NUMERO : 466 DATA : 18/02/2013

A P P U N T I

STUDENTE : Frison

MATERIA : Analisi Matematica I + Esercizi
Prof. Pandolfi

$$A(x) = 2x^4 + x^3 - x^2 + 2$$

$$B(x) = x^2 + 3$$

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
2x^4 & +x^3 & +0x^2 & -x & +2 & x^2 \quad +3 \\
\hline
2x^4 & & +6x^2 & & & Q(x) \\
\cline{1-5}
 & x^3 & -6x^2 & -x & +2 & \boxed{2x^2 + x - 6} \\
 & x^3 & & +3x & & \\
\cline{2-5}
 & & -6x^2 & -4x & +2 & \\
 & & -6x^2 & & -18 & \\
 & & & & R(x) & \\
 & & & & \boxed{-4x + 20} &
\end{array}
$$

$$\frac{A(x)}{B(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{B(x)} = 2x^2 + x - 6 + \frac{-4x+20}{x^2+3}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 455

- $i = \sqrt{-1}$

$\rightarrow i^0 = 1 \rightarrow i^{4n} = 1$

$i^1 = i \rightarrow i^{4n+1} = i$

$i^2 = -1 \rightarrow i^{4n+2} = -1$

$i^3 = -i \rightarrow i^{4n+3} = -i$

$i^4 = 1$

- $\log e^x = x$
- $\log e^1 = 1$
- $\log e^{-1} = \log \frac{1}{e} = -1$
- $a \log b = \log b^a$
- $x^{\ln^2 x} = e^{\ln x^{\ln^2 x}} = e^{\ln^3 x}$
- $x^{\frac{3}{4\ln^2 x}} = e^{\ln x^{\frac{3}{4\ln^2 x}}} = e^{\frac{3}{4\ln^{\cancel{2}} x} \cdot \cancel{\ln x}} = e^{\frac{3}{4\ln x}}$
- $2^x - 1 + 2^{x+1} = 0$

$2^x + 2 \cdot 2^x = 1$

$3 \cdot 2^x = 1 \rightarrow 2^x = \frac{1}{3}$

$x \cdot \log 2 = \log \frac{1}{3}$

$x \cdot \log 2 = \log 3^{-1}$

$x \cdot \log 2 = -\log 3$

$x = -\frac{\log 3}{\log 2} = -\log \frac{3}{2}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 5 di 455

Eq. retta:

→ forma implicita: $ax + by + c = 0$

$$m = -\frac{a}{b} \quad ; \quad q = -\frac{c}{b}$$

→ forma esplicita: $y = mx + q$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$tg\, x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$cotg\, x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{tg\, x}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$cosec\, x = \frac{1}{\sin x}$$

STUDIO DI FUNZIONE:

→ Definire i pti di MAX, MIN e FLESSO con lettere maiuscole. → ES. M (1,2)
F (3,8)
. . . .

→ Valutare i pti in cui si annulla la derivata prima e seconda.
→ pti di discontinuità.

DIM. $\int \cos^2 x \, dx = \frac{x + \sin x \cos x}{2} + c \qquad c \in \mathbb{R}$

$$\int \cos^2 x \, dx = \int (1 \cdot \cos^2 x) \, dx = \int (\cos x \cdot \cos x) \, dx$$

utilizziamo l'integrazione per parti:

$f' = \cos x \longrightarrow f = \sin x$

$g = \cos x \longrightarrow g' = -\sin x$

$$f \cdot g - \int f \cdot g' = \sin x \cdot \cos x - \int (-\sin x \cdot \sin x) \, dx =$$

$$= \sin x \cdot \cos x + \int \sin^2 x \, dx =$$

$$= \sin x \cdot \cos x + \int (1 - \cos^2 x) \, dx$$

$$\int \cos^2 x \, dx = \sin x \cdot \cos x + \int (1 - \cos^2 x) \, dx$$

$$2 \int \cos^2 x \, dx = \sin x \cdot \cos x + x + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$\int \cos^2 x \, dx = \frac{x + \sin x \cdot \cos x}{2} + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

- $\arctan y = x + \frac{x^3}{3} + c \quad c \in \mathbb{R} \rightarrow y(x) = \tan\left(\frac{x^3}{3} + x + c\right) \quad c \in \mathbb{R}$
- $\arcsin y = x^2 + c \quad c \in \mathbb{R} \rightarrow y(x) = \sin(x^2 + c) \quad c \in \mathbb{R}$
- $\log^2 y \neq \log y^2 = 2\log y$ • $\log(x+1) \neq (\log x) + 1$
- $(2y+3)^{2/3} = \frac{4}{3}\cdot(\tan x - x) + c \quad c \in \mathbb{R}$

$\hookrightarrow 2y + 3 = \pm\left[\frac{4}{3}\cdot(\tan x - x) + c\right]^{3/2} \quad c \in \mathbb{R}$

$$y(x) = -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{4}{3}\cdot(\tan x - x) + c\right]^{3/2} \quad c \in \mathbb{R}$$

- $\underbrace{-\frac{1}{y} - \log|y|} = \underbrace{+\frac{1}{x} - \log|x|} + c \quad c > 0$

$-\log|y| = \frac{1}{y}$ $\qquad \log|x| = \frac{1}{x}$

$\log|y| = -\frac{1}{y}$ $\qquad |x| = e^{1/x}$

$e^{-1/y} = |y|$ $\qquad \frac{1}{|x|}\cdot e^{1/x} = \emptyset + 1$

$\frac{1}{|y|}\cdot e^{-1/y} = \emptyset + 1$

$\longrightarrow \frac{1}{y}\cdot e^{-1/y} = \frac{1}{x}\, c\, e^{1/x} \quad c \neq 0 \rightarrow c = 0 \rightarrow y(x) = 0$

$\longrightarrow y\, e^{1/y} = x\, c\, e^{-1/x} \quad c \in \mathbb{R}$

- $e^{-\log x} = \frac{1}{x}$
- $\log(1/e) = -1 \rightarrow 1/e = +e^{-1} \rightarrow \frac{1}{\cancel{e}} = + \frac{1}{\cancel{e}}$ → l'uguaglianza è verificata!

$|\!\Rightarrow 1 = 1$

- $\arctan(0) \cong 0$
- $\arctan(\pi/2) \cong 1,559$
- $\arctan(\pi) \cong 1,565$
- $\arctan(3/2\,\pi) \cong 1,567$
- $\arctan(2\pi) \cong 1,568$

RICORDA.

$t = \tan x$

$\rightarrow \sin^2 x = ?$

$t = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \tan x$

$t^2 = \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{\sin^2 x}{1 - \sin^2 x}$

$t^2 - t^2 \sin^2 x = \sin^2 x$

$t^2 = \sin^2 x \cdot (t^2 + 1)$

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{t^2+1}$$

$t = \tan x$

$dt = \dfrac{1}{\cos^2 x} dx$

$dt = \dfrac{1}{1 - \sin^2 x} dx$

$dt \cdot (1 - \sin^2 x) = dx$

$dx = dt \cdot \left(1 - \dfrac{t^2}{t^2+1}\right)$

$dx = dt \cdot \left(\dfrac{\cancel{t^2} + 1 - \cancel{t^2}}{t^2+1}\right)$

$$dx = \frac{dt}{t^2+1}$$

- $\displaystyle\int \frac{1+\cos x}{1+\sin x}\,dx =$

$\tan\frac{x}{2} = t \rightarrow \frac{1}{2}\left(1+\tan^2 x\right)dx = dt \rightarrow dt = \frac{2}{1+t^2}$

$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$

$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

- $\sin 2x = 2\sin x\cos x$
- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$
- $f(x) = \arctan x \rightarrow f'(x) = +\frac{1}{1+x^2}$
- $f(x) = \operatorname{arccotg} x \rightarrow f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$
- $f(x) = \arcsin x \rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $f(x) = \arccos x \rightarrow f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $f(x) = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$
- $f(x) = \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x} \rightarrow f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \operatorname{cotg}^2 x$
- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $-\sinh^2 x + \cosh^2 x = 1$

N° COMPLESSI - FORMULARIO :

1 f. algebrica:

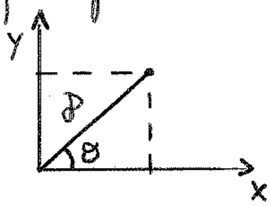
$z = x + iy$

$i = \sqrt{-1}$

$Re(z) = x$ → parte reale
$Im(z) = y$ → parte immaginaria

$x, y \in \mathbb{R}$

2 f. trigonometrica:



$x = \rho \cdot \cos\theta$

$y = \rho \cdot \sin\theta$

$z = (\cos\theta + i \sin\theta) \cdot \rho$

$z^n = (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)) \cdot \rho^n$

$\bar{z} = x - iy$ (z coniugato)

$z \cdot \bar{z} = (x + iy) \cdot (x - iy) = x^2 + y^2$

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \rho$

$|z \cdot \bar{z}| = |z|^2$

$z = \rho \cdot e^{i\theta}$ → $\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$

$\sqrt[n]{\rho} \cdot e^{\boxed{\frac{\theta + 2k\pi}{n}}}$

$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} \cdot \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ con $k = (0, \ldots, n-1)$

RICORDA:

$i^1 = i$

$i^2 = -1$

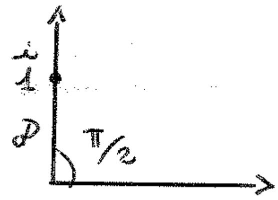
$i^3 = -i$

$i^4 = 1$

$\frac{1}{i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{i}{-1} = -i$

5) $z = i$ $\qquad \rho = 1$

$z = \cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2}$



6) $z = \sqrt[3]{i}$

$\sqrt[3]{i} = \cos\left(\frac{\pi/2 + 2k\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi/2 + 2k\pi}{3}\right)$

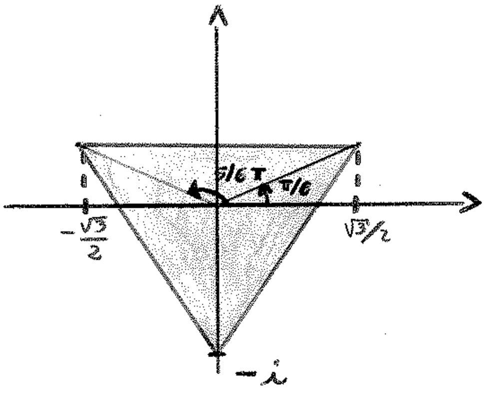
- $k=0 \rightarrow \cos(\pi/6) + i\sin(\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$
- $k=1 \rightarrow \cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) + i\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$

  $\hookrightarrow \pi/2 + 2\pi = 5/6\,\pi$
- $k=2 \rightarrow \cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) + i\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 0 - i = -i$

  $\hookrightarrow \pi/2 + 4\pi = \frac{9}{2}\pi \cdot \frac{1}{3} = \frac{9}{6}\pi = \frac{3}{2}\pi$

$\rightarrow \sqrt[3]{\ } \rightarrow$ poligono a 3 lati. (triangolo)

$\rightarrow \sqrt[n]{\ } \rightarrow$ poligono a n lati.



7) $w = 3 + 4i \rightarrow$ calcolare $\sqrt{w}$?

$|w| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

$w = 5 \cdot \left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5} i\right)$

$z = x + iy \rightarrow z^2 = w = 3 + 4i$

$z^2 = (x+iy)\cdot(x+iy) = (x+iy)^2 = x^2 + (yi)^2 + 2ixy =$

$= x^2 + 2ixy - y^2$

4.

9) $i^{2012} = i^{4(\dots)} = (i^4)^{(\dots)} = 1^{(\dots)} = 1$

$\longrightarrow$ OLIMPIADI OGNI 4 anni.

