NUMERO : 472 DATA : 18/02/2013

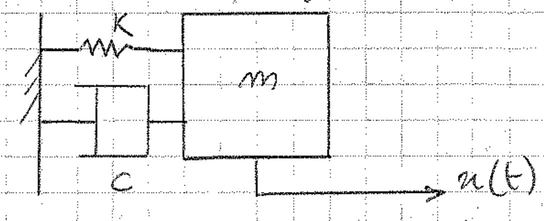
A P P U N T I

STUDENTE : Bruno

MATERIA : Dinamica dei Sistemi Meccanici
Prof. Velardocchia

Sistema a un grado di libertà (risposta libera)

Consideriamo un sistema ad un grado di libertà in cui la massa m è vincolata a traslare orizzontalmente, e siano ad essa collegate una molla di rigidezza K e uno smorzatore viscoso di costante c.



Indico con $x(t)$ lo spostamento della massa m dalla posizione di riposo e scrivo l'equazione di equilibrio del sistema: $m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=0$

l'equazione di equilibrio è un'equazione differenziale del 2° ordine, omogenea e a coefficienti costanti la cui soluzione ha forma: $x(t)=Ae^{St}$ dove A e S sono due costanti eventualmente complesse. Derivando la soluzione e sostituendo nell'equazione si ottiene:

$\dot{x}=ASe^{St}$; $\ddot{x}=AS^2e^{St} \Rightarrow mAS^2e^{St}+cASe^{St}+KAe^{St}=0$

$\Rightarrow A(mS^2+cS+K)=0$, che ha soluzioni: $\begin{cases} A=0 \\ S_{1,2}=\dfrac{-c\pm\sqrt{c^2-4mK}}{2m} \end{cases}$

La soluzione $A=0$ rappresenta l'assenza di moto e non è interessante, maggiore importanza hanno le soluzioni del polinomio caratteristico. Esse prendono il nome di poli e andando a sostituire nella soluzione principale si ha:

$x(t)=A_1e^{S_1t}+A_2e^{S_2t}$; i coefficienti A_1 e A_2 sono determinati imponendo le condizioni iniziali del sistema. È possibile riscrivere la soluzione dell'equazione differenziale in modo da evidenziare i caratteri fondamentali. Indicando con:

- $c_{cr}=2\sqrt{Km}$ lo smorzamento critico
- $\omega_n=\sqrt{\dfrac{K}{m}}$ la pulsazione naturale
- $\xi=\dfrac{c}{c_{cr}}$ il fattore di smorzamento

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 47

$x(t) = (A_1 + t A_2) e^{-\omega_n t}$

$x(t=0) = x_0$ $\Rightarrow \begin{cases} A_1 = x_0 \\ A_2 = v_0 + \omega_n x_0 \end{cases}$

$\dot{x}(t=0) = v_0$

SISTEMA SOTTOSMORZATO

È il caso che più frequentemente si presenta nella pratica. Data $i = \sqrt{-1}$ l'unità immaginaria e $\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\xi^2}$ la pulsazione del sistema smorzato, i due poli dell'equazione differenziale diventano:

$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm i\omega_n\sqrt{1-\xi^2} = -\xi\omega_n \pm i\omega_d$; sostituendo nella soluzione generale: $x(t) = e^{-\xi\omega_n t}(A_1 e^{-i\omega_d t} + A_2 e^{i\omega_d t})$. Applicando la forma trigonometrica dei numeri complessi (formule di Eulero):

$$\begin{cases} A e^{i\omega t} = A\cos\omega t + iA\sin\omega t \\ x(t) = e^{-\xi\omega_n t}(A_1 e^{-i\omega_d t} + A_2 e^{i\omega_d t}) \end{cases}$$

$\Rightarrow x(t) = e^{-\xi\omega_n t}((A_1+A_2)\cos\omega_d t + i(A_2 - A_1)\sin\omega_d t)$; in cui derivando ed imponendo le condizioni iniziali ottengo: $\begin{cases} x_0 = A_1 + A_2 \\ v_0 = -\xi\omega_n(A_1+A_2) + i\omega_d(A_2 - A_1) \end{cases}$

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = x_0 \\ i(A_2 - A_1) = \dfrac{v_0 + \xi\omega_n(A_1+A_2)}{\omega_d} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 + A_2 = x_0 \\ i(A_2 - A_1) = \dfrac{v_0 + \xi\omega_n x_0}{\omega_d} \end{cases}$$

Poiché sia x_0 che v_0 sono numeri reali, è necessario che $(A_1 + A_2) \in \mathbb{R}$ e $i(A_2 - A_1) \in \mathbb{R}$, cioè che A_1 e A_2 siano due costanti complesse e coniugate così come $S_{1,2}$. Ponendo: $\begin{cases} A_1 + A_2 = a \\ i(A_2 - A_1) = b \end{cases} \Rightarrow$

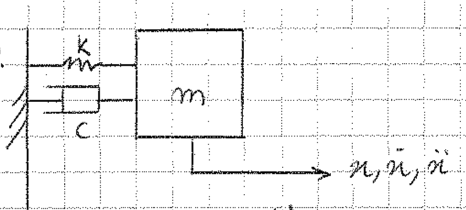
$x(t) = e^{-\xi\omega_n t}(a\cos\omega_d t + b\sin\omega_d t)$ ← Il termine tra parentesi rappresenta l'oscillazione armonica di pulsazione ω_d, mentre quello esponenziale esprime la diminuzione dell'ampiezza dello spostamento al crescere del tempo t. È possibile riscrivere l'equazione precedente per evitare questa caratteristica, ponendo: $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ e $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$; allora $x(t) = A e^{-\xi\omega_n t}\sin(\omega_d t + \alpha)$

α è l'angolo di fase.

