NUMERO : 480

DATA : 18/02/2013

A P P U N T I

STUDENTE : Crea

MATERIA : Geometria + Esercizi
Prof. Beccari

"& a successful technology, reality must take precedence over public relations, & nature can't be fooled"

CORSO di
GEOMETRIA

Libro di testo: è di riferimento, ma molte cose non verranno svolte.

ESERCIZI: Lanza

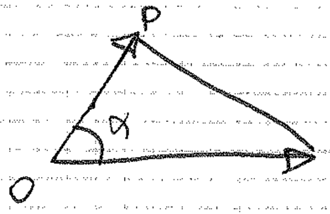
GIANNINA BECCARI
→ Ricevimento dalle 14.00 alle 15.00
per consulenze, esercizi...
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

WILBERT SAMUEL ROSSI
DIPARTIMENTO di MATEMATICA (7552)

TUTORAGGIO: Aula 6D dalle 12.30 (11.30)? alle 14.30
tutti i giorni...

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 186

Se $\bar{v}$ e $\bar{v}$ non sono paralleli allora OPQ sono i vertici di un triangolo



se α misura in radianti l'angolo interno $P\hat{O}Q$, si dice che i vettori formano angolo α.

$(\hat{\bar{v}\bar{v}} = \alpha)$

Se $\bar{v}$ e $\bar{v}$ sono // e concordi si dice che formano angolo ∅ $(\hat{\bar{v}\bar{v}} = 0)$; se paralleli e discordi, si dice che il loro angolo è π.
$(\hat{\bar{v}\bar{v}} = \pi)$.

In generale $\underline{0 \leq \hat{\bar{v}\bar{v}} \leq \pi}$, cioè l'angolo tra vettori è compreso tra ∅ e π.

Se $\alpha = \frac{\pi}{2}$ si parla di vettori <u>ORTOGONALI</u>

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 5 di 186

PRODOTTO di un numero Reale per un Vettore

$a \in \mathbb{R}$, $\bar{v}$

Caso generale: $a \neq 0$ $\bar{v} \neq \bar{0}$

si esegue una normale moltiplicazione (tenendo conto dei segni!) cioè, in altri termini:

$a\bar{v}$ è parallelo e concorde con $\bar{v}$ se $a > 0$; parallelo e discorde se $a < 0$ con modulo $|a\bar{v}| = |a||\bar{v}|$

se $a = 0$ oppure $\bar{v} = \bar{0}$ allora $a\bar{v} = \bar{0}$

PROPRIETÀ

1. $b(a\bar{v}) = ba(\bar{v})$ $\quad a, b \in \mathbb{R}$
2. $b(\bar{u} + \bar{v}) = b\bar{u} + b\bar{v}$
3. $(a+b)\bar{v} = a\bar{v} + b\bar{v}$

COMBINAZIONE LINEARE (CL)

Sono dati n vettori : $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots \bar{v}_n$
ed n numeri reali : $a_1, a_2, \dots a_n$

Si dice combinazione lineare di $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots v_n$ con coefficienti $a_1, a_2 \dots a_n$ il vettore

$$a_1\bar{v}_1 , a_2\bar{v}_2 , a_3\bar{v}_3 \dots a_n\bar{v}_n$$

PRODOTTO VETTORIALE (restituisce un vettore)

$\bar{u} \wedge \bar{v}$ $\qquad (\bar{u} \times \bar{v})$

Def. se $\bar{u}$ e $\bar{v}$ non sono paralleli
$\bar{u} \wedge \bar{v}$ è vettore avente modulo
$|\bar{u} \wedge \bar{v}| = |\bar{u}||\bar{v}| \operatorname{sen} \widehat{\bar{u}\bar{v}}$

direzione: che appartiene alla retta per O ortogonale al piano individuato dai vettori $\bar{u}, \bar{v}$ e verso definito dalla "regola della mano destra".

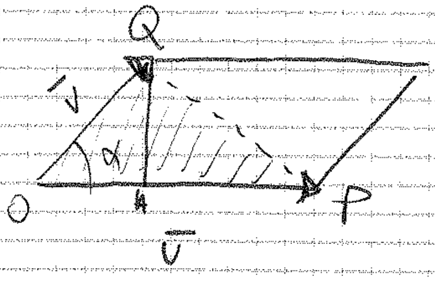
Se $\bar{u}$ e $\bar{v}$ sono paralleli $\bar{u} \wedge \bar{v} =_{def} 0$

PROPRIETÀ:

1. $\bar{u} \wedge \bar{v} = -\bar{v} \wedge \bar{u}$ (anticommutativa)
2. $\bar{u} \wedge (\bar{v}_1 + \bar{v}_2) = \bar{u} \wedge \bar{v}_1 + \bar{u} \wedge \bar{v}_2$
   $(\bar{u}_1 + \bar{u}_2) \wedge \bar{v} = \bar{u}_1 \wedge \bar{v} + \bar{u}_2 \wedge \bar{v}$
3. $a \in \mathbb{R}$, $(a\bar{u}) \wedge \bar{v} = \bar{u} \wedge (a\bar{v}) = a(\bar{u} \wedge \bar{v})$

In generale
$(\bar{u} \wedge \bar{v}) \wedge \bar{w} \neq \bar{u} \wedge (\bar{v} \wedge \bar{w})$

Significato geometrico di $|\bar{u} \wedge \bar{v}|$



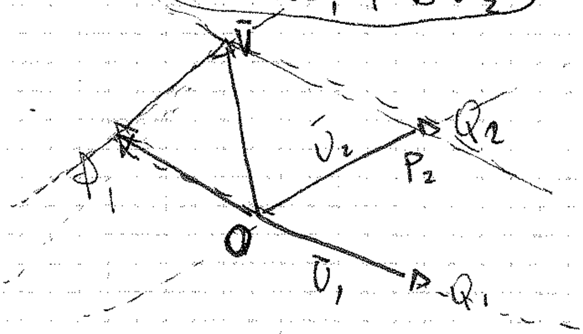
$|\bar{u}||\bar{v}| \operatorname{sen} \alpha$ = area del parall. = 2 area triangolo OPQ

II) Consideriamo i vettori di un piano π per O.
Fissiamo due di questi vettori di π non paralleli tra loro: $\bar{v}_1, \bar{v}_2$.
È possibile definire una c.b. tra i vettori del piano e le coppie ordinate di numeri reali

$$(a, b) \rightsquigarrow \bar{v} = a\bar{v}_1 + b\bar{v}_2 \quad \text{in } \pi$$

Viceversa, dato $\bar{v}$ nel piano di $\bar{v}_1$ e $\bar{v}_2$, esistono a, b per cui

$$\bar{v} = a\bar{v}_1 + b\bar{v}_2$$



$v = OP_1 + OP_2$

e poi boh...

