s u_s r d\theta$$

Analogamente si avrà

$$- \int_A \frac{dT_s}{ds} u_n r d\theta ds = \int_A T_s \left(\frac{du_n}{ds} + u_n \frac{\sin \alpha}{r} \right) r d\theta ds - \oint_C T_s u_n r d\theta$$

$$- \int_A \frac{dM_s}{ds} \varphi_s r d\theta ds = \int_A M_s \left(\frac{d\varphi_s}{ds} + \varphi_s \frac{\sin \alpha}{r} \right) r d\theta ds - \oint_C M_s \varphi_s r d\theta$$

Le equazioni costitutive sono quelle relative alle lastre a doppia curvatura senza i termini relativi a ϵ_{12} e χ_{12}

$$\begin{bmatrix} N_s \\ N_\theta \\ T_s \\ M_s \\ M_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12D}{h^3} & \nu \frac{12D}{h^3} & 0 & 0 & 0 \\ \nu \frac{12D}{h^3} & \frac{12D}{h^3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)5D}{h^3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D & \nu D \\ 0 & 0 & 0 & \nu D & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_s \\ \epsilon_\theta \\ \gamma_s \\ \chi_s \\ \chi_\theta \end{bmatrix}$$

Avremo quindi le seguenti equazioni statiche

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R} & \frac{d}{dx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & +\frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_x \\ N_\theta \\ T_x \\ M_x \\ M_\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ +q_x \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

si nota che M_θ non contribuisce all'equilibrio

Queste equazioni sono valide solo se si ha unicamente il carico q_x

Per la dualità statico cinematica avremo

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_x \\ \chi_x \\ \chi_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & +\frac{1}{R} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & +1 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \\ \varphi_x \end{bmatrix}$$

Inserendo $T_x = \frac{dT_x}{dx}$ in $\frac{dT_x}{dx} - \frac{N_\theta}{R} + q_x = 0$

otteniamo

$$\frac{d^2 M_x}{dx^2} - \frac{N_\theta}{R} + q_x = 0$$

Nel caso in cui $N_x = 0$ dalle equazioni costitutive abbiamo

$$N_x = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_\theta) = 0 \rightarrow \frac{Eh}{1-\nu^2} \varepsilon_x + \nu \varepsilon_\theta \frac{Eh}{1-\nu^2} = 0 \quad \varepsilon_x = -\nu \varepsilon_\theta$$

$$N_\theta = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_\theta + \nu \varepsilon_x)$$

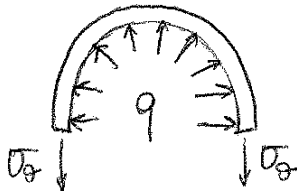
$$N_\theta = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_\theta - \nu^2 \varepsilon_\theta) = \frac{Eh}{1-\nu^2} \varepsilon_\theta (1-\nu^2) = Eh \varepsilon_\theta$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{w}{R}$$

$$\downarrow$$

$$N_\theta = Eh \frac{w}{R}$$

Consideriamo solo metà anello



$$2\sigma_0 h = 2qR \quad \rightarrow \quad \sigma_0 = \frac{qR}{h}$$

$$\sigma_0 = E \epsilon_\theta \quad \rightarrow \quad \epsilon_\theta = \frac{qR}{Eh}$$

Uguagliando le due espressioni di ϵ_θ

$$\frac{W}{R} = \frac{qR}{Eh}$$

$$q = W \underbrace{\left(\frac{Eh}{R^2} \right)}_{\text{rigidezza}}$$

(E' come scrivere $F = k \cdot s$)

$$D W''''(x) + \frac{Eh}{R^2} W = q(x)$$

$D =$ rigidezza della lastra

$$D = \frac{k^3 E}{12(1-\nu^2)}$$

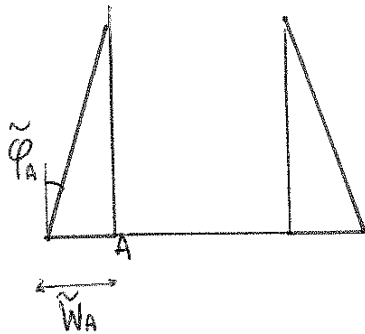
$\frac{Eh}{R^2} =$ rigidezza dell'anello