I grafici delle risposte dei diversi sistemi sono:

Risposta a gradino

Considerando il sistema:



soggetto ad una forzante, si vuole determinare la risposta del sistema.
Consideriamo una forzante con caratteristica $f(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ f_0 & t \geq 0 \end{cases}$

questo genere di forzante è definita "gradino" ed è tipica dei creep tests. L'equazione di equilibrio del sistema per $t \geq 0$ è $m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=f_0$.
Poniamo per ipotesi $x_{(t=0)}=0$ e $\dot{x}_{(t=0)}=0$. La soluzione dell'equazione di equilibrio è data dalla risposta a regime (soluzione particolare) e dall'integrale generale dell'omogenea associata (soluzione transitoria). Per questo sistema il calcolo dell'integrale particolare è una costante e di conseguenza $\ddot{x}_p=0$ e $\dot{x}_p=0$, $x_p=\frac{f_0}{k}$. La soluzione completa è quindi: $x(t)=\frac{f_0}{k}+A_1e^{s_1t}+A_2e^{s_2t}$. Le condizioni iniziali per calcolare le costanti A_1 e A_2 vanno calcolate sulla soluzione completa e non sulla sola omogenea. Per un sistema sottosmorzato si ha che $x(t)=\frac{f_0}{k}+e^{-\xi\omega_n t}(a\cos\omega_d t+b\sin\omega_d t)$ in cui imponendo le condizioni iniziali si ha: $\begin{cases} x_0=0 \Rightarrow \frac{f_0}{k}+a=0 \\ \dot{x}=0 \Rightarrow -\xi\omega_n a+\omega_d b=0 \end{cases}$

che una volta sostituita nell'equazione principale si ha:

$$x(t)=\frac{f_0}{k}\left(1-e^{-\xi\omega_n t}\left(\cos\omega_d t+\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\omega_d t\right)\right)$$

Nel caso in cui il gradino abbia valore unitario, l'equazione di risposta alla forzante prende il nome di "ammettenza indiciale".

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 7 di 47

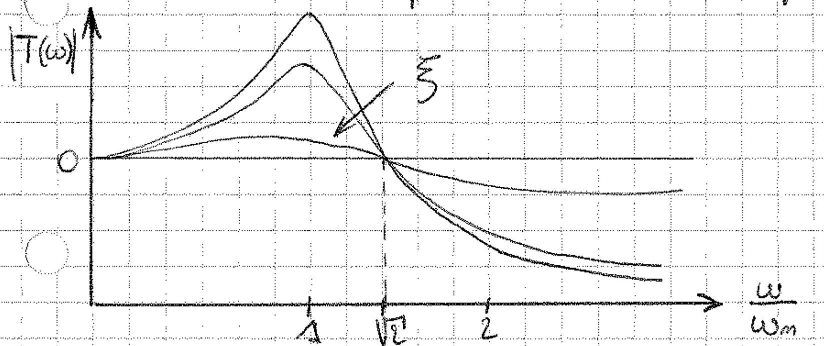
Trasmissibilità

Si definisce trasmissibilità il rapporto tra la forza applicata e la forza che si scarica a terra tramite il vincolo. Indicando con $f_v(t)$ la funzione reazione vincolare, la trasmissibilità è così definita:

$$T = \frac{f_v(t)}{f(t)} = \frac{kx + c\dot{x}}{f_0 e^{i\omega t}} = (k + i\omega c)\frac{X}{f_0} = \frac{k + i\omega c}{k - m\omega^2 + i\omega c}$$

Soluzione ottenuta sostituendo l'integrale $x = Xe^{i\omega t}$ dove compare X. La trasmissibilità ha modulo $|T| = \frac{\sqrt{1 + (2\xi r)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$

Tracciandone l'andamento al variare di r si nota come esso abbia valore inferiore all'unità per $r > \sqrt{2}$



$$\begin{cases} c_{eq} = \dfrac{a}{\pi\omega} & \text{divido per } c_{cr} \\ \eta = \dfrac{a}{\pi K} & \text{sostituisco } a \end{cases} \Rightarrow \xi = \frac{\eta \pi K}{2\pi\omega\sqrt{Km}} = \frac{\eta\,\omega_n}{2\omega}$$

$$\Rightarrow \eta = 2\xi\,\frac{\omega}{\omega_n}$$

Il modello di smorzamento isteretico ha senso solo se sul sistema agisce una forzante in grado di fare compiere al sistema cicli completi, non ha quindi applicazioni nello studio della risposta libera. Si definisce poi "rigidezza complessa" il termine $K(1+i\eta)$ ed è la parte complessa di questo raggruppamento ad assorbire lavoro. La soluzione particolare va sempre ricercata nella forma $x(t) = Xe^{i\omega t}$ e sostituendo si ha: $X = \dfrac{f_0}{K - m\omega^2 + iK\eta}$

che è un numero complesso di modulo e fase:

$$\begin{cases} |Q(\omega)| = \dfrac{|X|}{f_0/K} = \dfrac{A}{f_0/K} = \dfrac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2+\eta^2}} \\ tg\varphi = -\dfrac{\eta}{1-r^2} \end{cases}$$

