



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO : 485

DATA : 27/02/2013

A P P U N T I

STUDENTE : Sannipoli

MATERIA : Scienze delle Costruzioni II Esercizi

Prof. Chiaia_Ferro

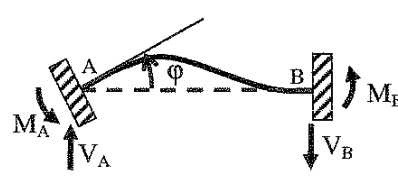
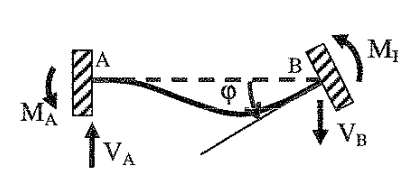
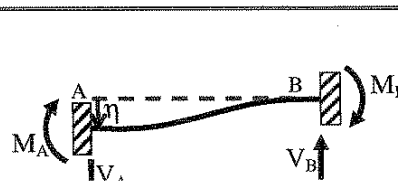
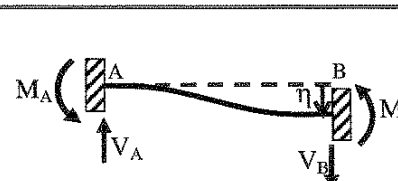
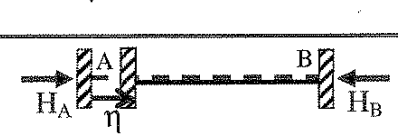

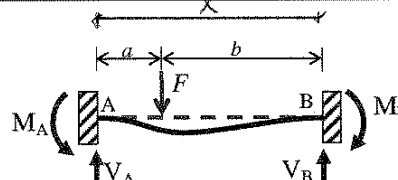
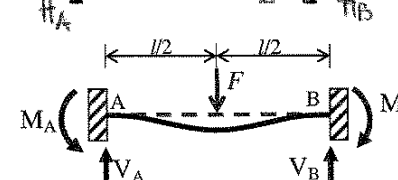
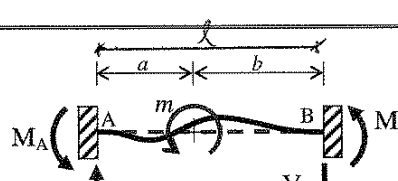
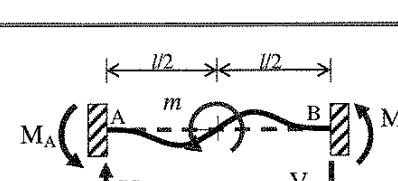
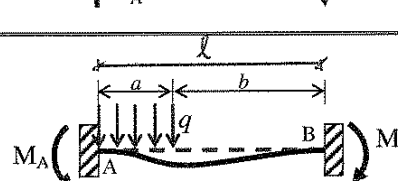
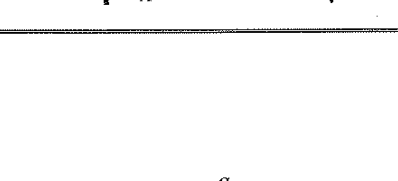
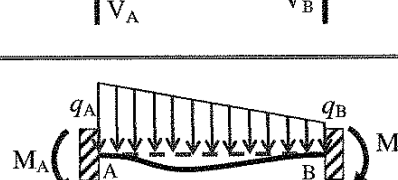
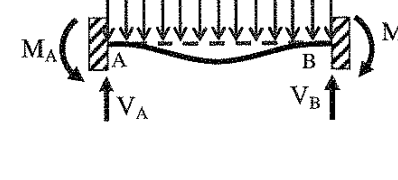
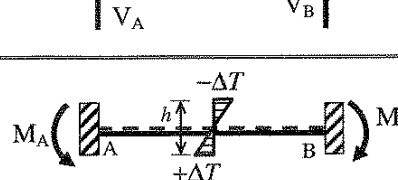
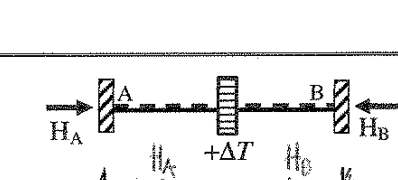
Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

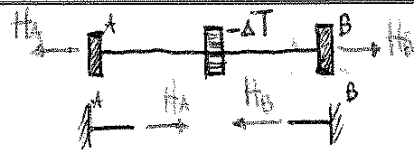
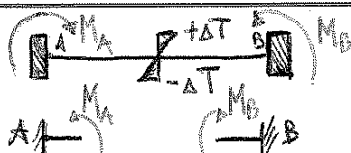
Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

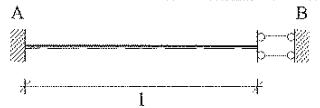
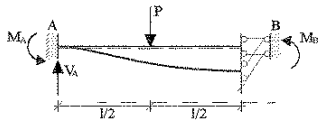
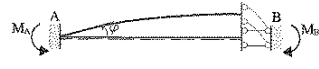
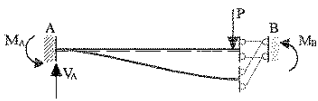

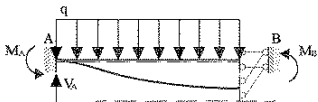
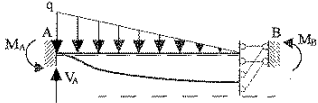
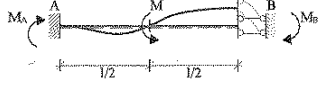

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

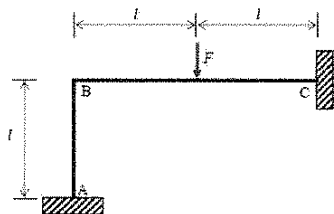
Reazioni notevoli di travi doppiamente incastrate

Note: Le travi sono lunghe l , hanno sezione trasversale di altezza h , area A e momento d'inerzia I . Il materiale ha modulo di Young E e coefficiente di dilatazione termica α . Valori positivi delle espressioni delle reazioni (a destra) corrispondono ai versi indicati nei disegni (a sinistra) e viceversa.

	$M_A = \frac{4EI}{l} \phi$ $M_B = \frac{2EI}{l} \phi$ $V_A = \frac{6EI}{l^2} \phi$ $V_B = \frac{6EI}{l^2} \phi$		$M_A = \frac{2EI}{l} \phi$ $M_B = \frac{4EI}{l} \phi$ $V_A = \frac{6EI}{l^2} \phi$ $V_B = \frac{6EI}{l^2} \phi$
	$M_A = \frac{6EI}{l^2} \eta$ $M_B = -\frac{6EI}{l^2} \eta$ $V_A = \frac{12EI}{l^3} \eta$ $V_B = \frac{12EI}{l^3} \eta$		$M_A = \frac{6EI}{l^2} \eta$ $M_B = \frac{6EI}{l^2} \eta$ $V_A = \frac{12EI}{l^3} \eta$ $V_B = \frac{12EI}{l^3} \eta$
	$H_A = \frac{EA}{l} \eta$ $H_B = \frac{EA}{l} \eta$		$H_A = \frac{EA}{l} \eta$ $H_B = \frac{EA}{l} \eta$
	$M_A = \frac{ab^2}{l^2} F$ $M_B = \frac{ba^2}{l^2} F$ $V_A = \frac{b^2}{l^3} (l+2a) F$ $V_B = \frac{a^2}{l^3} (l+2b) F$		$M_A = \frac{Fl}{8}$ $M_B = \frac{Fl}{8}$ $V_A = \frac{F}{2}$ $V_B = \frac{F}{2}$
	$M_A = \frac{b}{l^2} (2a-b) m$ $M_B = \frac{a}{l^2} (2b-a) m$ $V_A = \frac{6ab}{l^3} m$ $V_B = \frac{6ab}{l^3} m$		$M_A = \frac{m}{4}$ $M_B = \frac{m}{4}$ $V_A = \frac{3m}{2l}$ $V_B = \frac{3m}{2l}$
	$M_A = \frac{qa^2}{12l^2} (l^2 + 2lb + 3b^2)$ $M_B = \frac{qa^3}{12l^2} (l + 3b)$ $V_A = \frac{qa}{2l^3} [2l^3 - a^2(l+b)]$ $V_B = \frac{qa^3}{2l^3} (l+b)$		$M_A = \frac{ql^2}{12}$ $M_B = \frac{ql^2}{12}$ $V_A = \frac{ql}{2}$ $V_B = \frac{ql}{2}$
	$M_A = \frac{l^2}{60} (3q_A + 2q_B)$ $M_B = \frac{l^2}{60} (2q_A + 3q_B)$ $V_A = \frac{l}{20} (7q_A + 3q_B)$ $V_B = \frac{l}{20} (3q_A + 7q_B)$		$M_A = \frac{ql^2}{12}$ $M_B = \frac{ql^2}{12}$ $V_A = \frac{ql}{2}$ $V_B = \frac{ql}{2}$
	$M_A = 2EI\alpha \frac{\Delta T}{h}$ $M_B = 2EI\alpha \frac{\Delta T}{h}$ $\chi^T = 2\alpha \Delta T / \kappa$		$H_A = EA\alpha\Delta T$ $H_B = EA\alpha\Delta T$

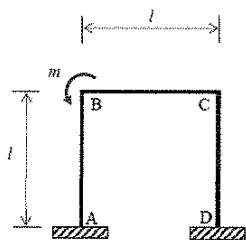
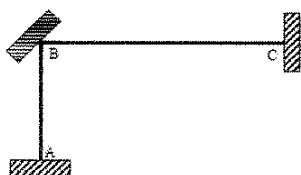


Travi con incastro e doppio pendolo			
CARICHI ESTERNI		DISTORSIONI VINCOLARI	
	$V_A = P$ $M_A = \frac{3}{8}Pl$; $M_B = \frac{Pl}{8}$		$M_A = -M_B = \frac{\phi EJ}{l}$
	$V_A = P$ $M_A = M_B = \frac{Pl}{2}$		
	$V_A = ql$ $M_A = \frac{ql^2}{3}$; $M_B = \frac{ql^2}{6}$		
	$V_A = \frac{ql}{2}$ $M_A = \frac{ql^2}{8}$; $M_B = \frac{ql^2}{24}$		
	$M_A = M_B = \frac{M}{2}$		
	$M_A = -M_B = \frac{\alpha \Delta t EJ}{h}$		



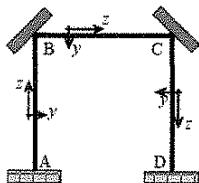
Anzitutto si procede al *conteggio del grado (s) di indeterminazione cinematica* della struttura. I nodi A e C sono incastrati; pertanto in A e C sono nulle sia le componenti verticali ed orizzontali dello spostamento quanto la rotazione. Il nodo B non è vincolato esternamente e dunque comporterebbe 3 incognite cinematiche. Come noto, però, la deformabilità assiale dà un contributo solitamente trascurabile se confrontata con la deformabilità flessionale. Se si assume dunque che le travi AB e BC siano assialmente indeformabili, ne consegue che il nodo B non può traslare né verticalmente né orizzontalmente. L'unica incognita cinematica è dunque la rotazione del nodo B ed il grado di indeterminazione cinematica s è dunque pari ad 1.

Col metodo degli spostamenti occorre dapprima evidenziare la struttura a nodi bloccati; quest'ultima si ottiene inserendo un incastrato anche nel nodo B. La struttura a nodi bloccati è equivalente alla struttura originaria, purché sia assoggettata ad opportuni cedimenti vincolari (rotazione in B) ed ai carichi esterni (forza F).



Volendo risolvere la struttura tramite il metodo degli spostamenti, si parte dal *conteggio del grado (s) di indeterminazione cinematica*. I nodi A e D sono incastrati; pertanto in A e D sono nulle sia le componenti verticali ed orizzontali dello spostamento quanto la rotazione. Tanto il nodo B quanto il nodo C non sono vincolati esternamente e dunque comporterebbero 3 incognite cinematiche ciascuno. Osservando che la deformabilità assiale dà un contributo solitamente trascurabile se confrontata con la deformabilità flessionale, si può ipotizzare che le travi AB, BC, CD siano assialmente inestensibili, commettendo così un'approssimazione peraltro più che lecita nella pratica ingegneristica. Ne consegue che i nodi B e C non possono traslare verticalmente e, orizzontalmente, traslano della stessa quantità. Le incognite cinematiche nodali si riducono alle rotazioni φ_B e φ_C dei nodi B e C ed alla loro traslazione orizzontale η (ovvero l'entità di cui trasla il traverso BC). Il grado di indeterminazione cinematica s è dunque pari ad 3.

Occorre ora evidenziare la struttura a nodi bloccati; quest'ultima si ottiene inserendo incastrati anche nei nodi B e C. La struttura a nodi bloccati è equivalente alla struttura originaria, purché sia assoggettata ad opportuni cedimenti vincolari (rotazione in B, in C, traslazione orizzontale di B e C).



Il telaio cui si perviene è *cinematicamente ammissibile e congruente* per qualsiasi valore dei cedimenti. Esistono dunque ∞^3 soluzioni congruenti. Esiste però un'unica soluzione che è anche *staticamente ammissibile o equilibrata*. Si ottiene imponendo l'equazione di equilibrio duale alle incognite cinematiche, ovvero l'equazione di equilibrio alla rotazione del nodo B, l'equazione di equilibrio alla traslazione dell'intero traverso BC.

Nella figura precedente sono stati evidenziati anche i sistemi di riferimento locale delle singole travi. Con riferimento ai pedici dei termini che compaiono nella relazione $\{Q\} = [K] \{S\}$, per le travi AB, BC e CD i nodi i sono rispettivamente A, B e C, mentre i nodi j sono B, C e D.

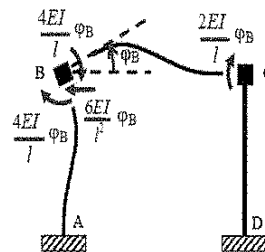
Il telaio cui si perviene è *cinematicamente ammissibile e congruente* per qualsiasi valore della rotazione φ_B . Esistono dunque ∞^3 soluzioni congruenti. Esiste però un'unica soluzione che è anche *staticamente ammissibile o equilibrata*. Si ottiene imponendo l'equazione di equilibrio duale all'incognita cinematica, ovvero l'equazione di equilibrio alla rotazione del nodo B.

Nota che sia il taglio, i valori di sforzo normale sul ritto e sul traverso possono essere infine determinati imponendo l'equilibrio alla traslazione del nodo B. Il diagramma dello sforzo normale risulta pertanto:

La curva delle pressioni si determina facilmente osservando che le rette d'azione delle reazioni devono (i) passare per i punti di nullo del diagramma di momento e (ii) incontrarsi sulla retta d'azione della forza esterna F. Pertanto la curva delle pressioni è rappresentata dalla retta a a sinistra del punto di applicazione di F e dalla retta b a destra.

La configurazione deformata si ottiene infine osservando che gli spostamenti nodali sono nulli, la rotazione di B è negativa (quindi oraria) e che la concavità/convessità della linea elastica è determinata dal segno del diagramma del momento.

Si considerino dapprima le sollecitazioni nodali dovute alla rotazione φ_B (positiva se antioraria). Il momento ed il taglio che il ritto AB trasmette al nodo B sono dati dai termini (4,4) e (5,4) della matrice di rigidezza (cambiati di segno e moltiplicati per φ_B). I momenti che il traverso BC trasmette rispettivamente ai nodi B e C sono dati dai termini (1,1) e (4,1) di $[K]$ (cambiati di segno e moltiplicati per φ_B).



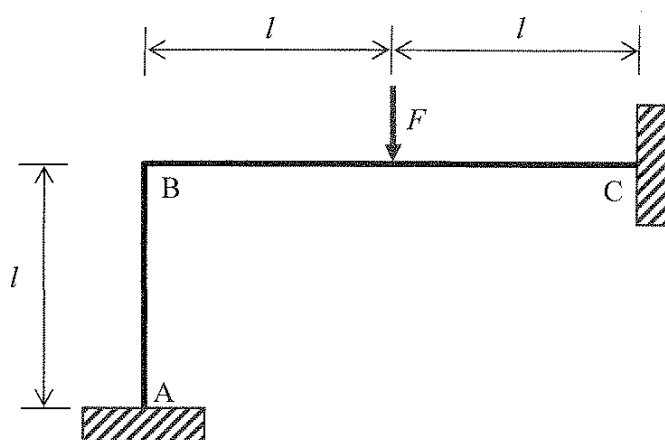
NOTE

Si osservi che la stessa struttura risolta col metodo delle forze richiedeva la risoluzione di un sistema di 3 equazioni (di congruenza) in 3 incognite. I coefficienti delle equazioni richiedevano però un calcolo *ad hoc*, essendo il telaio a nodi mobili, ad esempio tramite il PLV (lezioni 42-44). Col metodo misto sono invece necessarie 5 equazioni (di cui 4 di congruenza e 1 di equilibrio) essendo la reticolare associata 1 volta labile. I coefficienti delle equazioni sono però di immediata determinazione (si usa il formulario delle rotazioni elementari allegato alla video-lezione 36). È interessante osservare che la risoluzione col metodo degli spostamenti è univoca, essendo un'unica struttura a nodi bloccati, mentre la scelta dell'isostatica principale nel metodo delle forze è arbitraria. Col metodo delle forze inoltre, nella scelta dell'isostatica principale, si corre il rischio di incaappare nella maldisposizione vincolare (ottenendo così una struttura labile). Queste (ed altre) considerazioni spiegano perché i nodici di calcolo per i telai si basino sul metodo degli spostamenti e non su quello delle forze. Per gli stessi motivi è stata proposta la risoluzione di un telaio col metodo degli spostamenti come complemento alla lezione "cenni sugli elementi finiti per l'analisi strutturale".

Risoluzione di un telaio iperstatico col metodo degli spostamenti

Complemento alla lezione 48/50: Il metodo degli spostamenti

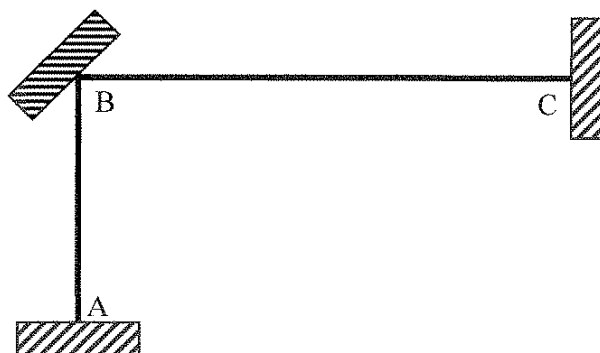
La struttura in figura è soggetta ad una forza concentrata F a metà del traverso BC. Il telaio ha sezione con momento d'inerzia I e materiale di modulo di Young E .
Calcolare i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione interna, la curva delle pressioni e, qualitativamente, la configurazione deformata.