10) $i^{1993} = i^{(\dots)4+1} = (i^4)^{(\dots)} \cdot i^1 = i$

11) $\dfrac{3+2i}{5-3i} \cdot \dfrac{5+3i}{5+3i} = \dfrac{15+9i+10i-6}{25+9} = \dfrac{9+19i}{34}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 21 di 455

3) Risolvere:

$$z = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2} i\right)^{200} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i\right)^{200}$$

per la formula: De Moivre

$$z = \left(\cos \pi/4 + i \sin \pi/4\right)^{200} = \left(\cos\left(\frac{\cancel{200}^{50}}{\cancel{4}_1}\pi\right) + i \sin\left(\frac{\cancel{200}^{50}}{\cancel{4}_1}\pi\right)\right) =$$

$$= \cos \underset{2\pi}{\underset{\shortparallel}{50\pi}} + i \sin \underset{2\pi}{\underset{\shortparallel}{50\pi}} = +1$$

N° PARI → 2π

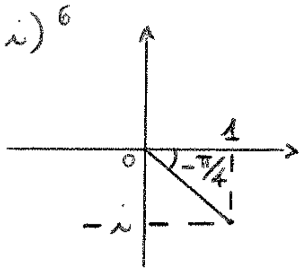
N° DISPARI → π

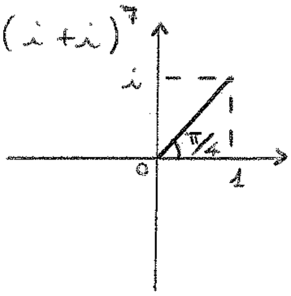
ES. $300/4 = 75$

→ π

RIS.: -1

4) Risolvere: $\dfrac{(1-i)^6}{(1+i)^7}$



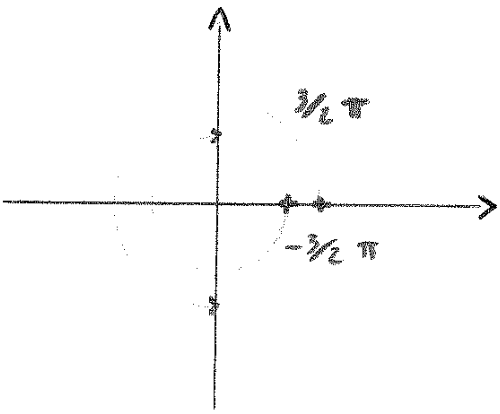


$$\frac{(\sqrt{2})^6 \cdot \left(\cos(-\pi/4) + i \sin(-\pi/4)\right)^6}{(\sqrt{2})^7 \cdot \left(\cos(\pi/4) + i \sin(\pi/4)\right)^7} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\cos\left(-\frac{\cancel{6}^3}{\cancel{4}_2}\pi\right) + i \sin\left(-\frac{\cancel{6}^3}{\cancel{4}_2}\pi\right)}{\cos\left(\underset{315}{\underset{\shortparallel}{\tfrac{7}{4}\pi}}\right) + i \sin\left(\tfrac{7}{4}\pi\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{i}{\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i} = \frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{2}} \cdot \frac{i}{\frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{2}} \cdot (1-i)} = \frac{i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{-1+i}{2} =$$

$$= \underbrace{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i}$$

esprimere sempre in questa forma il n° complesso!!



6) Rappresentare graficamente:

$$\underset{\text{insieme}}{A} = \{ z \in \mathbb{C} \;/\; \mathrm{Im}(iz) < \mathrm{Re}(z^2) \}$$

$z = x + iy$

$iz = ix - y$

$z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$

$x < x^2 - y^2$

N.B. $(x-a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$

$-2a = -1$

$a = 1/2$

$x^2 - x - y^2 > 0$

$$x^2 - x + \underbrace{\frac{1}{4} - \frac{1}{4}}_{\text{agg e tolgo}} - y^2 > 0$$

$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - y^2 > \frac{1}{4}$

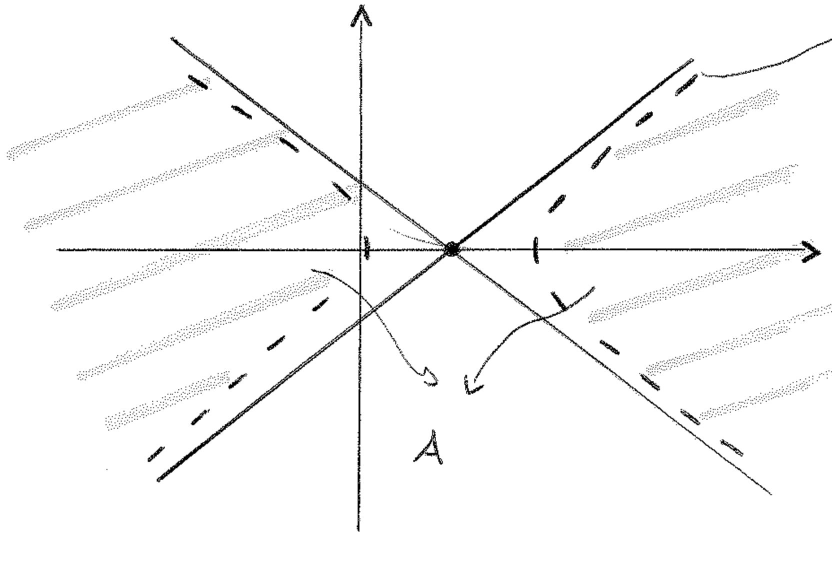
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(x - 1/2)^2}{(1/2)^2} - \frac{y^2}{(1/2)^2} > 1$$

Asintoti: $y = \pm \frac{b}{a} x$

$\nearrow$ $y = x - 1/2$

$\searrow$ $y = -x + 1/2$



disuguaglianza stretta (<), considero solo la parte esterna (>1) e non il contorno.

Ricapitolando:

$$P(z) = z^4 - iz^3 + iz + 1 = 0$$

$$P(z) = (z-i)\cdot(z^3+1) = 0$$

$$P(z) = (z-i)\cdot(z-i)\cdot(z^2+iz-1) = 0$$

$$P(z) = (z-i)^2\cdot(z^2+iz-1) = 0$$

$$z^2 + iz - 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = i^2 + 4 = -1 + 4 = +3$$

$$z_{1,2} = \frac{-i \pm \sqrt{i^2+4}}{2} \quad \nearrow \frac{-i+\sqrt{3}}{2} \quad \searrow \frac{-i-\sqrt{3}}{2}$$

8) Dimostrare che non esistono numeri complessi tali che

$$|z| - z = i.$$

9) Determinare i numeri complessi che soddisfano le seguenti equazioni:

$$a)\ \overline{z} = i(z-1) \qquad b)\ z^2 \cdot \overline{z} = z \qquad c)\ |z+3i| = 3|z|\,.$$

10) Determinare tutti i numeri complessi z tali che $z^2 \in \mathbb{R}$.

11) Determinare tutti i numeri complessi che verificano le seguenti condizioni:

(a) $\mathrm{Re}\,(z(1+i)) + z\overline{z} = 0\,;$

(b) $\mathrm{Re}\left(z^2\right) + i\,\mathrm{Im}\,(\overline{z}(1+2i)) = -3\,;$

(c) $\mathrm{Im}\,((2-i)z) = 1\,.$

12) Determinare $a \in \mathbb{R}$ in modo che il polinomio $P(z) = z^3 - z^2 + z + 1 + a$ ammetta $z = -i$ come radice. Inoltre, per tale valore di a [redacted] sia in $\mathbb{R}$ che in $\mathbb{C}$.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 29 di 455

~~5~~) (~~a~~) Vale

$$\frac{1+i}{1-i}-(1+2i)(2+2i)+\frac{3-i}{1+i}=\frac{1+i}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i}-(1+2i)(2+2i)+\frac{3-i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}$$
$$=i-2-2i-4i+4+\frac{3-1-3i-i}{2}=i+2-6i+\frac{2-4i}{2}$$
$$=2-5i+1-2i=3-7i\,.$$

(~~b~~) Calcoliamo innanzitutto $\left(\sqrt{3}+i\right)^3$. Vale

$$\left(\overline{\sqrt{3}+i}\right)^3=\left(\sqrt{3}-i\right)^3=\left(\sqrt{3}-i\right)^2\left(\sqrt{3}-i\right)=\left(3-1-2i\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}-i\right)$$
$$=\left(2-2i\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}-i\right)=2\sqrt{3}-2i-6i-2\sqrt{3}=-8i\,.$$

Risulta allora

$$2i(i-1)+\left(\overline{\sqrt{3}+i}\right)^3+(1+i)\underbrace{\overline{(1+i)}}_{1-i}=-2-2i-8i+2=-10i\,.$$

~~6~~) Ricordiamo che in campo complesso ogni numero z ha n radici n-ime distinte, che costituiscono i vertici di un poligono regolare di n lati, inscritto in una circonferenza con centro nell'origine e di raggio pari a $\sqrt[n]{|z|}$. In particolare, se $z=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)=\rho e^{i\theta}$, allora le radici ennesime di z sono date da

$$\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right)=\sqrt[n]{\rho}\,e^{\frac{\theta+2k\pi}{n}}\,.\quad k=0,1,2,\ldots,n-1\,.$$

Per calcolare le radici quadrate del numero $z=-1-i$, scriviamo z in forma trigonometrica, ottenendo:

$$z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)\,.$$

Dalla formula sopra, si ottiene allora

Radici quadrate!!

$$z_1=\sqrt[2]{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\frac{5\pi}{4}}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{5\pi}{4}}{2}\right)\right)=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{8}+i\sin\frac{5\pi}{8}\right)\ e \quad \leftarrow K=0$$

$K=1$

$$z_2=\sqrt[2]{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\frac{5\pi}{4}+2\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{5\pi}{4}+2\pi}{2}\right)\right)=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{13\pi}{8}+i\sin\frac{13\pi}{8}\right)\,.$$

Un'altra possibilità è la seguente. L'equazione

$$(x+iy)^2=-1-i$$

dà luogo al sistema

$$\begin{cases} x^2-y^2=-1\,,\\ 2xy=-1\,,\end{cases}$$

e $(3|z|)^2 = 9(a^2+b^2)$. Occorre quindi risolvere l'equazione

$$a^2 + (b+3)^2 = 9(a^2+b^2)\,,$$

cioè $8(a^2+b^2) = 6b+9$, cioè ancora $a^2+b^2-\frac{3}{4}b = \frac{9}{8}$.

Applicando il metodo di completamento del quadrato si osserva che

$$b^2 - \frac{3}{4}b = (b-\frac{3}{8})^2 - \frac{9}{64}\,,$$

per cui l'equazione $a^2+b^2-\frac{3}{4}b = \frac{9}{8}$ è equivalente a

$$a^2 + (b-\frac{3}{8})^2 = \frac{9}{64} + \frac{9}{8} = (\frac{9}{8})^2\,.$$

L'equazione data è quindi soddisfatta da tutti i numeri complessi $z = a+ib$ che appartengono alla circonferenza centrata in $(0,\frac{3}{8})$, di raggio $\frac{9}{8}$.

N° reale: $a+i0$
N° complesso: $a+ib$
N° immaginario puro: $0+ib$

10) Sia $z = a+ib$, $a,b\in\mathbb{R}$. Allora $z^2\in\mathbb{R}$ se e solo se $a^2-b^2+2iab\in\mathbb{R}$, cioè se e solo se $ab=0$. Ciò è equivalente al fatto che la parte reale o la parte immaginaria di z siano nulli, quindi $z^2\in\mathbb{R}$ se e solo se z è un numero reale oppure un numero immaginario puro.

11) Sia $z = a+ib$, $a,b\in\mathbb{R}$. Determ. N° complessi che verificano la condizione

(a) Calcoliamo innanzitutto $\mathrm{Re}\,(z(1+i))$. Vale $(a+ib)(1+i) = \boxed{(a-b)+i(a+b)}$ da cui $\mathrm{Re}\,(z)\,(1+i) = a-b$.