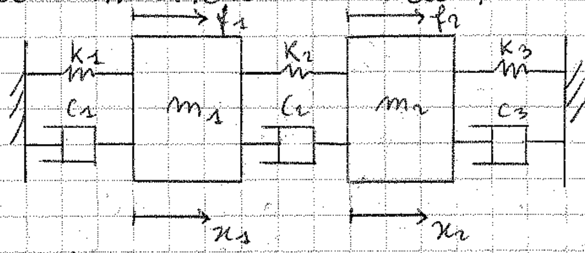
Si definisce risonanza il valore di pulsazione che massimizza l'ampiezza di oscillazione: $\dfrac{\partial Q}{\partial C_0} = 0 \Rightarrow \dfrac{2r(1-r^2)}{((1-r^2)^2+\eta^2)^{3/2}} = 0$ $\begin{cases} r=0 \\ r=1 \leftarrow \omega_r = \omega_n \end{cases}$

La frequenza di risonanza coincide con la pulsazione naturale del sistema e non dipende dallo smorzamento

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 11 di 47

Sistema a più gradi di libertà

Consideriamo il seguente sistema meccanico a parametri concentrati costituito da 2 masse e il telaio:



Il moto è rettilineo ed orizzontale, le equazioni del moto sono quindi:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 + k_1 x_1 + k_2 (x_1 - x_2) + c_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = f_1 \\ m_2 \ddot{x}_2 + c_3 \dot{x}_2 + k_3 x_2 + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2 (x_2 - x_1) = f_2 \end{cases}$$

, definendo la matrice delle masse (matrice diagonale positiva e simmetrica): $[m] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$

La matrice di smorzamento viscoso, reale, simmetrica e definita o semidefinita positiva: $[c] = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix}$

La matrice rigidezza, reale, simmetrica e definita o semidefinita positiva: $[k] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix}$; il vettore delle coordinate generalizzate e quello delle forzanti: $\{x\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$, $\{f\} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$, si possono esprimere le 2 equazioni del moto tramite relazioni matriciali: $[m]\{\ddot{x}\} + [c]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{f\}$

Questo genere di sistema meccanico in cui nelle equazioni del moto di ogni massa compaiono coordinate generalizzate anche non della massa a cui è riferita l'equazione, si dicono "accoppiati" ovvero le equazioni del moto non sono indipendenti. Vanno perciò separate le variabili in modo da poter risolvere le equazioni, si deve quindi risolvere il problema agli autovalori.

Bisogna dunque considerare il comportamento dinamico di un sistema meccanico a molti gdl, non smorzato:

e l'insieme di tutti gli autovettori di un sistema si definisce "forma modale", in cui gli autovettori sono inseriti a meno di una costante moltiplicativa. Essendo autovalori ed autovettori in corrispondenza biunivoca, l'autovalore ω_r^2 e l'autovettore $\{\psi_r\}$ caratterizzano il modo proprio r-esimo. Risolvendo l'autoproblema si ottengono 2 matrici: la matrice diagonale degli autovalori:

$$[\Lambda] = \text{diag}(\omega_r^2) = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \omega_n^2 \end{bmatrix} \rightarrow \text{matrice degli autovalori}$$

e la matrice degli autovettori ottenuta ordinandoli in colonna:

$$[\psi] = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \{\psi_1\} & \{\psi_2\} & \cdots & \{\psi_n\} \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix}$$

La risposta del sistema è quindi rappresentabile nella forma:

$\{X(t)\} = \sum_{r=1}^{n} A_r \cos(\omega_r t + \theta_r)$, equazione in cui A_r e θ_r dipendono dalle condizioni iniziali autovettori distinti rispetto alla matrice delle rigidezze, mentre nella seconda compare K_r, la rigidezza modale r-esima, il cui valore dipende dall' autovalore considerato. Generalizzando attraverso la matrice modale è possibile scrivere che:

- matrice delle masse modali: $[\psi]^T[m][\psi] = diag(m_r)$
- matrice delle rigidezze modali: $[\psi]^T[K][\psi] = diag(K_r)$

Gli autovettori sono quindi m- ortogonali e K-ortogonali

Disaccoppiamento delle equazioni

Consideriamo un sistema a molti gdl, a parametri concentrati e non forzato, si esegue l'analisi modale determinando:
$[m]\{\ddot{x}\}+[K]\{x\}=\{0\} \rightarrow \{\psi_r\}$, diag$(m_r)$ e diag(K_r)
Definiamo "trasformazione modale diretta" un vettore di funzioni tale che: $\{x(t)\}=[\psi]\{\eta(t)\}$, in cui $\{\eta(t)\}$ è il vettore delle coordinate modali. Derivando 2 volte rispetto al tempo la definizione precedente e osservando che la matrice modale non dipende dal tempo, sostituisco nell'equazione del moto del sistema $[m][\psi]\{\ddot{\eta}\}+[K][\psi]\{\eta\}=0$
Premoltiplicando per la matrice modale trasposta:
$[\psi]^T[m][\psi]\{\ddot{\eta}\}+[\psi]^T[m][\psi]\{\eta\}=0$, sfruttando l'm-ortogonalità e la K-ortogonalità si giunge ad un sistema di n equazioni differenziali disaccoppiate nella forma:
$m_r\ddot{\eta}_r(t)+k_r\eta_r(t)=0$, oppure se avevo m-normalizzato le masse modali: $\ddot{\eta}_r(t)+\omega_r^2\eta_r(t)=0$.
Si è quindi ricondotto lo studio di un sistema ad n gradi di libertà allo studio di n sistemi ad un grado di libertà.
Occorre ora trovare un modo per esprimere le coordinate modali attraverso quelle fisiche del sistema.