??

III) Siano $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$ vettori non complanari. Si può definire una c.b. tra terne ordinate (a, b, c) di numeri reali e vettori dello spazio.

$$(a, b, c) \rightsquigarrow \bar{v} = \bar{v}_1 a + b\bar{v}_2 + c\bar{v}_3$$

PRODOTTO PER NUMERI REALI

$k \in \mathbb{R}$, $\bar{v} = a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}$

$$k\bar{v} = k(ai + bj + ck) = ka\bar{i} + kb\bar{j} + kc\bar{k} = (ka)\bar{i} + (kb)\bar{j} + (kc)\bar{k}$$

per moltiplicare un vettore si moltiplicano le componenti per il numero reale.

PRODOTTO SCALARE

$$\bar{v} \cdot \bar{v} = (a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}) \cdot (a_1\bar{i} + b_1\bar{j} + c_1\bar{k}) =$$

$$ai \cdot (a_1 i + b_1 j + c_1 k) + bj \cdot (a_1 i + b_1 j + c_1 k) + ck \cdot (a_1 i + b_1 j + c_1 k)$$

$= aa_1 + bb_1 + cc_1$ (per le proprietà del prodotto scalare) grazie alla base ortonormale

$$\Longrightarrow \sqrt{\bar{v} \cdot \bar{v}} = |\bar{v}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$\bar{v} \cdot \bar{v} = |v||v| \cos \widehat{\bar{v}\bar{v}}$

se $\bar{v} \neq 0$ e $\bar{v} \neq 0$

$$\cos \widehat{\bar{v}\bar{v}} = \frac{\bar{v} \cdot \bar{v}}{|\bar{v}||\bar{v}|} = \frac{aa_1 + bb_1 + cc_1}{\left(\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\right)\left(\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\right)}$$

ES $\quad \bar{u} = \bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k} \qquad v = \bar{i} + \bar{k}$

$$\bar{u} \wedge \bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & k \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\bar{i} - 4\bar{j} - 2\bar{k}$$

Verifichiamo che $\bar{u} \wedge \bar{v}$ è ortogonale ad $\bar{u}$: dobbiamo vedere che il prodotto scalare di $\bar{u} \wedge \bar{v}$ con $\bar{u}$ è nullo.

$$(u \wedge v) \cdot u = 2 \cdot 1 + (-4)2 + (-2)(-3) = 2 - 8 + 6 = 0$$

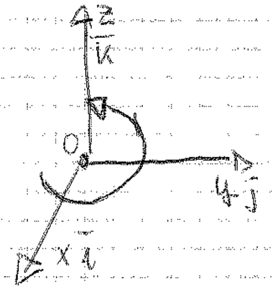
PRODOTTO MISTO

O TRIPLO — di 3 vettori

$\bar{u} \cdot (\bar{v} \wedge \bar{w}) \rightarrow$ è un numero.

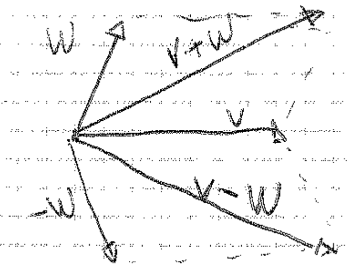
se e solo se i 3 vettori sono sullo stesso piano allora è $= 0$

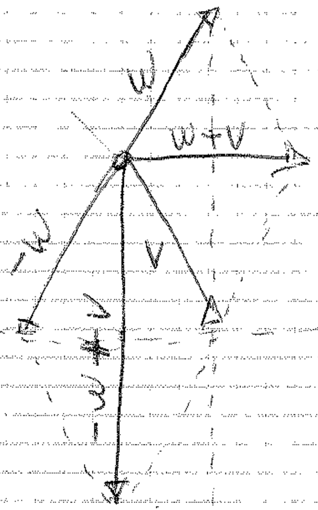
1. $\bar{u} \cdot \bar{v} \wedge \bar{w} = 0 \iff \bar{u} \cdot \bar{v} \wedge \bar{w}$ sono complanari
2. $|\bar{u} \cdot \bar{v} \wedge \bar{w}| =$ volume del parallelepipedo avente i tre vettori come spigoli.



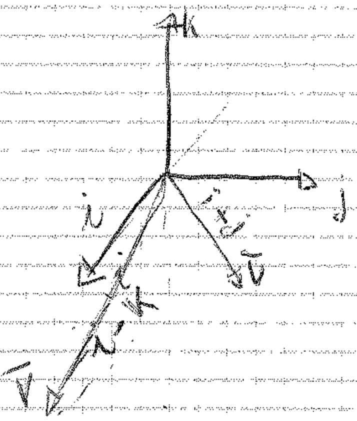
versori

- $|i| = |j| = |k| = 1$
- $i \cdot j = 0 \qquad i \wedge j = k$
- $j \cdot k = 0 \qquad j \wedge k = i$
- $k \cdot i = 0 \qquad k \wedge i = j$





Trovare i versori complanari con $u = i - k$ e $v = i + j$ ed ortogonali a $u + v$



$u + v = 2i + j - k$

~~(u+v)·w=0~~

$u + v = w = ai - ak + bi + bj$

$(u+v) \cdot w = 0$

$(2i + j - k) \cdot ((a+b)i + bj - ak) = 0$

che vale $a = -b$

quindi

$aj - ak$

per verificare la complanarità con u e v
faccio il prodotto misto e deve venire zero

$(\bar{u} \wedge \bar{v}) \wedge \bar{w} \cdot \bar{u} \wedge \bar{v} = 0$?

$$\begin{vmatrix} -24 & -6 & -14 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = +96 - 12 - 84 = 0 \quad \text{OK}$$

prima di poter scrivere questo vettore come c.l.
devo verificare che u e v non siano paralleli.
le terne di u e v non sono proporzionali, quindi
non c'è parallelismo.
Poichè u e v non sono paralleli ogni vettore $\bar{z}$ del
loro piano si può esprimere come loro c.l.,
cioè esistono due numeri x e y tali che
il vettore $\bar{z}$ è uguale a $x\bar{u} + y\bar{v}$
Troviamo x e y quando $\bar{z} = (\bar{u} \wedge \bar{v}) \wedge \bar{w}$

$$(-24, -6, -14) = x(2,1,1) + y(0,3,-1)$$

$$\begin{cases} -24 = 2x \\ -6 = x + 3y \\ -14 = x - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -12 \\ -6 = -12 + 3y \\ -14 = -12 - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -12 \\ y = -12 + 14 = 2 \\ -6 = -12 + 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -12 \\ y = 2 \end{cases}$$

MATRICI

DETERMINANTI

Ad ogni matrice "quadrata" si può associare un numero!