$$\tilde{\varphi}(x) = -\frac{d\tilde{w}}{dx} = -\frac{\gamma R^2}{Eh}$$

$$\tilde{M} = \tilde{T} = 0$$

$$\tilde{N}_0 = \frac{Eh}{R} \tilde{w} = \frac{Eh}{R} \cdot \frac{\gamma R^2 x}{Eh} = \gamma R x$$

da soluzione sono:



$$\tilde{w}_A = \frac{\gamma R^2}{Eh} l$$

$$\tilde{\varphi}_A = -\frac{\gamma R^2}{Eh}$$

da soluzione e' incompatibile coi vincoli poiche' la deformata diviene un tronco di cono. E' necessario tenere conto della omogenea associata.

Introduciamo

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \quad (\text{lunghezza d'onda})$$

se $\lambda < l$ le sollecitazioni che nascono alla base si smorzano prima di raggiungere la sommita'

Per analogia con la trave su suolo elastico possiamo cercare una soluzione nella forma:

$$w(x) = e^{-\beta(l-x)} (C_1 \cos \beta(l-x) + C_2 \sin \beta(l-x)) + \frac{\gamma R^2}{Eh} x$$

con le 2 condizioni al contorno

$$1 \quad w(x=l) = 0$$

$$2 \quad \frac{dw}{dx}(x=l) = 0$$

$$1. \quad C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 + \frac{\gamma R^2}{Eh} l = 0 \quad \rightarrow \quad C_1 = -\frac{\gamma R^2}{Eh} l$$

$$2. \quad -\beta(l-x) e^{-\beta(l-x)} \left[-C_1 \sin \beta(l-x) - C_2 \cos \beta(l-x) \right] + \frac{\gamma R^2}{Eh} = 0$$

$$\hookrightarrow C_2 = \frac{\gamma R^2}{Eh} \left(\frac{1-\beta l}{\beta} \right)$$

la soluzione generale sarà

$$W(x) = \frac{YR^2}{Eh} x - \frac{1}{2D\beta^3} T_A D_{\beta(l-x)} - \frac{1}{2D\beta^2} M_A C_{\beta(l-x)} =$$

$$= \frac{YR^2}{Eh} x + \frac{T_A}{2D\beta^3} e^{-\beta(l-x)} \cos \beta(l-x) - \frac{M_A}{2D\beta^2} e^{-\beta(l-x)} [\cos \beta(l-x) - \sin \beta(l-x)]$$

sostituisco i valori di N_0 ed N_s

Per il cilindro:

$$\epsilon_0 = \frac{1}{Eh} \left(qR - \nu \frac{qR}{2} \right) = \frac{qR}{Eh} \left(\frac{2-\nu}{2} \right)$$

Per la sfera:

$$\epsilon_0 = \frac{1}{Eh} \left(\frac{qR}{2} - \nu \frac{qR}{2} \right) = \frac{qR}{Eh} \left(\frac{1-\nu}{2} \right)$$

Ricordando che dalle equazioni cinematiche

$$\epsilon_0 = \frac{W}{R}$$

Traviamo

$$W = \frac{qR^2}{Eh} \left(\frac{2-\nu}{2} \right)$$

← cilindro →

$$q = \left[\frac{Eh}{R^2} \frac{2}{2-\nu} \right] W$$

rigidezza cilindro

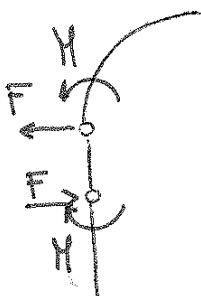
$$W = \frac{qR^2}{Eh} \left(\frac{1-\nu}{2} \right)$$