Anzitutto si procede al *conteggio del grado (s) di indeterminazione cinematica* della struttura. I nodi A e C sono incastri: pertanto in A e C sono nulle sia le componenti verticali ed orizzontali dello spostamento quanto la rotazione. Il nodo B non è vincolato esternamente e dunque comporterebbe 3 incognite cinematiche. Come noto, però, la deformabilità assiale dà un contributo solitamente trascurabile se confrontata con la deformabilità flessionale. Se si assume dunque che le travi AB e BC siano assialmente indeformabili, ne consegue che il nodo B non può traslare né verticalmente né orizzontalmente. L'unica incognita cinematica è dunque la rotazione del nodo B ed il grado di indeterminazione cinematica s è dunque pari ad 1.

$$\frac{EA}{l} \gg \frac{EI}{l^3}$$

Col metodo degli spostamenti occorre dapprima evidenziare la struttura a nodi bloccati; quest'ultima si ottiene inserendo un incastro anche nel nodo B. La struttura a nodi bloccati è equivalente alla struttura originaria, purché sia assoggettata ad opportuni cedimenti vincolari (rotazione in B) ed ai carichi esterni (forza F).



Siamo ora in grado di scrivere l'equazione di equilibrio alla rotazione del nodo B:

$$4 \frac{EI}{l} \varphi_B + 4 \frac{EI}{2l} \varphi_B + F \frac{2l}{8} = 0$$

che permette di calcolare la rotazione φ_B e di risolvere quindi l'indeterminazione cinematica della struttura:

$$\varphi_B = -\frac{Fl^2}{24EI}$$

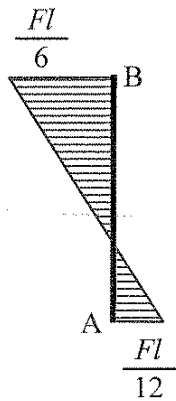
Per ottenere il diagramma del momento e del taglio è sufficiente applicare la relazione $\{Q\} = [K] \{\delta\} - \{F\}$ su ogni tratto.

Si consideri dapprima il tratto AB. Osservando che non vi sono forze esterne applicate, si ha $\{Q\} = [K] \{\delta\}$. L'unico elemento non nullo di $\{\delta\}$ è φ_B , da cui:

$$M_A = 2 \frac{EI}{l} \varphi_B = -\frac{Fl}{12}$$

$$M_B = 4 \frac{EI}{l} \varphi_B = -\frac{Fl}{6}$$

Si noti che, nell'ambito del metodo degli spostamenti, le convenzioni di segno delle caratteristiche della sollecitazione interna non coincidono con quelle usate finora. Il segno positivo indica che il momento agente sulla trave è antiorario e viceversa se negativo. Graficamente, dunque:

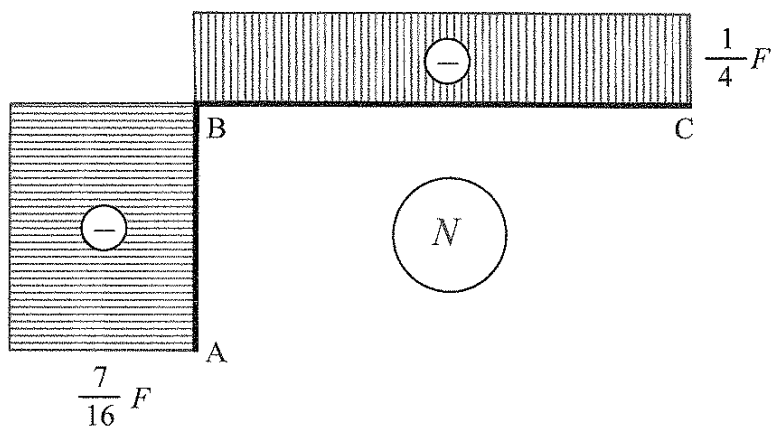


Per quanto riguarda il traverso BC, il momento è la somma di due contributi: $\{Q\} = [K] \{\delta\} - \{F\}$. Considerando dapprima il contributo degli spostamenti nodali:

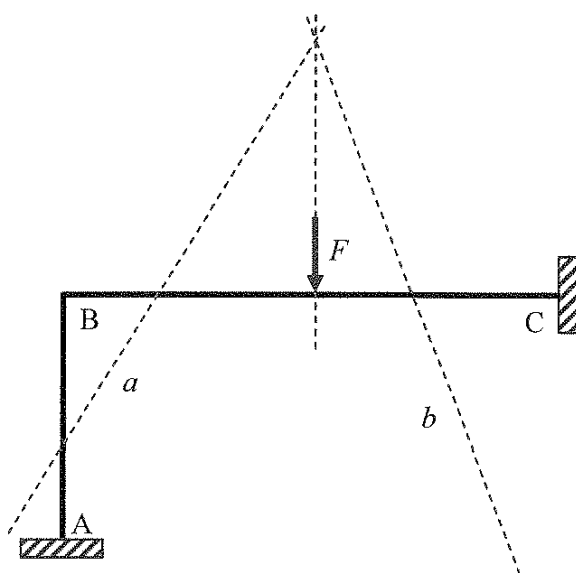
$$M_B = 4 \frac{EI}{2l} \varphi_B = -\frac{Fl}{12}$$

$$M_C = 2 \frac{EI}{2l} \varphi_B = -\frac{Fl}{24}$$

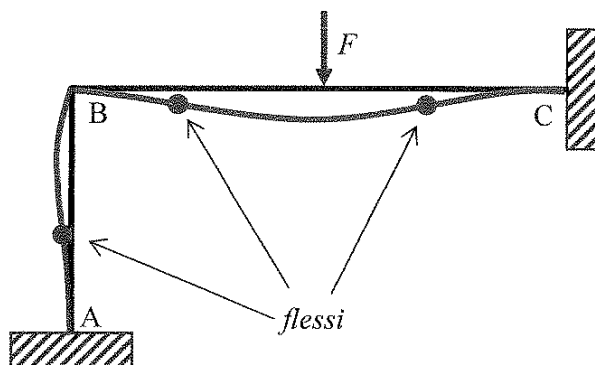
Ovvero:



La curva delle pressioni si determina facilmente osservando che le rette d'azione delle reazioni devono (i) passare per i punti di nullo del diagramma di momento e (ii) incontrarsi sulla retta d'azione della forza esterna F . Pertanto la curva delle pressioni è rappresentata dalla retta a a sinistra del punto di applicazione di F e dalla retta b a destra:



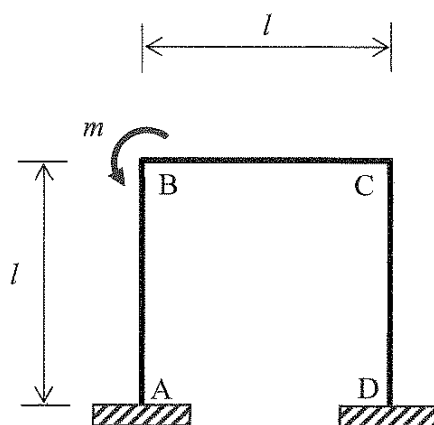
La configurazione deformata si ottiene infine osservando che gli spostamenti nodali sono nulli, la rotazione di B è negativa (quindi oraria) e che la concavità/convessità della linea elastica è determinata dal segno del diagramma di momento:



Risoluzione di un telaio iperstatico col metodo degli spostamenti

Complemento alla lezione 49/50: Cenni sugli elementi finiti per l'analisi strutturale

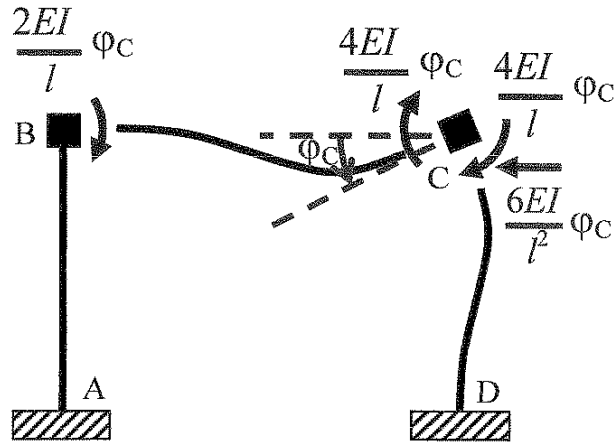
La struttura in figura è soggetta ad una coppia m applicata nel nodo B. Il telaio ha sezione con momento d'inerzia I e materiale di modulo di Young E . Calcolare i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione interna, la curva delle pressioni e, qualitativamente, la configurazione deformata.



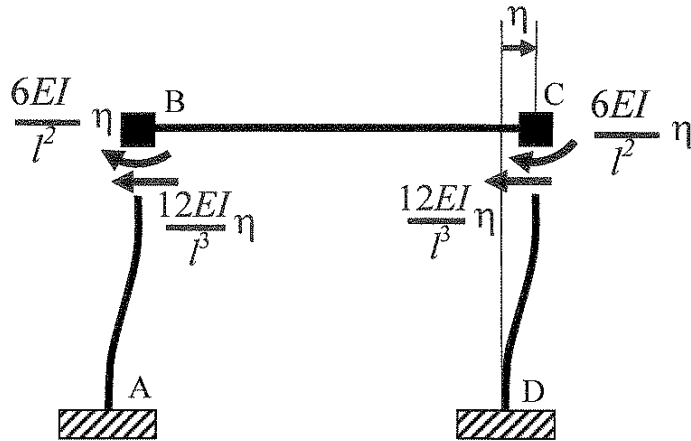
Volendo risolvere la struttura tramite il metodo degli spostamenti, si parte dal *conteggio del grado (s) di indeterminazione cinematica*. I nodi A e D sono incastri: pertanto in A e D sono nulle sia le componenti verticali ed orizzontali dello spostamento quanto la rotazione. Tanto il nodo B quanto il nodo C non sono vincolati esternamente e dunque comporterebbero 3 incognite cinematiche ciascuno. Osservando che la deformabilità assiale dà un contributo solitamente trascurabile se confrontata con la deformabilità flessionale, si può ipotizzare che le travi AB, BC, CD siano assialmente inestensibili, commettendo così un'approssimazione peraltro più che lecita nella pratica ingegneristica. Ne consegue che i nodi B e C non possono traslare verticalmente e, orizzontalmente, traslano della stessa quantità. Le incognite cinematiche nodali si riducono alle rotazioni φ_B e φ_C dei nodi B e C ed alla loro traslazione orizzontale η (ovvero l'entità di cui trasla il traverso BC). Il grado di indeterminazione cinematica s è dunque pari ad 3.

Occorre ora evidenziare la struttura a nodi bloccati; quest'ultima si ottiene inserendo incastri anche nei nodi B e C. La struttura a nodi bloccati è equivalente alla struttura originaria, purché sia assoggettata ad opportuni cedimenti vincolari (rotazione in B, in C, traslazione orizzontale di B e C).

Si imponga ora la rotazione φ_C (positiva se antioraria). Il momento ed il taglio che il ritto CD trasmette al nodo C sono dati dai termini (1,1) e (2,1) della matrice di rigidezza (cambiati di segno e moltiplicati per φ_C). I momenti che il traverso BC trasmette rispettivamente ai nodi B e C sono dati dai termini (1,4) e (4,4) di $[K]$ (cambiati di segno e moltiplicati per φ_C).



Si consideri infine l'effetto della traslazione η del traverso (positiva se verso destra). Il momento ed il taglio che il ritto AB trasmette al nodo B sono dati dai termini (4,5) e (5,5) della matrice di rigidezza (cambiati di segno e moltiplicati per η). Il momento ed il taglio che il ritto CD trasmette al nodo C sono dati dai termini (1,2) e (2,2) di $[K]$, cambiati due volte di segno (essendo $v_1 = -\eta$) e moltiplicati per η .

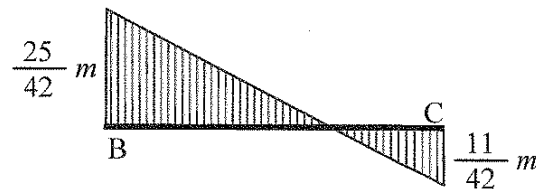


Siamo ora in grado di scrivere le 3 equazioni di equilibrio nodali. Partendo dall'equilibrio alla rotazione del nodo B, si deve porre che la somma algebrica dei momenti dovuti agli spostamenti nodali e della coppia esterna m applicata in B deve essere nulla:

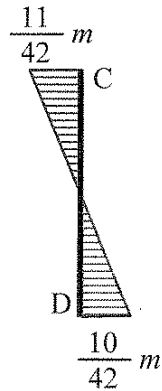
$$4 \frac{EI}{l} \varphi_B + 4 \frac{EI}{l} \varphi_B + 2 \frac{EI}{l} \varphi_C + 6 \frac{EI}{l^2} \eta - m = 0$$

Analogamente deve sussistere l'equilibrio alla rotazione del nodo C:

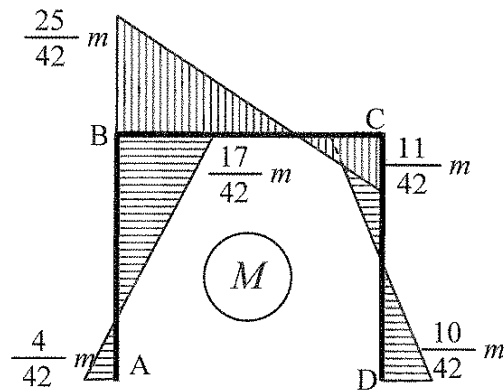
$$2 \frac{EI}{l} \varphi_B + 4 \frac{EI}{l} \varphi_C + 4 \frac{EI}{l} \varphi_C + 6 \frac{EI}{l^2} \eta = 0$$



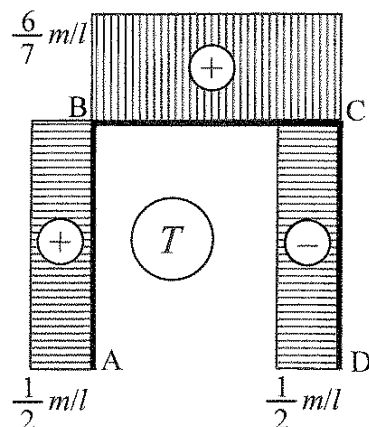
Infine, il valore del momento in D vale: $M_D = 2 \frac{EI}{l} \varphi_C - 6 \frac{EI}{l^2} (-\eta) = -\frac{10}{42} m$



Il diagramma di momento dell'intera struttura risulta pertanto essere:



Il diagramma del taglio si ottiene in maniera analoga a quella del diagramma di momento, o, in modo ancor più semplice, osservando che il taglio è la derivata del diagramma di momento. Omettendo i passaggi, il diagramma finale del taglio è:



NOTE

Si osservi che la stessa struttura risolta col metodo delle forze richiedeva la risoluzione di un sistema di 3 equazioni (di congruenza) in 3 incognite. I coefficienti delle equazioni richiedono però un calcolo *ad hoc*, essendo il telaio a nodi mobili, ad esempio tramite il PLV (lezioni 42-44).

Col metodo misto sono invece necessarie 5 equazioni (di cui 4 di congruenza e 1 di equilibrio) essendo la reticolare associata 1 volta labile. I coefficienti delle equazioni sono però di immediata determinazione (si usa il formulario delle rotazioni elementari allegato alla video-lezione 36).

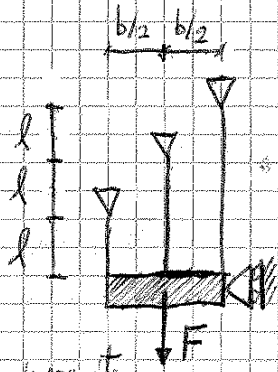
È interessante osservare che la risoluzione col metodo degli spostamenti è univoca, essendovi un'unica struttura a nodi bloccati, mentre la scelta dell'isostatica principale nel metodo delle forze è arbitraria. Col metodo delle forze inoltre, nella scelta dell'isostatica principale, si corre il rischio di incappare nella maldisposizione vincolare (ottenendo così una struttura labile). Queste (ed altre) considerazioni spiegano perché i codici di calcolo per i telai si basino sul metodo degli spostamenti e non su quello delle forze. Per gli stessi motivi è stata proposta la risoluzione di un telaio col metodo degli spostamenti come complemento alla lezione "cenni sugli elementi finiti per l'analisi strutturale".

di fare col metodo degli spostamenti
 1° caso: dobbiamo determinare il grado di indeterminazione cinematica (cioè le incognite che noi costruttori di determinare lo stato deformativo della struttura).

N.B.: le incognite cinematiche da scegliere sono quelle INDIPENDENTI (perché dopo)

Esercizio 1

Barre collegate ad un traliccio rigido



Per individuare le incognite cinematiche ragioneremo così: ora possiamo avere:

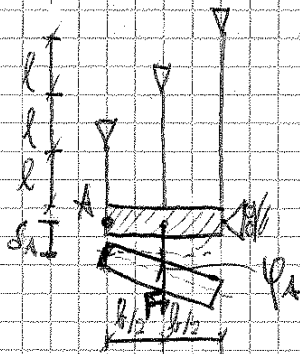
Traslazione verso il basso e rotazione

la rigidezza assiale delle aste è

$$K = \frac{EA}{l}$$

avendo l di diverse aste

avere rotazione. L'asta meno rigida è quella a destra → la rotazione sarà così:



debbiamo scrivere 2 eq di equilibrio (2 incognite cinematiche). Le reazioni nelle singole aste sono:

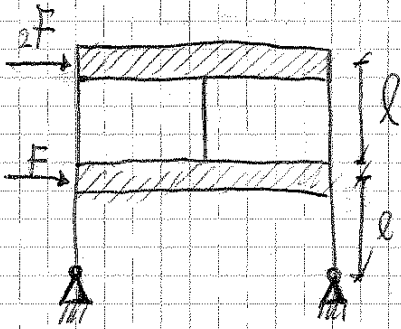
$$R_1 = \delta_A \frac{EA}{l_1} = \delta_A \frac{EA}{l}$$

$$R_2 = \delta_2 \frac{EA}{l_2} = \left(\delta_A + \varphi_A \frac{b}{2} \right) \frac{EA}{2l}$$

$$R_3 = \left(\delta_A + \varphi_A b \right) \frac{EA}{3l}$$

caratteristiche di sollecitazione di ogni trave

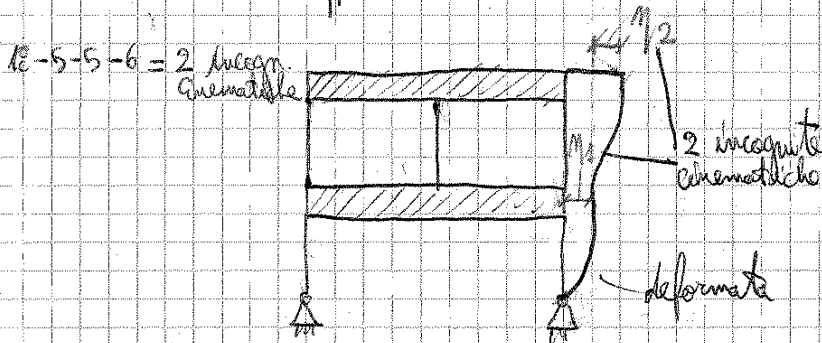
Esercizio 2 TELAIIO SHEAR TYPE (la deformata è solo a taglio)



6 modi interni (non considero le due connessioni alla base perché le loro incognite cinematiche (rotazioni) non sono indipendenti, ma dipendenti da ciò che avviene in corrispondenza del 1° traverso (lo vedremo nel corso dell'esercizio))

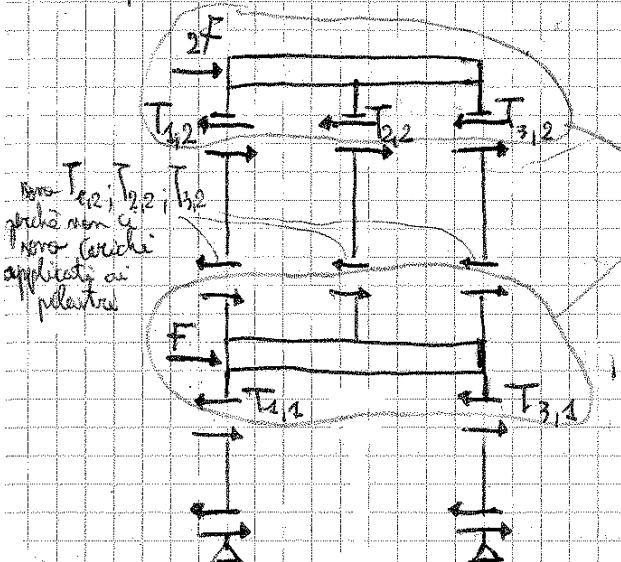
che ci serve forse per capire quali sono le incognite cinematiche del problema
 Ragionamento generale: per ogni nodo (nel piano) abbiamo 3 incognite cinematiche ($\Rightarrow 3 \times 6 = 18$).