In definitiva A_r e B_r, costanti moltiplicative del modo proprio r-esimo hanno espressione:

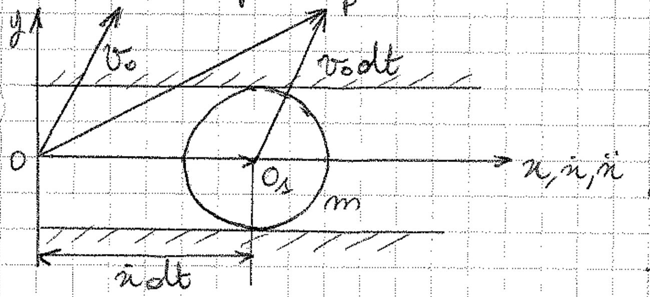
$$A_r = \frac{\{\psi_r\}^T [m] \{x_0\}}{m_r} \quad e \quad B_r = \frac{\{\psi_r\}^T [m] \{\dot{x}_0\}}{\omega_r m_r}$$

verso la serie di Caughey: $[C_p] = \sum_{i=0}^{n-1} C_i [m] \left([m]^{-1}[K]\right)^i$,
$C_i \in \mathbb{R}$ costante.
Troncando la serie di Caughey ai primi 2 membri si ottiene:
$[C_p] = \alpha [m] + \beta [K]$, sostituendo nell'equazione del moto:
$diag(m_r)\{\ddot{\eta}\} + [\Psi]^T(\alpha[m] + \beta[K])[\Psi]\{\dot{\eta}\} + diag(K_r)\{\eta\} = \{0\}$
Che sviluppata per righe fornisce n equazioni del tipo:
$m_r \ddot{\eta}_r + (\alpha m_r + \beta K_r)\dot{\eta}_r + K_r \eta_r = 0$
Dividendo per la massa modale r-esima e ponendo
$\xi_r = \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{1}{\omega_r} + \frac{\beta}{2}\omega_r$ ho: $\ddot{\eta}_r + 2\xi_r \omega_r \dot{\eta}_r + \omega_r^2 \eta_r = 0$
Supponendo che ciascun modo sia sottosmorzato ho quindi
n soluzioni del tipo: $\eta_r(t) = (A_r \cos\omega_d t + B_r \sin\omega_d t)e^{-\xi_r \omega_r t}$
con $\omega_d = \omega_r \sqrt{1-\xi_r^2}$

Lavoro delle forze d'Inerzia

È possibile determinare il lavoro delle forze d'Inerzia attraverso uno spostamento effettivo differenziando l'energia cinetica e cambiandone segno oppure si determina la loro intensità e se ne calcola il lavoro per uno spostamento effettivo. Data una massa m traslante con velocità V, applicando la definizione di lavoro delle forze d'Inerzia si ha: $dL' = -m\frac{dV}{dt}\cdot V dt = -m dt\left(V\frac{dV}{dt}\right) = -m dt\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{dV^2}{dt}\right) = -dT$.

Se si definisce "spostamento virtuale" uno spostamento infinitesimo compatibile con la condizione di vincolo è possibile calcolare il lavoro delle forze d'Inerzia anche per questo spostamento. Consideriamo l'esempio di una sfera in un tubo:



Lo spostamento effettivo OP è funzione del tempo e della coordinata lagrangiana $P = P(x,t)$; la velocità assoluta della sfera vale:

$$V = \frac{dP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial q}\cdot\dot q$$

Derivando rispetto a $\dot q$ l'espressione precedente: $\frac{\partial V}{\partial \dot q} = \frac{\partial P}{\partial q}$

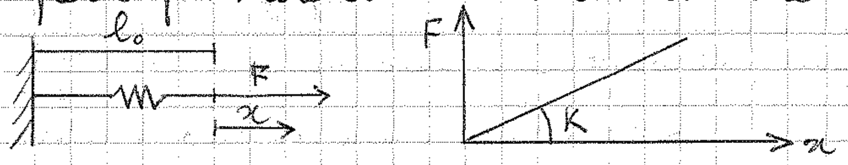
Lo spostamento virtuale è indicato attraverso la notazione δP e applicando la sua definizione si ha: $\delta P = P(q+\delta q, t) - P(q,t) = \frac{\partial P}{\partial q}\delta q$; il lavoro virtuale delle forze d'inerzia ha quindi espressione: $\delta L' = -m\frac{dV}{dt}\delta P = -m\frac{dV}{dt}\frac{\partial P}{\partial q}\delta q = -m\delta q\left(\frac{dV}{dt}\cdot\frac{\partial V}{\partial \dot q}\right) = -m\delta q\left(\frac{d}{dt}\left(V\frac{\partial V}{\partial \dot q}\right) - \left(V\frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot q}\right)\right)$, essendo $V\frac{\partial V}{\partial \dot q} = \frac{1}{2}\frac{\partial V^2}{\partial \dot q}$ e

$V\frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot q} = V\frac{d}{dt}\frac{\partial P}{\partial q} = V\frac{\partial}{\partial q}\frac{dP}{dt} = V\frac{\partial V}{\partial q}$ e sostituendo nell'espressione precedente:

$$\delta L' = -m\delta q\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial V^2}{\partial \dot q}\right) - \left(V\frac{\partial V}{\partial q}\right)\right) = -m\delta q\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot q}\left(\frac{1}{2}V^2\right) - \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{1}{2}V^2\right)\right.$$