← sfera →

$$q = \left[\frac{Eh}{R^2} \frac{2}{1-\nu} \right] W$$

rigidezza sfera

In B agiscono anche un taglio F e un momento M poiché abbiamo un incastro e quindi non possiamo avere rotazioni e traslazioni in B. F ed M servono per riportare la congruenza interna

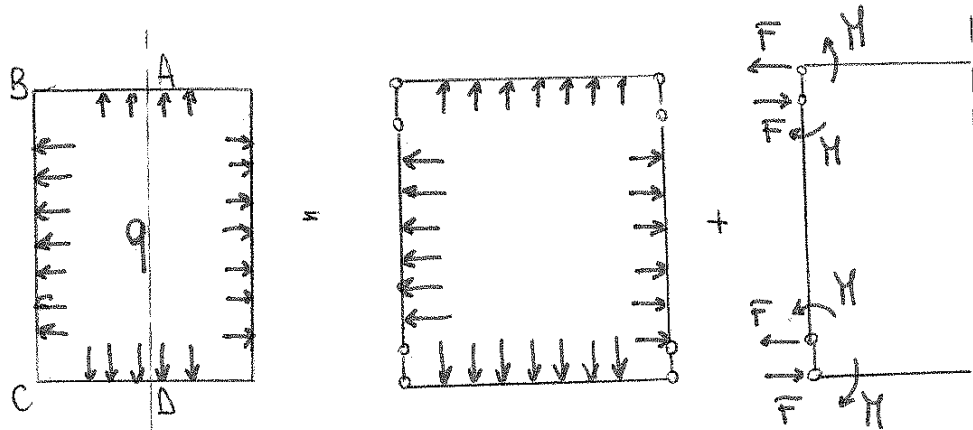


Equazioni di congruenza

$$\textcircled{1} \quad (W_B)_{sf} = (W_B)_{al}$$

$$\textcircled{2} \quad (\varphi_B)_{sf} = (\varphi_B)_{al}$$

SERBATOIO CILINDRICO con FONDO PIANO IN PRESSIONE



Si procede svincolando in B e inserendo una biella. Avremo comportamento puramente membranale con

$$\left. \begin{aligned} N_x &= \frac{qR}{2} \\ N_\theta &= qR \end{aligned} \right\} \text{ cilindro}$$

Il fondo si comporta invece come una lastra circolare appoggiata

In B in realtà abbiamo un incastro per cui avremo M ed F che riportano la congruenza interna.

Equazioni di congruenza

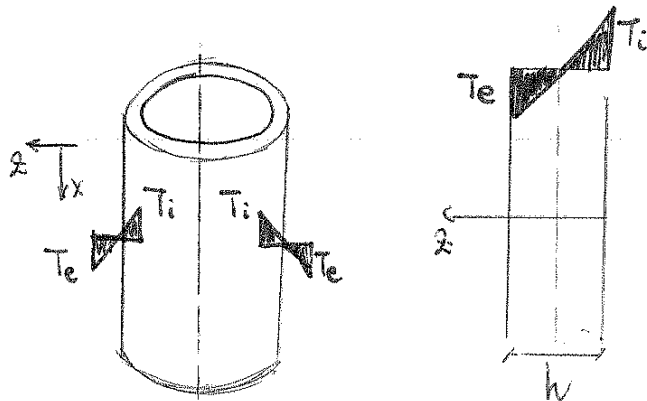
$$\textcircled{1} (w_B)_{cr} = (w_B)_{cl}$$

$$\textcircled{2} (\varphi_B)_{cr} = (\varphi_B)_{cl}$$

$$\textcircled{1} \quad 0 + (\lambda_{FF})_{cr} \cdot F + \underbrace{(\lambda_{FM})_{cr} \cdot M}_{\text{trascurabile}} = \frac{2-\nu}{2} \frac{qR^2}{Eh} + (\lambda_{FF})_{cl} \cdot F + (\lambda_{FM})_{cl} \cdot M$$

$$\textcircled{2} \quad \underbrace{(\lambda_{MF})_{cr} \cdot F}_{\text{trascurabile}} + (\lambda_{MM})_{cr} \cdot M + \frac{qR^3}{8(1+\nu)\Delta} = (\lambda_{MF})_{cl} \cdot F + (\lambda_{MM})_{cl} \cdot M$$