- a) In genere si dice che i pilastri sono indeformabili assialmente (trascuriamo la deformabilità assiale a fronte di quella flessionale (-5 incognite cinematiche))
- b) I pilastri in corrispondenza dei traversi si spostano orizzontalmente della stessa quantità (-5 inc. cin.)
- c) Nel telaio shear type le rotazioni ai nodi sono impediti (-6 inc. cin.)



RAGIONAMENTO GENERALE
 Si individuano tutte le incognite cinematiche possibili della struttura (solo quelle indipendenti \Rightarrow si prende in conto i nodi interni) -
 Non vanno, con dei ragionamenti (a), b) e c) in questo caso) si arriva a dire quali sono le incognite cinematiche che dovremo determinare
 o, meglio, quelli che caratterizzano il possibile movimento

Dobbiamo scrivere 2 eq. di eq. alla tralazione orizz. una per il 1° traverso e una per il 2°



3F perché l'equilibrio del 2° traverso impone
 $F + T_{1,2} + T_{2,2} + T_{3,2} = T_{1,1} + T_{3,1}$

① $3F = T_{1,1} + T_{3,1}$

② $2F = T_{1,2} + T_{2,2} + T_{3,2}$

la equazione ② mi dice che bisogna 2F

Le avvelibbe svolgendo i calcoli sono quelli della matrice di righe

$$M_i = K_{11} \varphi_i + K_{15} V_i$$

$$T_i = K_{21} \varphi_i + K_{25} V_i$$

$N_i =$ non la consideriamo

$$M_j = K_{44} \varphi_j + K_{45} V_j \quad (mn)$$

$$T_j = K_{54} \varphi_j + K_{55} V_j \quad (mn)$$

$N_j =$ non la consideriamo

Adesso si ricavano gli spostamenti sconosciuti (φ_i in questo caso) per le sollecitazioni

$M_i = 0$ (c'è cerniera) \Rightarrow da quell'equazione posso ricavare φ_i : $\varphi_i = -\frac{K_{15} V_i}{K_{11}}$

È sempre così: in alcune equazioni ci sono solo sconosciute cinematiche, in altre sia sconosciute cinematiche sia statiche.

Nota φ_i ricaviamo T_j , svolgendo i calcoli si ottiene $T_j = \frac{3EI}{l^3} M_j$ dalla (mn)

nel caso di incastro-incastro si ha: $T = \frac{12EI}{l^3} M$

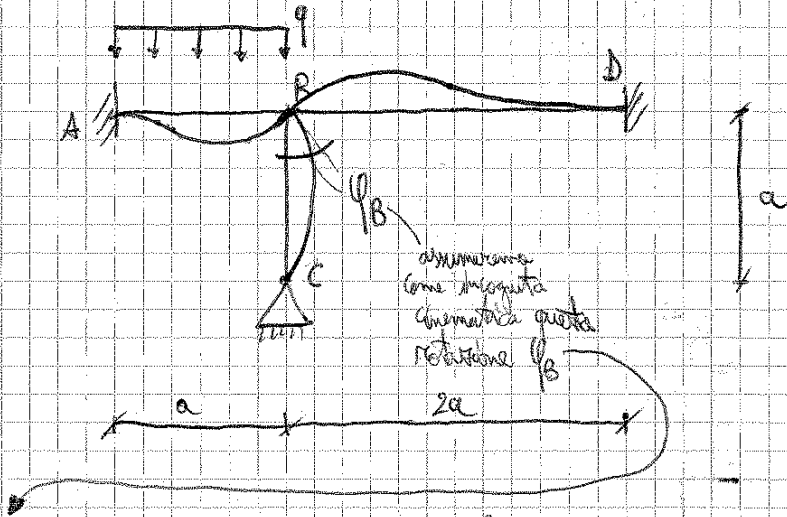
è 2(12) / 60 perché questa situazione è meno rigida di quella incastro-incastro

Le equazioni (1) e (2) diventano:

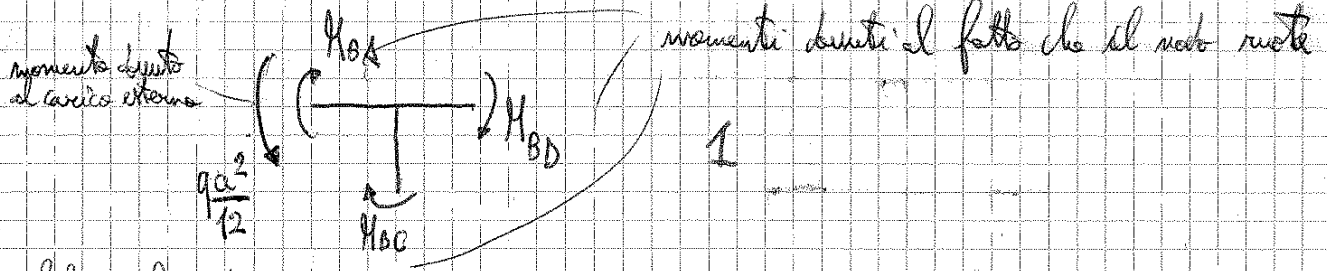
$$\begin{cases} (1) & 3F = \frac{6EI}{l^3} M_1 \\ (2) & 2F = \frac{36EI}{l^3} M_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} M_1 = \frac{F \cdot l^3}{2EI} \\ M_2 = \frac{Fl^3}{18EI} \end{cases}$$

ora possiamo ricavare i vari tagli:

Esercizio 3



Bisogna guardare i nodi interni (B in questo caso). può
 essere sempre un nodi deformabilità ^{nelle ante} assiale \rightarrow B non traslare. Non dunque nel caso di
 telai a nodi fissi: i nodi interni ruotano, ma non traslano.
 Tra gli infiniti valori di ϕ_B , dobbiamo scegliere l'unico che soddisfa anche
 l'EQUILIBRIO AL NODO!

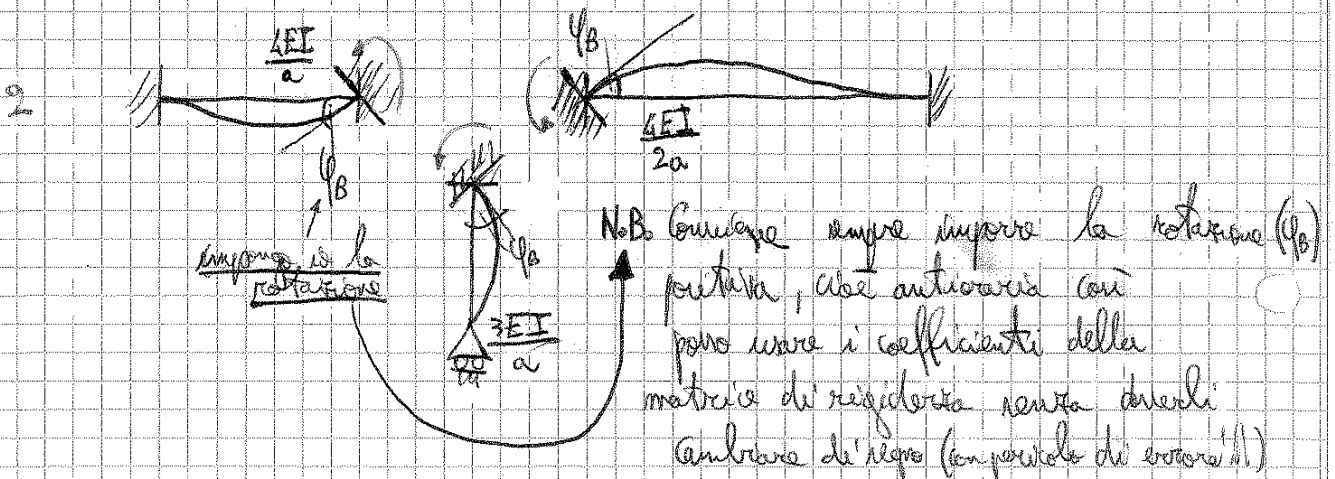


l'equilibrio al nodo sarà:

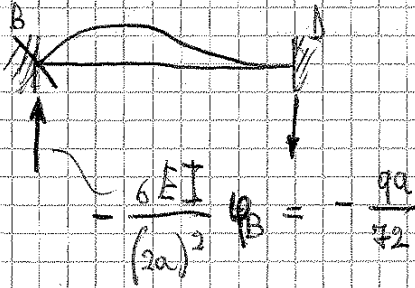
$$M_{BA} + M_{BD} + M_{BC} = \frac{qa^2}{12}$$

collegiamo tra loro la
 funzione della rotazione ϕ_B

Come faccio? Metto un incastro in B, imposto la rotazione ϕ_B e ricavo gli M.

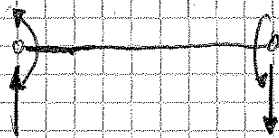


Per i tagli:



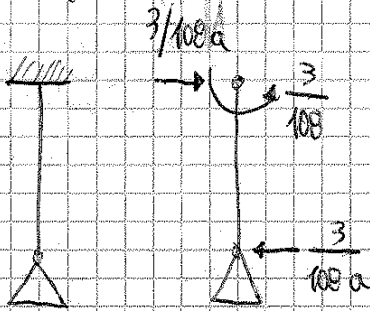
Il coeff è -6 (per S.D.C. \Rightarrow taglio/m B verso l'alto)
 In D il coeff è $+6$ (\Rightarrow verso il basso) tagli per S.D.C.

potremmo anche ragionare con:

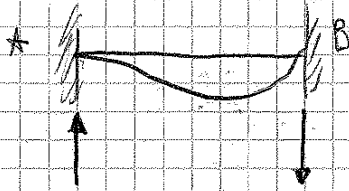


trave ~~incernata~~ incernata soggetta ai momenti di incastro calcolati prima. Facciamo l'eq. alla rotazione e troviamo i tagli.

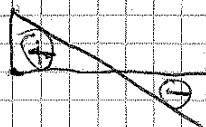
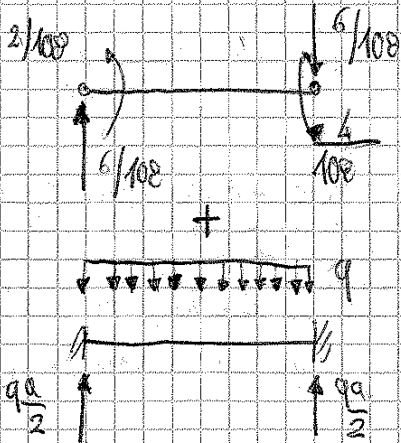
Per il tratto verticale



$$T = \frac{3}{108} qa$$



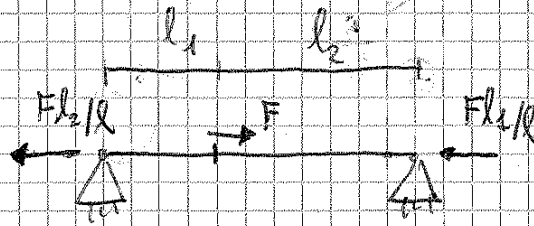
La rotazione tende a rendere e mettere l'estremo B verso l'alto \Rightarrow il taglio è verso il basso (rispetto l'estremo opposto)



Per congruenza di spostamento deve essere:

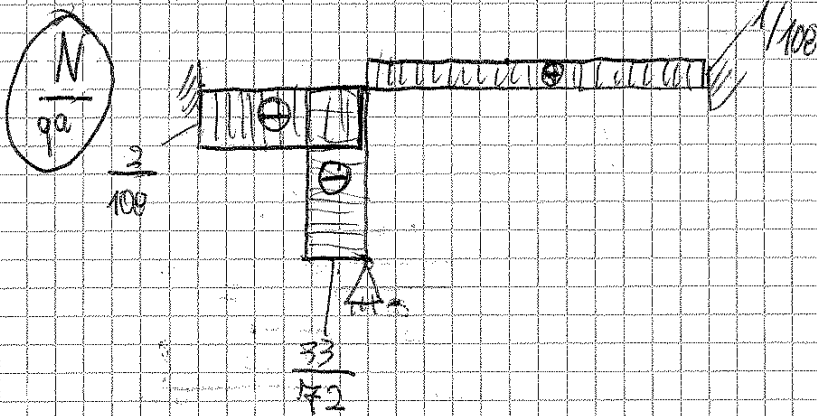
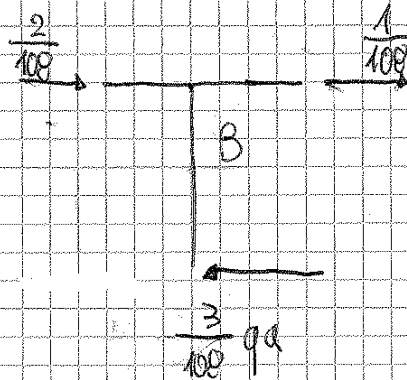
$$d_1 + d_2 = 0$$

$$\Rightarrow X = -\frac{Fl_1}{l}$$

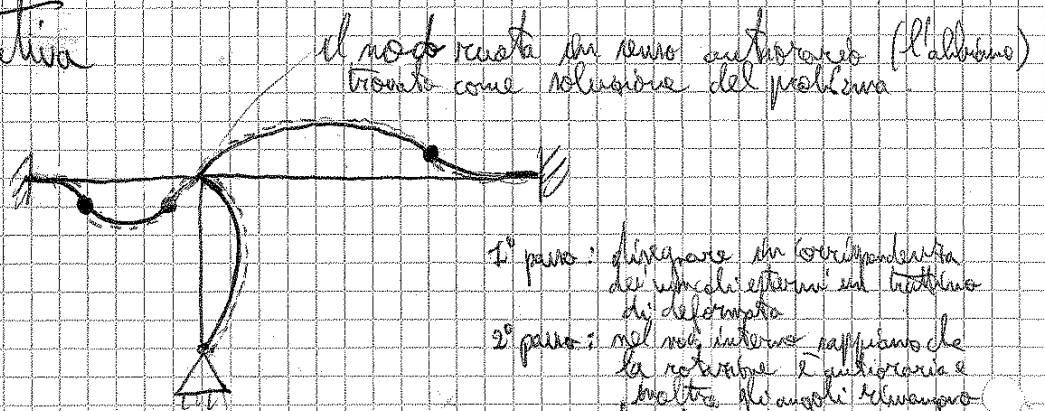


REGOLA GENERALE:

La reazione in un tratto è proporzionale alla lunghezza dell'altro tratto rapportata alla lunghezza totale.



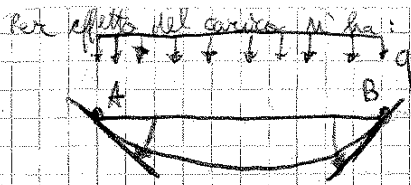
Deformata qualitativa



- 1° passo: disegnare in corrispondenza dei supporti esterni un tratto di deformata
- 2° passo: nel nodo interno sappiamo che la rotazione è uguale e i momenti più angoli che vanno di 90°.

3° passo:

Guardiamo il diagramma di M: dove $M = 0 \Rightarrow$ flesso nella deformata
 se sono tutte le fibre sotto \Rightarrow concavità verso l'alto, se sono tutte le fibre sopra \Rightarrow convallità verso il basso.



Per effetto del carico si ha:

$$q_{AB} = q_{BA} = \frac{ql^2}{24EI} \rightarrow \text{È ELEVATO AL 3!}$$

Il sistema ^{da risolvere} sarà:

x_2 , con come disegnano, determina una rotazione in x o x_2 \Rightarrow negativa

$$\left\{ \begin{aligned} q_{AB} = 0 &\Rightarrow \frac{x_1 l}{3EI} - \frac{x_2 l}{6EI} - \frac{ql^2}{24EI} = 0 \\ q_{BA} = q_{BD} \text{ (ci mettiamo in B)} &\Rightarrow -\frac{x_1 l}{6EI} + \frac{x_2 l}{3EI} + \frac{ql^2}{24EI} = \frac{x_3 \cdot 2l}{3EI} - \frac{x_4 \cdot 2l}{6EI} \end{aligned} \right.$$

OSSERVAZIONI

• VANTAGGIO METODO MISTO:

Una volta risolto il sistema ho $x_1, x_2, x_3, x_4 \Rightarrow$ ho già i momenti!!!

epoi siamo disegnavo subito i diagrammi di M.

• per i tagli utilizzeremo la strategia dell'eq. alla rotazione delle aste incardinate.

• Infine facciamo l'eq. ai nodi per gli spostamenti.

OSSERVAZIONI

• TELAI A NODI FISSI: i nodi interni ruotano ma non traslano.

• TELAI A NODI SPOSTABILI: i nodi interni possono anche traslare.

Nel metodo degli spostamenti: telai a nodi fissi \Rightarrow come incognite iperstatiche ho solo rotazione

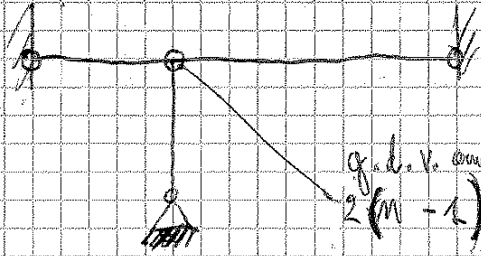
Telai a nodi spostabili \Rightarrow come incognite iperstatiche ho rotazioni e spostamenti

Nel metodo misto \Rightarrow telai a nodi fissi \Rightarrow ho solo incognite statiche

telai a nodi spostabili \Rightarrow come incognite ho sia incognite statiche sia cinematiche

SOSSERAZIONE
 Nel momento in cui introduciamo la cerniera abbiamo la
RETICOLARE ASSOCIATA. Se essa è rotatoria \Rightarrow al 90% è a nodi fissi
 e a nodi liberi. Se è labile \Rightarrow al 100% è a nodi spostabili.