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$A \in \mathbb{R}^{n,n}$$

$n = 3$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Def = $\det A$ è la somma (con opportuno segno) di tutti i prodotti di n elementi di A presi in righe e colonne diverse

$$\det A = \pm\, a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$$

dove $j_1, j_2 \dots j_n$ sono una permutazione di $1, 2, \dots n$

con segno + se è stato fatto un numero pari di scambi, − se ne è stato fatto uno dispari

Es $A \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ lo faccio basandomi sulla prima colonna.

$$\det A = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \end{vmatrix} - 1 \left(- \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right) =$$

$$5 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

Matrice trasposta

Sia $A \in \mathbb{R}^{m,n}$. Si dice trasposta di A la matrice $n \times m$ ottenuta da A con lo scambio ordinato delle righe con le colonne. Simbolo: ${}^tA$

Es. $A \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\{2 \times 3\}$ ${}^tA = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ $\{3 \times 2\}$

Proprietà: Se $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $\det A = \det {}^tA$

Matrici triangolari (casi particolari di matrici quadrate)

$A \begin{pmatrix} \cdot & & \\ & \cdot & \\ & & \cdot \end{pmatrix}$ triang alta: $a_{ij} = 0 \quad i > j$

triang bassa: $a_{ij} = 0 \quad i < j$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 23 di 186

Operazioni sulle MATRICI

1) SOMMA

Siano A, B matrici $m \times n$

$C = A + B$ è sempre $m \times n$

se $A = (a_{ij})$, $B(b_{ij})$, $C(c_{ij})$

$C = a_{ij} + b_{ij}$ $\quad i = 1 \ldots m$, $j = 1 \ldots n$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow C = A + B = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 1 & 12 \end{pmatrix}$$

Matrici nulle → matrici con tutti gli elementi nulli
simbolo $\mathbf{O}$

Matrice opposta di A: si indica con $-A$

$$-A = (-a_{ij})$$

2) PRODOTTO per uno SCALARE

Sia $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ $\quad A(a_{ij})$ $\quad i = 1, \ldots, m$, $j = 1 \ldots n$

$k \in \mathbb{R}$, per def $kA = (ka_{ij})$

Es. $$3 \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 6 & 12 & 21 \end{pmatrix}$$

matrici identiche I_n

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \quad n \times n$$

funzionano da elementi neutri nel prodotto
(purchè abbia senso fare il prodotto)

Esempio $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ 2×3

$$A \cdot I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

15 Marzo 2012

TEOREMA di BINET

Siano A e B matrici quadrate $n \times n$, il $\det(AB) = (\det A)(\det B)$

COROLLARIO: $\det(xA) = x^n \det(A) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\det(A^k) = (\det A)^k$

matrici invertibili

Sia A una matrice quadrata $(n \times n)$, A si dice invertibile se esiste una matrice B $(n \times n)$ tale che $AB = BA = I_n$ (matrice identica) ✻

ES.

$A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ è invertibile $B \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ si ha $AB = BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

ES

$A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ non è invertibile

CRITERI di INVERTIBILITÀ ~~e~~ CALCOLO dell' INVERSA

I) Sia A invertibile.
Perché A sia invertibile il determinante deve essere $\neq 0$.

$$AA^{-1} = I \rightarrow \det(A)\det(A^{-1}) = 1 = \det I$$

II) $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$

Costruiamo la matrice $A^* = (A_{ij})$ dove A_{ij} è il complemento algebrico di a_{ij}

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot {}^t(A^*)$$

Dim.

$$A \cdot A^{-1} = A\left[\frac{1}{\det A} \cdot {}^t(A^*)\right] = \frac{1}{\det A}\left(A\,{}^tA^*\right) = \frac{1}{\det A}(c_{ij}) = (*)$$

$c_{ij} = \det A$ (primo teorema di Laplace)

$c_{ij} = 0$ con $i \neq j$ (secondo teorema di Laplace)

$$(*) = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} \det A & 0 & 0 \\ 0 & \det A & 0 \\ 0 & 0 & \det A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Con calcoli analoghi

$$\left[\frac{1}{\det A}\,{}^t(A^*)\right]A = I \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,{}^t(A^*)$$

Esempi su "allegato"

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 31 di 186

16 Marzo 2012

TRASFORMAZIONI ELEMENTARI (t.e.) sulle righe (colonne) di una matrice

$A \in \mathbb{R}^{m,n}$ (ma volendo anche a $\mathbb{C}$)

$R_1, R_2, \dots R_m$ righe di A

3 TIPI

		Effetti delle t.e. sul DETERMINANTE
① $R_i \to R_i + a R_j$	$a \in \mathbb{R}$ $i \neq j$	nessuno
② $R_i \longleftrightarrow R_j$	$i \neq j$	cambia il segno
③ $R_i \to kR_i$	$k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$	moltiplica il det per k

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 + 2R_2} A' = \begin{pmatrix} 13 & 2 & 17 \\ -1 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & 7 \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow{R_2 \to 5R_2} A'' = \begin{pmatrix} 13 & 2 & 17 \\ -5 & 20 & 25 \\ 6 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

- nessuna trasformazione elementare cambia il rango della matrice

Proposizione. Data una matrice A, è possibile trasformare A in una matrice ridotta A' con un numero finito di t.e. (sulle righe).

Dimostrazione. Sia $R_i \neq 0$ e sia $a_{ij} \neq 0$ consideriamo le t.e. sulle righe al di sotto di R_k.

$$R_k \to R_k - \frac{a_{kj}}{a_{ij}} R_i$$

l'elemento di posto j della "nuova" riga k-esima sarà nullo.

Esempio.
$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$R_2 \to R_2 + \left(-\frac{3}{2}\right) R_1 \qquad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$R_3 \to R_3 - \frac{1}{2} R_1 \qquad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

Definizione. Se A' è una matrice ottenuta da A con un numero finito di t.e. sulle righe, diremo che A' è equivalente ($\sim$) ad A (per righe).

METODI di Applicazione ai sistemi.

È dato un sistema lineare di m equazioni in n incognite: $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$AX = B$$

A → matrice dei coefficienti:

a_{ij} = coefficiente di x_j nella i-esima equazione

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \rightarrow \text{matrice delle incognite}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \rightarrow \text{matrice dei termini noti.}$$

Def. Si dice matrice COMPLETA del sistema la matrice di formato

$$m \times (n+1)$$

che si ottiene da A aggiungendo la colonna dei termini noti.
Simbolo: $(A|B)$

Es.
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + 6x_3 = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 6 & 0 \end{array}\right)$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 37 di 186

Il sistema ha infinite soluzioni e si dice che le soluzioni sono ∞^2, dove 2 è il numero delle incognite libere.