DEFORMAZIONI TERMICHE a FARFALLA LASTRE CILINDRICHE



$$\Delta T = T_e - T_i$$

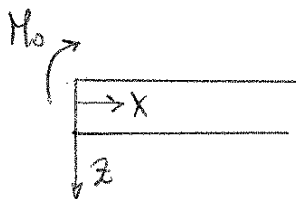
Non ci sono vincoli sulle basi. A sufficiente distanza dalle basi la flessione e' nulla.

Le tensioni sulle superfici esterne sono

$$\sigma_x = \sigma_y = \pm \frac{E \alpha \Delta T}{2(1-\nu)} \quad \leftarrow \text{tensioni che nascono per contrastare la variazione termica}$$

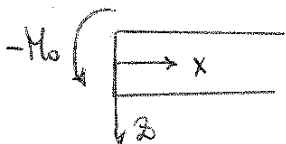
Vicino alle estremita' a questo campo tensionale si sovrappone quello per soddisfare le condizioni al contorno

Nel caso di bordi liberi $\rightarrow \sigma_x = 0$



Al bordo gli sforzi danno origine a momenti distribuiti M_0

Per avere bordi liberi dovremo avere sforzi che generino l'annullamento di M_0



$$M_x = D \chi_{termi} = D \cdot \frac{\alpha \Delta T}{h} \quad M_0 = \nu M_x$$

Per $x=0$ avremo

$$(M_0)_{x=0} = \nu (M_x)_{x=0} = - \frac{E \alpha \Delta T h^2}{12(1-\nu)} \nu$$

3. DINAMICA delle STRUTTURE

SISTEMI ad UN GRADO di LIBERTA'

I carichi dinamici agenti su una struttura possono essere

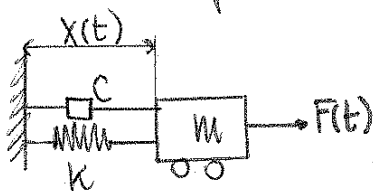
- Periodici
- Non periodici → di breve durata o impulsivi (esplosioni, urti)
di lunga durata o generici (scosse sismiche)

Struttura soggetta a carico statico → ϵ e σ dipendono solo dal carico esterno. Considerazioni di equilibrio

Struttura soggetta a carico dinamico →

- le forze di inerzia si oppongono alle accelerazioni
- le forze elastiche si oppongono agli spostamenti
- forze di spostamento viscoso si oppongono alle velocità

Sistemi ad un grado di libertà: tutta la massa e la rigidità sono concentrati in singoli elementi rappresentativi



OSCILLAZIONI LIBERE NON SMORZATE (C=0)

$$s^2 + \omega^2 = 0 \quad s^2 = -\omega^2$$

$$s = \pm i\omega$$

$$\rightarrow x(t) = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}$$

soluzione oscillazioni libere non smorzate

↑
oscillatore armonico

Sapendo che $e^{\pm i\omega t} = \cos \omega t \pm i \sin \omega t$
da soluzioni si può scrivere come