In questo caso, invece, si ha:



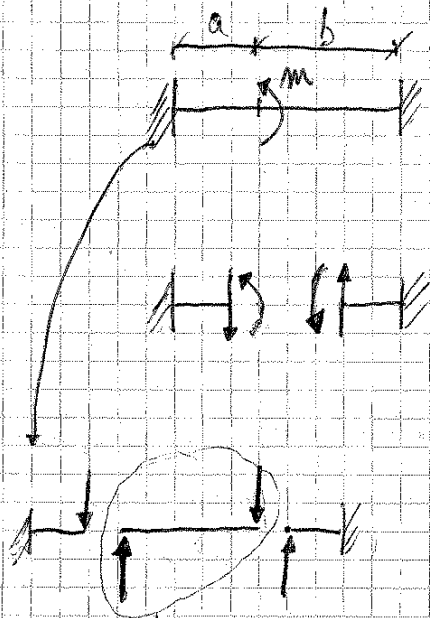
N.B.

La reticolare associata è 1 volta iperstatica \Rightarrow non significa che

1 IPERSTATICITÀ ASSILE

Se fosse due volte iperstatica \Rightarrow 2 iperstaticità assili

La reticolare associata è a nodi fissi ma con 1 spostamento possibile \Rightarrow è una iperstatica ma labile (\Rightarrow completamente rotatoria, però con anche un'incognita cinematica nel metodo diretto)



$$T_A = \frac{6ab}{l^3} m$$

$$T_B = -\frac{6ab}{l^3} m$$

$$H_A = \frac{b}{l^2} (2a - b) m$$

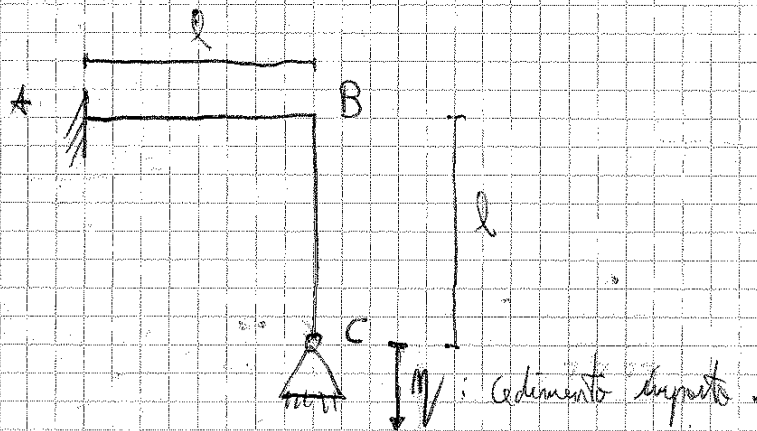
$$H_B = \frac{a}{l^2} (2b - a) m$$

Carichi agenti (non sono gli effetti) → formano una coppia statica.

H_A e H_B (gli effetti di m , che è braccio) sono forze.

T_A e T_B (sono anch'essi effetti) → formano una coppia statica.

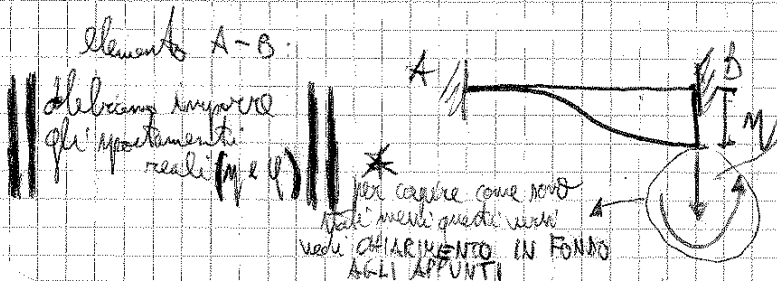
ESERCIZIO 1 CEDIMENTO VINCOLARE



metodo degli spostamenti

Le incognite cinematiche sono 2 - rotazione di B e abbassamento di B (ma l'abbassamento di B è uguale ad η !)

⇒ bisogna scrivere l'eq. di eq. alla rotazione in B.



sono le reazioni di vincolo che esistono nel supporto η

$$H_{BA}(\eta) = \frac{6EI}{l^2} \eta$$

$$T_{B*}(\eta) = \frac{12EI}{l^3} \eta$$

$$\bar{B}) : M_{BA}(\eta) + M_{BA}(\varphi_B) + M_{BC}(\varphi_B) = 0$$

↓ → facendo i paraggi

$$\varphi_B = -\frac{6}{7} \frac{M}{l} \quad \left(\varphi \text{ è funzione di } M \text{ (è questo con, perché per noi } M \text{ è il carico), è l'azione} \right)$$

Introduciamo φ_B e otteniamo:

$$M_{BC}(\varphi_B) = \frac{18}{7} \frac{EI}{l^2} M$$

$$M_{BA}(\varphi_B) = -\frac{24}{7} \frac{EI}{l^2} M$$

negativo → DISCORDE a quella ipotizzata (N.B.: non significa che è orario (poiché è negativo))

$$M_{AB}(\varphi_B) = \frac{1}{2} M_{BA}(\varphi_B) = -\frac{12}{7} \frac{EI}{l^2} M$$

$$T_{BA}(\varphi_B) = -\frac{36}{7} \frac{EI}{l^3} M$$

Scriviamo anche $M_{AB}(\eta)$

$$M_{AB}(\eta) = \frac{6EI}{l^2} M$$

dalla matrice [k]

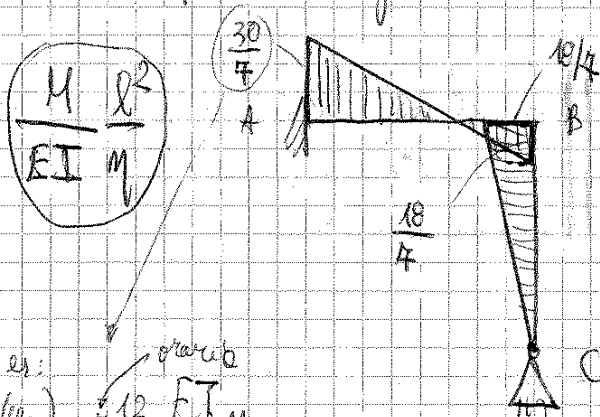
$$T_{AB}(\eta) = -\frac{12EI}{l^3} M$$

dalla matrice

$$T_{AB}(\varphi) = -\frac{6EI}{l^2} \varphi_B = -\frac{36}{7} \frac{EI}{l^3} M$$

dalla matrice

Possiamo subito fare il diagramma di M (dobbiamo considerare TUTTI i vari contributi)



$$M_{AB}(\varphi_B) = -\frac{12}{7} \frac{EI}{l^2} M$$

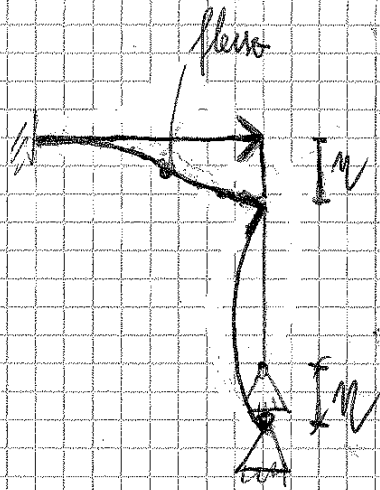
$$M_{AB}(\eta) = +\frac{6EI}{l^2} M$$

anch'ora

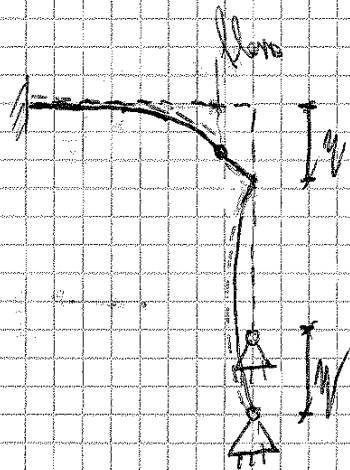
$$M_{ABTOT} = 6 - \frac{12}{7} = \frac{30}{7} \frac{EI}{l^2} M$$

anch'ora → anche la fibra sopra

Deformata



dal prof.

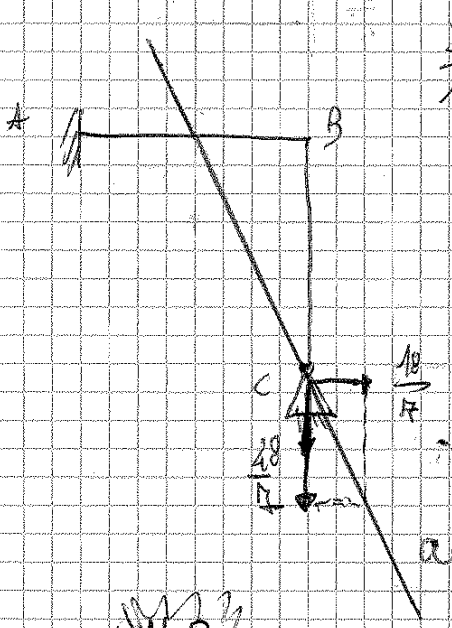


cdp

linea che
indica la
posizione nel
spazio della
linea delle
azioni
risultante
aggrate in
quella sezione

la cdp dipende
da N, M, T .

il punto che non si
muove in
alcuna direzione
determina la cdp non cambia

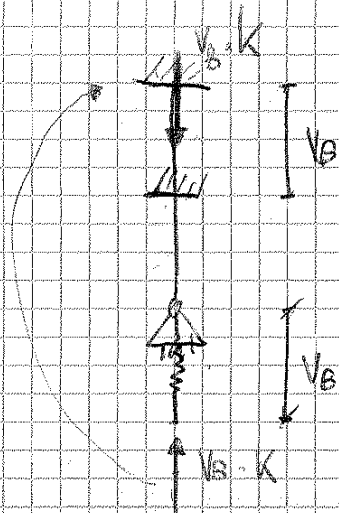


NoB

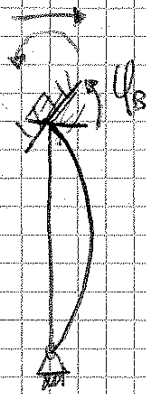
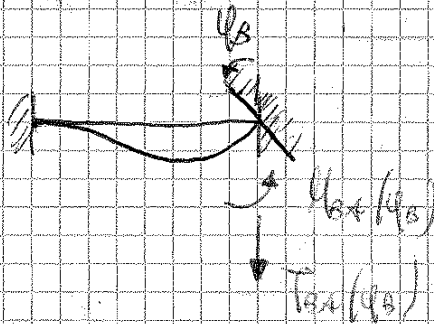
la cdp passa per i
punti di momento nullo

cdp	tratto
CB	retta a
AB	retta a

NoB: l'azione sulla
struttura è un
cedimento. NON ci
sono dei carichi!!!

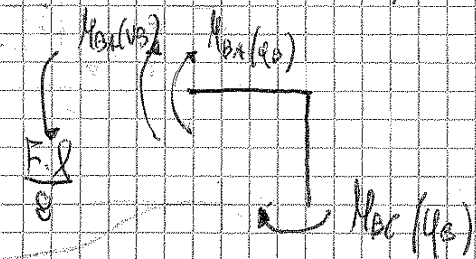


3° controllo



tracce verticali e rotari.

3) Ora facciamo eq. ai nodi (2 equilibri perché 2 sono le incognite cinematiche):

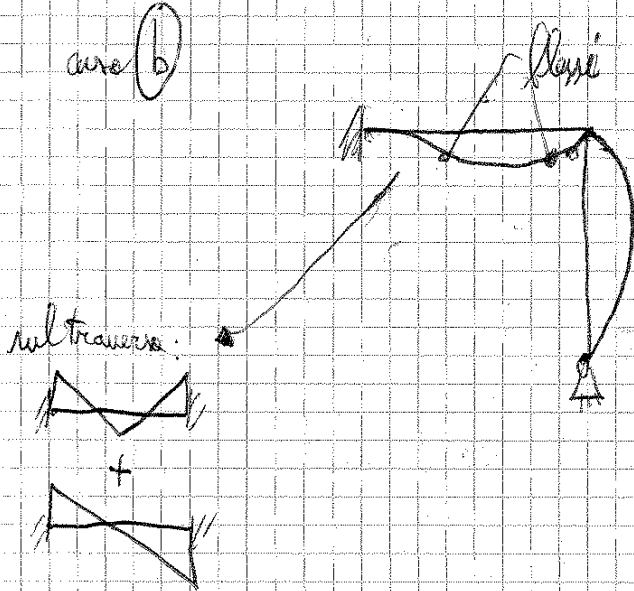


è quella già
derivata prima
controlli e già
la forza
equivalente
al nodo!!

$$T_{Bx}(F_B) + T_{Bx}(V_B) + V_B \cdot K - \frac{F}{2} = 0$$

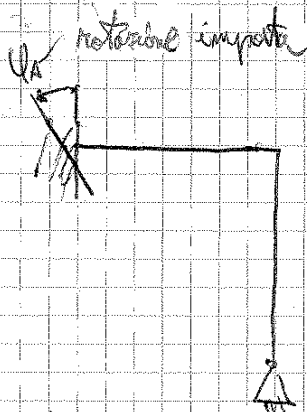
$$M_{Bx}(V_B) + M_{Bx}(F_B) + M_{Bc}(F_B) = \frac{F \cdot l}{8}$$

curva b



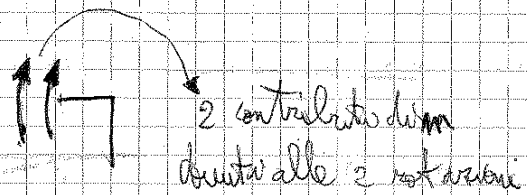
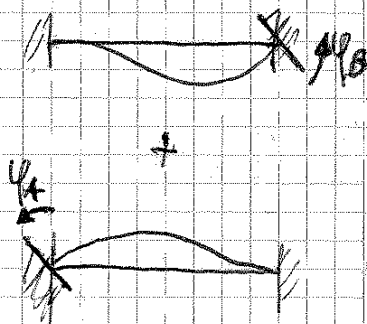
Altri esempi:

Altri casi: elementi rotazionali



Come operiamo?

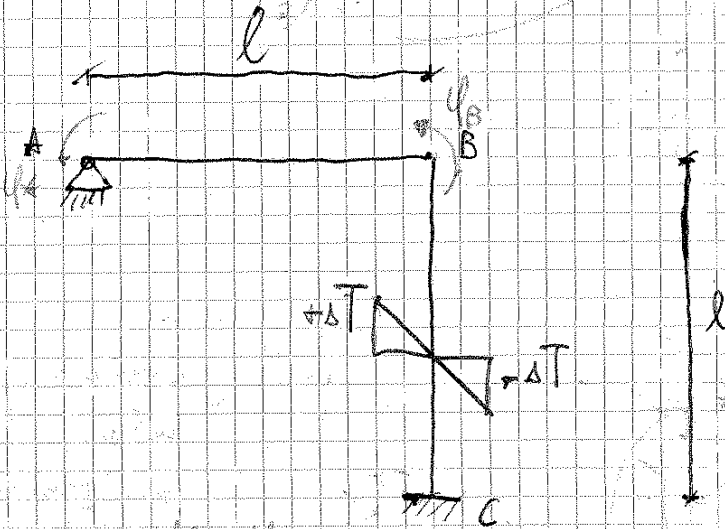
l'equazione è φ_B :



SCIENZA DELLE COSTRUZIONI 2 (Det. Corallo)

17-10-2012

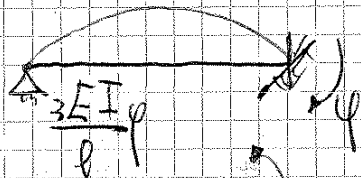
Esercizio



φ_A e φ_B

A rigore, le incognite sono 2 (sempre lavorando in def. assiale).

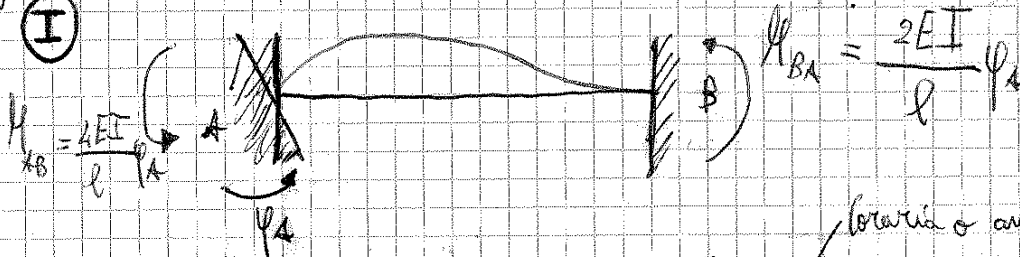
In altre sintesi, avevamo detto che φ_A non era un'incognita, perché avevamo fornito lo schema:



Se non conosciamo già questo schema, a rigore le incognite sono 2.

• si bloccano tutti i nodi (interni ed esterni) e si applicano poi le incognite cinematiche:

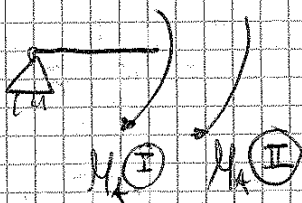
Ⓘ



La relazione possiamo applicarla come vogliamo, ma i momenti DEVONO essere designati questi!!! (barrati e antebarrati)

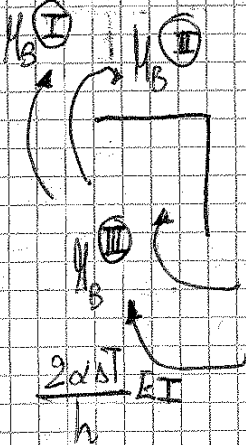
Facciamo gli equilibri ai nodi:

nodo A



$$\Rightarrow \frac{4EI}{l} \varphi_A + \frac{2EI}{l} \varphi_B = 0$$

nodo B



$$\Rightarrow \frac{2EI}{l} \varphi_A + \frac{4EI}{l} \varphi_B + \frac{4EI}{l} \varphi_B + \frac{2\alpha\Delta T EI}{h} = 0$$

mettiamo a sistema e otteniamo \Rightarrow

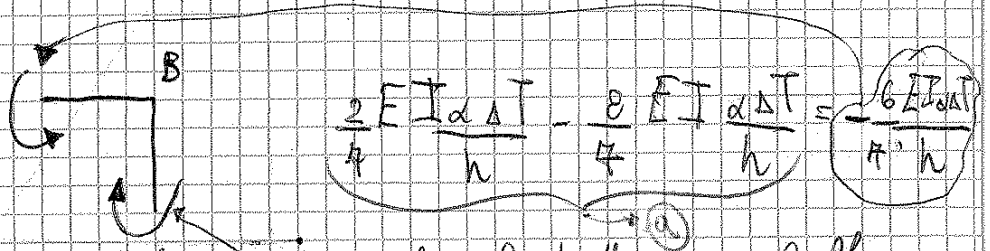
$$\varphi_A = \frac{1}{4} \frac{\alpha\Delta T l}{h} \quad (\text{è positivo } \Rightarrow \text{ verso spost. giusto})$$

$$\varphi_B = -\frac{2}{7} \frac{\alpha\Delta T l}{h} \quad (\text{è negativo } \Rightarrow \text{ verso spost. sbagliato})$$

dei conti del sistema qui sopra

possiamo, per verifica, vedere che $M_A = 0$.