Energia Potenziale

Si vuole determinare il lavoro delle forze interne compiute da campi che ammettono potenziale, calcolo il lavoro necessario per deformare una molla non inerte:



La molla è un sistema meccanico che ha la caratteristica di opporsi alle deformazioni assiali, flessionali e torsionali.
Applicando l'equazione dell'energia al sistema si ha:
$dL^e = -dL^i \rightarrow Kx\,dx = dV^i$
Integrata da un punto $x=0$ a uno stato generico x si ha:
$V^i = \frac{1}{2}Kx^2$. Se si considera che la forza applicata dalla molla ha espressione $F = Kx$ e si sostituisce nell'equazione precedente, si ha: $V^i = \frac{1}{2}Fx \Rightarrow$ l'energia potenziale ha valore pari al prodotto della forza per metà dello spostamento del suo punto d'applicazione nella direzione della forza.
Questo costituisce l'applicazione del teorema di Clapeyron, teorema utilizzato per valutare la costante elastica di sistemi distribuiti.

Rigidezza di una barra di trazione:

Consideriamo una trave (elemento meccanico elastico con una dimensione prevalente) non inerte a sezione costante, dalla geometria nota e dal materiale noto. Sia la trave incastrata in un estremo e vincolata ad una massa sull'altra, sia poi guidata nella deformazione da supporti che ammettono solo deformazioni assiali. Suppongo di imprimere uno spostamento assiale alla massa, voglio determinare il moto del sistema. Per prima cosa considero un elemento infinitesimo

Principio dei lavori virtuali

Il principio dei lavori virtuali afferma che condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio di un sistema è che la somma dei lavori virtuali di tutte le forze attive, esterne ed interne, e delle forze d'Inerzia sia nulla per ogni spostamento virtuale invertibile. Il principio dei lavori virtuali permette di scrivere equazioni in cui non compaiono reazioni vincolari ed è possibile usarlo quando non si hanno attriti nei vincoli. Assegnato uno spostamento virtuale δq_k si calcolano i lavori compiuti dalle forze esterne, quelle interne e dalla forza d'Inerzia.

$\frac{\delta L^e}{\delta q_k} + \frac{\delta L^i}{\delta q_k} + \frac{\delta L'}{\delta q_k} = 0$. Essendo δL^e il lavoro prodotto dalle forze esterne, forzante, per calcolarne il lavoro lo si moltiplica per lo spostamento virtuale, dividendolo poi si ottiene il valore della componente della forzante lungo la direzione dello spostamento virtuale. Il lavoro delle forze interne, se di tipo conservativo, può essere scritto come: $\frac{\delta L^i}{\delta q_k} = -\frac{\partial V^i}{\partial q_k}$

Se si hanno fenomeni d'attrito il ~~loro~~ contributo sul lavoro delle forze interne può essere facilmente modellizzato se si tratta di attriti viscosi, se si hanno attriti secchi non si riesce a ricondurli a funzioni semplici della coordinata lagrangiana. Per modellare l'attrito viscoso si usa la funzione "dissipazione" definita come:

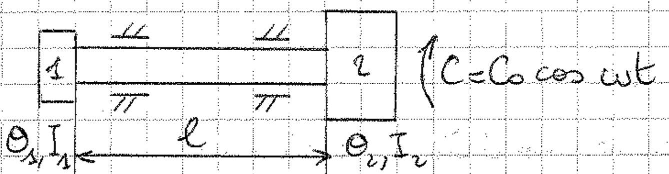
$D = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$, funzione in cui i coefficienti β_{ij} possono essere funzione di q ma non di $\dot{q}$. Se si rispetta questa condizione è possibile scrivere che $\frac{\delta L^i}{\delta q_k} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_k}$

Considerando per un momento il caso ideale di attrito nullo, il principio dei lavori virtuali ha come espressione:

$$-\frac{\partial V}{\partial q_k} - \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k}\right) = 0$$

Ammortizzatori dinamici

Gli ammortizzatori dinamici sono usati per diminuire l'ampiezza delle vibrazioni di un sistema meccanico. Consideriamo un sistema principale oscillante e una massa ad esso elasticamente collegata, si vuole fare in modo che le azioni d'Inerzia del sistema aggiunto contrastino il moto vibratorio del sistema principale.



Sia il sistema principale, 2, sollecitato da una forzante armonica, si vuole limitare l'oscillazione torsionale indotta dalla forzante armonica. Sia l'albero di collegamento tra i due sistemi non inerte, si comporta quindi come una molla torsionale di rigidezza: $K = \frac{G I_p}{l}$

Il sistema ha 2 gdl: θ_1 e θ_2, gli angoli di rotazione dei 2 volani. Non essendo presente alcuna azione dissipativa scrivo l'espressione dell'energia cinetica e dell'energia potenziale:

$T = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\theta}_2^2$ e $V^i = \frac{1}{2} K(\theta_1 - \theta_2)^2$

Usando le 2 coordinate angolari come variabili lagrangiane applico il principio dei lavori virtuali. Primo sistema di spostamenti virtuali:

$$\begin{cases} \delta q_1 = \delta\theta_1 \neq 0 \\ \delta q_2 = \delta\theta_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\delta L^e}{\delta\theta_1} = 0 \quad \text{non agiscono forze esterne su 1} \\ \frac{\delta L^i}{\delta\theta_1} = -\frac{\partial V^i}{\partial\theta_1} = -K(\theta_1 - \theta_2) \Rightarrow I_1 \ddot{\theta}_1 + K(\theta_1 - \theta_2) = 0 \\ \frac{\delta L^e}{\delta\theta_1} = -\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}_1} - \frac{\partial T}{\partial\theta_1}\right) = -I_1 \ddot{\theta}_1 \end{cases}$$