$$x(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t$$

$$x(t) = A \sin(\omega t - \varphi)$$

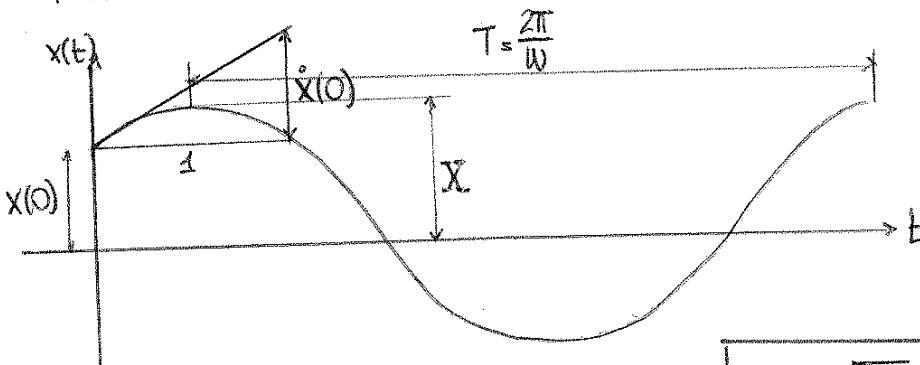
↑
ampiezza massima delle oscillazioni
X

A e B costanti esprimibili tramite le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} x(0) = B \\ \dot{x}(0) = A\omega \end{cases}$$

→

$$x(t) = \frac{\dot{x}(0)}{\omega} \sin \omega t + x(0) \cos \omega t$$



$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

PERIODO PROPRIO DELLA STRUTTURA

scrivendo

$$x(t) = X \cos(\omega t - \varphi)$$

X = ampiezza delle oscillazioni

$$X = \sqrt{\underbrace{x(0)}_{B^2}^2 + \underbrace{\left[\frac{\dot{x}(0)}{\omega}\right]^2}_{A^2}}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\dot{x}(0)}{\omega x(0)}\right) \leftarrow A$$

φ = angolo di fase

2) Sistema sottosmorzato $C < C_c = 2m\omega$ (radice negativa)

Introduciamo il

RAFFORTO di SMORZAMENTO

$$\xi = \frac{C}{C_c} = \frac{C}{2m\omega}$$

$$0 \leq \xi \leq 1$$

Avremo:
$$s = -\frac{C}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{C}{2m}\right)^2 - \omega^2}$$

$$s = -\frac{\xi 2m\omega}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{\xi 2m\omega}{2m}\right)^2 - \omega^2}$$

$$s = -\xi\omega \pm \sqrt{(\xi\omega)^2 - \omega^2}$$

$$s = -\xi\omega \pm i\omega_\Delta$$

dove

$$\omega_\Delta = \omega\sqrt{1-\xi^2}$$

PULSAZIONE SMORZATA

siccome generalmente ξ e' molto piccolo $\omega_\Delta \approx \omega$ nei casi pratici

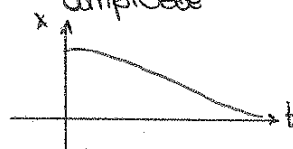
Sostituendo s nella soluzione

$$x(t) = Ce^{st}$$

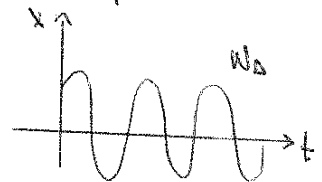
Otteniamo

$$x(t) = C_1 e^{(-\xi\omega + i\omega_\Delta)t} + C_2 e^{(-\xi\omega - i\omega_\Delta)t} = e^{-\xi\omega t} (C_1 e^{i\omega_\Delta t} + C_2 e^{-i\omega_\Delta t})$$