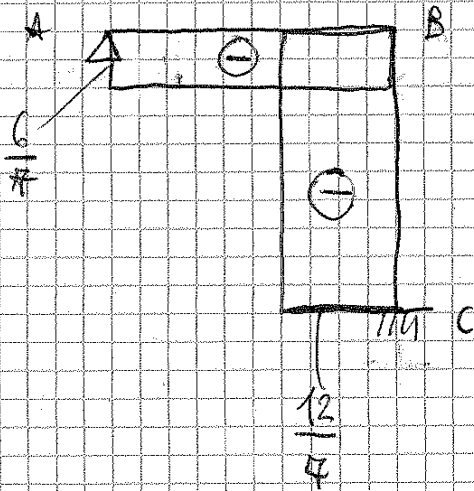
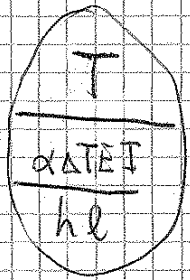
Andiamo, ora, nel nodo B:



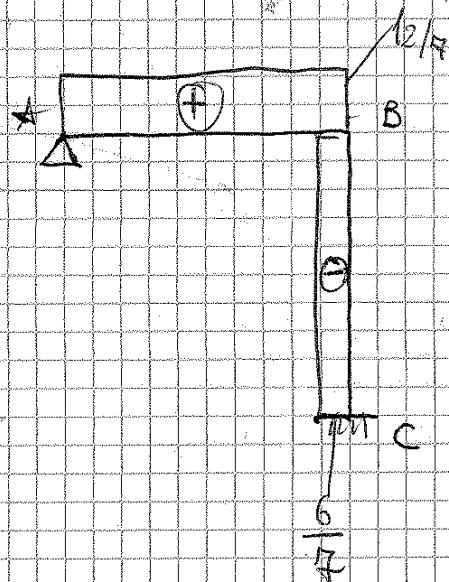
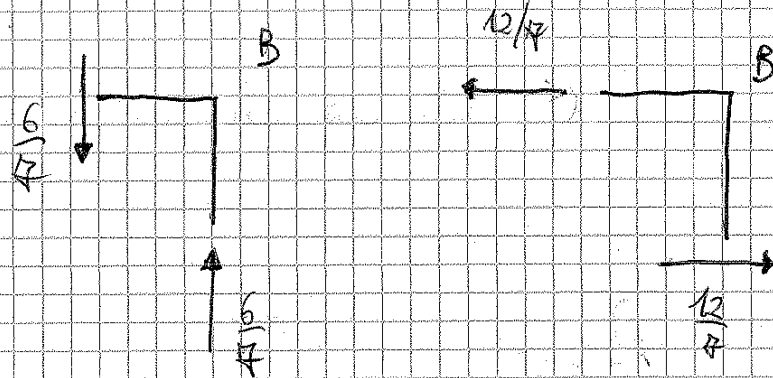
potremmo, per verifica, verificare che anche nel tratto BC il M_{bc} vale $+\frac{6}{7} \frac{EI\alpha\Delta T l}{h}$:

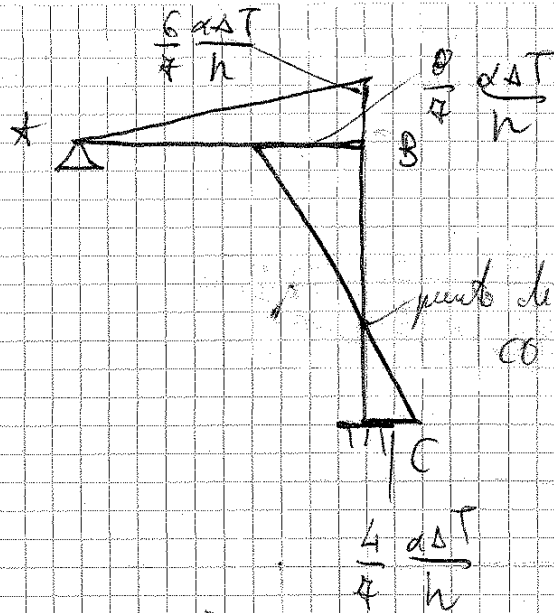
$$-\frac{8}{7} \frac{\alpha\Delta T l EI}{h} + \frac{2\alpha\Delta T l EI}{h} = \frac{6}{7} \frac{\alpha\Delta T l EI}{h}$$

d'equilibrio al nodo B è verificata.



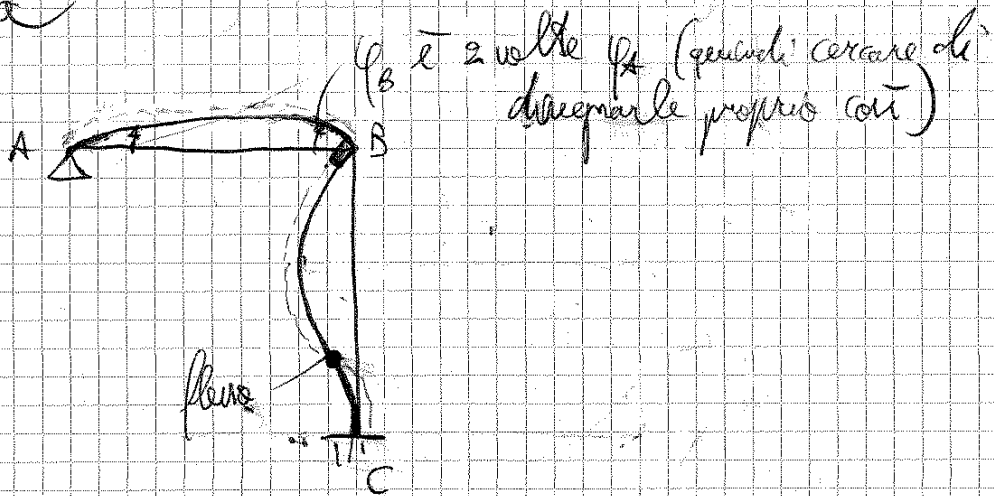
(N) equilibri (tras. vert. e orizz.) al nodo





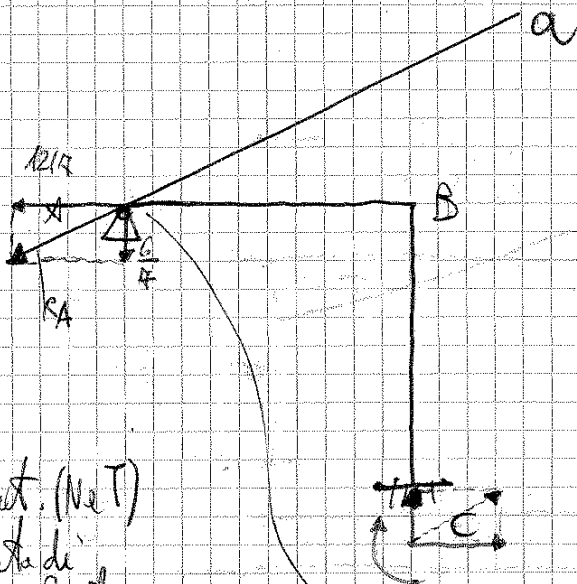
punto di flesso: FLESSO TERMO-ELASTICO
 (è dato dalla combinazione del contributo termico e di quello elastico)

deformata



GDP

luogo dei punti di passaggio della risultante, che agisce sezione per sezione.

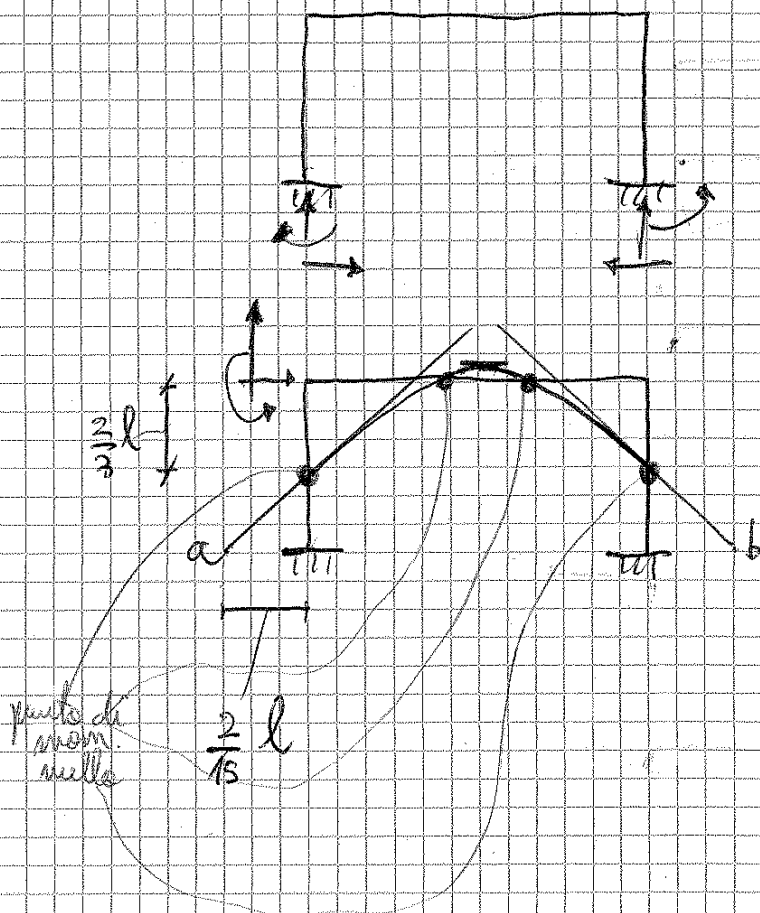


tratto	cop
AB	retta a
CB	retta a

delle sollecit. (N e T)
 La risultante, trattata di una certa quantità legata ad H, mi deve dare lo stesso effetto di quello delle sollecitazioni applicate nella sezione.

la cop (retta a)
 parte da A e traccia l' per non incontrare mai carichi applicati → la cop.
 Rimane sempre quella

edp



Per il travezzo faccio sempre $\frac{M}{N} \rightarrow$ quadratica \Rightarrow la c.d.p sarà quadratica (parabola). $N \rightarrow$ costante

Nel travezzo, il rapporto $\frac{M}{N}$ cambierà di segno (perché M cambia di segno) \Rightarrow la parabola passerà da sopra a sotto il travezzo (o viceversa).
 A metà travezzo ho tang. orizz. (perché $T=0$)

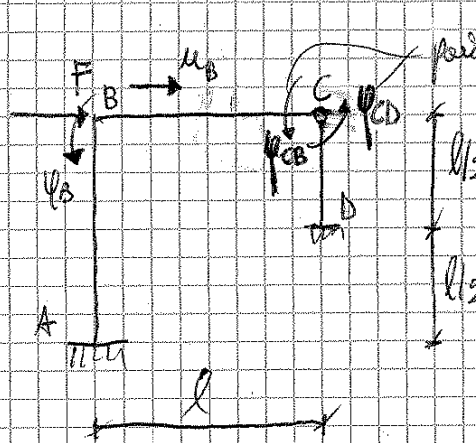
(trattino rosso)

SCIENZA DELLE COSTRUZIONI 2 (Luigi Corrado)

24-10-2012

guardare HOME PAGE [Luigi Corrado](#) e scaricare PDF

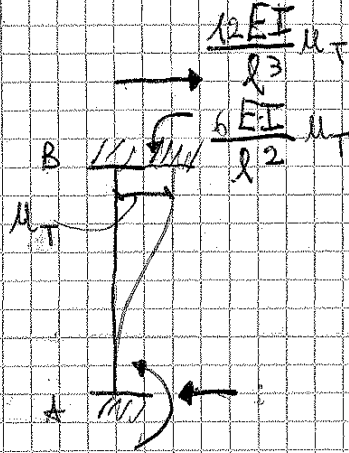
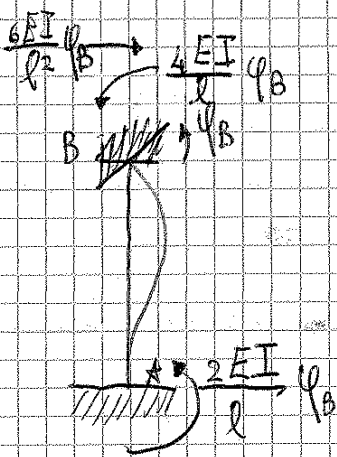
Esercizio 1



poiché la cerniera d'attacco permette una discontinuità nelle rotazioni \Rightarrow come incognite cinematiche avrò 2 rotazioni diverse!
PORTALE ZOPPO

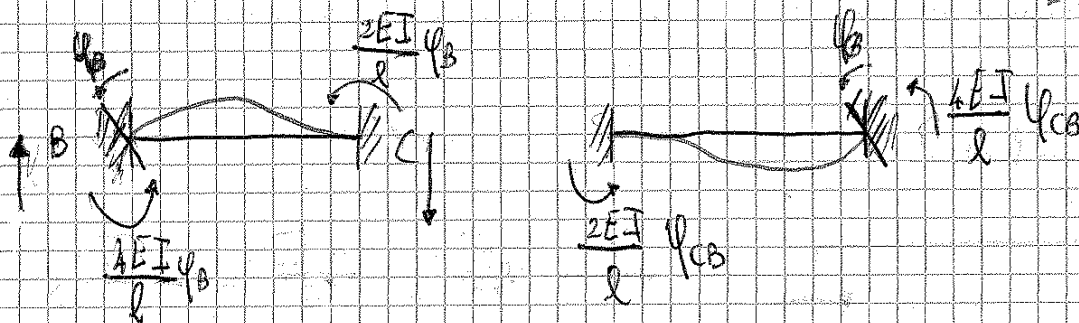
Sviluppo

- incognite cinematiche φ_B, u_B , e poi le 2 rotazioni in C: $\varphi_{CB}, \varphi_{CD}$
- la trazione orizzontale in C è uguale a quella in B, per indeforabilità della trave dell'asta BC

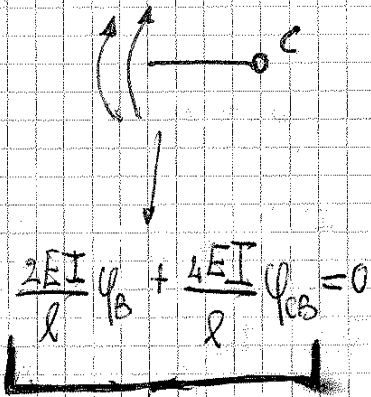


OSSERVAZIONE

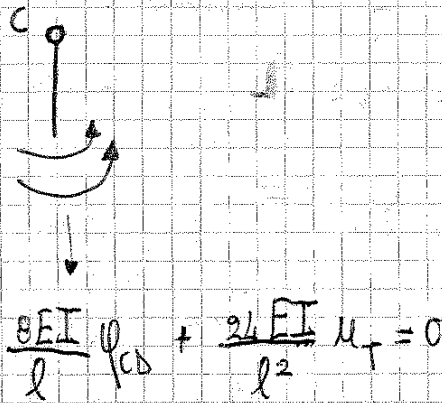
Il taglio (T_B) per effetto della rotazione (φ_B) è uguale al momento (M_B) per effetto della trazione (u_B) poiché la matrice $[K]$ è simmetrica.



Non applico u_B , poiché esso è uguale per tutto il traverso BC (indef. assiale) \Rightarrow non nascono reazioni



somma dei momenti = 0 perché c'è una cerniera



In notazione matriciale, potremmo scrivere:

$$[K] \{ \delta \} = \{ F \}$$

matrice di rigidità dell'intera struttura

vettore degli spostamenti nodali

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ F \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

incognite cinematiche

somma di tutte le DO tutti i nodi del sistema (ho 3+1) perché la cerniera è caratterizzata da 2 diverse rotazioni

vettore degli spostamenti nodali incogniti

$$\begin{Bmatrix} \varphi_B \\ u_T \\ \varphi_{CB} \\ \varphi_{CC} \end{Bmatrix}$$

matrice

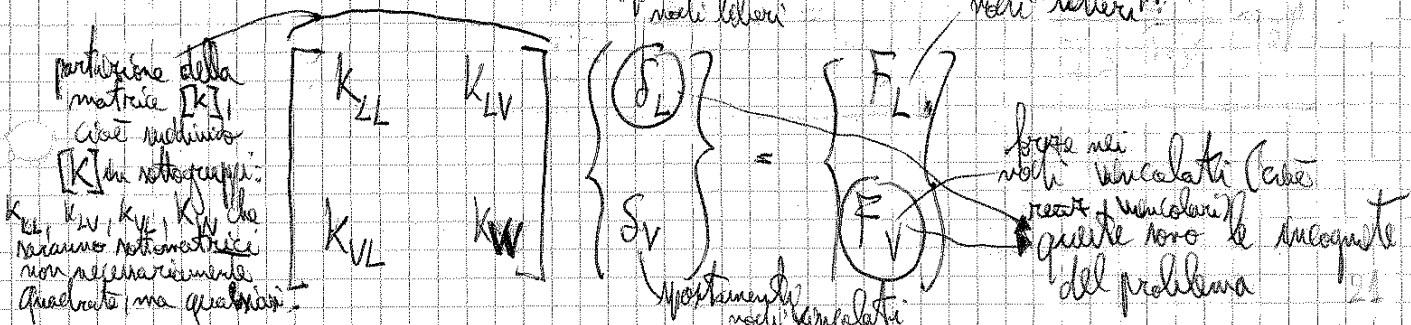
$$3 + 3 + (3+1) + 3$$

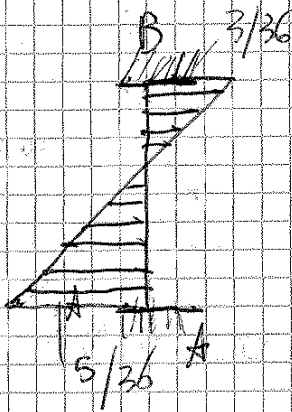
incastro interno A cerniera interna C incastro esterno D

NoBo:

per ogni asta facciamo l'espansione e otteniamo matrici 13x13, sommiamo tutte le matrici di dimensione 13 e la somma finale la moltiplichiamo per il vettore degli spostamenti incogniti da averla, dimensione 13.

spostamenti nodi liberi anche forze applicate nei nodi liberi





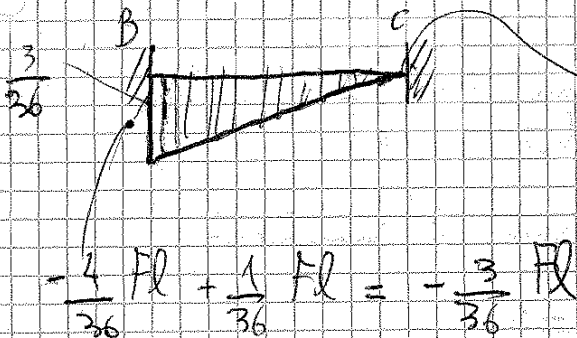
In B i momenti saranno:

$$\left(\frac{16}{36} + \frac{16}{36}\right) Fl = \frac{3}{36} Fl$$

In A i momenti saranno

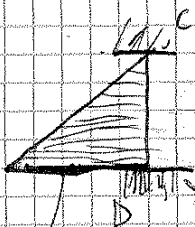
$$\frac{2}{36} Fl + \frac{42}{216} Fl = \frac{5}{36} Fl$$

è positivo \Rightarrow guardando l'appoggio fatto come puntatore (cubi autorivolta) $\Rightarrow \frac{5}{36} Fl$ è autorivolta.