$\mathrm{Re}\,(z(1+i)) + z\bar{z} = 0$

L'equazione data è allora equivalente a

$$(a-b) + \overbrace{a^2+b^2}^{z\cdot\bar{z}} = 0\,,$$

che si può anche riscrivere, con il metodo di completamento del quadrato, come

$$(a+\frac{1}{2})^2 + (b-\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2}\,.$$

Le soluzioni dell'equazione sono allora date dai punti della circonferenza di centro $C(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ e raggio $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\mathrm{Re}\,(z^2) + i\,\mathrm{Im}\,(\bar{z}\,(1+2i)) = -3$

(b) Risulta $z^2 = a^2-b^2 + \cancel{2iab}$ e

$$\bar{z}(1+2i) = (a-ib)(1+2i) = \cancel{a+2b} + i(2a-b)\,.$$

Re → prendo solo la parte reale.
Im → prendo solo la parte immaginaria.

L'equazione si può quindi riscrivere come

$$a^2-b^2 + i(2a-b) = -3\,,$$

da cui $2a = b$ e $a^2-b^2 = -3$. Questo sistema ammette le soluzioni $z_1 = 1+2i$ e $z_2 = -1-2i$, che sono quindi le uniche soluzioni dell'equazione di partenza.

SVILUPPI NOTEVOLI DI McLAURIN:

LA FORMULA DI TAYLOR:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots o$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots o$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots o$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \binom{\alpha}{3}x^3 + \dots o$$

dove:

$$\binom{\alpha}{m} = \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdots (\alpha-(m-1))}{m!} \longrightarrow \frac{\alpha\cdot(\alpha-1)}{2!} \; ; \; \frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot[\alpha\cdot(m-1)]}{3!}$$

$$\frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + o(x^n)$$

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots o$$

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \dots o$$

$$\sinh x = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{7!}x^7 + \dots o$$

$$\cosh x = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{6!}x^6 + \dots o$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{3!}x^3 + \dots o$$

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \dots o \longrightarrow \tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

$$\sqrt{1+t} = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + \frac{1}{16}t^3 + \dots + o$$

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + t^4 + \dots + o$$

A quale grado mi fermo ??

a quello che ci viene indicato!!
Inoltre dobbiamo comprendere noi fino a che livello è utile sviluppare.

1) Non devono essere perse informazioni
2) Sviluppare sempre di più.

TAYLOR: $x \to$ Valore

McLAURIN: $x \to 0$

stiamo parlando di intorni di pti.

SVILUPPI DI TAYLOR:

→ P.P. ①
→ RESTO ②
→ ORD. INFIN. ③

1) $$\frac{\log(\sin x^2 + \cos x)}{tg(\sin x)}$$

$f = tg\, x \implies$ calcolo:

$$f' = \frac{1}{\cos x} = 1 + tg^2 x$$

$$f'' = 2\, tg\, x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x}$$

$$f''' = 2\, \frac{\cos^4 x + \sin^2 x \cdot 3 \cdot \cos^2 x}{\cos^6 x} = 2\, \frac{\cos^2 x + 3\sin^2 x}{\cos^4 x} = 2\, \frac{1 - \sin^2 x + 3 \sin^2 x}{\cos^4 x} =$$

$$= 2\, \frac{1 + 2\sin^2 x}{\cos^4 x}$$

• TAYLOR: $f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \ldots + \ldots$

$$tg\, x = x + \frac{2}{3!} x^3 + o(x^3)$$

N.B. $$\boxed{tg\, x = x + \frac{1}{3} x^3 + o(x^3)}$$ RICORDARE:

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!}$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!}$$

(N) $$\log\left(x^2 - \frac{x^6}{3!} + o(x^6) + 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + o(x^6)\right)$$

$$\log\left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \left(\frac{1}{3!} + \frac{1}{6!}\right)x^6 + o(x^6)\right)$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 37 di 455

5) $f(x) = 1 - e^{2x^3} + \sin(2x^3)$ $\boxed{P.P.?}$ ③

$$\sin(t) = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!}$$

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!}$$

$$f(x) = \cancel{1} - \left(\cancel{1} + \cancel{2x^3} + \frac{(2x^3)^2}{2!} + o(x^6)\right) + \cancel{2x^3} - \frac{(2x^3)^3}{3!} + o(x^6) = -\frac{4x^6}{2!} = -2x^6$$

6) $f(x) = \sqrt{8 - x^3} - 2$ $\boxed{P.P.?}$

Nella radice e nel log devo avere sempre "1 + qualcosa che tenda a zero".

$$f(x) = 2\sqrt[3]{\left(1 - \left(\frac{x}{2}\right)^3\right)} - 2 = \cancel{2}\cdot\left(\cancel{1} + \frac{1}{3}\left(-\frac{x}{2}\right)^3 + o(x^3)\right) - \cancel{2} =$$

$$= \cancel{2} - \frac{\cancel{2}^1}{3}\cdot\frac{x^3}{\cancel{8}_4} + o(x^3) \cancel{-2} = \underbrace{-\frac{1}{12}x^3}_{} + o(x^3) \rightarrow \underline{P.P.}$$

7) $f(x) = e^{\sqrt{1-x^3}} + \frac{e}{2}x^3 - e$

$$\sqrt{1+t} = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + \frac{1}{16}t^3$$

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + t^4$$

DA RICORDARE!

$$f(x) = e^{\left(1 + \frac{1}{2}(-x^3) - \frac{1}{8}(-x^3)^2 + o(x^6)\right)} + \frac{e}{2}x^3 - e =$$

$$= e\cdot e^{\left(-\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{8}x^6 + o(x^6)\right)} + \frac{e}{2}x^3 - e =$$

$$= e\left(1 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{8}x^6 + o(x^6)\right) + \frac{e}{2}x^3 - e =$$

$$= \cancel{e} - \cancel{\frac{e}{2}x^3} - \cancel{\frac{e}{8}x^6} + o(x^6) + \cancel{\frac{e}{2}x^3} - \cancel{e} \rightarrow \text{NON CORRETTO !!}$$

$e^t = \underbrace{1}_{\text{SVILUP.}} + \underbrace{t}_{\text{SVILUP.}} + t^2 \rightarrow$ NON SVILUPP. $\Rightarrow \cancel{(x^3)^2 = x^6}$

N.B. ATT. ERR!! → Non ho sviluppato ABB! → Ho perso informazioni!

• POLINOMIO DI TAYLOR:

$$P(x) = f(x_0) + (x-x_0) f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \frac{(x-x_0)^3}{3!} f'''(x_0) + \dots +$$

$$+ \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

• SVILUPPO DI TAYLOR:

$f(x) = P(x) + \underline{\text{RESTO}}$ → PEANO ①
↘ LA GRANGE ②

ES. 1) $f(x) = \dfrac{4x-3}{(2x-1)^2}$ $n = 2$, $x_0 = 0$ (Mc LAURIN) $f(0) = -3$

$$f'(x) = -\frac{8(x-1)}{(2x-1)^3}$$

$$f'(0) = -8$$

$$f''(x) = -8 \cdot \underbrace{\frac{1\cdot(2x-1)^3 - (x-1)\,6\,(2x-1)^2}{(2x-1)^6}}$$

$$f''(0) = \frac{-1+6}{1} = 5 \cdot (-8) = -40$$

$$P(x) = -3 + (x-0)(-8) + \frac{(x-0)^2}{2!}(-40) = -3 - 8x - 40\frac{x^2}{2!}$$

$P(x) = -20x^2 - 8x - 3$ **POLINOMIO DI TAYLOR.**

$f(x) = P(x) + \underbrace{o(x^2)}_{\text{RESTO}}$ **SVILUPPO DI TAYLOR.**

ES. 3) $\log(1+x^2) + \log(1-x^2) + x^4$

$$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4}$$

$$x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \frac{x^8}{4} + o(x^8) + \left(-x^2 - \frac{(-x^2)^2}{2} + \frac{(-x^2)^3}{3} - \frac{(-x^2)^4}{4} + \right.$$

$$\left. + o(x^8)\right) + x^4 =$$

$$= \cancel{x^2} - \cancel{\frac{x^4}{2}} + \cancel{\frac{x^6}{3}} - \frac{x^8}{4} - \cancel{x^2} - \cancel{\frac{x^4}{2}} - \cancel{\frac{x^6}{3}} - \frac{x^8}{4} + o(x^8) + \cancel{x^4} =$$

$$= -\frac{x^8}{2} + o(x^8)$$

ES. 4) $f(x) = (\cos x)^2 + x \cdot \sin x$ $\qquad n = 3$ $\quad \boxed{x_0 = 2\pi}$

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!}$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!}$$

Effettuo un cambiamento di variabile:

$x = 2\pi \quad \Rightarrow \quad x - 2\pi = t \qquad \Rightarrow \quad \boxed{x = t + 2\pi}$

$x \to 2\pi \qquad t \to 0$

sostituendo ottengo:

$$(\cos(t+2\pi))^2 + [(t+2\pi) \cdot \sin(t+2\pi)] =$$

$$= \cos^2 t + [(t+2\pi) \cdot \sin t] =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}t^2 + o(t^3)\right)^2 + \left[(t+2\pi) \cdot \left(t - \frac{t^3}{6} + o(t^3)\right)\right] =$$

$$= x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4) - \frac{1}{2}\left(x^4 + o(x^4)\right) = x^2 + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)x^4 + o(x^4)$$

⑦

N.B. con $f(x) = \log(1 - \sin^2 x)$ → $\boxed{-\sin^2(x) = t}$

-t

A.A.A.

$$\begin{cases} = (t) \xrightarrow{①} (-t) \\ = (t)^2 \xrightarrow{②} (t^2) \\ = (t)^3 \xrightarrow{③} (-t^3) \end{cases}$$

Fare molta attenzione ai segni.....

Il caso che consideriamo nelle nostre lezioni è quello in cui la funzione opera fra insiemi di numeri reali: $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$Y = \mathbf{R}$ $\Rightarrow$ funzione reale (la variabile dipendente y assume valori reali)

$X = \mathbf{R}$ $\Rightarrow$ funzione di variabile reale (la variabile indipendente x assume valori reali)

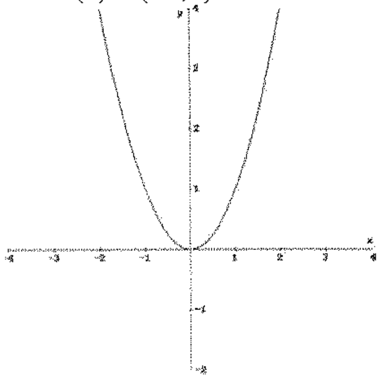
<u>Esempi</u>

$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ $f(x) = x^2$ (parabola)

dominio di f dom $f = \mathbf{R}$ codominio R

immagine di f im $f = [0,+\infty)$

controimmagine di y = 4 $f^{-1}(4) = \{-2,2\}$

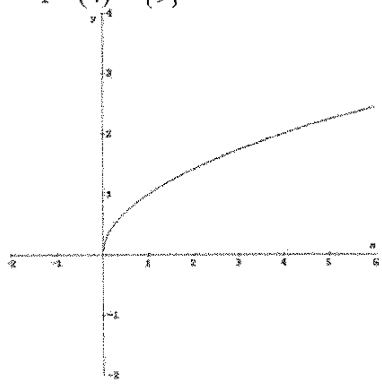


$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ $f(x) = \sqrt{x}$

dominio di f dom $f = [0,+\infty)$ codominio R

immagine di f im $f = [0,+\infty)$

controimmagine di y = 9 $f^{-1}(4) = \{9\}$

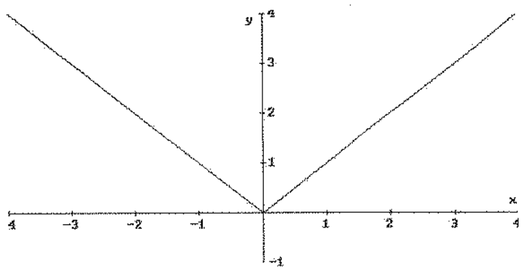


NB: il dominio si legge sull'asse x, l'immagine (e il codominio) sull'asse y.
Per stabilire se una corrispondenza è una funzione si può usare il test della retta verticale: una curva è il grafico di una funzione $\Leftrightarrow$ <u>ogni</u> retta verticale taglia il grafico al più una volta.