moto esponenziale che spegne le ampiezze

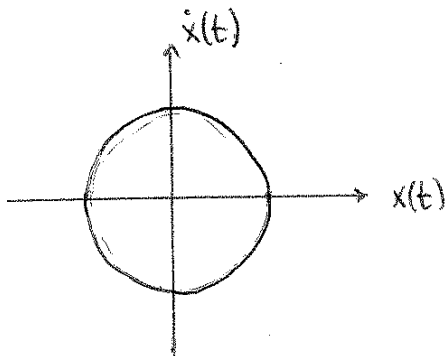


moto periodico

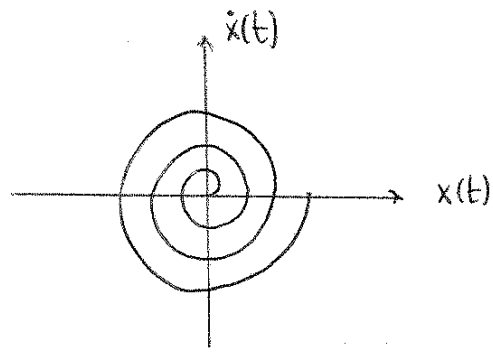


Siccome il termine tra parentesi e' un moto armonico si puo' scrivere

$$x(t) = e^{-\xi\omega t} (A \sin \omega_\Delta t + B \cos \omega_\Delta t)$$



MOTO NON SMORZATO



MOTO SMORZATO

SOLLECITAZIONI ARMONICHE (prive di smorzamento)

Abbiamo un sistema sollecitato da una forzante armonica

$F \sin \omega_F t$ dove ω_F = pulsazione della forzante.

l'equazione dinamica diventa non omogenea

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = F \sin \omega_F t$$

con l'ipotesi che non vi sia smorzamento viscoso e quindi $c=0$

Avremo perciò due soluzioni:

- Soluzione particolare $x_p(t)$ → risposta specifica generata direttamente dalla sollecitazione esterna
- Soluzione complementare $x_c(t)$ → risposta alla vibrazione libera del sistema

$$x_p(t) = C \sin \omega_F t$$

$$x_c(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t$$

C si ottiene sostituendo $x_p(t)$ nell'equazione dinamica

$$-mC\omega_F^2 \sin \omega_F t + kC \sin \omega_F t = F \sin \omega_F t$$

$$-mC\omega_F^2 + kC = F$$

$$C(k - m\omega_F^2) = F$$

$$C = \frac{F}{k - m\omega_F^2}$$

Si come $\frac{k}{m} = \omega^2$

Nei casi pratici il secondo termine viene col tempo annullato dovuta la presenza dello smorzamento viscoso.

Il secondo termine viene detto risposta transitoria, mentre il primo termine persiste ed è amplificato dal fattore di risonanza $\frac{1}{1-\beta^2}$

SOLLECITAZIONI ARMONICHE (con smorzamento viscoso)

Se abbiamo $c \neq 0$, l'equazione del moto diventa

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F \sin \omega_f t$$

si divide per m

$$\ddot{x}(t) + \frac{c}{m} \dot{x}(t) + \frac{k}{m} x(t) = \frac{F}{m} \sin \omega_f t$$

ricordando che $c_c = 2m\omega$ e $\xi = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2m\omega}$

ricaviamo m $\xi(2m\omega) = c$ $m = \frac{c}{2\xi\omega}$

$$\ddot{x}(t) + \cancel{c} \frac{2\xi\omega}{c} \dot{x}(t) + \frac{k}{c} \cdot 2\xi\omega x(t) = F \cdot \frac{2\xi\omega}{c} \sin \omega_f t$$

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\omega \dot{x}(t) + \frac{k}{m} x(t) = \frac{F}{m} \sin \omega_f t$$

$$\boxed{\ddot{x}(t) + 2\xi\omega \dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = \frac{F}{m} \sin \omega_f t}$$

la soluzione complementare è sempre rappresentata dalla risposta all'oscillazione libera, in questo caso smorzata.

$$x(t) = e^{-\xi\omega t} (A \sin \omega_d t + B \cos \omega_d t)$$

la soluzione particolare è

$$x_p(t) = C_1 \sin \omega_f t + C_2 \cos \omega_f t$$

la risposta di un sistema smorzato non è in fase con la forzante

la soluzione sarà data dalla somma della particolare con la complementare.

$$x(t) = e^{-\xi \omega t} (A \sin \omega_d t + B \cos \omega_d t) + \frac{F}{k} \frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} [(1-\beta^2) \sin \omega_f t - 2\xi\beta \cos \omega_f t]$$