Se $k \neq 0$, dalle 3 equazioni ricaviamo 3 incognite in funzione della quarta. Il sistema ha quindi ∞^1 soluzioni.

Caso B:

SISTEMI NON RIDOTTI

Def. Due sistemi lineari si dicono equivalenti se hanno le stesse soluzioni.

Il metodo di riduzione consiste nel trasformare un sistema in uno ridotto equivalente.

Un metodo per trasformare un sistema $AX=B$ in uno equivalente è quello di moltiplicare A e B a sinistra per una matrice P invertibile.

Sia $AX=B$ e sia X_0 una soluzione $AX_0=B$

$(PA)X = PB$ è un sistema per cui X_0 è ancora soluzione: $(PA)X_0 = P(AX_0) = PB$.

Viceversa, se $\tilde{X}_0$ è soluz di $(PA)X=PB$ cioè $(PA)\tilde{X}_0 = PB$, allora $P^{-1}(PA)\tilde{X}_0 = P^{-1}(PB)$, $(P^{-1}P)(A\tilde{X}_0) = (P^{-1}P)B$, $I(A\tilde{X}_0) = IB$,

$A\tilde{X}_0 = B$. Quindi $\tilde{X}_0$ è anche soluzione di $AX=B$.

IL TEOREMA di ROUCHÈ - CAPELLI

Premessa.

Lemma - Sia A una matrice ed A' una matrice equivalente ad A (per righe)

$$\rho(A) = \rho(A')$$

Tenendo conto della situazione dei sistemi ridotti si ha:

Teorema (di R-C.) - Sia $AX = B$ un sistema lineare.

↳ (1) Il sistema è risolubile, cioè ha almeno una soluzione se e solo se

$$\rho(A) = \rho(A|B)$$

↳ (2) Se $AX = B$ è risolubile, la soluzione è unica se e solo se $\rho(A) = \rho(A|B) = n$ dove n è il numero delle incognite.

↳ (3) Il sistema ha infinite soluzioni, dipendenti da $n - \rho(A)$ parametri se $\rho(A) = \rho(A|B) < n$. Più precisamente, esistono $n - \rho(A)$ incognite "libere". Per ogni scelta delle incognite libere le rimanenti sono definite in modo unico.

Conclusione

Proposizione. Sia A una matrice quadrata $n \times n$. Sono equivalenti le seguenti affermazioni.

1. A è invertibile
2. $\rho(A) = n$
3. i sistemi $AX = B$ hanno una e una sola soluzione $\forall B$
4. $\det A \neq 0$

Consideriamo $a, b \in \mathbb{R}$. Allora

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Il prodotto notevole però, non è valido per le matrici, a causa dell'anticommutatività.

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$$

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A+B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow (A+B)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = S$$

verifichiamo che S sia diverso da $S' = A^2 + 2AB + B$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -6 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = S'$$

Effettivamente abbiamo ottenuto risultati diversi, $S \neq S'$.

Se infatti all'interno dei reali $ab = ba$ con le matrici $AB \neq BA$.

Verifichiamolo:

$$\left[AB = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}\right] \neq \left[BA = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}\right]$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 45 di 186

Qualche es. su matrici e determinanti

Ricorda che:

$$\det(AB) = (\det A)(\det B)$$
$$\det(BA) = (\det B)(\det A)$$

essendo i determinanti dei fattori $\in \mathbb{R}$, è vero che

$$(\det A)(\det B) = (\det B)(\det A)$$

e quindi

$$\det(AB) = \det(BA)$$

Tuttavia, $AB \neq BA$!

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{matrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 4 & 2 \end{matrix}$$

$$\det A = 2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} =$$
$$8 + 4 = 12$$

$$\det B = (\text{calcolato con Sarrus}) = (6 + 20 - 4) - (8 + 20 - 3) = -3$$

$$\det(AB^2) = 12 \cdot 9 = 108$$

$$(A+B) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 7 \\ 7 & 4 & 7 \end{pmatrix} \longrightarrow \det(A+B) = 0 = \det(B+A)$$

$$\det(AB + A^2) = \det A(B+A) = 0$$

Trovare l'inversa di $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

$\det A = +3 - 8 - 4 = -9$

$$A^* = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -2 & +1 \\ +12 & +3 & -6 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^tA^* = \begin{pmatrix} -8 & 12 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ 1 & -6 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{9}\,{}^tA^* = \begin{pmatrix} -\frac{8}{9} & +\frac{4}{3} & +\frac{1}{9} \\ -\frac{2}{9} & +\frac{1}{3} & -\frac{2}{9} \\ +\frac{1}{9} & -\frac{2}{3} & +\frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

$A = \begin{pmatrix} 3-t & -2 \\ -5 & -t \end{pmatrix}$ trovare t per cui questa matrice non è invertibile.

Una matrice non è invertibile quando il suo determinante è pari a $\emptyset$.

$\det A = -t(3-t) - (10) = +t^2 - 3t - 10 =$

$= (t-5)(t+2)$.

Il determinante si annulla per $t_1 = 5$ e $t_2 = -2$, dunque per questi valori di t la matrice non è invertibile.

Verifico il risultato t_1

$A_{t_1} \begin{pmatrix} (3-5) & -2 \\ -5 & -5 \end{pmatrix} \qquad \det A_{t_1} = 10 - 10 = 0$

Trovare il valore del rango di B al variare del parametro c.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & c & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & c \end{pmatrix} \qquad \rho(A) = ?$$

devo anzitutto ridurla.

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & c & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2c & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

se $c \neq 0$ $\rho(B) = 3$

se $c = 0$ $\rho(B) = 2$

Giovedì 22 Marzo 2012
lezione con Grammina
sistemi lineari (2ª parte)

SISTEMI LINEARI OMOGENEI

$$AX = 0$$

1) Siano X', X'' due soluzioni.
Allora anche $X' + X''$ è soluzione.

Dim. $AX' = 0$, $AX'' = 0 \Rightarrow$

$$A(X' + X'') = AX' + AX'' = 0 + 0 = 0$$

cioè $(X' + X'')$ è soluzione.

2) Se X' è una soluzione, anche kX' è soluzione, $\forall k \in \mathbb{R}$

Dim. $AX' = 0$ per ipotesi.

$$A(kX') = k(AX') = k0 = 0$$

GENERALIZZAZIONE

$(*)\quad AX = B$

Sia A $m \times n$, X $n \times p$, $B = m \times p$

Supponiamo A e B note e cerchiamo le X che soddisfano l'equaz $(*)$.