<u>Esempi</u>

$f(x) = x^2$ (parabola, è una funzione)

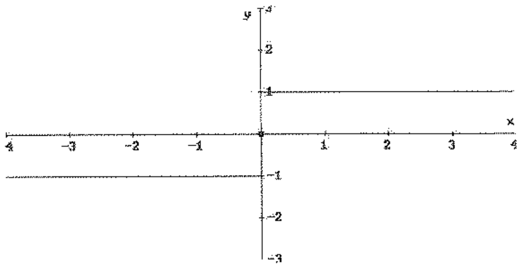
$x^2 + y^2 = 1$ (circonferenza, non è una funzione)



Segno

$f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$

$$f(x) = \mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$



Parte intera

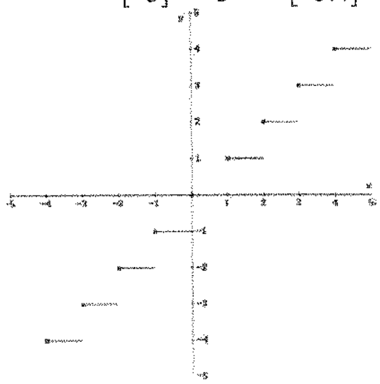
Parte intera di un numero reale x é il più grande intero relativo minore o uguale a x.

$f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{Z}$

$f(x) = [x]$

Alcuni valori esemplificativi:

$[4] = 4$ $\quad [4.6] = 4$ $\quad [-3] = -3$ $\quad [-3.4] = -4$



Mantissa

Mantissa di un numero reale x é la differenza fra il numero x e la sua parte intera

$f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$

$f(x) = M(x) = x - [x]$

Alcuni valori esemplificativi:

$x = 0.9 \qquad M(x) = 0.9 - 0 = 0.9$

$x = 1.2 \qquad M(x) = 1.2 - 1 = 0.2$

$x = -3.4 \qquad M(x) = -3.4 - (-4) = 0.6$

f si dice **limitata** se è limitata sia inferiormente che superiormente, ossia se f(X) è un insieme limitato sia inferiormente che superiormente.

Le **proprietà caratteristiche del massimo M** sono:
1. $\forall x \in X, f(x) \leq M$
2. $\exists x_M \in X : f(x_M) = M$

Le **proprietà caratteristiche del minimo m** sono:
1. $\forall x \in X, f(x) \geq m$
2. $\exists x_m \in X : f(x_m) = m$

Il massimo e il minimo, se esistono, sono unici; invece i punti di massimo e di minimo possono essere più di uno (vedere esempio seguente).

Esempi

$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$
$f(x) = x^2 + 1$
dom $f = \mathbf{R}$ im $f = [1,+\infty)$

L'immagine $[1,+\infty)$ è limitata inferiormente , ma non superiormente

$$\inf_{x \in \mathbf{R}} f(x) = 1$$

Il valore m = 1 viene assunto dalla funzione nel punto $x_m = 0$, quindi f ha minimo assoluto; invece l'immagine $[1,+\infty)$ è illimitata superiormente, quindi la funzione è illimitata superiormente

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} f(x) = +\infty$$

$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$
$f(x) = M(x)$ mantissa
dom $f = \mathbf{R}$ im $f = [0,1)$

f è limitata inferiormente e superiormente:

$\inf_{x \in \mathbf{R}} f(x) = 0$ è anche minimo assoluto (ad es. f(2)=M(2)=0)

NB : ci sono infiniti altri punti in cui la funzione assume il valore 0, ma il minimo è unico e vale sempre 0.

$\sup_{x \in \mathbf{R}} f(x) = 1$ f non ha massimo (la funzione mantissa non assume mai il valore 1)

3. Funzioni suriettive e iniettive

Definizione

Sia data la funzione $f : X \to Y$. f si dice **suriettiva** se im f = Y, ossia se ogni elemento di Y è immagine di almeno un elemento di X.

Esempi

$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$
$f(x) = 2x$

f è suriettiva: infatti im $f = \mathbf{R}$

$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$
$f(x) = x^2$

f non è suriettiva: infatti im $f = [0,+\infty) \subset \mathbf{R}$.

Una funzione può sempre essere resa suriettiva: basta far coincidere il codominio con l'immagine di f.

Esempi

$f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$f(x) = 2x$

f è iniettiva; da

$$y = 2x \;\Rightarrow\; x = \frac{y}{2}$$

$$f^{-1}(y) = \frac{y}{2}$$

Poichè è consuetudine indicare con x la variabile indipendente e con y quella dipendente, si può scrivere la funzione inversa nella forma

$$y = f^{-1}(x) = \frac{x}{2}$$

(è solo un cambiamento di notazione !). In questo modo si può disegnare il grafico di f e quello della sua inversa f^{-1} sullo stesso grafico.

Il grafico della funzione f^{-1} può essere ottenuto da quello di f scambiando fra loro le componenti di ciascuna coppia (x,f(x)); ciò equivale a tracciare il grafico per simmetria rispetto alla bisettrice y=x.

Esempio

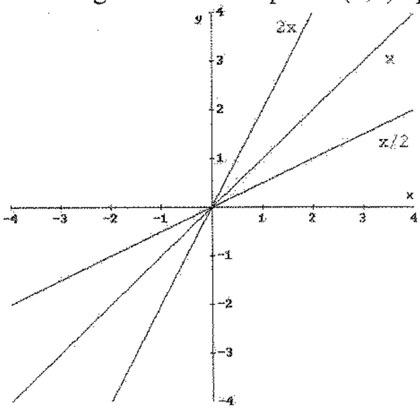
$f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$f(x) = 2x$

$f^{-1}: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{2}$$

Ad esempio il punto (1,2) appartiene al grafico di f e il punto (2,1) appartiene al grafico di f^{-1}



Esempio

$f: \mathbf{R} \to [0,+\infty)$

$f(x) = x^2$

f è suriettiva ma non è iniettiva; considero una **restrizione** (ossia prendo un sottoinsieme del dominio)

$f: [0,+\infty) \to [0,+\infty)$

$f(x) = x^2$

in questo modo la funzione diventa iniettiva e quindi possiede inversa.

$$y = x^2 \;\Rightarrow\; x = \sqrt{y}$$

$$x = f^{-1}(y) = \sqrt{y}$$

scambio il nome delle variabili

$$y = f^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

Esempi (vedere i grafici delle funzioni nelle pagine precedenti)

$f(x) = 2x$ f strettamente crescente su **R**

$f(x) = |x|$

f strettamente crescente su $[0,+\infty)$

$\forall x_1, x_2 \in [0,+\infty), x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) = |x_1| = x_1 < f(x_2) = |x_2| = x_2$

f strettamente decrescente su $(-\infty,0]$

$\forall x_1, x_2 \in (-\infty,0], x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) = |x_1| = -x_1 > f(x_2) = |x_2| = -x_2$

$f(x) = [x]$ parte intera

f è monotona crescente, ma non strettamente, su **R**

$f(x) = M(x)$ mantissa

f non è monotona (né crescente né decrescente) su **R**; f è strettamente crescente su ogni intervallo del tipo $[n,n+1)$ con $n \in \mathbf{Z}$, ma non sull'intervallo chiuso $[n,n+1]$.

Esaminiamo il legame fra monotonia e funzione inversa.

Teorema. Se f è strettamente monotona sul suo dominio, allora f è iniettiva.

Dimostrazione.

Ipotesi: $f : X \rightarrow Y$ strettamente monotona (supponiamo per esempio crescente), ossia

$\forall x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Tesi: f iniettiva, ossia

$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Se $x_1 \neq x_2$, allora sarà $x_1 < x_2$ oppure $x_2 < x_1$;
se è $x_1 < x_2$ allora dall'ipotesi segue $f(x_1) < f(x_2)$; se invece è $x_2 < x_1$ allora segue $f(x_2) < f(x_1)$; in ogni caso $f(x_1) \neq f(x_2)$, quindi f è iniettiva.

Se f è iniettiva, allora esiste la sua inversa f^{-1} e si può ulteriormente dimostrare che anche f^{-1} è monotona strettamente dello stesso tipo di f, crescente o decrescente.

Esempio

$f : [0,+\infty) \rightarrow [0,+\infty)$

$f(x) = x^2$

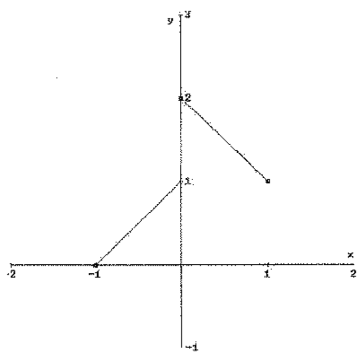
f è strettamente crescente, quindi iniettiva (come abbiamo già in precedenza visto) e la sua inversa $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ è ancora strettamente crescente.

La proposizione inversa di quella dimostrata nel teorema:

f iniettiva $\Rightarrow$ f strettamente monotona

non è vera! Per verificarlo basta un **controesempio**:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & -1 \leq x < 0 \\ 2-x & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$



dom f = $[-1,1]$

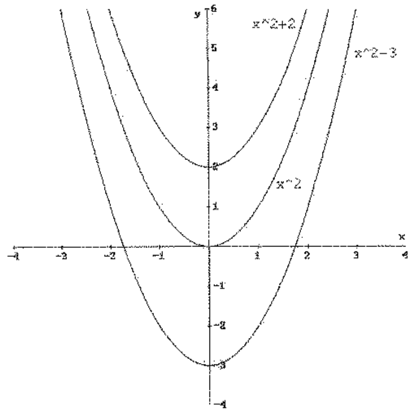
f è iniettiva, ma non strettamente monotona nel suo dominio.

8. Grafici di funzioni ottenibili per traslazione e riflessione

A partire dal grafico della funzione f(x) si possono ottenere i grafici di altre funzioni con operazioni di traslazione orizzontale o verticale, riflessione rispetto all'asse x o y.
Elenchiamo sinteticamente i casi più comuni e le operazioni da effettuare per ottenere i nuovi grafici a partire da quello di f(x).
Sia data una funzione $y = f(x)$ di cui è noto il grafico e una costante $c > 0$.

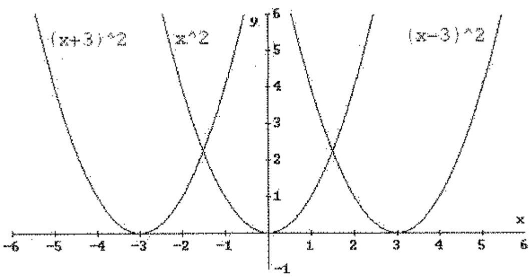
1. $y = f(x) + c$ **traslare verticalmente verso l'alto** di c unità.
2. $y = f(x) - c$ **traslare verticalmente verso il basso** di c unità.