Il primo termine rappresenta la risposta TRANSITORIA

Il secondo termine rappresenta la risposta stazionaria che ha la stessa pulsazione della forzante ma è fuori fase rispetto ad essa

la risposta stazionaria può anche essere scritta

$$x_p(t) = X(\sin(\omega_f t - \varphi))$$

dove $X = \frac{F}{k} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$

$$\varphi = \arctg \frac{2\xi\beta}{1-\beta^2} \leftarrow C_2$$

risposta statica del sistema

fattore di amplificazione dinamica

$$D = \frac{X}{F/k} = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$

Si avrà risonanza quando $\xi \rightarrow 0$ e $\beta \rightarrow 1$ ($\omega_f \rightarrow \omega$): $D \rightarrow \infty$

D è funzione del rapporto di smorzamento ξ e del rapporto di frequenza β

Per ξ piccoli $\xi \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ avremo $\beta(\text{picco}) = \sqrt{1-2\xi^2}$

$$e \quad D_{\max} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

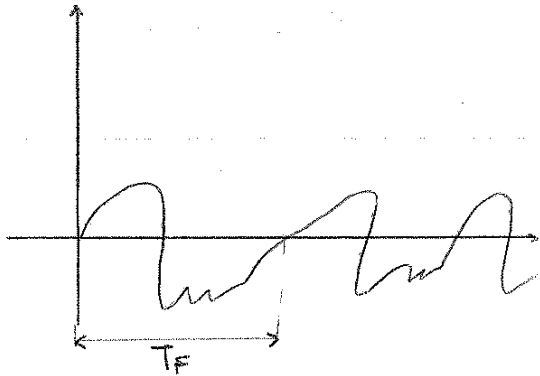
se $\omega = \omega_f$ avremo risonanza e quindi l'ampiezza dell'oscillazione aumenterà linearmente.

se $\beta = 1$ siamo in condizione di risonanza

$$x(t) = e^{-\xi \omega t} (A \sin \omega_d t + B \cos \omega_d t) - \frac{F}{k} \frac{\cos \omega t}{2\xi}$$

SOLLECITAZIONE PERIODICA

Oscillatore armonico soggetto a sollecitazione periodica $F(t)$ con periodo T_F



La funzione $F(t)$ può essere espressa in serie di Fourier e perciò ciascun termine sarà già del tipo analizzato nella sollecitazione armonica.

Applicando il principio di sovrapposizione degli effetti, la risposta totale sarà la somma delle risposte parziali.

$$F(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2\pi n}{T_F} t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{2\pi n}{T_F} t$$

I coefficienti sono forniti dalle seguenti espressioni:

$$a_0 = \frac{1}{T_F} \int_0^{T_F} F(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T_F} \int_0^{T_F} F(t) \cos \frac{2\pi n}{T_F} t dt$$

$$b_n = \frac{2}{T_F} \int_0^{T_F} F(t) \sin \frac{2\pi n}{T_F} t dt$$

Chiamiamo $\omega_F = \frac{2\pi}{T_F}$ pulsazione della sollecitazione $F(t)$

avremo $\omega_n = n \cdot \omega_F$ pulsazione dell'armonica di ordine n

quindi $\beta_n = \frac{n\omega_F}{\omega}$

la risposta stazionaria di un oscillatore armonico di ordine n sarà (non smorzato)

$$x_n(t) = \frac{a_n}{k} \frac{1}{1-\beta_n^2} \cos \omega_n t$$

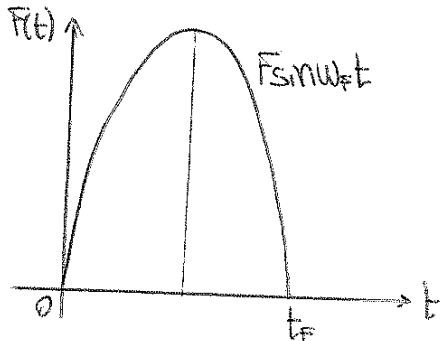
oppure

$$x_n(t) = \frac{b_n}{k} \frac{1}{1-\beta_n^2} \sin \omega_n t$$

mentre $x_0 = \frac{a_0}{k}$

SOLLECITAZIONI IMPULSIVE

La sollecitazione impulsiva è di breve durata, quindi lo smorzamento viscoso non ha molta importanza e viene trascurato