Il secondo sistema di spostamenti virtuali è:

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 31 di 47

le 2 equazioni del moto, si ha:

$(\ddot{\theta}_2-\ddot{\theta}_1)+(\theta_2-\theta_1)\left(\frac{K}{I_1}+\frac{K}{I_2}\right)=0$, ponendo $\theta_r=\theta_2-\theta_1$

$\ddot{\theta}_r+\theta_r\left(\frac{K}{I_1}+\frac{K}{I_2}\right)=0 \longrightarrow \omega_n^2=\frac{K}{I_1}+\frac{K}{I_2}$

Il che rende evidente come il sistema, pur avendo 2 gdl, si comporta come se ne avesse solo uno.

Determiniamo l'integrale particolare ipotizzando la soluzione a regime simile alla forzante:

$$\begin{cases}\theta_1=A\cos\omega t \quad e \quad \theta_2=B\cos\omega t\\ \ddot{\theta}_1+\frac{K}{I_1}(\theta_1-\theta_2)=0\\ \ddot{\theta}_2+\frac{K}{I_2}(\theta_2-\theta_1)=C_0\cos\omega t\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left(\frac{K}{I_1}-\omega^2\right)A-B\frac{K}{I_1}=0\\ \left(\frac{K}{I_2}-\omega^2\right)B-A\frac{K}{I_2}=\frac{C_0}{I_2}\end{cases} \Rightarrow \Delta=-\omega^2(\omega^2-\omega_n^2)$$

$\omega_{11}^2=\frac{K}{I_1} \qquad \omega_{22}^2=\frac{K}{I_2}$

Sostituendo le soluzioni:

$B=\frac{C_0}{K}\frac{\omega_{2}^2(\omega_{11}^2-\omega^2)}{\omega^2(\omega^2-\omega_n^2)}$

$A=\frac{C_0}{K}\frac{\omega_{11}^2\,\omega_{22}^2}{\omega^2(\omega^2-\omega_n^2)}$

per annullare gli effetti della pulsazione di disturbo si dimensionano albero e volano 1 in modo tale che $\omega_{11}^2=\omega^2$. In questa situazione si ha: $B=0$ e $A=-\frac{C_0}{K}$

È bene utilizzare gli ammortizzatori dinamici dove il disturbo sia a pulsazione costante per non rischiare di entrare in condizioni di risonanza che comprometterebbero l'integrità strutturale del sistema.

$$\xleftarrow{N} \quad \boxed{\xleftarrow{\mu dx \frac{\partial u}{\partial t^2}}} \quad \longrightarrow N + \frac{\partial N}{\partial x} dx$$

Con μ la massa per unità di lunghezza della sezione.

$$\cancel{N} + \mu \cancel{dx} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \cancel{N} - \frac{\partial N}{\partial x} \cancel{dx} = 0$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Dalla meccanica dei solidi: $\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{\partial u}{\partial x}$

$$\sigma = \frac{N}{A} = \varepsilon E \rightarrow N = AE \frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = AE \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Sostituendo nell'equazione precedente: $AE \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

$$\cancel{A} E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \cancel{A} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Definendo la costante propria del materiale $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ ottengo

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ → equazione con la stessa forma di quella di d'Alambert per le vibrazioni delle corde tese. Ipotizzo che l'equazione abbia soluzione a variabili separabili ovvero che lo spostamento di una sezione si possa esprimere come il prodotto di una funzione della sola coordinata spaziale e di una funzione della sola coordinata temporale: $u(x,t) = \varphi(x)\eta(t)$

da cui: $\varphi(x) \frac{d^2\eta}{dt^2} = c^2 \eta(t) \frac{d^2\varphi}{dx^2}$, separando le variabili: $\frac{1}{c^2\eta(t)} \cdot \frac{d^2\eta}{dt^2} = \frac{1}{\varphi(x)} \cdot \frac{d\varphi}{dx^2} = -\frac{\omega^2}{c^2}$

Sia il primo, che il secondo membro non dipendono dalla variabile spaziale né da quella temporale; sono rispetto a queste due variabili delle costanti, e questa costante la si pone pari a $-\frac{\omega^2}{c^2}$. Ottengo quindi 2 equazioni differenziali ordinarie:

$$\begin{cases} \ddot{\eta} + \omega^2 \eta = 0 \\ \varphi'' + \frac{\omega^2}{c^2} \varphi = 0 \end{cases}$$

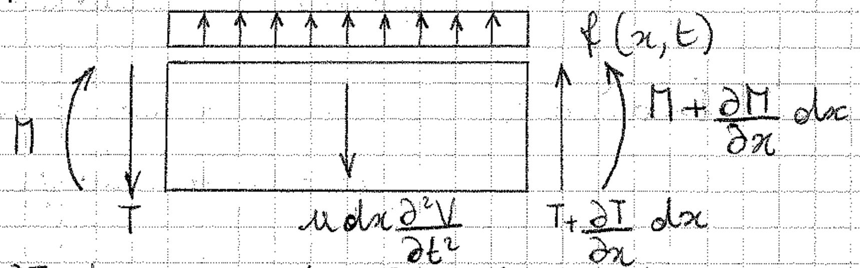
Le 2 equazioni differenziali hanno soluzione armonica del tipo:

$$\begin{cases} \eta(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t & \text{(coordinata modale)} \\ \varphi(t) = C\cos\frac{\omega}{c}x + D\sin\frac{\omega}{c}x & \text{(autofunzione)} \end{cases}$$

Vibrazioni flessionali di travi rettilinee

Considero una trave ad asse rettilineo per cui sia possibile trascurare l'effetto della deformazione a taglio e dell'Inerzia rotazionale delle sezioni rispetto all'Inerzia traslazionale e la deformazione flessionale. Questo modello di trave, applicabile nel caso di trave snella, prende il nome di Eulero-Bernoulli.