$y = x^2$
$y = x^2 + 2$
$y = x^2 - 3$



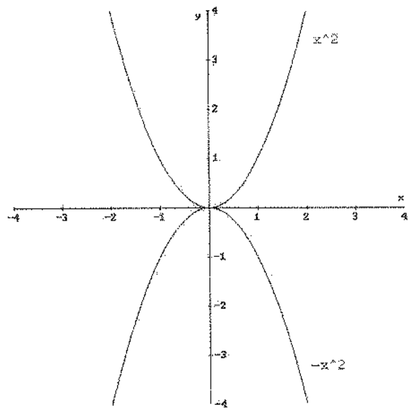
3. $y = f(x+c)$ **traslare orizzontalmente verso sinistra** di c unità
4. $y = f(x-c)$ **traslare orizzontalmente verso destra** di c unità

$y = x^2$
$y = (x + 3)^2$
$y = (x - 3)^2$



5. $y = -f(x)$ grafico **simmetrico rispetto all'asse x**
6. $y = f(-x)$ grafico **simmetrico rispetto all'asse y**

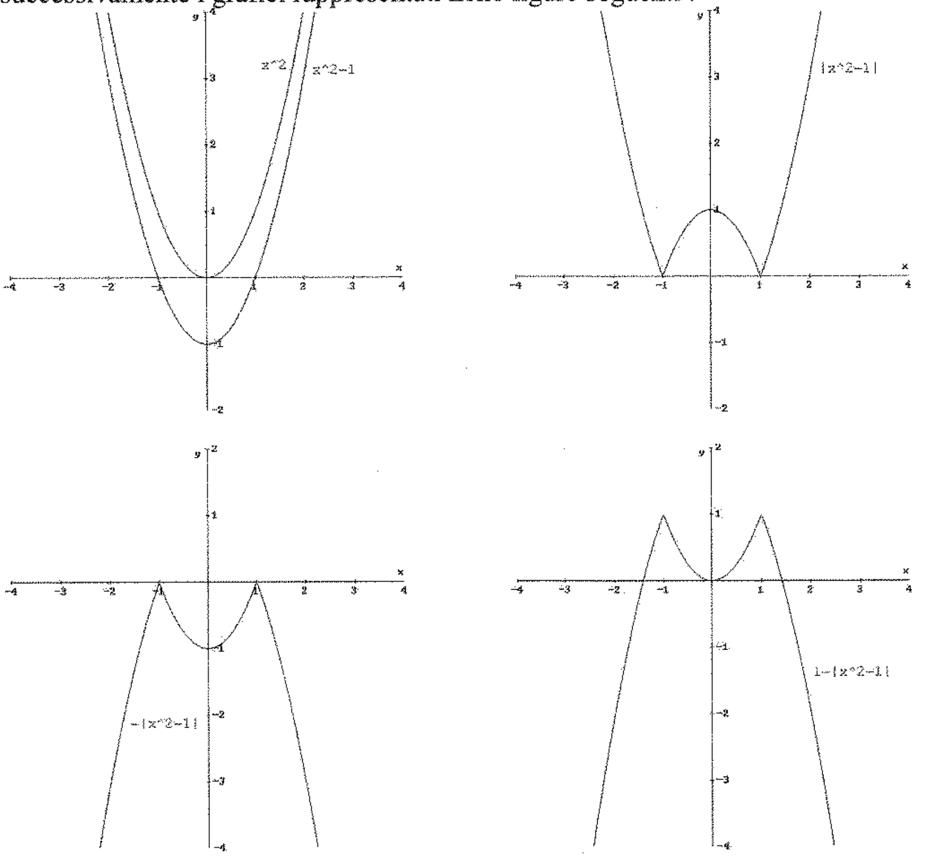
$y = x^2$
$y = - x^2$



Altri esempi

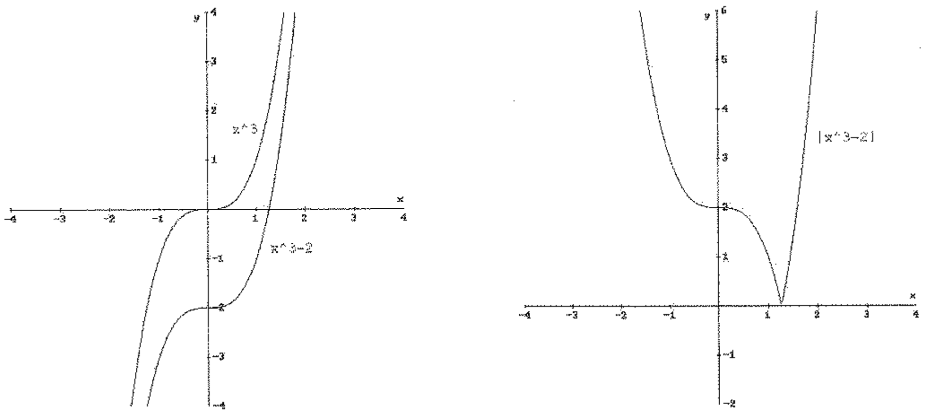
$y = 1 - |x^2 - 1|$

Tracciare successivamente i grafici rappresentati nelle figure seguenti :



$y = |x^3 - 2| + 1$

Tracciare successivamente i grafici rappresentati nelle figure seguenti



Funzioni elementari

1. Potenze intere

$f(x) = x^n \quad n \in \mathbf{N}$

Per n pari:

dom f = **R** im f = $[0,+\infty)$

f strettamente decrescente su $(-\infty,0]$

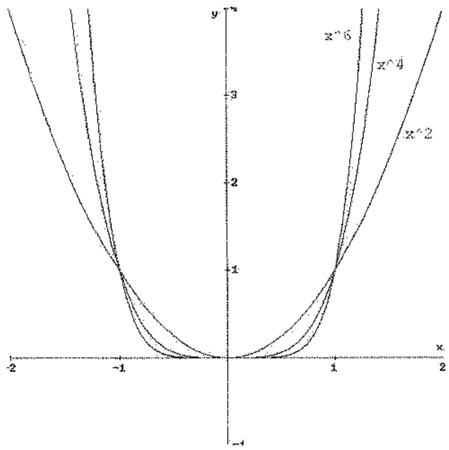
f strettamente crescente su $[0,+\infty)$

f pari

f illimitata superiormente $\sup_{x \in \mathbf{R}} f(x) = +\infty$

f limitata inferiormente

minimo $m = 0$; punto di minimo $x_m = 0$



Per n dispari:

dom f = **R** im f = **R**

f strettamente decrescente su **R**

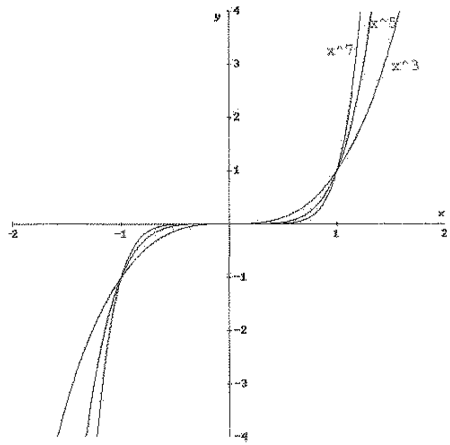
f dispari

f non limitata $\sup_{x \in \mathbf{R}} f(x) = +\infty$

$\inf_{x \in \mathbf{R}} f(x) = -\infty$

f iniettiva e suriettiva,

quindi esiste l'inversa $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$



2. Potenze con esponente intero negativo

$f(x) = x^{-n} \quad n \in \mathbf{N}$

Per n dispari: ad esempio

$f(x) = \dfrac{1}{x}$

dom f = $\mathbf{R}\backslash\{0\}$ im f = $\mathbf{R}\backslash\{0\}$

f non limitata

$\sup_{x \in \mathbf{R}} f(x) = +\infty$ $\inf_{x \in \mathbf{R}} f(x) = -\infty$

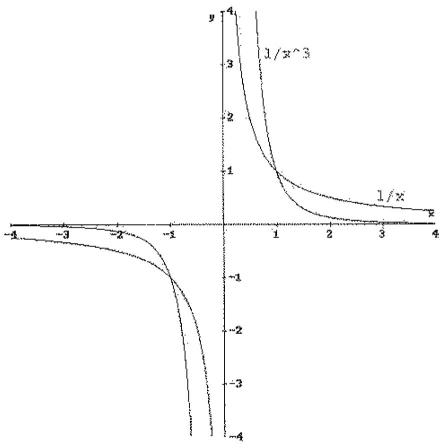
f strettamente decrescente su $[-\infty,0)$

f strettamente decrescente su $(0,+\infty)$

(ma non nell'unione dei due intervalli!!)

f dispari

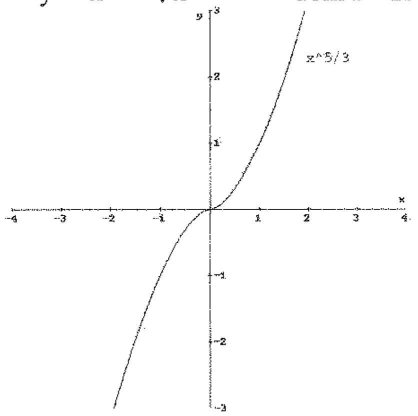
Comportamento analogo per ogni altro n dispari

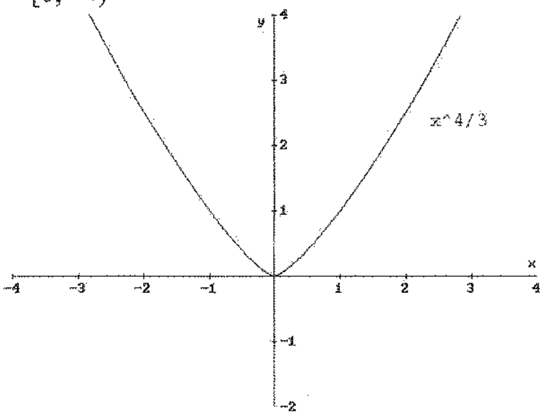


Esempi

$y = x^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{x^5}$ dom f = **R** im f = **R**

$y = x^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{x^4}$ dom f = **R** im f = $[0,+\infty)$



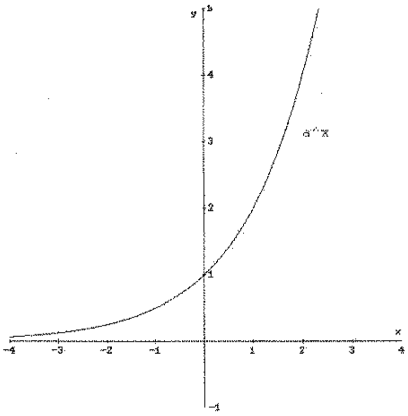


4. Funzione esponenziale

$y = a^x$ $a \in \mathbf{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$

dom f = **R** im f = $(0,+\infty)$

1° caso $a > 1$



f strettamente crescente su **R**

f limitata inferiormente: $\inf\limits_{x \in \mathbf{R}} f(x) = 0$

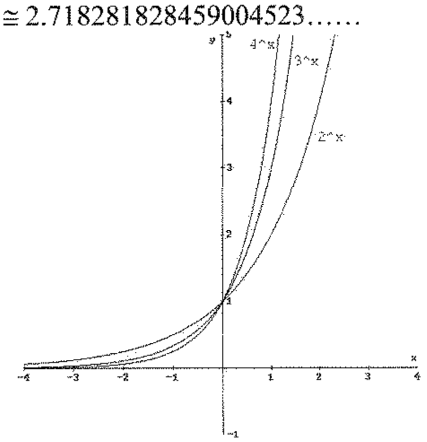
f non ha minimo (non assume mai il valore $y = 0$)

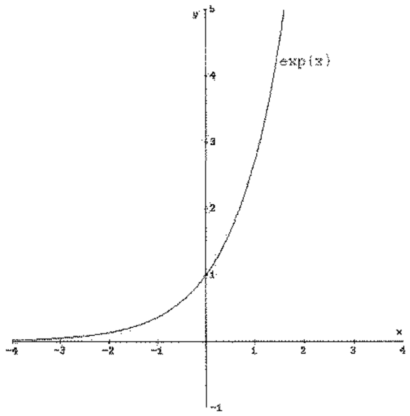
f non limitata superiormente: $\sup\limits_{x \in \mathbf{R}} f(x) = +\infty$

Quanto più la base a è grande, tanto più la funzione cresce rapidamente.