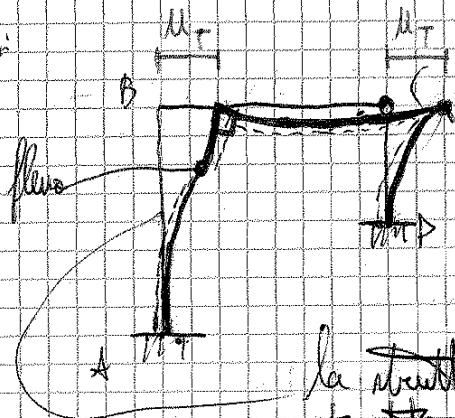
PER VERIFICA:
qui deve venire il \Rightarrow non viene mai dire che abbiamo sbagliato a risolvere il sistema

$$-\frac{4}{36} Fl + \frac{1}{36} Fl = -\frac{3}{36} Fl$$



$$-\frac{28}{72} Fl + \frac{168}{216} Fl = \frac{14}{36} Fl$$

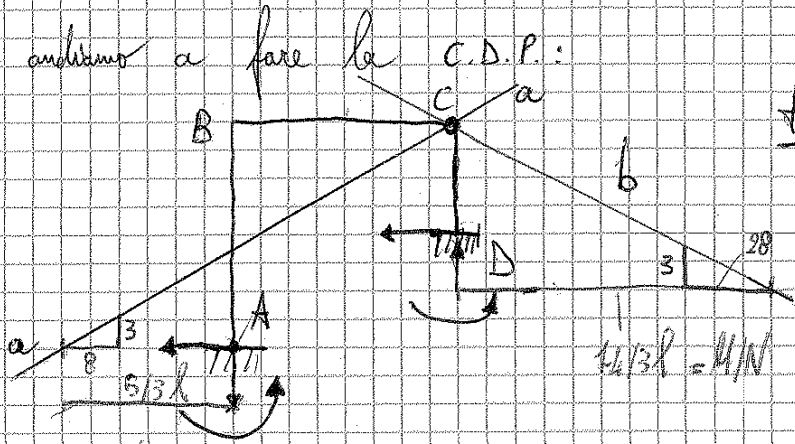
Deformati



curvatura (\Rightarrow l'angolo non rimane di 90°)

la struttura originaria meglio farla trapezoidale! (per non appesantire il disegno)

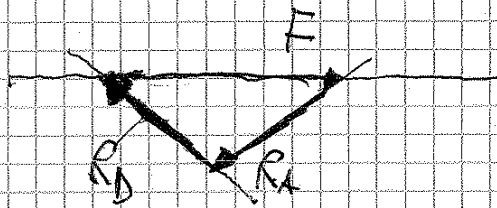
Ora andiamo a fare la C.D.P.:



tratto	cdp
AB	retta a
DCB	retta b

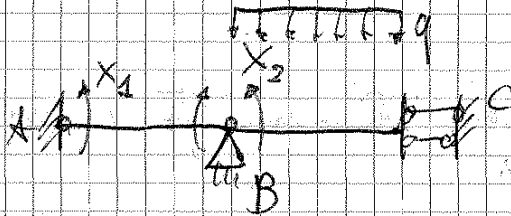
$$\frac{M}{N} = \frac{5}{3} l$$

C'è equilibrio:



→ le sollec. del sistema sono ... (fare da solo)

Vediammo un attimo come si risolverebbe applicando il metodo MIS TO



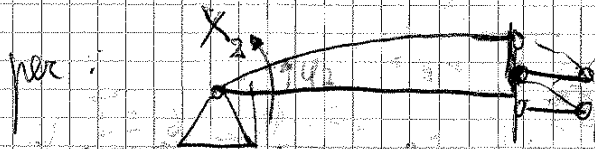
La reticolare associata è ipostatica → non FISSI, però il punto C si muove (vediamo più avanti come trattare questo caso).

Equaz. di congruenza:

$$v_{AB} = 0 \Rightarrow \frac{x_1 l}{3EI} + \frac{x_2 l}{6EI} = 0$$

$$v_{0x} = v_{0c} \Rightarrow -\frac{x_2 l}{6EI} - \frac{x_2 l}{3EI} = \frac{x_2 l}{3EI}$$

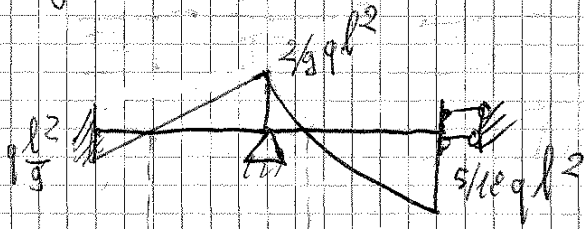
~~Il coeff. $\frac{l}{3EI}$ vale per~~



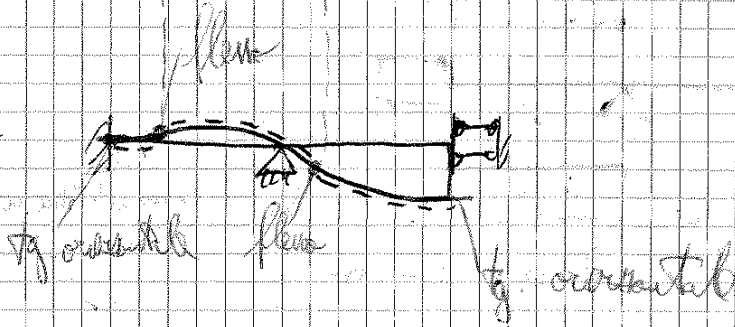
questa rotazione è diversa da quella verso θ_2

Meccanica i diagrammi delle sollecitazioni

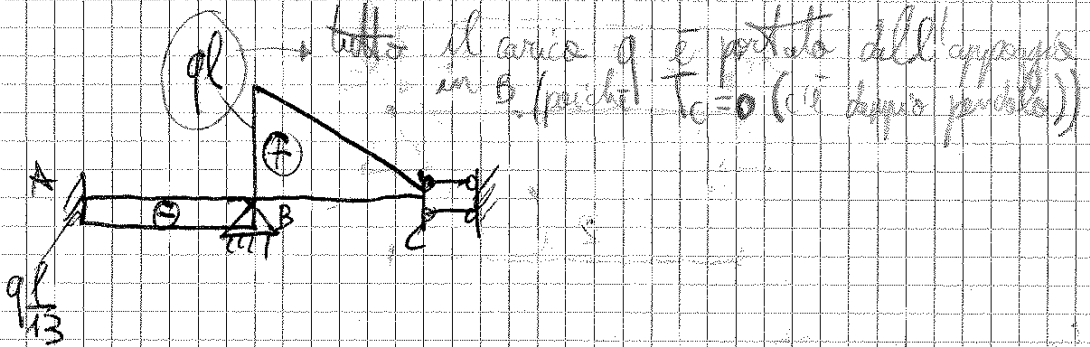
(M)



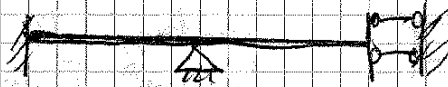
deformata



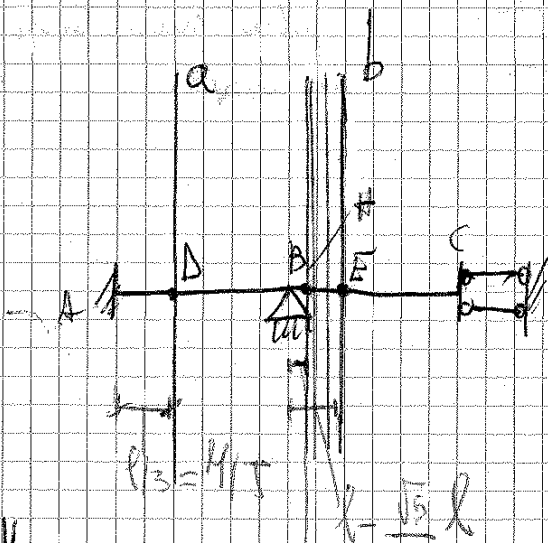
(T)



(N)

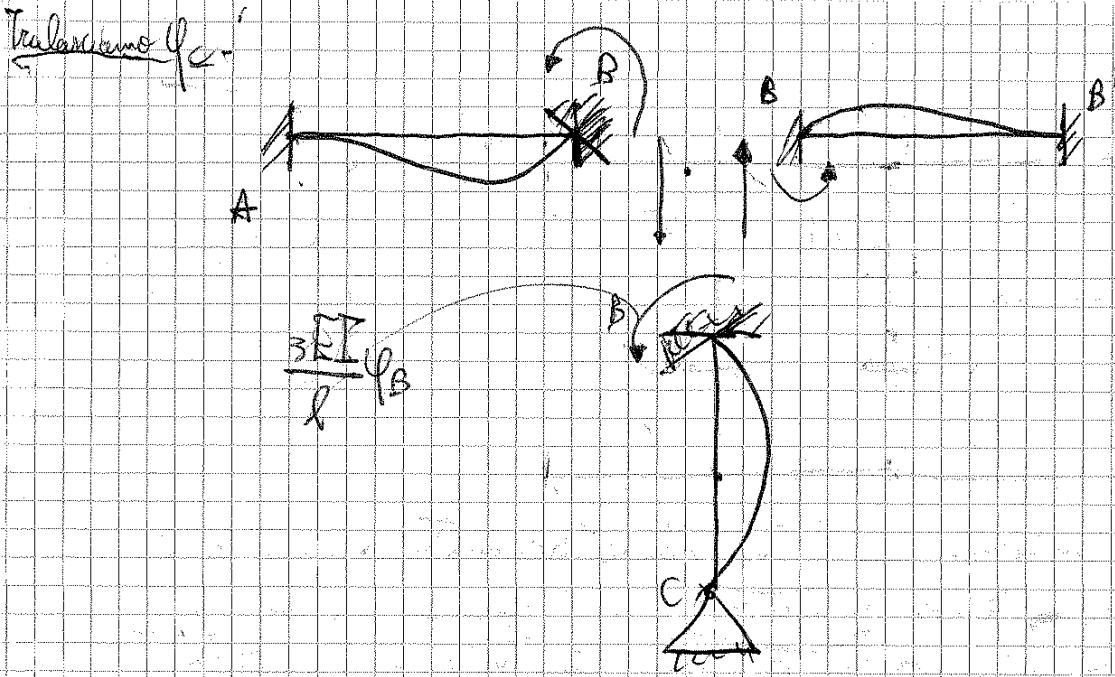


(cdp)

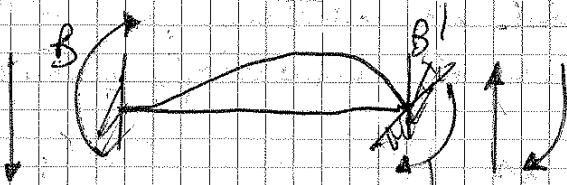


tratto	cdp
AB	retta a
BE	fasce di rette parallele comprese tra A e E
EC	fasce di rette parallele tra E e -∞

si governa tutto il $\frac{M}{T}$ quando $T_0 = M$
 e T cambia di segno \rightarrow la
 C.d.p. si sposta da una parte all'altra.

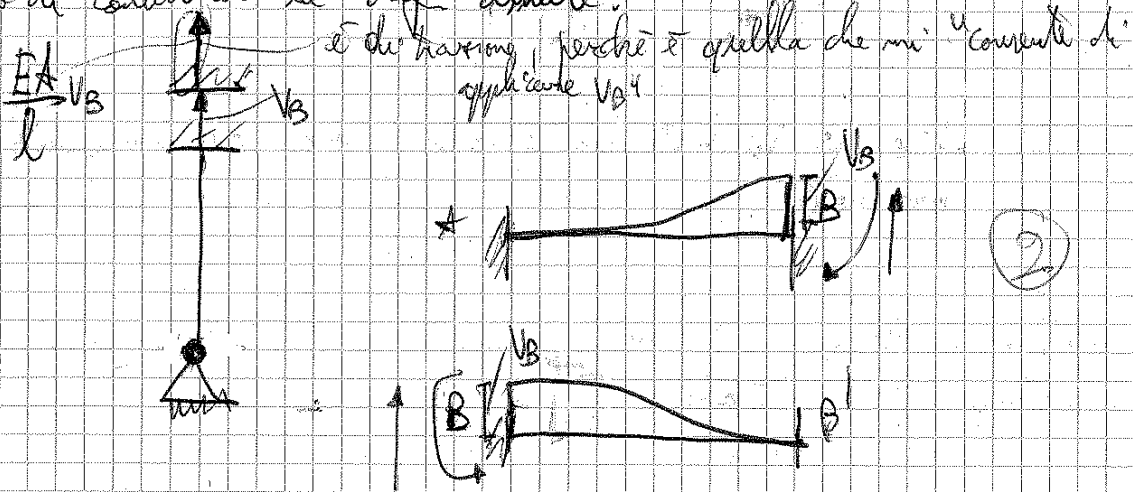


Non stiamo studiando tutta la struttura, sfruttando la simmetria, ma la stiamo studiando TUTTA, quindi dobbiamo considerare anche l'effetto di φ_B sul momento in B.

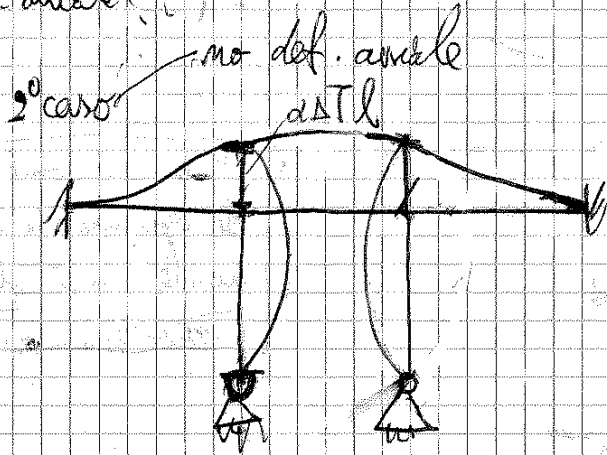


φ_B simmetrica a $\varphi_B \rightarrow$ orrendo

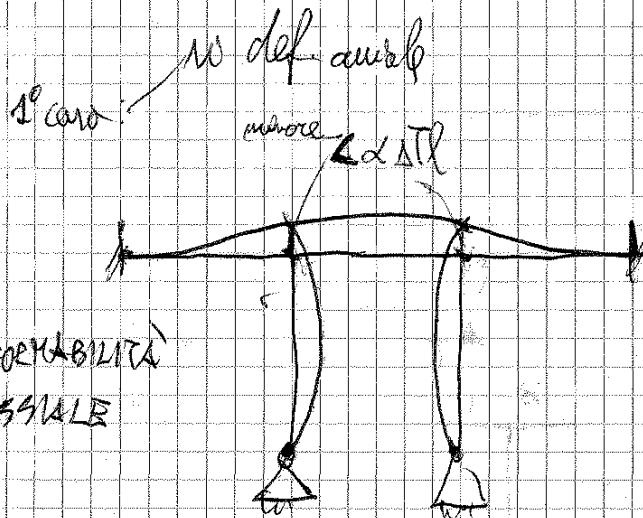
Supponiamo di considerare la def. assiale:



Quale sarà la differenza nella deformata in numero o no la def. assiale?



INDEFORMABILITÀ ASSIALE



DEFORMABILITÀ ASSIALE

Si si parlerà di meno rispetto al caso sopra perché: perché se considerando la def. assiale \Rightarrow cioè la compressione del pilastro.

Alc. nel caso in cui considero la deformabilità assiale del pilastro, si capisce che non si opporanno alla dilatazione termica di allungamento \Rightarrow lo sarà minore rispetto al caso sopra.

TRATTO B-D:

$$M_{BD} = \frac{4EI}{2a} \frac{qa^3}{108EI} = \frac{2 \cdot qa^3}{108}$$

$$M_{DB} = \frac{2EI}{2a} \frac{qa^3}{108EI} = \frac{qa^3}{108}$$

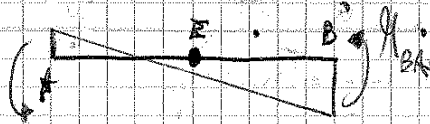
TRATTO A-B:

a causa della rotazione φ_B si ha:

$$M_{BA} = \frac{4EI}{a} \varphi_B = \frac{4 \cdot qa^2}{108}$$

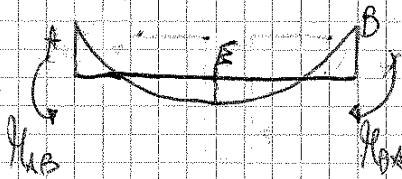
$$M_{AB} = \frac{M_{BA}}{2} = \frac{2 \cdot qa^2}{108}$$

$$\varphi_B = \left(\frac{4}{108} - \frac{2}{108} \right) \frac{qa^2}{2} = \frac{1}{108} qa^2$$



a causa del carico distribuito q:

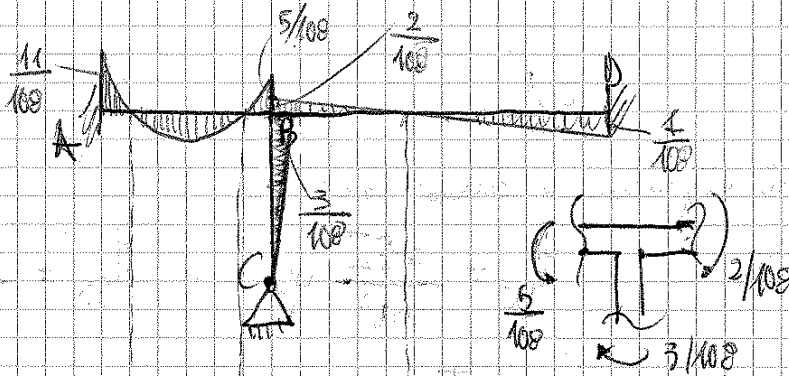
$$M_{AB} = R_{Ax} = \frac{qa^2}{12}$$



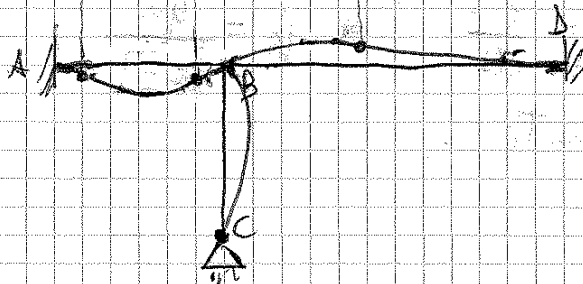
La deflettiva si ha:

$$M_{AB} = \frac{2 \cdot qa^2}{108} + \frac{qa^2}{12} = \frac{2+9}{108} qa^2 = \frac{11}{108} qa^2$$