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & c_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{33} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$B = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{cases} 2x_{11} + x_{21} = 0 \\ x_{11} + x_{21} = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_{12} + x_{22} = -1 \\ x_{12} + x_{22} = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_{13} + x_{23} = 3 \\ x_{13} + x_{13} = 2 \end{cases}$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad \Updownarrow \qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$$AC_1 = B_1 \qquad AC_2 = B_2 \qquad AC_3 = B_3$$

C_1, C_2, C_3 = colonne di X

B_1, B_2, B_3 = colonne di B

Chiamiamo $X_1, X_2 \dots X_n$ le righe della matrice X

Nell'esempio abbiamo due matrici righe incognite

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 2 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right) \quad R_2 \to R_2 - R_1 \quad \left(\begin{array}{cc|ccc} 2 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} 2X_1 + X_2 = (0 \ -1 \ 3) \\ -X_1 = (-1 \ 3 \ -1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_2 = (0 \ -2 \ 3) - 2X_1 = (0 \ -2 \ 3) + (-2(1 \ -3 \ 1)) \\ X_1 = (1 \ -3 \ 1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_1 = (1 \ -3 \ 1) \\ X_2 = (-2 \ 5 \ 1) \end{cases} \Longrightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

MATRICI INVERTIBILI _ Calcolo di A^{-1}

A quadrata $n \times n$
Sono condizioni equivalenti:
1. A invertibile
2. $\det A \neq 0$
3. $\rho(A) = n$

Consideriamo una matrice $A^{(n \times n)}$ invertibile.
Dire che $AA^{-1} = \underline{I}$ vuol dire che A^{-1} è una soluzione di $AX = I$, eq. matriciale del tipo visto.
Osserviamo che:

$\rho(A) = n$ per ipotesi.

$\rho(A|I)$?

$(A|I)$ è una matrice $n \times (nn)$ ridotta con rango n.

Il teorema di R.C. conferma che $AX = I$ è risolvibile con una sola soluzione che è allora proprio la matrice inversa.
L'inversa A^{-1} si può trovare col "metodo di riduzione"

Esempio

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad (A|I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$ $R_2 \to R_2 - R_1$ $\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$

$\begin{cases} 2X_1 + X_2 \\ -X_1 = (-1,1) \end{cases}$ $\quad X_1, X_2$ righe di A^{-1}

$\begin{cases} X_1 = (1,-1) \\ X_2 = (1,0) - 2(1,-1) = (-1, 2) \end{cases}$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

ESEMPIO di calcolo di A^{-1} con le trasformazioni ELEMENTARI sulle righe di una matrice.

A^{-1} è soluz. di $AX = I$

Usando il metodo di riduzione:

$(A|I)$. Con le trasformazioni elem. arrivo ad avere A ridotta. Si può risolvere un sistema con incognite le righe di $X_1, \dots, X_n$ di A^{-1}.

Esempio.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad \det A = -1$$

A è invertibile.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_1]{R_2 \to R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_2 \to R_2 + 3R_3]{R_1 \to R_2 + 3R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -5 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to R_1 - 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 9 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to -R3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 9 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & +2 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\underset{I}{} \qquad \uparrow A^{-1}$$

PER IL PRODOTTO

1. $\forall v \in \bar{V}$, $1v = v$

2. $\forall v \in \bar{V}$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$: $a(bv) = (ab)v$

"DI COLLEGAMENTO"

1. $\forall a \in \mathbb{R}$, $\forall v, v' \in \bar{V}$

$$a(v + v') = av + av'$$

2. $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\forall v \in \bar{V}$:

$$(a + b)v = av + bv$$

Dimostrazione dell'unicità dell'elemento neutro rispetto alla somma.

Supponiamo che ne esistano due: 0_v, $0'_v$

$$0_v + 0'_v = \begin{cases} 0'_v \\ 0_v \end{cases} \Longrightarrow 0'_v = 0_v$$

Dimostrazione dell'unicità dell'opposto di un vettore

Supponiamo che esista un vettore $v \in \bar{V}$ che ammette due opposti. w e w'

$$v + w = w + v = 0_v$$
$$v + w' = w' + v = 0_v$$

$$w = w + 0_v = w + (v + w') = (w + v) + w' = 0_v + w' = w'$$

Esempi

1) $V = \mathbb{R}$ con le usuali operazioni di somma e prodotto

2) $V = \mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n$ è l'insieme di tutte le n-uple ordinate $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ di numeri reali

somma: $(x_1 \dots x_n) + (y_1 \dots y_n) \stackrel{def}{=} (x_1 + y_1 \dots x_n + y_n)$

prodotto per n. reali: $a(x_1 \dots x_n) \stackrel{def}{=} (ax_1 \dots ax_n)$

3) $V = \mathbb{R}^{m,n}$

V è l'insieme delle matrici reali con m righe ed n colonne.

le operazioni sono quelle già definite sulle matrici.

Osservazione: Molto spesso si identificano $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n,1}, \mathbb{R}^{1,n}$

4) V = insieme di vettori dello spazio applicati in un punto, con le operazioni note (regola del parallelogramma, ...)

5. $V = \mathbb{R}_n[X]$ = insieme dei polinomi nella variabile X a coefficienti reali.

Operazioni: somma di polinomi e moltiplicazione per reali

6) $V = \mathcal{F}(I)$ = insieme delle funzioni reali di variabile reale definite su un dato intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$

operazioni: somma di funzioni, prodotto per numeri reali.

(Controesempio)

- Non è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ il sottoinsieme

$$W' = \{(x, y, 1),\ x, y \in \mathbb{R}\}$$

ad es. $0_{\mathbb{R}_3} = (0, 0, 0) \notin W'$

- Non è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$

$$W'' = \{(x, y, y^2),\ x, y \in \mathbb{R}\}$$

$(3, 4, 16) \in W''$ $\quad (3, 4, 1) \notin W''$

* $(0, 0, 0) \in W''$

* $(\underset{\in W''}{0, 1, 1}) + (\underset{\in W''}{0, 2, 4}) = (0, 3, 5) \notin W''$

Abbiamo visto che

1. in $V = \mathbb{R}[X]$ costituiscono un sottospazio i polinomi di grado $\leq d$, d grado fissato. Questo s.s. si indica con $\mathbb{R}_d[X]$

2. In $\mathcal{F}((a,b))$ sono sottospazi $C^0((a,b))$, $C^1((a,b))$

$C^0((a,b))$: funzioni continue su (a,b)

$C^1((a,b))$: funzioni derivabili con derivata continua su (a,b)

SOTTOSPAZI "BANALI" = "IMPROPRI" = "TRIVIALI" = ...