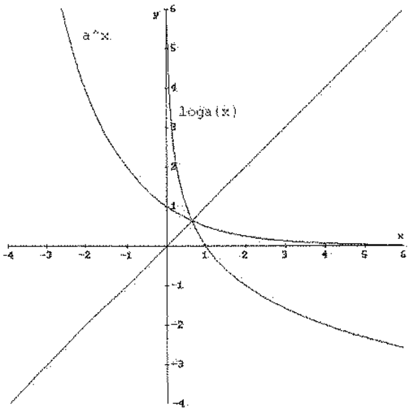
Il caso più importante è la funzione $y = e^x = \exp(x)$; il numero e è un numero irrazionale che definiremo più avanti (capitolo delle successioni), detto numero di Nepero

$e \cong 2.718281828459004523......$



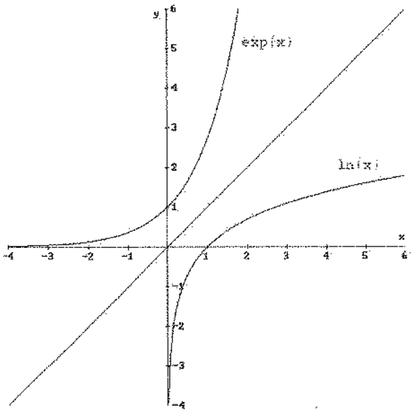


2° caso $0 < a < 1$



f strettamente decrescente
f non limitata né superiormente né inferiormente

$\sup\limits_{x\in\mathbf{R}} f(x) = +\infty$ $\inf\limits_{x\in\mathbf{R}} f(x) = -\infty$



Un caso importante è la funzione che si ottiene per $a = e$

$y = \ln x$ **logaritmo naturale (in base e)**

Un altro caso noto è $a = 10$

$y = \mathrm{Log}\, x$ **logaritmo in base 10**

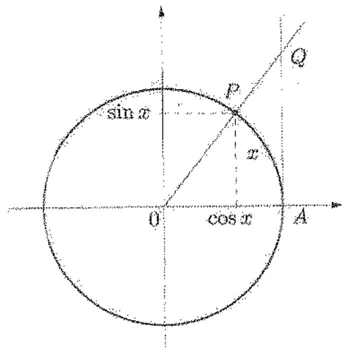
Proprietà

1. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ $\quad \forall x,y > 0$
2. $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$ $\quad \forall\, x,y > 0$
3. $\log_a x^y = y\log_a x$ $\quad \forall\, x > 0 \quad \forall y\in\mathbf{R}$

6. Funzioni trigonometriche

La circonferenza trigonometrica è la circonferenza di centro l'origine e raggio 1; ha equazione

$$x^2 + y^2 = 1$$



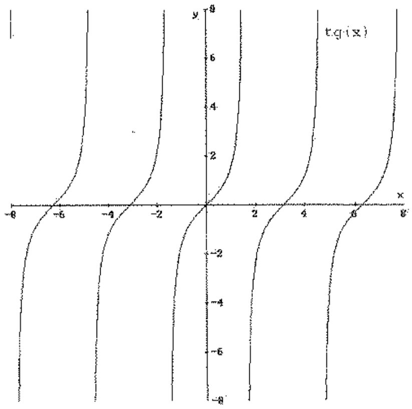
A partire dal punto A si percorre la circonferenza in senso antiorario; indichiamo con P il punto sulla circonferenza ottenuto percorrendo la circonferenza per un arco di lunghezza $x \geq 0$.

Il punto P individua un angolo : il numero x rappresenta la misura dell'angolo in radianti.

L'angolo di un radiante è quello individuato sulla circonferenza dall'arco di lunghezza 1.

Indichiamo con cos x (coseno di x) e con sin x (seno di x) l'ascissa e l'ordinata del punto P

P(cos x, sin x)



7. Funzioni inverse delle funzioni trigonometriche

Le funzioni trigonometriche sen x, cos x, tg x non sono iniettive nel loro dominio, quindi non possiedono inversa sul dominio; occorre considerare delle restrizioni.

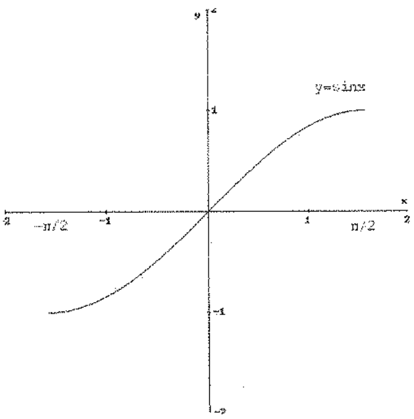
Data la funzione y = sin x, consideriamo la restrizione all'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

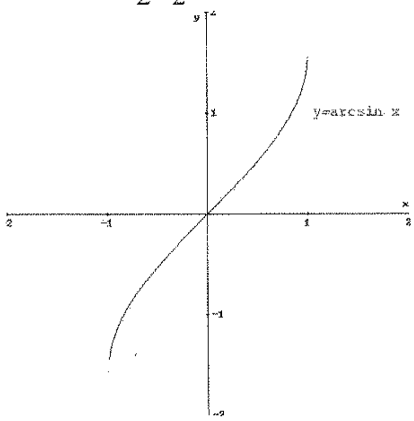
$f(x) = \sin x \qquad \text{dom}\, f = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \qquad \text{im}\, f = [-1,1]$

In questo intervallo la funzione è monotona strettamente crescente, quindi iniettiva, perciò possiede inversa. La **funzione inversa** è **y = arcsin x** (arcoseno di x)

$f^{-1}(x) = \arcsin x \qquad \text{dom}\, f = [-1,1] \qquad \text{im}\, f = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

La funzione y = arcsin x è monotona strettamente crescente in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, ed è una funzione dispari.





Si noti (grafico seguente) che la funzione arcsin x è simmetrica della funzione sin x rispetto alla bisettrice y = x (è la funzione inversa!)

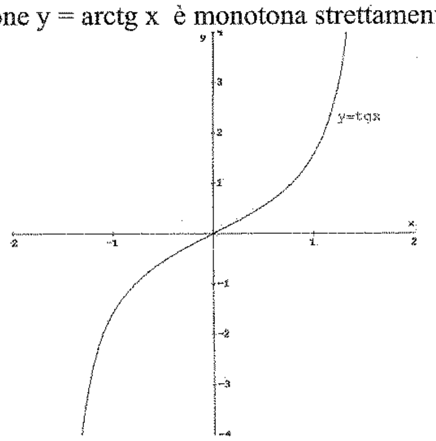
Data la funzione y = tg x, consideriamo la restrizione all'intervallo $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

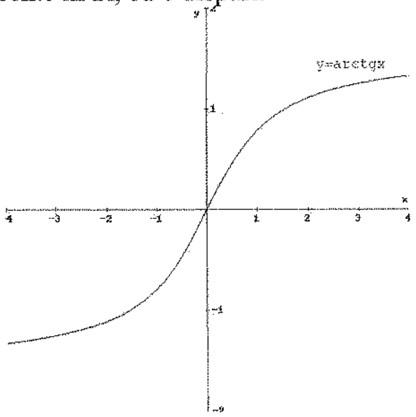
$f(x) = \cos x \qquad \text{dom } f = (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \qquad \text{im } f = \mathbf{R}$

In questo intervallo la funzione è monotona strettamente crescente, quindi iniettiva, perciò possiede inversa. La **funzione inversa** è **y = arctg x** (arcotangente di x).

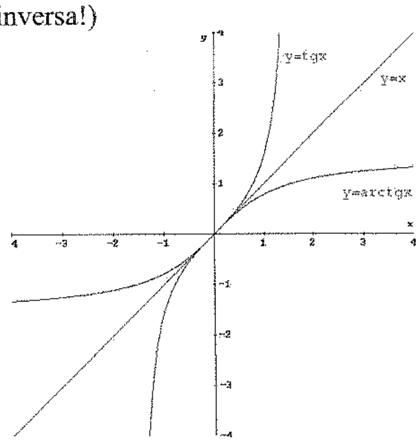
$f^{-1}(x) = \text{arctg } x \qquad \text{dom } f = \mathbf{R} \qquad \text{im } f = (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

La funzione y = arctg x è monotona strettamente crescente in **R**, ed è dispari.



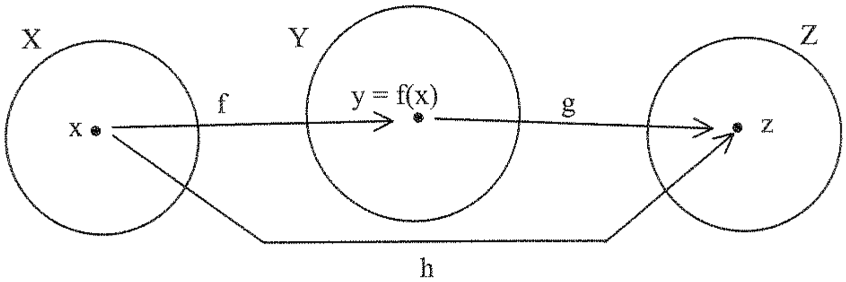


Si noti (grafico seguente) che la funzione arctg x è simmetrica della funzione tg x rispetto alla bisettrice y = x (è la funzione inversa!)



8. Funzione composta

Siano X, Y, Z tre insiemi; sia f una funzione definita in X a valori in Y e g una funzione definita in Y a valori in Z.

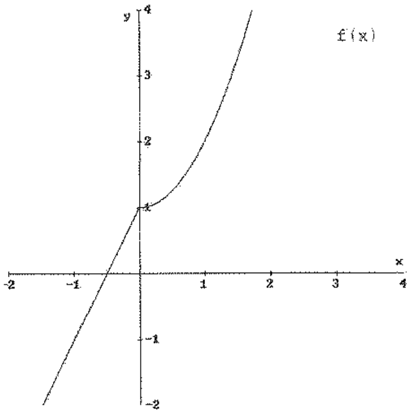


Esercizi

Verificare che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x \le 0 \\ x^2+1 & x > 0 \end{cases}$$

è iniettiva e trovare l'inversa



La funzione f è definita a tratti; è una funzione monotona strettamente crescente, quindi è iniettiva e possiede inversa, e f^{-1} è ancora monotona strettamente crescente.

dom f = R = $(-\infty,0] \cup (0,+\infty)$ im f = R = $(-\infty,1] \cup (1,+\infty)$

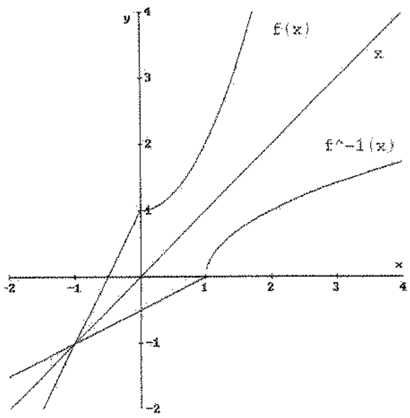
I punti dell'intervallo $(-\infty,0]$ hanno immagine nell'intervallo $(-\infty,1]$; i punti dell'intervallo $(0,+\infty)$ hanno immagine in $(1,+\infty)$.

$y = 2x+1 \quad x = \dfrac{y-1}{2} \quad f^{-1}(x) = \dfrac{x-1}{2}$ (si cambia il nome delle variabili)

$y = x^2+1 \quad x = \sqrt{y-1} \quad f^{-1}(x) = \sqrt{x-1}$

Pertanto

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{2} & x \le 1 \\ \sqrt{x-1} & x > 1 \end{cases}$$



RICORDA:

FUNZIONI ELEMENTARI: 1

1) IMMAGINE:

→ Sostituire i valori numerici nella funzione.

ES. $f(x) = |x|$, $X = \{1\}$, $Y = \{-5\}$

$$f(X) = f(\{1\}) = f(1) = |1| = 1$$

N.B. Nel seguente esempio:

"L'immagine di un insieme formato da un solo elemento coincide con l'immagine di tale elemento".

ES. a) $f(x) = x^3$, $X =]1,8]$, $Y = \{-1\}$

$$f(X) = f([1,8]) = [1, 8^3]$$

b) $f(x) = \sin x$, $X = \{0\}$, $Y = \{0\}$

$$f(X) = f(\{0\}) = f(0) = \sin 0 = 0$$

2) CONTROIMMAGINE:

→ Impongo l'uguaglianza della funzione al valore. (disequaz.)