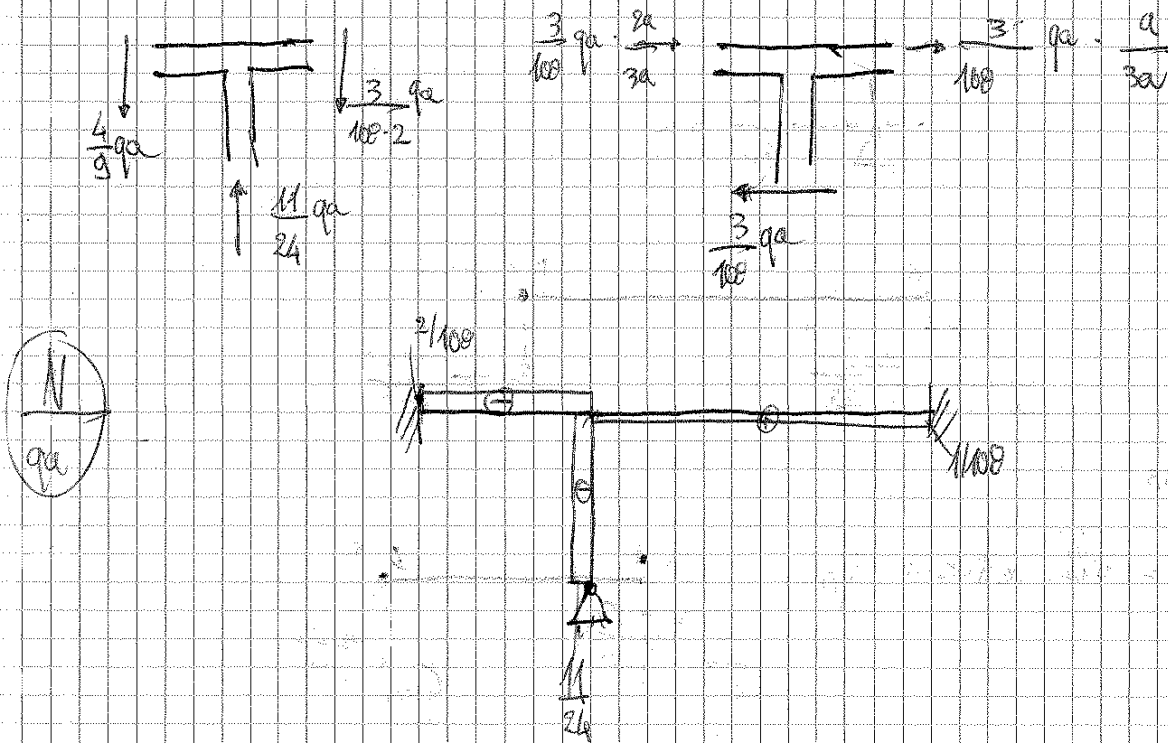
$$M_{BA} = \frac{4}{108} qa^2 - \frac{qa^2}{12} = \frac{4-9}{108} qa^2 = -\frac{5}{108} qa^2$$



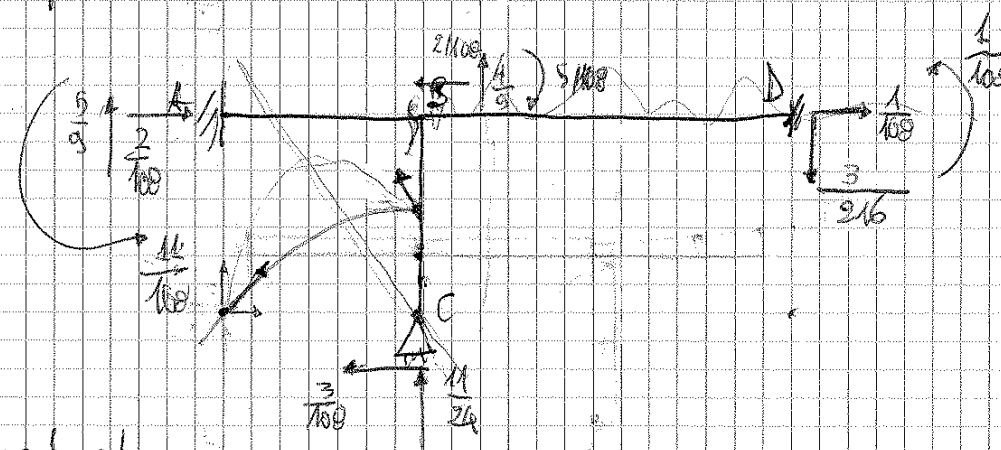
DEFLESSIONE:



Calcola lo sforzo normale N facendo l'equilibrio alla trazione su corrispondenza del nodo B.



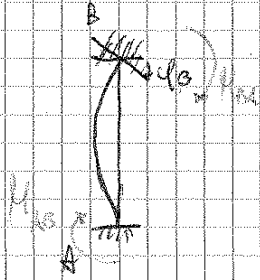
Curva delle pressioni:



Tratto	Caratteristica
DB	retta a
CB	retta b
AB	parabola

Calcolo le caratteristiche di sollecitazione:

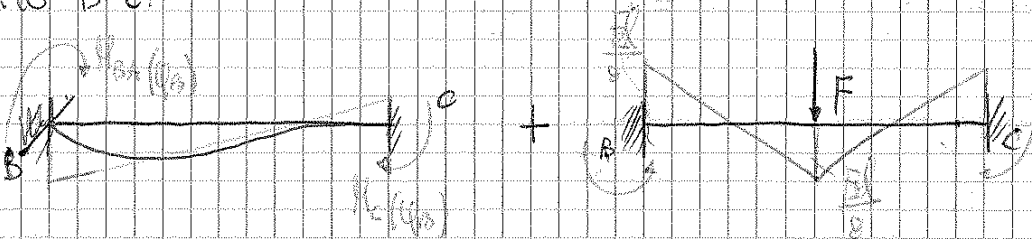
TRATTO A-B:



$$\varphi_{BA} = \frac{4EI}{l} \cdot \frac{Fl^2}{24EI} = \frac{Fl}{6}$$

$$\varphi_{AB} = \frac{2EI}{l} \cdot \frac{Fl^2}{24EI} = \frac{Fl}{12}$$

TRATTO B-C:

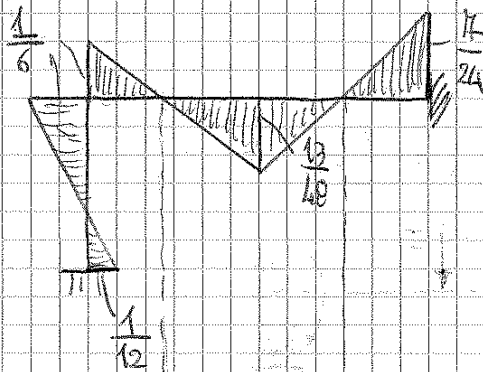


Angoli di svolta:

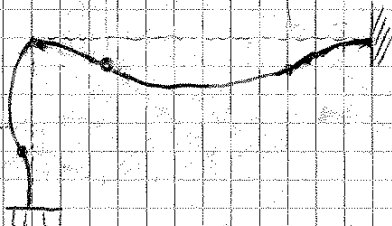
$$\varphi_{BE} = \frac{4EI}{2l} \cdot \varphi_B - \frac{Fl}{8} = \frac{2EI}{l} \cdot \frac{Fl^2}{24EI} - \frac{Fl}{8} = \frac{Fl}{12} - \frac{Fl}{8} = -\frac{1}{6} \frac{Fl}{8}$$

$$\varphi_C = \frac{2EI}{2l} \cdot \frac{Fl^2}{24EI} + \frac{Fl}{8} = \frac{Fl}{24} + \frac{Fl}{8} = \frac{7}{24} \frac{Fl}{8}$$

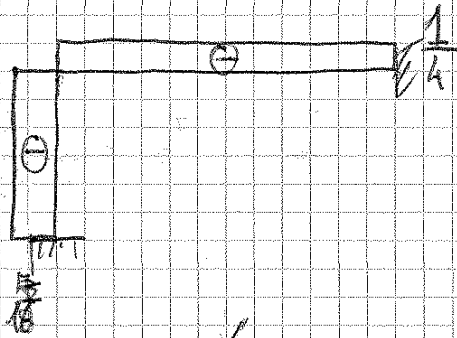
$\frac{Fl}{8}$



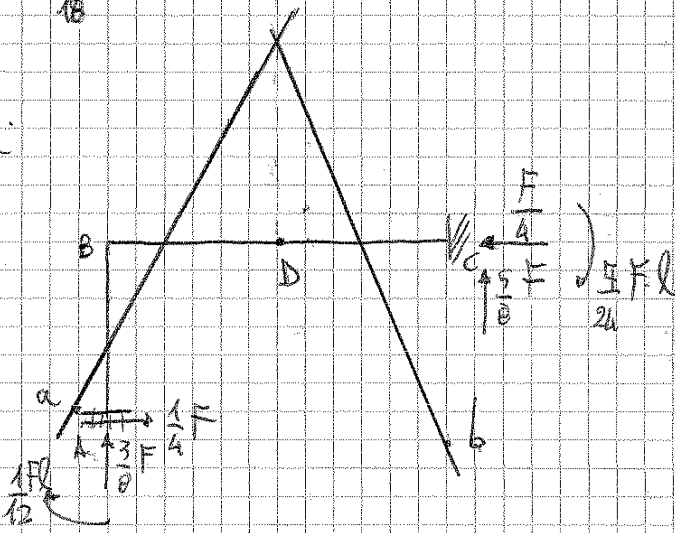
deformata



$\frac{N}{F}$



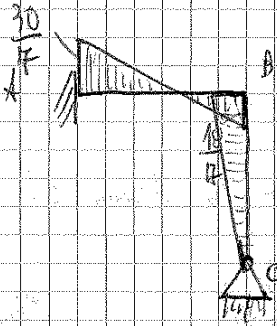
Curva delle pressioni



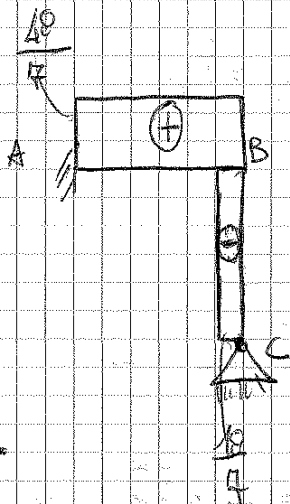
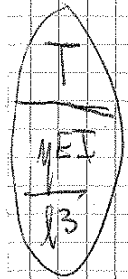
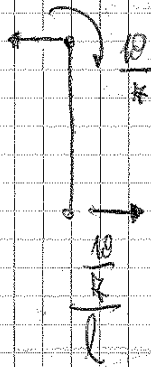
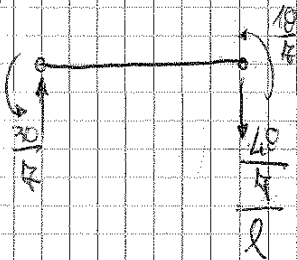
TRATTO	esp	
AB	retta	a
BD	retta	a
CD	retta	b

$$M_{BA} = M_{BA}(q) + M_{BA}(M) = \frac{4EI}{l} \left(-\frac{6}{7} \frac{M}{l} \right) + \frac{6EI}{l^2} M = \frac{18}{7} \frac{MEI}{l^2}$$

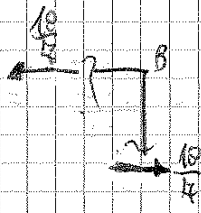
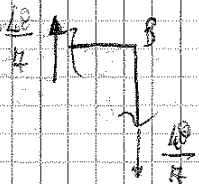
$$M_{BC} = \frac{3EI}{l} \left(-\frac{6}{7} \frac{M}{l} \right) = -\frac{18}{7} \frac{MEI}{l^2}$$



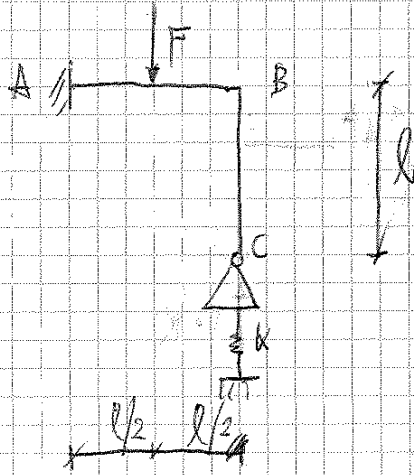
Taglio:



Spinta normale:

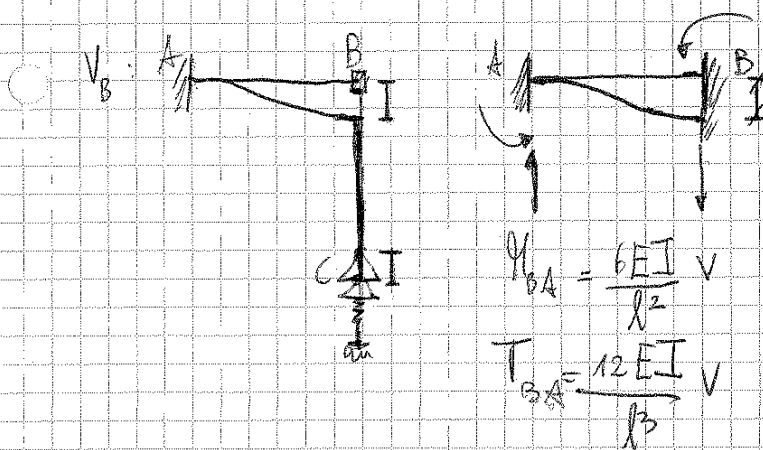
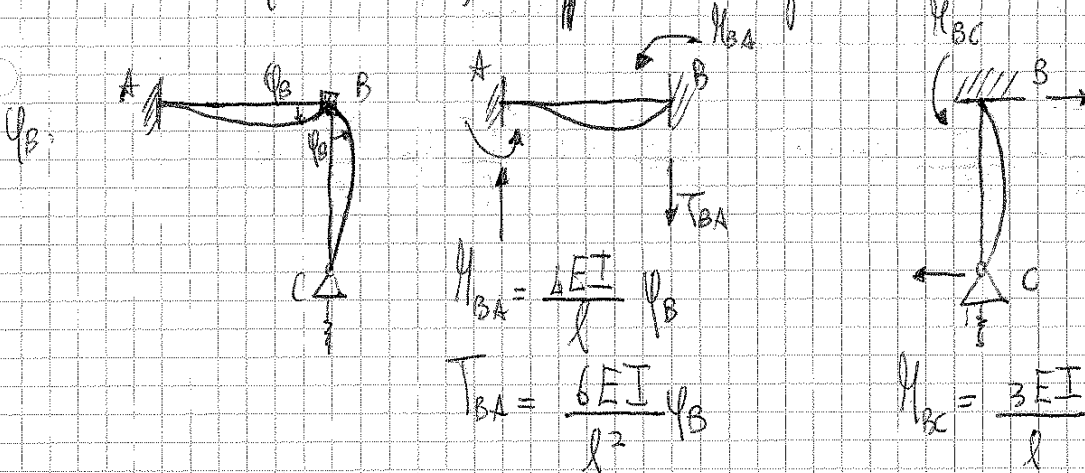


Esercizio

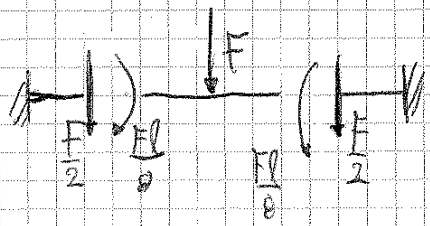


Incognite cinematiche: ψ_B e v_B

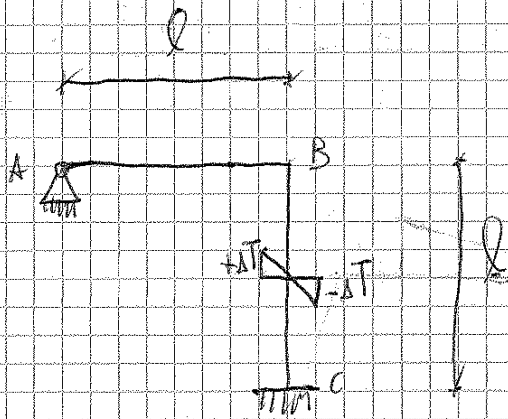
Potò incastri (trame in C) e applico le incognite.



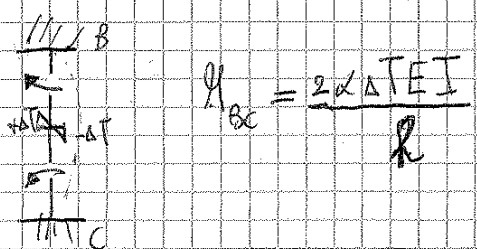
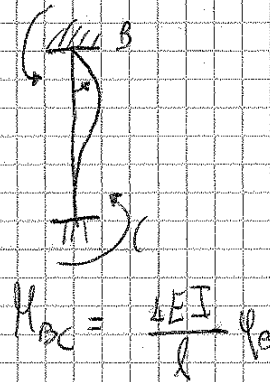
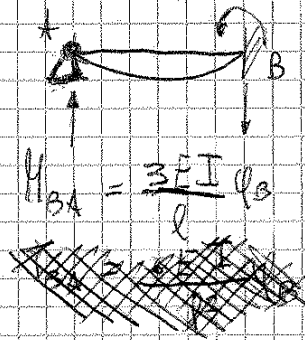
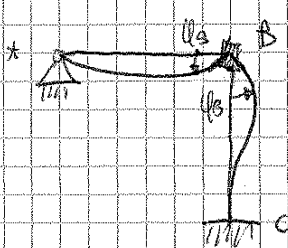
carico F:



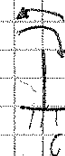
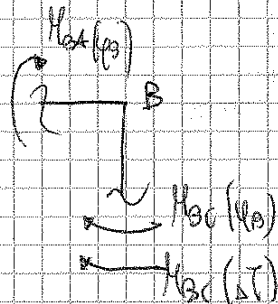
Esercizio:



Incoquinata cinematica φ_B

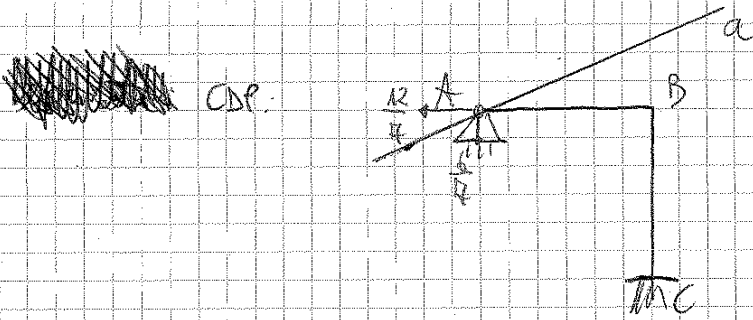
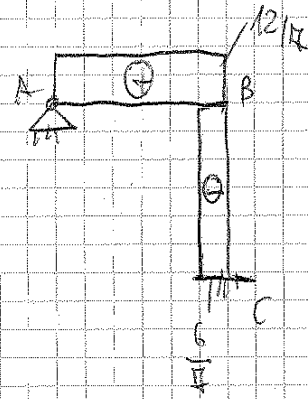
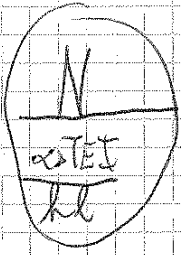