Per ogni spazio vettoriale V sono sottospazi

$$\left.\begin{aligned} W &= \{0_V\} \\ W &= V \end{aligned}\right\} \rightarrow$$

i sottospazi non sono MAI vuoti. c'è sempre almeno il vettore nullo.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 65 di 186

TEOREMA di KRONECKER

$A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ $\rho(A) = \rho$

$\exists$ un minore (complemento algebrico) di A di ordine ρ con determinante non nullo.

AND

Tutti i minori di ordine $(\rho + 1)$ hanno determinante nullo.

Es

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Corollario 1

Se il rango di una matrice $= n^{max}$ il det $\neq 0$

Corollario 2

$A \in \mathbb{K}^{n \times m}$ $\Rightarrow \rho(A) = n \Leftrightarrow \det = 0$

data A' ottenuta da A riducendo con solo operazioni elementari di tipo combinazione lineare (1° tipo) oppure di scambio (2° tipo)

$\Rightarrow$ il det A è uguale, a meno del segno, al prodotto degli elem speciali.

$$\begin{pmatrix} \boxed{x} & x & x & x \\ 0 & \boxed{x} & x & x \\ 0 & 0 & \boxed{x} & x \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{x} \end{pmatrix}$$

$x \neq 0$

$x \cdot x \cdot x \cdot x = \det A$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 67 di 186

Proposizione Siano $\overline{W}_1, \overline{W}_2$ ss di $\overline{V}$

1. $\overline{W}_1 + \overline{W}_2$ è un ss di $\overline{V}$.
2. $\overline{W}_1 + \overline{W}_2$ contiene $\overline{W}_1 \cup \overline{W}_2$
3. Se $\overline{U}$ è un ss. che contiene $\overline{W}_1 \cup \overline{W}_2$, allora $\overline{U} \supseteq W_1 + W_2$

Dimostrazione

1.1. $0_V \in \overline{W}_1 + \overline{W}_2$?

$$0_V = 0_V \in W_1 + 0_V \in W_2$$

1.2. $v, v' \in W_1 + W_2 \overset{?}{\Longrightarrow} v + v' \in \overline{W}_1 + \overline{W}_2$

$$\begin{cases} v = w_1 + w_2 \\ v' = w_1' + w_2' \end{cases} \Rightarrow v + v' = (w_1 + w_2) + (w_1' + w_2')$$

$$v + v' = \underbrace{(w_1 + w_1')}_{\in \overline{W}_1} + \underbrace{(w_2 + w_2')}_{\in \overline{W}_2}$$

1.3. $v \in W_1 + W_2 ;\ k \in \mathbb{R} \overset{?}{\Longrightarrow} kv \in \overline{W}_1 + \overline{W}_2$

$$v = w_1 + w_2 \quad w_1 \in \overline{W}_1 \quad w_2 \in \overline{W}_2$$

$$kv = k(w_1 + w_2) = \underbrace{(kw_1)}_{\in W_1} + \underbrace{(kw_2)}_{\in W_2}$$

② $\overline{V} = \mathbb{R}^3$

$\overline{W}_1 = \{(a, b, c),\ a, b \in \mathbb{R}\}$ sottospazi

$\overline{W}_2 = \{(0, c, d),\ c, d \in \mathbb{R}\}$

$W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3 : (\alpha, \beta, \gamma) = \underbrace{(\alpha, \beta, 0)}_{\in W_1} + \underbrace{(0, 0, \gamma)}_{\in W_2}$

Osservazione $(\alpha, \beta, \gamma) = \underbrace{(\alpha, 0, 0)}_{\in W_1} + \underbrace{(0, \beta, \gamma)}_{\in W_2}$

Def. la somma di due sottospazi W_1 e W_2 di $\overline{V}$ si dice diretta e si indica con $\overline{W}_1 \oplus W_2$
se ogni vettore $v \in \overline{W}_1 + \overline{W}_2$ si decompone in modo unico come somma di un vettore $w_1 \in \overline{W}_1$ e di un vettore $w_2 \in \overline{W}_2$

Prop. la somma di due ss. $\overline{W}_1, \overline{W}_2$ è diretta se e solo se
$\overline{W}_1 \cap \overline{W}_2 = \{0_V\}$

Esempio $V = \mathbb{R}^n$

Consideriamo i vettori $e_i = (0, \dots 1, \dots 0)$

1 in posizione i-esima $i = 1, 2 \dots n$

Se $n = 3$ $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 (0,1,0)$, $e_3 (0,0,1)$

$\mathcal{L}(e_1, e_2) = \{a_1 e_1 + a_2 e_2\} = \{a_1(1,0,0) + a_2(0,1,0)\}$
$= \{(a_1, a_2, 0) / a_{1,2} \in \mathbb{R}\}$

$\mathcal{L}(e_1, e_2, e_3) = \mathbb{R}^3$

DEFINIZIONE V si dice FINITAMENTE GENERATO se in V si può trovare un numero finito di vettori $v_1, v_2 \dots v_r$ che generano V, cioè
$V = \mathcal{L}(v_1, \dots, v_r)$

Esempi: 1. Vettori dello spazio
2. $V = \mathbb{R}_3$ (o più in generale $\mathbb{R}^n$)
$\mathbb{R}^3 = \mathcal{L}(e_1 e_2 e_3)$ $\mathbb{R}^n = \mathcal{L}(e_1, e_2 \dots, e_n)$

Osservazioni ed esempi

Anche in spazi vettoriali non f.g esistono sottospazi f.g.

Es. ① In ogni V se si considerano r vettori $W = \mathcal{L}(v_1 \dots v_r)$ è fg. per definizione

② $V = \mathbb{R}[x]$ è SS fg ad esempio
$W = \mathbb{R}_d[x]$ $w \in W$ $w = p(x) = a_0 + a_1 x + \dots a_d$
c. l. di $1, x, x^2 \dots x^d$
$W = \mathcal{L}(1, x, x^2 \dots x^d)$

Venerdì 30 marzo 2012
lezione con Giannino

DIPENDENZA LINEARE

Def 1. Siano $v_1, \dots v_r$ vettori di uno sp. vettoriale V. I vettori si dicono linearmente dipendenti (l. d.) se esistono r numeri reali $a_1, \dots, a_r$ non tutti nulli per cui

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_r v_r = 0_V$$

Def 2. I vettori $v_1 \dots v_r$ si dicono linearmente indipendenti (l. i) se $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_r v_r = 0_V$ è possibile solo con coefficienti tutti nulli

$$\left(a_1 v_1 + \dots a_r v_r = 0_V \Longrightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_r = 0\right)$$

Def 3 Se $v_1 \dots v_r$ sono l. i l'insieme $\{v_1 \dots v_r\}$ si dice LIBERO.