ES. a) $f(x) = x^2$, $X = [1,2]$, $Y = [1,4]$

$$f^{-1}(Y) = f^{-1}([1,4])$$

→ SOLUZ. COPPIA di DISEQ. $1 \leq x^2 \leq 4$ cioè del SISTEMA : $\begin{cases} x^2 \geq 1 \\ x^2 \leq 4 \end{cases}$

$$f^{-1}(Y) = [-2,-1] \cup [1,2]$$

5) FUNZIONE INVERSA:

$$f^{-1}(x) = y \iff f(y) = x$$

ES. a) $f(x) = 3x + 1$

$$3y + 1 = x$$

$$y = \frac{x-1}{3} = f^{-1}(x)$$

b) $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$

$$\frac{2y+1}{y-1} = x$$

$$y = \frac{x+1}{x-2} = f^{-1}(x)$$

6) FUNZIONE COMPOSTA:

→ "Sostituire una all'interno dell'altra"...

ES. $f(x) = x^2 - x + 1$

$g(x) = \frac{1}{2} + \sqrt{x - 3/4}$

$$(f \circ g)(x) = f\left(\frac{1}{2} + \sqrt{x - 3/4}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \sqrt{x - 3/4}\right)^2 - \left(\frac{1}{2} + \sqrt{x - 3/4}\right) + 1$$

$$(g \circ f)(x) = g(x^2 - x + 1) = \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 - x + 1 - 3/4} = \frac{1}{2} + \left(x - \frac{1}{2}\right)$$

Quindi:

1 occorre analizzare bene il dominio T.

2 occorre analizzare bene l'origine di partenza della funzione.

Altri esempi:

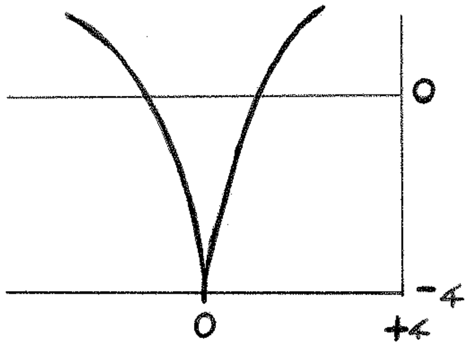
Grafico noto di partenza: $f(x) = \log x$

$g(x) = -\log x$ → "specchio - ribaltamento" funzione $f(x) = \log x$ rispetto asse x.

$h(x) = |\log x|$ → "tutto positivo" → parte sotto asse x ribaltata sopra.
→ simmetria.

$i(x) = \log(-x)$ → grafico simmetrico a $f(x) = \log x$ rispetto all'asse y. → **ribaltamento.**
→ domini simmetrici rispetto all'origine.

$m(x) = \log |x|$



$K(x) = 2 - \sqrt{x+1}$ → grafico di partenza noto: $y = \sqrt{x}$
→ traslaz. orizz. a sx di 1.
→ ribaltamento rispetto all'asse X.
→ traslaz. vert. in alto di 2.

N.B. Attenzione ai casi nei quali sono presenti gli esponenti nella funzione $(-1, -2, +2, +3)$. → $f^{-1}, f^{2}, f^{3}, f^{-2}$ **ecc...**

	SENO	COSENO	TANGENTE	COTANGENTE
0°	0	1	0	$+\infty$
30°	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}$
60°	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/3$
90°	1	0	$\pm\infty$	0
120°	$\sqrt{3}/2$	$-1/2$	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}/3$
150°	$1/2$	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}$
180°	0	-1	0	$\pm\infty$
210°	$-1/2$	$-\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}$
225°	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	1	1
240°	$-\sqrt{3}/2$	$-1/2$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/3$
270°	-1	0	$\pm\infty$	0
300°	$-\sqrt{3}/2$	$1/2$	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}/3$
315°	$-\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	-1	-1
330°	$-1/2$	$\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}$
360°	0	1	0	$-\infty$
45°	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1	1

è fondamentale!

135	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	-1	-1

→ i valori sono sempre uguali, cambiano solo i segni.

LIMITI NOTEVOLI FONDAMENTALI:

Si ottiene il risultato finale anche sviluppando con i simboli di Landau.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\log a}$$

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = e \quad \text{D.R.}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to \pm\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^p}{a^x} = 0$$

SIMBOLI DI LANDAU:

$\sin x = x + o(x)$, $x \to 0$

$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$, $x \to 0$

$\log(1+x) = x + o(x)$, $x \to 0$

$\log_a(1+x) = \frac{x}{\log a} + o(x)$, $x \to 0$, $\forall a > 0$, $a \neq 1$

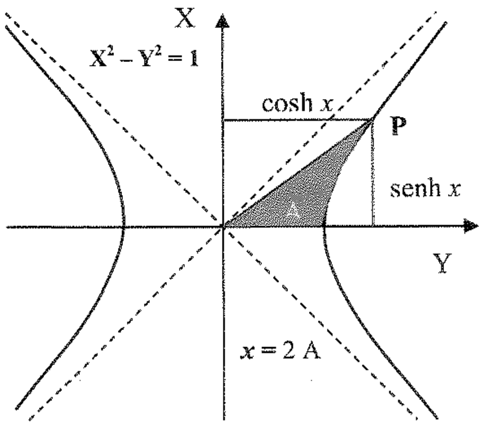
$e^x = 1 + x + o(x)$, $x \to 0$

$a^x = 1 + x\log a + o(x)$, $x \to 0$ $\forall a > 0$

$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$, $x \to 0$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

Definizione geometrica delle funzioni iperboliche

Similmente introduciamo le funzioni iperboliche (almeno le più semplici: senh$x$, cosh$x$), usando stavolta l'iperbole equilatera centrata nell'origine di semiassi unitari $a = b = 1$, avente quindi come equazione $X^2 - Y^2 = 1$ e come asintoti le rette bisettrici dei quadranti. Impiegheremo uno solo dei due rami di cui l'iperbole è composta: diciamo quello di equazioni $Y = \pm\sqrt{X^2 - 1}$ per $X \geq 1$.

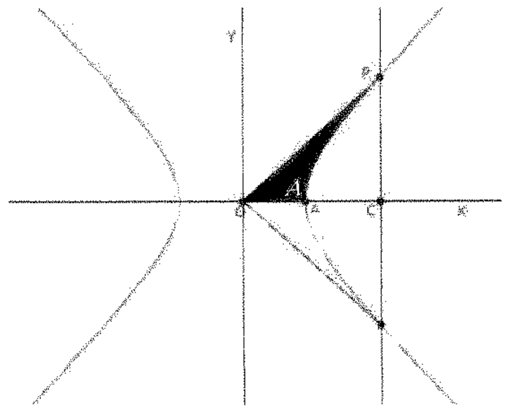


Dato un numero reale x, sia P il punto sul nostro ramo di iperbole che individua il settore iperbolico di area $A = x/2$. Si definiscono *coseno iperbolico* cosh$x$ e *seno iperbolico* senh$x$ rispettivamente l'ascissa e l'ordinata del punto P. L'area del settore iperbolico è presa positiva (o negativa) se P ha ordinata positiva (o negativa).

Nella figura è mostrato in celeste il settore iperbolico, di area A, corrispondente al punto P sul ramo di iperbole; il doppio della sua area è indicato con il simbolo x. Stavolta non è possibile parlare di *angolo* α per avere una definizione di seno e coseno iperbolici con insieme di definizione R: questo perché il segmento OP presenta sempre apertura angolare rispetto all'asse X limitata nell'intervallo $(-\pi/4, \pi/4)$! Ci si potrebbe allora chiedere se la definizione in termini di area del settore iperbolico conduca a funzioni iperboliche definite su tutto l'insieme dei numeri reali R; ovvero se l'area del settore iperbolico continui a crescere all'infinito, in valore assoluto, qualora l'ascissa del punto P cresca all'infinito, oppure se essa converga ad un certo valore estremo.[2] Vedremo fra un attimo che l'area $A = x/2$ del settore iperbolico non è limitata, dunque $A \in (-\infty, +\infty)$.

Espressioni analitiche in termini di esponenziali

Ci chiediamo: è possibile derivare espressioni analitiche per il seno iperbolico e il coseno iperbolico (appena definiti per via geometrica) in termini di altre funzioni note semplici? Sì, è possibile.



Cominciamo con il *coseno iperbolico*. Sia l'ordinata di P positiva (identico l'altro caso). L'area A del settore iperbolico OAP è pari alla differenza tra l'area del triangolo OPC e l'area della regione di piano delimitata dall'arco di iperbole AP, dall'asse X e dal segmento PC. Possiamo dunque scrivere, ricordando che il vertice A dell'iperbole è il punto (1,0):

[2] Il dubbio è ingiustificato: si dimostra che l'area della regione di piano compresa fra un braccio di ciascun ramo dell'iperbole e il suo asintoto è una quantità non convergente: l'equazione canonica dell'iperbole è $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, le equazioni per i bracci divengono $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ e $A = \frac{b}{a}\int_c^{+\infty}\left(x \mp \sqrt{x^2 - a^2}\right)dx$ rispettivamente con $c \geq a$, $c \leq -a$; questo integrale diverge.

Definiamo poi, per analogia con la famiglia goniometrica, la *tangente iperbolica*

$$\boxed{\tanh x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}}$$

e naturalmente i seguenti reciproci: secante iperbolica, cosecante iperbolica e cotangente iperbolica

$$\begin{aligned} \operatorname{sech} x &= \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}} \,, \\ \operatorname{csch} x &= \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}} \,, \\ \coth x &= \frac{1}{\tanh x} = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \,. \end{aligned}$$

Proprietà e relazioni notevoli

In virtù della loro definizione come ascissa e ordinata di punti sopra la circonferenza goniometrica, il coseno e il seno *dello stesso angolo* soddisfano la seguente importante identità: $\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1$ (relazione fondamentale della goniometria). Una identità analoga è verificata dal coseno iperbolico e dal seno iperbolico *dello stesso valore numerico* per il fatto che essi rappresentano ascissa e ordinata di punti sull'iperbole equilatera centrata con semiassi unitari:

$$\boxed{\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1} \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \,.$$

Naturalmente questa relazione può anche essere facilmente dedotta dalle espressioni analitiche ricavate per le funzioni iperboliche. Utilizzando queste espressioni è possibile verificare svariate proprietà simili a quelle soddisfatte dalle funzioni goniometriche.

<u>FUNZIONI GONIOMETRICHE</u>	<u>FUNZIONI IPERBOLICHE</u>
$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$	$\operatorname{senh} 2x = 2 \operatorname{senh} x \cosh x$
$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$	$\cosh 2x = \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 + 2\operatorname{sen}^2 x$
$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$	$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$
$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \sin y$	$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \operatorname{senh} x \sinh y$
$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$	$\sinh(x-y) = \sinh x \cosh y - \cosh x \sinh y$
$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \operatorname{sen} x \sin y$	$\cosh(x-y) = \cosh x \cosh y - \operatorname{senh} x \sinh y$

Chiamiamo *settore seno iperbolico* la funzione inversa del seno iperbolico:

$$y = \operatorname{senh} x \iff x = \operatorname{settsenh} y \;, \quad \text{con} \quad \operatorname{settsenh}: \mathrm{R} \to \mathrm{R}.$$

Possiamo derivare una espressione analitica per essa (ricordando che $e^x > 0 \ \forall x$):

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \iff e^{2x} - 2e^x y - 1 = 0 \iff e^x = y + \sqrt{y^2 + 1}$$

da cui

$$\boxed{x = \operatorname{settsenh} y = \ln\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right)}.$$

Sia il *settore coseno iperbolico* la funzione inversa della suddetta restrizione del coseno iperbolico:

$$y = \cosh x \iff x = \operatorname{settcosh} y \;, \quad \text{con} \quad \operatorname{settcosh}: [+1, +\infty) \to [0, +\infty).$$

Procendendo analogamente a quanto fatto sopra deriviamo una espresione analitica per essa (ricordando che $e^x \geq 1 \ \forall x \geq 0$):

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \iff e^{2x} - 2e^x y + 1 = 0 \iff e^x = y + \sqrt{y^2 - 1}$$

$$\boxed{x = \operatorname{settcosh} y = \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right)}.$$

Chiamiamo infine *settore tangente iperbolica* la funzione inversa della tangente iperbolica:

$$y = \tanh x \iff x = \operatorname{setttanh} y \;, \quad \text{con} \quad \operatorname{setttanh}: (-1, +1) \to \mathrm{R}.$$

Possiamo derivare una espressione analitica:

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \iff y = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \iff e^{2x}(y - 1) + y + 1 = 0 \iff e^{2x} = \frac{1 + \mathrm{y}}{1 - y}$$

$$\boxed{x = \operatorname{setttanh} y = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + \mathrm{y}}{1 - y}\right)}.$$

Come si vede anche per le funzioni inverse è stato possibile determinare espressioni analitiche in termini di funzioni elementari note, stavolta logaritmi naturali anziché esponenziali… Allo stesso modo è semplice introdurre le funzioni inverse di secante, cosecante e cotangente iperboliche, denominate *settore secante iperbolica*, *settore cosecante iperbolica* e *settore cotangente iperbolica*.