Equilibrio alla rotazione:



$$\frac{3EI}{l} \varphi_B + \frac{4EI}{h} \varphi_B + \frac{2\alpha \Delta T EI}{h} = 0 \Rightarrow \frac{7EI}{l} \varphi_B = -\frac{2\alpha \Delta T EI}{h} \Rightarrow \boxed{\varphi_B = \frac{2\alpha \Delta T l}{7h}}$$

$$M_{BA}(\varphi_B) = \frac{3EI}{l} \left(-\frac{2\alpha \Delta T l}{7h} \right) = -\frac{6}{7} \frac{\alpha \Delta T EI}{h}$$

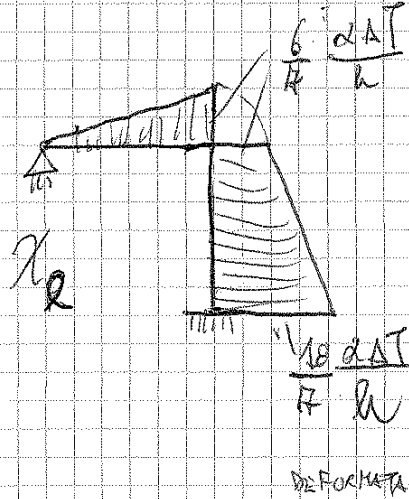
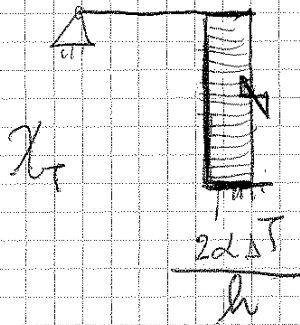


TRATTO	cdp
AB	retta a
CB	retta a

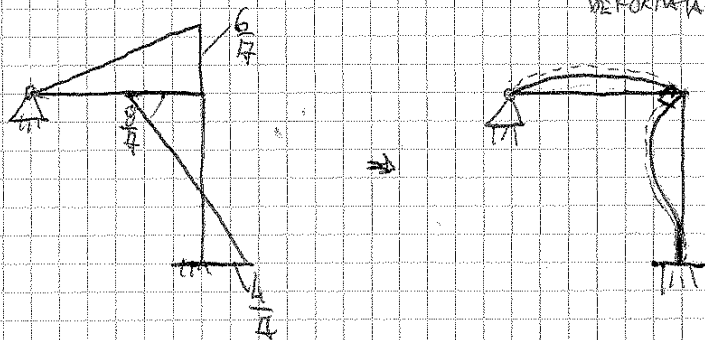
deformata:

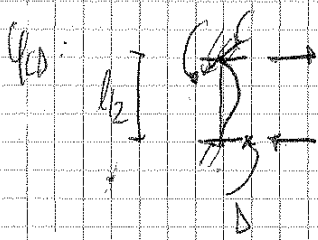
$$\chi_{reale} = \chi_{termica} + \chi_{elastica}$$

$$\chi_{elastica} = \frac{M}{EI}$$



χ_R

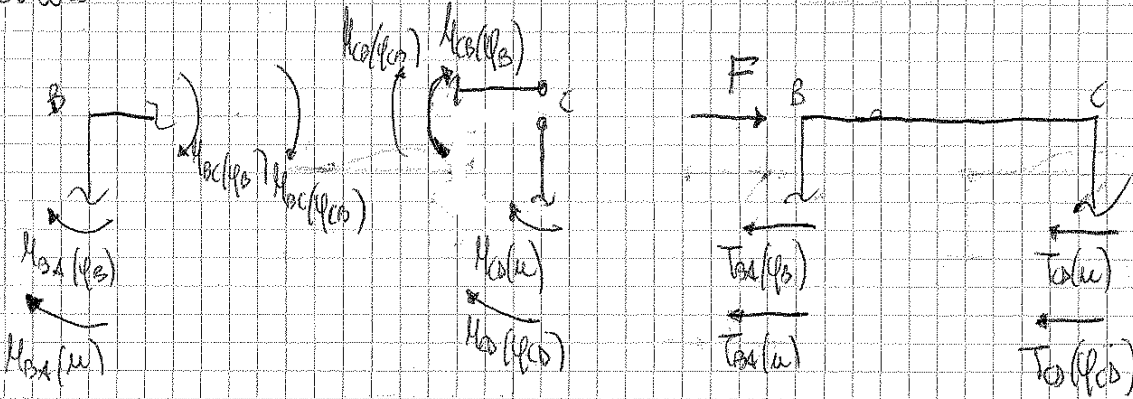




$$M_{CD} = \frac{4EI}{l} \varphi_{CD} = \frac{8EI}{l} \varphi_{CD}$$

$$T_{CD} = \frac{6EI}{(l/2)^2} \varphi_{CD} = \frac{24EI}{l^2} \varphi_{CD}$$

Equilibrio:



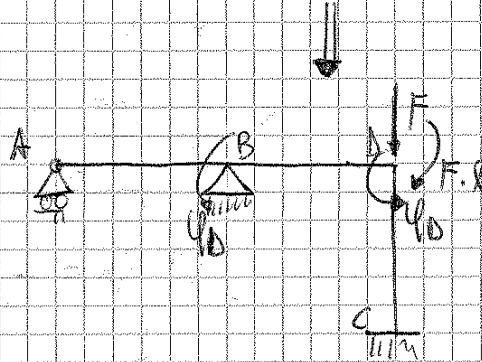
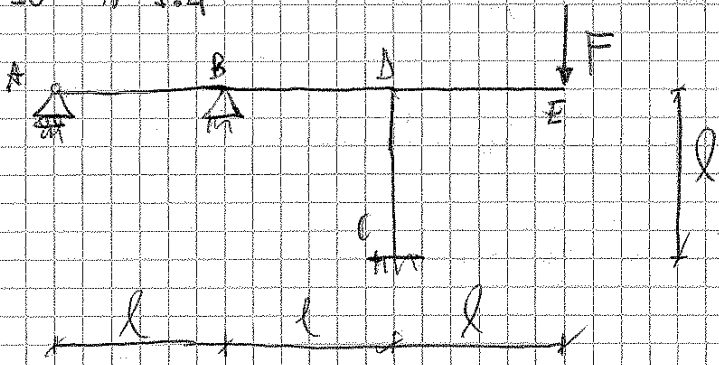
$$\left\{ \begin{aligned} \frac{4EI}{l} \varphi_B + \frac{6EI}{l^2} u + \frac{2EI}{l} \varphi_{CB} + \frac{4EI}{l} \varphi_B &= 0 \Rightarrow 4(-2\varphi_{CB}) + 6\frac{u}{l} + 2\varphi_{CB} + 4(-2\varphi_{CB}) = 0 \\ \frac{4EI}{l} \varphi_{CB} + \frac{2EI}{l} \varphi_B &= 0 \Rightarrow \varphi_B = -2\varphi_{CB} \\ \frac{24EI}{l^2} u + \frac{8EI}{l} \varphi_{CD} &= 0 \Rightarrow \varphi_{CD} = -3\frac{u}{l} \\ \frac{6EI}{l^2} \varphi_B + \frac{12EI}{l^3} u + \frac{96EI}{l^3} u + \frac{24EI}{l^2} \varphi_{CD} &= F \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} 6\frac{u}{l} &= 4\varphi_{CB} \Rightarrow u = \frac{4}{3} \varphi_{CB} l \\ \varphi_{CD} &= -4\varphi_{CB} \end{aligned} \right.$$

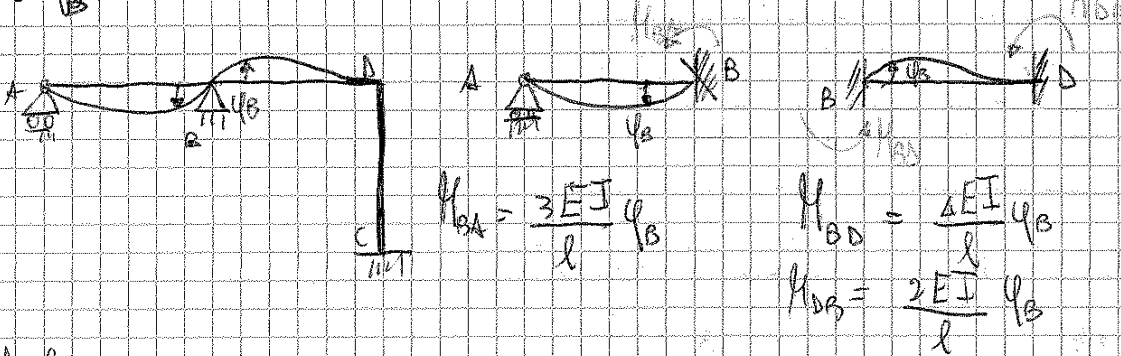
$$\Rightarrow \frac{6EI}{l^2} (-2\varphi_{CB}) + \frac{12EI}{l^3} \left(\frac{4}{3} \varphi_{CB} l \right) + \frac{96EI}{l^3} \left(\frac{4}{3} \varphi_{CB} l \right) + \frac{24EI}{l^2} (-4\varphi_{CB}) = F \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{aligned} \varphi_B &= -\frac{1}{36} \frac{Fl^2}{EI} \\ u &= \frac{4}{216} \frac{Fl^3}{EI} \\ \varphi_{CB} &= \frac{Fl^2}{42EI} \\ \varphi_{CD} &= -\frac{4}{42} \frac{Fl^2}{EI} \end{aligned} \right.$$

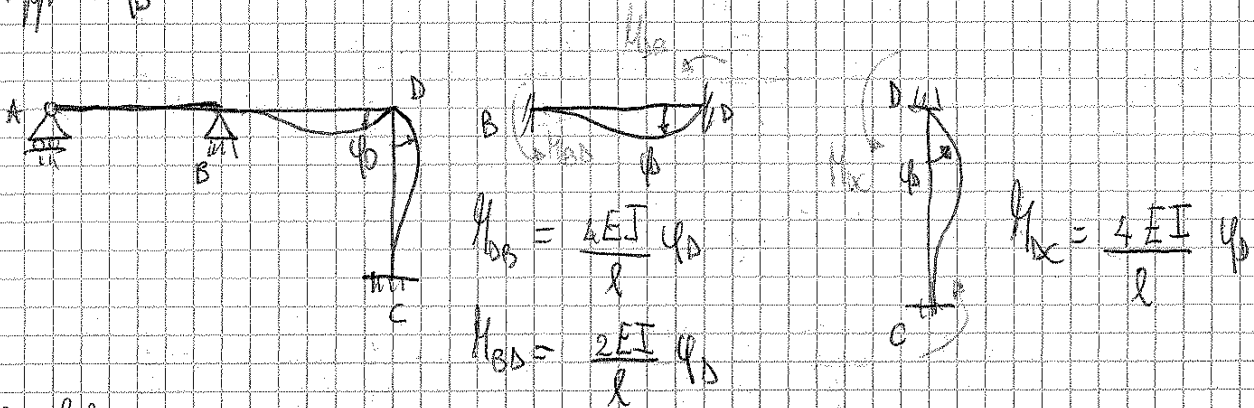
Esercizio pag. 10 n° 1.4



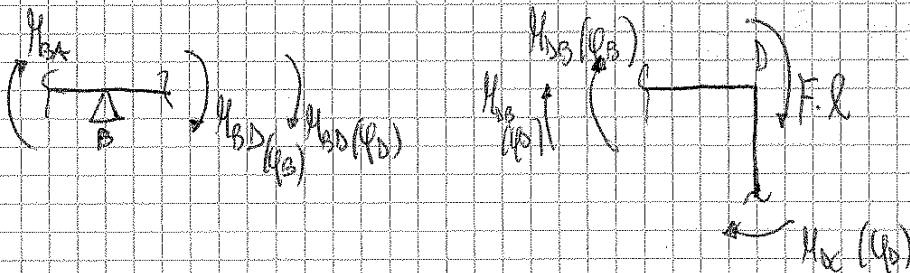
Applica U_B :

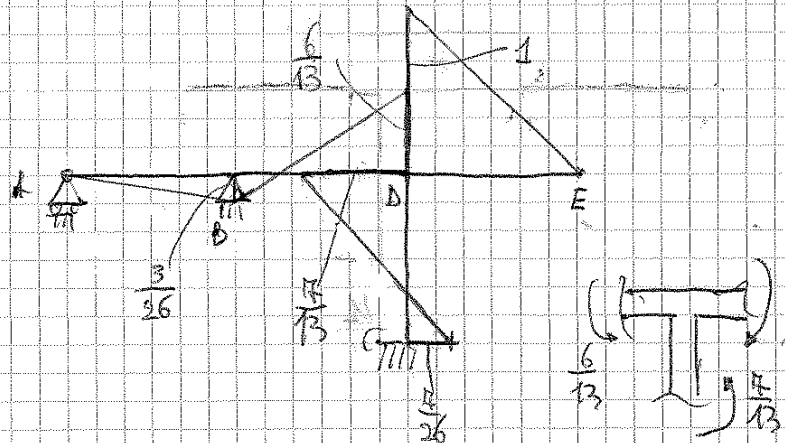


Applica U_C :

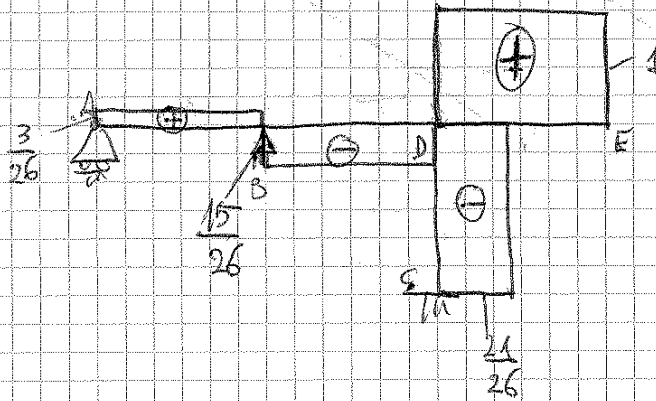
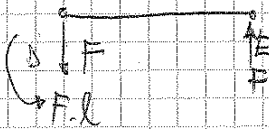
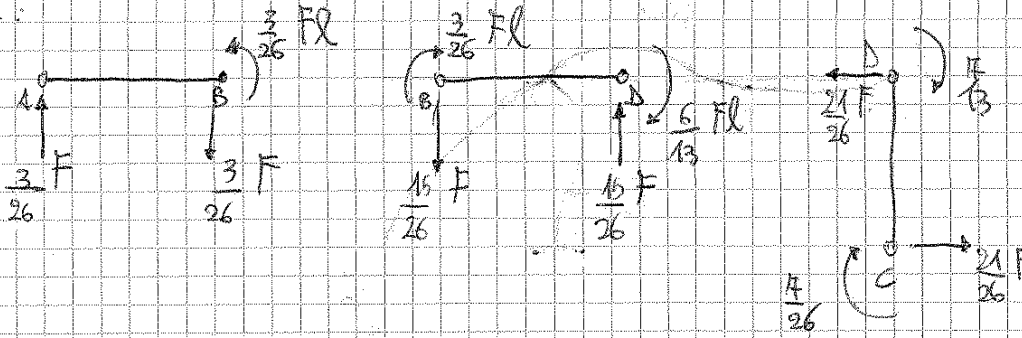


Equilibrio:

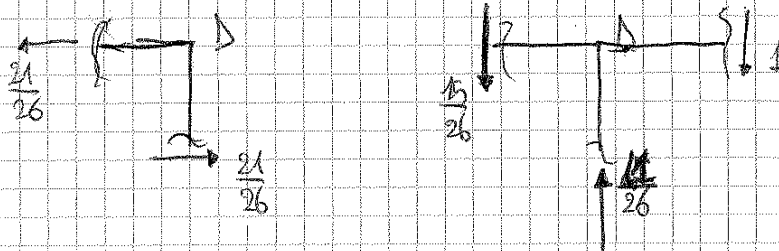




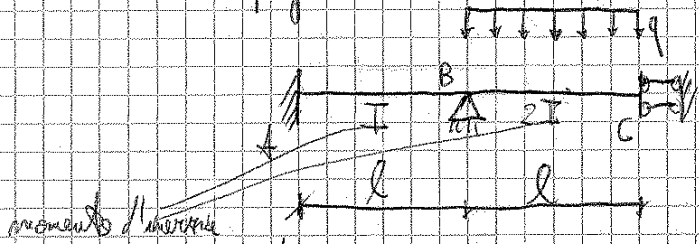
Taglio:



flussi normali:

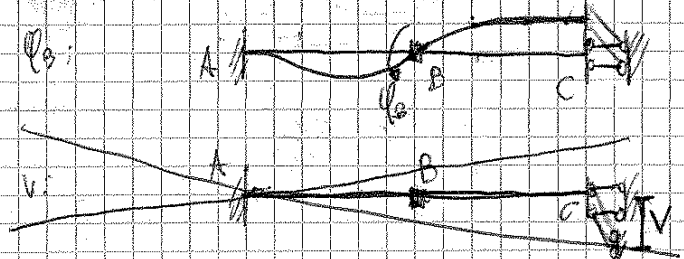


Esercizio 1.22 pag 59



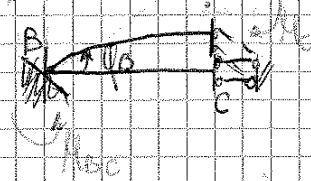
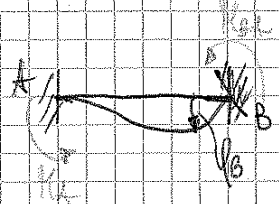
Indeterminazione cinematica = 2. ψ_B, V_C ma

Stato incastro nei tutti i nodi (tranne in C, perché conosci e zero lo schema di trave con incastro - doppio pendolo).



NON SERVE, perché lo schema elementare di trave con incastro - doppio pendolo lo conosco.

Applico ψ_B :

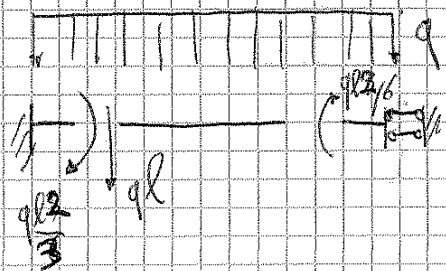


$$H_A = \frac{2EI}{l} \psi_B$$

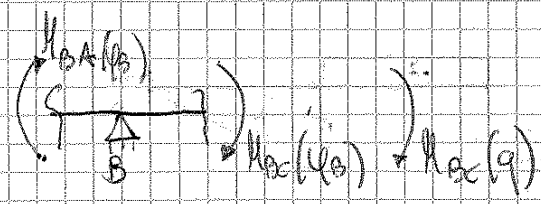
$$H_{BC} = \frac{EI}{l} \psi_B = H_C$$

$$H_{BA} = \frac{4EI}{l} \psi_B$$

carico q:



Equilibrio in B:



$$B) \frac{4EI}{l} \psi_B + \frac{EI}{l} \psi_B + \frac{ql^2}{3} = 0 \Rightarrow \frac{5EI}{l} \psi_B = -\frac{ql^2}{3} \Rightarrow \psi_B = -\frac{ql^2}{15EI}$$