Caso $r = 1$. Consideriamo l'uguaglianza $a_1 v_1 = 0_V$

Se $v_1 = 0_V$ essa è vera $\forall a$

Se $v_1 \neq 0_V$ è vera solo se $a = 0$

$\Longrightarrow \{v_1\}$ è libero se e solo se $v_1 \neq 0_V$

Esempi.

① $V = \{\text{vettori dello spazio}\}$

$\{v_1, v_2\}$ è libero se $a_1 v_1 + a_2 v_2 = 0_V \Longrightarrow a_1 = a_2 = 0$

$v_1 = 0_V$ vettori l.d., idem se $v_2 = 0_V$

$v_1, v_2 \neq 0 \quad a_1 v_1 = -a_2 v_2$

I vettori sono l. i $\Longleftrightarrow$ non sono paralleli.

Es. ① $V = \mathbb{R}^n$ $\quad e_1, \ldots, e_n$ sono l.i.

li considero nell'ordine scritto.

$(1, 0, 0 \ldots 0) \neq 0_V$

$(0, 1, 0 \ldots 0) \quad e_2 \neq \alpha e_1, \quad \forall \alpha$

$(0, 0, 1 \ldots 0) \quad e_3 \neq \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2, \quad \forall \alpha_1, \alpha_2$

$(0, 0, 0 \ldots 1)$

② $V = \mathbb{R}[x]$

n polinomi di gradi diversi sono l.i.

Ordiniamo i polinomi per gradi crescenti.

$p_1(x), \; p_2(x), \ldots \; p_n(x)$

Caso particolare (Esempio)

$1, x, x^2, \ldots x^n$ sono l.i.

③ $V = \{$vettori dello spazio$\}$ 4 vettori sono sempre l.d.

v_1, v_2, v_3, v_4

$\mathbb{R}^3$

BASI di UNO SPAZIO VETTORIALE

Dimensione

Def. Si dice che l'insieme ordinato $(v_1, v_2, \dots v_n)$ di vettori di uno spazio vettoriale V ne costituiscono una base se:

1. $v_1 \dots v_n$ sono l.i
2. $v_1 \dots v_n$ generano V

Corollario alla PROP. 3

Se $(v_1 \dots v_n)$ è una base per V, ogni vettore $v \in V$ si scrive in modo unico come c.l. di $v_1 \dots v_n$. Esistono cioè e sono univocamente determinati n numeri reali $a_1 \dots a_n$ per cui

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots a_n v_n$$

I numeri (nell'ordine) $a_1, a_2 \dots a_n$ si dicono componenti di v rispetto alla base $(v_1, v_2 \dots v_n)$

Data una base in V esiste quindi una c.b. tra V e $\mathbb{R}$

$$(a_1, a_2, \dots a_n) \longleftrightarrow a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$$

Questa c.b. "conserva" le operazioni.

Def. Il numero dei vettori di una base di $\vec{V}$ si dice dimensione di $\vec{V}$ ($\dim V$). Quindi:

1. Dire che V ha dimensione n vuol dire che c'è una base con n vettori
2. Per calcolare $\dim \vec{V}$ si deve trovare una base e contarne gli elementi.

Convenzione Se $V = \{0_V\}$ si dice che $\dim V = 0$, una base è l'insieme vuoto.

RANGO di una MATRICE "A"

1. A ridotta. Consideriamo lo spazio $\mathcal{R}(A)$ formato dalle c.l. delle righe di A ("spazio delle righe") le righe non nulle formano una base $\mathcal{R}(A) \Rightarrow \rho(A) = \dim \mathcal{R}(A)$
2. A non (necessariamente) ridotta.

   PREMESSA Ogni t.e. sulle righe di A trasforma A in una matrice A' con lo stesso spazio delle righe.

Conseguenza: se si trasforma una matrice A in una ridotta, lo spazio $\mathcal{R}(A)$ non cambia. Per ogni A:

$$\rho(A) = \dim \mathcal{R}(A)$$

Esercitazioni

3 Aprile 2012

Sia $\bar{V}$ uno spazio vettoriale e siano W_1, W_2 due sottospazi.

$$W_1 + W_2 = \left\{ \bar{v} \mid v = aw_1 + bw_2 \quad \forall w_1 \in \bar{W}_1, \ \forall w_2 \in \bar{W}_2 \quad v = \mathcal{L}(w_1, w_2) \right\}$$

$$\bar{W}_1 \cup \bar{W}_2 = \{ w_1 \in \bar{W}_1 \ \underline{or} \ w_2 \in \bar{W}_2 \}$$

non è un sottospazio (in generale)

$$\bar{W}_1 \cup \bar{W}_2 \overset{\text{contenuto in}}{\subseteq} W_1 + W_2$$

$$\bar{W}_1 \cap \bar{W}_2 = \{ v \mid w_1 \in \bar{W}_1 \ \underline{and} \ w_2 \in \bar{W}_2 \}$$

è un sottospazio

PAUSA VACANZE di PASQUA

METODO degli SCARTI SUCCESSIVI

Si esaminano i vettori $v_1 \dots v_s$ scritti in un ordine qualsiasi e si scartano, se esistono, i vettori nulli e quelli che sono combinazioni lineari dei precedenti. (o multipli).
I vettori rimasti sono l. i. e generano V, quindi formano una base. Il loro numero è la dimensione di V.

"GIANNINA DIXIT"
Per uno stesso insieme posso trovare basi diverse, ma in numero sempre uguale (la dimensione non cambia)

Viceversa: Supponiamo di avere t vettori $w_1, w_2 \dots w_t$ in uno sp. vett. f.g., che siano l. i.
È possibile aggiungere, se necessario, dei vettori, al fine di ottenere una base.
(Metodo del completamento di un insieme libero di vettori ad una base)

OSSERVAZIONE. Se si hanno s vettori, $\boxed{s<n}$, non si ha una base perché i vettori non possono generare tutto $\mathbb{R}^n$

Se $\boxed{s>n}$, i vettori non formano una base perché non sono l. i.

Se $\boxed{s=n}$, per verificare che formano una base è sufficiente verificare che i vettori sono l. i. oppure che sono generatori.

VERIFICA dell'INDIPENDENZA LINEARE

di certi x vettori dati $v_1 \dots v_n \in \mathbb{R}^n$

Metodi

Generali

1. Usare la def. Provare che
$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m = 0_{\mathbb{R}^n} \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$$

2. Esame successivo dei vettori (nessuno dei vettori è combinazione lineare dei precedenti)

Particolare per $\mathbb{R}^n$

3. Costruire una matrice A $m \times n$ scrivendo i vettori come righe

$\mathcal{L}(v_1 \dots v_m)$ diventa lo spazio delle righe di A.