Ringraziamenti e Bibliografia

Questo breve opuscolo non ha la pretesa di completezza: tratta soltanto particolari proprietà di alcune funzioni iperboliche, senza addentrarsi eccessivamente nei dettagli dei calcoli, né mette in mostra le possibili applicazioni (e ce ne sono!) in campo matematico e fisico. Tuttavia penso basti come introduzione alle funzioni iperboliche, alla loro origine e alla loro relazione con il mondo delle funzioni goniometriche. Dato il carattere amatoriale del testo e per il formalismo in esso contenuto, lo penso destinato a chiunque non conosca già le funzioni iperboliche o che ne ha appena fatto conoscenza e volesse saperne di più, ed abbia basi matematiche liceali o universitarie. Per approfondimenti rimando a testi specialistici. Tutti gli errori sono imputabili all'autore.

Fonti:
- *Appunti di Analisi Matematica I, corso di laurea in Fisica, Gabriele Villari e Giovanni Cupini*
- *Pagine wikipedia.it dedicate alle funzioni iperboliche (da cui sono tratte alcune immagini)*

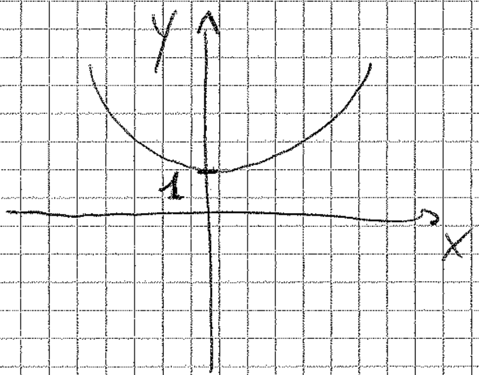
Gennaio 2010

MARCO GABBRIELLI

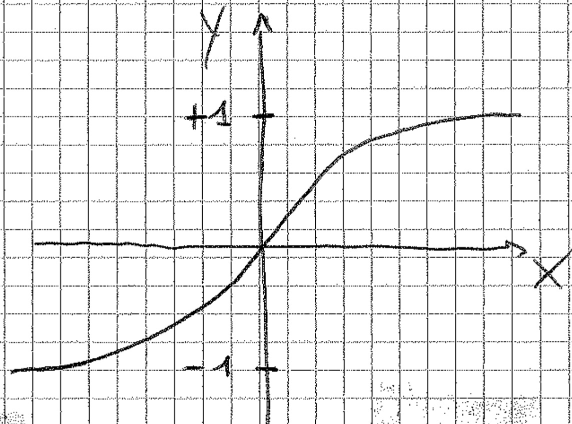
- Rappresentazioni:

sh x:

ch x:



th x:



- Derivate:

- $$(\mathrm{sh}\,x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - (-1)e^{-x}}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \mathrm{ch}\,x$$

- $$(\mathrm{ch}\,x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \mathrm{sh}\,x$$

- $$(\mathrm{th}\,x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)' = \ldots$$

$$\frac{(e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} =$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{(e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} \quad \boxed{\text{ok}}$$

• $y = ch\,x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

f. inversa del ch x : $x = \log\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right)$

DIM.

$y = \frac{1}{2} \cdot \left(e^x + \frac{1}{e^x}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{e^{2x} + 1}{e^x}\right) =$ $\qquad e^x = t$ $\quad e^{2x} = t^2$

$y = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{t^2+1}{t}\right)$

$2yt = t^2 + 1$

$t^2 - 2yt + 1 = 0$

$\Delta = 4y^2 - 4 = 4(y^2 - 1)$

$t_{1,2} = \dfrac{2y \pm \sqrt{4(y^2-1)}}{2} = y \pm \sqrt{y^2 - 1}$

$t_1 = y + \sqrt{y^2-1} \rightarrow > 0 \quad \forall x, y$

$t_2 = y - \sqrt{y^2-1} \rightarrow \nexists y$

$e^x = y + \sqrt{y^2 - 1}$ $\qquad \boxed{x = \log\left(y + \sqrt{y^2-1}\right)}$

Derivate delle f. inverse:

• $x = \log\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$ $\qquad x'$?

$$x' = \frac{1}{y + \sqrt{y^2+1}} \cdot \left\{1 + \left[\frac{1}{2} \cdot (y^2+1)^{1/2 - 1} \cdot 2y\right]\right\}$$

• $x = \log\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right)$ $\qquad x'$?

$$x' = \frac{1}{y + \sqrt{y^2 - 1}} \cdot \left\{1 + \left[\frac{1}{2} \cdot (y^2-1)^{1/2 - 1} \cdot 2y\right]\right\}$$

3 Teoremi del confronto

(3.1) Teorema *Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, x_0 di accumulazione per A e $f, g : A \to \mathbb{R}$ due funzioni. Supponiamo che esista un intorno $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ di x_0 in $\mathbb{R}$ $(\delta > 0)$ tale che*

$$\forall x \in [A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)] \setminus \{x_0\} : \quad f(x) \leq g(x) .$$

Valgono i seguenti fatti:

(*i*) *se* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, *allora* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$;

(*ii*) *se* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty$, *allora* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

(3.2) Osservazione Questo teorema continua a valere anche se in luogo di $\lim\limits_{x \to x_0}$ si hanno $\lim\limits_{x \to x_0^\pm}$ e $\lim\limits_{x \to \pm\infty}$.

(3.3) Teorema (Primo teorema del confronto)
Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, x_0 di accumulazione per A e $f, g : A \to \mathbb{R}$ due funzioni. Supponiamo che:

(*i*) *esista un intorno $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ di x_0 in $\mathbb{R}$ $(\delta > 0)$ tale che*

$$\forall x \in [A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)] \setminus \{x_0\} : \quad f(x) \leq g(x) ;$$

(*ii*) *esistano* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l_1$ *e* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l_2$ *(l_1, l_2 finiti o infiniti).*

Allora $l_1 \leq l_2$.

(3.4) Teorema (Secondo teorema del confronto)
Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, x_0 di accumulazione per A e $f, g, h : A \to \mathbb{R}$ tre funzioni. Supponiamo che:

(*i*) *esista un intorno $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ di x_0 in $\mathbb{R}$ $(\delta > 0)$ tale che*

$$\forall x \in [A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)] \setminus \{x_0\} : \quad f(x) \leq g(x) \leq h(x) ;$$

(*ii*) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = l, \quad l \in \mathbb{R}$.

Allora $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l$.

(3.5) Osservazione I teoremi del confronto continuano a valere anche se in luogo di $\lim\limits_{x \to x_0}$ si hanno $\lim\limits_{x \to x_0^\pm}$ e $\lim\limits_{x \to \pm\infty}$.

Limiti notevoli

funzioni goniometriche	
$\lim_{x\to 0} \frac{senx}{x} = 1$	$\lim_{x\to 0} \frac{tgx}{x} = 1$
$\lim_{x\to 0} \frac{1-cosx}{x} = 0$	$\lim_{x\to 0} \frac{arcsenx}{x} = 1$
$\lim_{x\to 0} \frac{1-cosx}{x^2} = \frac{1}{2}$	$\lim_{x\to 0} \frac{arctgx}{x} = 1$

funzioni esponenziali e logaritmiche		
$\lim_{x\to \infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$	$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$	
$\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$	$\lim_{x\to 0} \frac{ln(1+x)}{x} = 1$	
$\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = lna$	$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \, ln\, x = 0$; $\lim_{x\to +\infty} \frac{ln\,x}{x^\alpha} = 0$ $\quad \alpha > 0$	
$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$	$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0$; $\lim_{x\to +\infty} \frac{ln\,x}{a^x} = 0$ $\quad a > 1$	
$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$	$[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x)\cdot ln[f(x)]}$	l' uguaglianza a sinistra può essere utile per risolvere alcuni limiti che si presentano nelle forme indeterminate 0^0 $\quad 1^{\pm\infty}$ $\quad +\infty^0$

ad ogni limite notevole si possono applicare le seguenti proprietà che lasciano invariato il risultato			
limite iniziale	se il testo del limite è invertito anche il risultato sarà invertito	se nel limite al posto di x c'è **nx** il risultato del limite resta lo stesso	se il testo del limite è invertito anche il risultato sarà invertito
$\lim_{x\to 0} \frac{senx}{x} = 1$	$\lim_{x\to 0} \frac{x}{senx} = 1$	$\lim_{x\to 0} \frac{sen\,\boldsymbol{nx}}{\boldsymbol{nx}} = 1$	$\lim_{x\to 0} \frac{nx}{sen\,nx} = 1$

frazioni equivalenti			
per il calcolo dei limiti notevoli può essere utile ricordare alcune delle possibili operazioni con le frazioni:			
scomporre la frazione iniziale in due frazioni	dividere ogni monomio del numeratore e del denominatore per la stessa quantità **n**	moltiplicare e dividere la frazione per la stessa quantità **n**	moltiplicare e dividere il numeratore per **n** e/o moltiplicare e dividere il denominatore per **m**
$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} = a \cdot \frac{1}{b}$	$\frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{n}}{\frac{b}{n}}$	$\frac{a}{b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{n}{n}$	$\frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{n}\cdot n}{\frac{b}{m}\cdot m}$
$\frac{\boldsymbol{a\cdot b}}{\boldsymbol{c\cdot d}} = \frac{a}{c}\cdot\frac{b}{d}$	$\frac{a\cdot b}{c\cdot d} = \frac{\frac{a\cdot b}{n}}{\frac{d\cdot c}{n}}$	$\frac{a\cdot b}{c\cdot d} = \frac{a\cdot b}{c\cdot d}\cdot\frac{n}{n}$	$\frac{a\cdot b}{c\cdot d} = \frac{\frac{a\cdot b}{n}}{\frac{d\cdot c}{n}}$
$\frac{\boldsymbol{a+b}}{\boldsymbol{c+d}} = \frac{a}{c+d} + \frac{b}{c+d}$	$\frac{a+b}{c+d} = \frac{\frac{a}{n}+\frac{b}{n}}{\frac{c}{n}+\frac{d}{n}}$	$\frac{a+b}{c+d} = \frac{(a+b)}{(c+d)}\cdot\frac{n}{n}$	$\frac{a+b}{c+d} = \frac{\frac{a}{n}+\frac{b}{n}}{\frac{c}{n}+\frac{d}{n}}$
$\frac{\boldsymbol{a\cdot b}}{\boldsymbol{c+d}} = a\cdot\frac{b}{c+d}$	$\frac{a\cdot b}{c+d} = \frac{\frac{a\cdot b}{n}}{\frac{c}{n}+\frac{d}{n}}$	$\frac{a\cdot b}{c+d} = \frac{a\cdot b}{(c+d)}\cdot\frac{n}{n}$	$\frac{a\cdot b}{c+d} = \frac{\frac{a\cdot b}{n}}{\frac{c}{n}+\frac{d}{n}}$