Considero un elemento infinitesimo di trave e ne scrivo l'equilibrio alla traslazione e alla rotazione.



$$\begin{cases} T+\frac{\partial T}{\partial x}dx - T - \mu\, dx \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + f(x,t)dx = 0 \\ M + \frac{\partial M}{\partial x}dx - M + \left(T+\frac{\partial T}{\partial x}dx\right)\frac{dx}{2} + T\frac{dx}{2} = 0 \end{cases}$$

Semplificando e trascurando gli infinitesimi del secondo ordine:

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial x} - \mu \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + f(x,t) = 0 \\ \frac{\partial M}{\partial x} + T = 0 \end{cases}$$

Da scienze delle costruzioni è noto che: $M = EI\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ da cui $T = -EI\frac{\partial^3 V}{\partial x^3}$, sostituendo nell'equazione precedente:

$$EI\frac{\partial^4 V}{\partial x^4} + \mu\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = f(x,t)$$

Supponendo la forzante nulla, l'equazione diventa:

$EI\frac{\partial^4 V}{\partial x^4} + \mu\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0$, tale equazione ha soluzioni determinabili attraverso la tecnica della separazione delle variabili:

$$\begin{cases} V(x,t) = \varphi(x)\,\eta(t) \\ \eta(t) = \eta_0 \sin(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

, sostituendo e semplificando i termini temporali: $EI\frac{d^4\varphi}{dx^4} - \mu\omega^2\varphi(x) = 0$

Approccio unificato alle vibrazioni nei continui

Per tutti i sistemi continui si può scrivere l'equazione del moto come un'equazione differenziale alle derivate parziali del tipo:
$M\left[\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right] + K[w] = 0$, in cui $w = w(x,y,z,t)$, funzione che esprime la dinamica del sistema in funzione delle coordinate spaziali e del tempo. Se mi limito a considerare i sistemi monodimensionali la funzione w può essere scritta come $w = w(x,t)$ e a sua volta come $w = w(x,t) = \varphi(x)\, \eta(t)$.

Gli operatori differenziali interessano solo la geometria del sistema e di conseguenza agiscono solo sulla autofunzione trascurando la coordinata modale. Per diversi modi di vibrazione (assiali, flessionali, torsionali) gli operatori cambiano, ma è possibile trovare un metodo di risoluzione generale:

<u>I Vibrazioni assiali di aste</u>: $\mu(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(AE(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0$

$M = \mu(x)$ e $K = -\frac{\partial}{\partial x}\left(AE(x)\frac{\partial}{\partial x}\right)$

<u>II Vibrazioni torsionali di alberi</u>: $I_u(x)\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(GJ_P(x)\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)$

$M = I_u(x)$ e $K = -\frac{\partial}{\partial x}\left(GJ_P(x)\frac{\partial}{\partial x}\right)$

<u>III Vibrazioni flessionali (trave di Eulero-Bernoulli)</u>:

$$\mu(x)\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EJ(x)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) = 0$$

$M = \mu(x)$ e $K = \frac{\partial^2}{\partial x}\left(EJ(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)$

Rispetto agli operatori, l'equazione del moto può essere scritta come $M[\varphi]\ddot{\eta} + K[\varphi]\eta = 0$

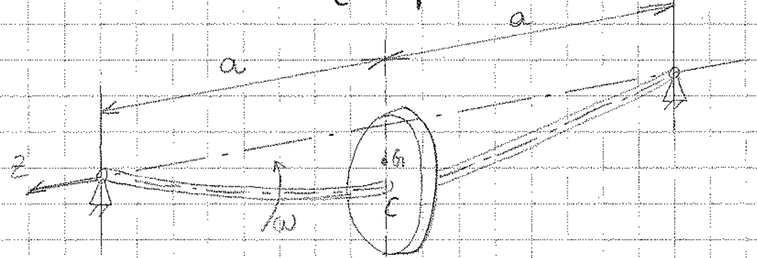
Essendo gli operatori matrici (o altri operatori matematici) non nulli è possibile riscrivere l'equazione precedente come:

$$\frac{\ddot{\eta}}{\eta} = -\frac{K[\varphi]}{M[\varphi]} = -\omega^2 \Rightarrow \ddot{\eta} + \omega^2\eta = 0$$ (rapporto tra accelerazione e spostamenti modali costante rispetto al tempo). Si ha quindi l'autoproblema

Rotore di Jeffcott _ Dinamica dei rotori

La dinamica dei rotori studia i sistemi dinamici non conservativi, che presentano le seguenti caratteristiche:
- moto di precessione non sincrono del rotore rispetto ai cuscinetti;
- moto di vibrazione autoeccitata dovuto all'elasticità dei supporti e all'attrito;
- moto orbitale, che potenzialmente, anche a velocità costante, può crescere continuamente col procedere della rotazione.

Si considera un albero elastico non inerte, sostenuto da 2 cuscinetti non cedevoli; sull'albero è calettato un disco di massa m (in posizione centrale).