Impulso sinusoidale

$$F(t) = F \sin \omega_F t$$

Per $t < t_F$ abbiamo sollecitazione armonica non smorzata. Inizialmente ci sarà una oscillazione forzata della struttura che poi non si ferma e continua ad oscillare

Quindi per $t < t_F$

$$x(t) = \frac{F}{k} \frac{1}{1-\beta^2} (\cos \omega_F t - \beta \sin \omega t)$$

Per $t > t_F$ abbiamo oscillazioni libere ed il suo moto dipende dallo spostamento e dalla velocità che si hanno al termine della prima fase: $x(t_F)$ $\dot{x}(t_F)$

Equazione delle oscillazioni libere $x(t) = \frac{\dot{x}(0)}{\omega} \sin \omega t + x(0) \cos \omega t$

Quindi in questo caso avremo

$$x(t-t_F) = \frac{\dot{x}(t_F)}{\omega} \sin \omega(t-t_F) + x(t_F) \cos \omega(t-t_F)$$

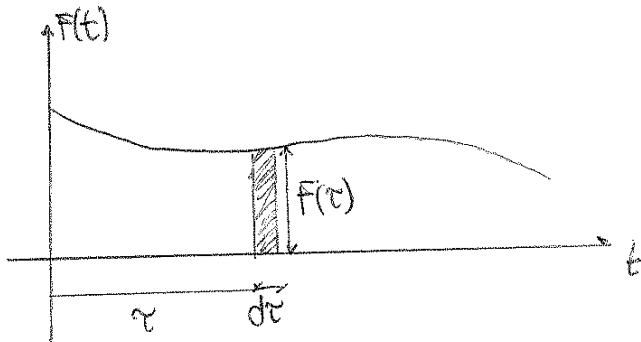
Per $\beta < 1$ l'entità della risposta dinamica dipende da $\frac{t_F}{T}$

$\frac{x(t)}{F/k}$ dipende da $\frac{t_F}{T}$
 ↓
 (massa piccola)

Per $\beta > 1$ (massa prevalente) la risposta dinamica massima avviene nella seconda fase, quella di oscillazione libera

SOLLECITAZIONI GENERICHE

Si considera una sollecitazione arbitraria $F(t)$ generica.
 In particolare $F(\tau)$ agente per $t=\tau$



Il carico produce durante il tempo $d\tau$ un impulso pari a $F(\tau)d\tau$

$$x(t-t_\tau) \cong \frac{\Delta x}{W} \sin W(t-t_\tau)$$

$$\text{Cioè } dx(t-\tau) = \frac{F(\tau)d\tau}{mW} \sin W(t-\tau)$$

← relazione esatta per impulsi di durata infinitesima

Se considero l'intero processo di carico come formato da una successione di brevi impulsi, posso per linearità del sistema, sommare tutti i contributi ed ottenere la risposta totale

$$x(t) = \frac{1}{mW} \int_0^t F(\tau) \sin W(t-\tau) d\tau$$

INTEGRALE DI
 DUHAMEL
 (sistemi privi di smorzamento)

Se siamo in presenza di smorzamento avremo

$$x(t) = \frac{1}{mW_\Delta} \int_0^t F(\tau) e^{-\xi W(t-\tau)} \sin W_\Delta(t-\tau) d\tau$$

INTEGRALE DI
 DUHAMEL
 (sistemi con smorzamento)

Possiamo utilizzare Fourier ovvero scomporre la sollecitazione, studiare la risposta armonica di ogni parte scomposta di sollecitazione e infine ottenere la risposta totale sommando le varie risposte armoniche

$$F(t) = \frac{W_F}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c(\omega_n) e^{i\omega_n t}$$

$$\text{con } c(\omega_n) = \int_{-T_F/2}^{T_F/2} F(t) e^{-i\omega_n t} dt$$