$v_1 \dots v_m$ sono l. i. $\Longleftrightarrow \rho(A) = m$

Più precisamente:

Se $\rho(A) = m$ $v_1 \dots v_m$ formano una base per lo spazio delle righe e quindi sono l. i.

Se $\rho(A) < m$, $v_1 \dots v_m$ sono l. d. le righe non nulle di una matrice A' ridotta da A con t.e. sulle righe è una base per $\mathcal{L}(v_1, \dots v_m)$

Esercizio Consideriamo in $\mathbb{R}_3[x]$ i polinomi

$p_1(x) = 1 + x + 2x^2$

$p_2(x) = x + x^2 - x^3$

$p_3(x) = -1 + x + kx^3$

I 3 polinomi formano una base per
$W = \mathcal{L}(p_1(x), p_2(x), p_3(x))$?

Lo spazio vettoriale $\mathbb{R}_3[x]$ è f.g.
e ammette come base ad es $(1, x, x^2, x^3)$
Ogni polinomio $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$
ha come componenti, rispetto a quella base,
a_0, a_1, a_2, a_3. Possiamo sostituire $p_1(x)\ p_2(x), p_3(x)$
con le quaterne delle loro componenti

$p_1(x) \longrightarrow (1, 1, 2, 0)$ $\quad p_2(x) \longrightarrow (0, 1, 1, -1)$

$p_3(x) \longrightarrow (-1, 1, 0, k)$ e usare i calcoli precedenti

Se $k \neq -2$, i tre polinomi sono l. i.
e formano una base per W
Se $k = -2$, i 3 polinomi sono l. d.
Una base per W è data "dalle righe della matrice": $(1 + x + 2x^2, x + x^2 - x^3)$

Venerdì 13 Aprile 2012

SISTEMI LINEARI OMOGENEI

$AX = 0 \quad A \in \mathbb{R}^{m,n}$

Le soluzioni formano un sottospazio W di $\mathbb{R}^n$

- $\rho(A) = n$. W è il sottospazio formato dal solo vettore nullo. $\dim W = 0$ (base è $\emptyset$)
- $\rho(A) < n$ il sistema ha $\infty^{n-\rho(A)}$ soluzioni dipendenti da $n - \rho(A)$ parametri.

Si può dimostrare che la dimensione di W è $n - \rho(A)$ (cioè, $\dim W = n°$ incognite libere); una base si ottiene dando il valore 1 ad un'incognita libera e zero alle altre (in tutti i modi possibili)

Es. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_2 = x_4 - x_5 - 2x_1 = 3x_1 + 3x_3 - x_5 \\ x_4 = -x_1 + 3x_3 \end{cases}$$

soluzioni $(t_1, -3t_1 + 3t_2 - t_3, t_2, -t_1 + 3t_2, t_3) =$

$t_1(1, -3, 0, -1, 0) + t_2(0, 3, 1, 3, 0) + t_3(0, -1, 0, 0, 1)$

Il sottospazio W delle soluzioni è generato dai tre vettori

$S_1 = (1, -3, 0, -1, 0)$, $S_2 = (0, 3, 1, 3, 0)$, $S_3 (0, -1, 0, 0, 1)$

${}^tP$ ha come righe n vettori l.i. di $\mathbb{R}^n$

$\Longrightarrow \rho({}^tP) = n \Longrightarrow \det({}^tP) \neq 0 \Longrightarrow \det(P) \neq 0$

P è invertibile

da $\cancel{S}$ si può ottenere $\begin{pmatrix} a'_1 \\ \vdots \\ a'_n \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

<u>OSSERVAZIONE</u>. $\forall\, M \in \mathbb{R}^{m,n}$, $\rho(M) = \rho({}^tM)$

② $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \quad f(x, y, z) = (x+y,\ z+1)$

I) $f(v+v') = f((x,y,z)+(x',y',z')) = f(x+x', y+y', z+z') =$

$= ((x+x')+(y+y'),\ (z+z')+1)$

$f(v)+f(v') = (x+y,\ z+1) + (x'+y',\ z'+1) =$

$((x+y)+(x'+y'),\ (z+z')+2) \neq f(v+v')$

f non è quindi un'applicazione lineare

③ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$f(x,y) = (x, y^2)$

II) $f(kv) = f(kx, ky) = (kx, (ky)^2) = (kx, k^2y^2)$

$k\,f(v) = k\,f(x,y) = k(x, y^2) = (kx, ky^2)$

$f(kv) = k\,f(v)$ solo se $k=0$ oppure $k=1$

$\Rightarrow f$ non è lineare

derivabili — f continue

④ $f: C^1(I) \to C^0(I)$, I intervallo aperto di $\mathbb{R}$

f è la derivazione

v è una fz di classe C^1 su I

$f(v) = v'$ è la sua derivata

le due condizioni sono verificate

f è una a.l.

⑤ $f: \mathbb{R}^{2,2} \to \mathbb{R}^{2,2} \quad f(M) = {}^tM$

I) $v = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad v' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$

$f(v+v') = f\begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & c+c' \\ b+b' & d+d' \end{pmatrix}$

$f(v)+f(v') = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & c+c' \\ b+b' & d+d' \end{pmatrix}$ verificata

II) verificata

f è una a.l.

APPLICAZIONI LINEARI SURIETTIVE

$f: A \to B$ f funzione tra insiemi

Def. si dice IMMAGINE di f ($Im f$) il sottoinsieme di B formato dagli elementi b che sono corrispondenti di almeno un elemento $a \in A$, cioè del tipo $f(a)$, per qualche $a \in A$

$$Im f = \{b \in B,\ \exists a \in A : f(a) = b\}$$

Def. f si dice suriettiva se $Im f = B$

Proposizione 3. Se $f: U \to V$ è una a.l., $Im f$ è un sottospazio di V

ISOMORFISMI

Def. Una a.l. $f: U \to V$ si dice isomorfismo se è iniettiva e suriettiva (cioè, una corrispondenza biunivoca)

Def. Due sp. vettoriali U e V si dicono isomorfi se esiste un isomorfismo $f: U \to V$

Esempio. $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^{2,2}$ sono sp. vettoriali isomorfi con la funzione

$$f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^{2,2}$$

$$f(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

f è un isomorfismo,

- f è lineare? si
- f è iniettiva? si: $Ker f = \{(0,0,0,0)\}$
- f è suriettiva? si: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = f(a, b, c, d)$