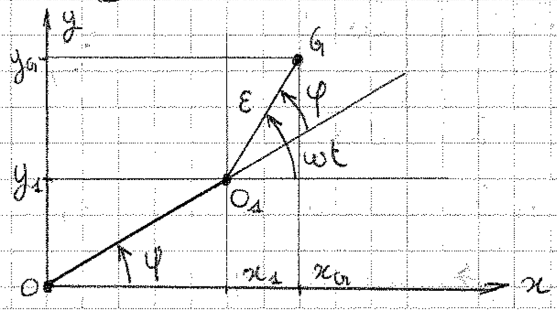
Si trascura l'azione del peso sulla dinamica del sistema e quindi si considera che l'asse dell'albero sia verticale.

C : centro del disco
G: baricentro del disco

$\Rightarrow \overline{GC} = \varepsilon$, dove ε è l'eccentricità

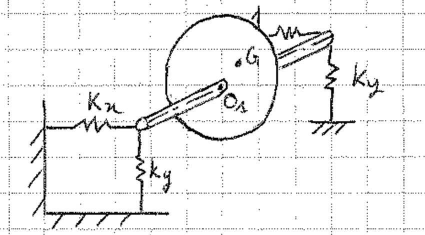
La velocità angolare ω è costante, quindi la forza centrifuga provoca la flessione dell'albero. Il disco è in mezzeria e quindi la deformata dell'albero ha un asse che trasla, ma che rimane comunque parallelo all'asse di rotazione, pertanto non nasce un momento risultante delle forze d'Inerzia: $\vec{M'} = 0$

Ip: $\omega = cost$



Dinamica dei rotori _ Influenza dei supporti elastici

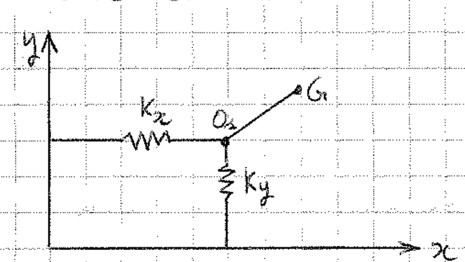
Si studia ora il moto di un albero rigido, sostenuto da dei supporti elastici, con costante di elasticità differente su due piani.



O_1: traccia dell'asse di rotazione sul piano di mezzeria

G: posizione del baricentro del disco sul piano di mezzeria

$\overline{O_1G} = \varepsilon$, dove ε è l'eccentricità. Tale eccentricità è solidale al disco e ruota con esso alla velocità angolare ω che è nota e costante.



Il moto del sistema è determinato quando sono note le leggi del moto delle coordinate x_1, y_1 di O_1.

Questo sistema ha 2 gdl.

Le equazioni del moto si possono determinare applicando il principio dei lavori virtuali: $T = \frac{1}{2} I_G \omega^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2)$, con

$$\begin{cases} x_G = x_1 + \varepsilon \cos \omega t \\ y_G = y_1 + \varepsilon \sin \omega t \end{cases}$$

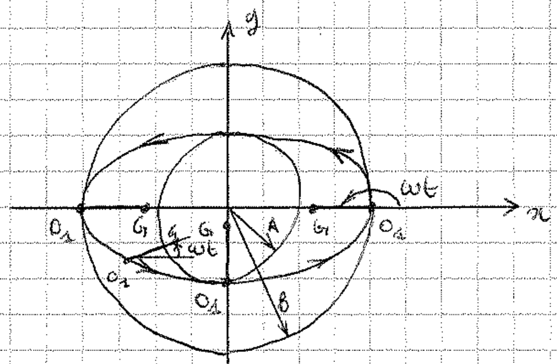
$\Rightarrow T = \frac{1}{2} I_G \omega^2 + \frac{1}{2} m \left[(\dot{x}_1 - \omega \varepsilon \sin \omega t)^2 + (\dot{y}_1 + \omega \varepsilon \cos \omega t)^2 \right]$, quindi l'energia potenziale del sistema non è più dovuta all'elasticità dell'albero, bensì a quella delle molle che rappresentano la cedevolezza dei supporti: $V^i = \frac{1}{2} K_x x_1^2 + \frac{1}{2} K_x y_1^2$

Si ipotizza che le azioni dissipative siano trascurabili e quindi, applicando il principio dei lavori virtuali si ha:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + K_x x_1 = m \varepsilon \omega^2 \cos \omega t \\ m\ddot{y}_1 + K_y y_1 = m \varepsilon \omega^2 \sin \omega t \end{cases}$$

sincrona.

3) $\frac{K_y}{m} < \frac{K_x}{m} < \omega$



Il baricentro G è all'interno della traiettoria ellittica che viene descritta da O_1.

Anche in questo caso la rotazione antioraria del disco e della traiettoria ellittica dell'asse sono concordi.

- Se $I_p > I$, allora la funzione $\lambda_1(\omega)$ non interseca la retta $\lambda = \omega$ e quindi non si ha risonanza
- Se $I_p < I$ la $\lambda_1(\omega)$ interseca la $\lambda = \omega$ e si ha risonanza.

Il valore della velocità ω_c di risonanza si ha scrivendo: $\lambda_1 = \omega \Rightarrow \dfrac{I_p\,\omega + \omega\sqrt{I_p^2 + 4KI/\omega^2}}{2I} = \omega$

pertanto $\omega_c = \sqrt{\dfrac{K}{I - I_p}}$ che è la velocità di risonanza

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 47 di 47