NUMERO : 465

DATA : 18/02/2013

A P P U N T I

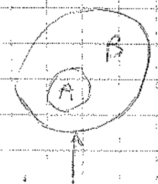
STUDENTE : Beghini

MATERIA : Analisi Matematica I + Esercizi
Prof.

ANALISI I

INSIEMI

Gruppi di elementi, definiti da ciò che contengono



- $A = \{a, b, c\}$ < $a \in A$, $d \notin A$

$A \subset B$ → A è contenuto in B, cioè tutti gli elementi di A sono elementi di B
A è sottoinsieme di B

$A \not\subset B$ → almeno un elemento di A non è contenuto in B

- Per insiemi GRANDI → no elenco ma PROPRIETÀ CARATTERISTICA

$\{x \mid P(x)\}$ → x tale che proprietà P(x) sia vera
(es. x è pari)

- FORMA STANDARD → $\{x \in X \mid P(x)\}$ → $\{x \mid 2x - 1 = 0\}$

X → insieme universo, specifica il tipo d'elementi coinvolti

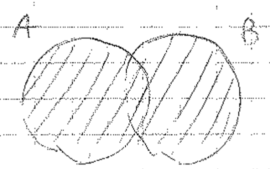
interi: $\emptyset$ — tutti i numeri: $\{\frac{1}{2}\}$

OPERAZIONI CON GLI INSIEMI

- UNIONE

$A, B \subset X$

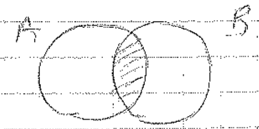
$A \cup B = \{x \in X \mid x \in A$ o $x \in B\}$



Esempio $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 5\}$ → $A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$ NON SI RIPETONO ELEMENTI!

- INTERSEZIONE

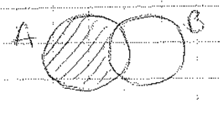
$A \cap B = \{x \in X \mid x \in A$ e $x \in B\}$



se $A \cap B = \emptyset$ → non ci sono elementi comuni → A e B sono DISGIUNTI

- DIFFERENZA

$A \setminus B = \{x \in X \mid x \in A$ e $x \notin B\}$



Ogni proposizione DEVE essere o V o F (no intermedie)
es: $2 > 3$ → accettabile come proposizione ma F
$2 < 3$ → V
~~2x~~
~~2+3~~
$x > 2$ → non accettabile perché non è né vera né falsa senza che si definisca
↓
Tutte le volte che in una proposizione compare una variabile bisogna specificare per quali valori della variabile si intende la proposizione
↓
QUANTIFICATORI → davanti alle variabili facendole diventare accettabili

$\forall$ = per ogni, qualunque
QUANTIFICATORE UNIVERSALE

$\exists$ = esiste, per qualche
QUANTIFICATORE ESISTENZIALE
$\exists!$ = esiste un unico

- $\exists x > 2$ V (accettabile perché si può dire che è vero, esiste almeno 1 valore di $x > 2$)
- $\forall x > 2$ F (non è vero che ogni numero è > 2)

MAI SCAMBIARE POSTO AI QUANTIFICATORI

$\forall y \ \exists z$ → dipende da y, ne basta 1

$\exists y$ → il numero è fissato, vincolato

- $\forall x \ \exists y \mid x + y = 1$ V → accettabile perché ci sono quantificatori davanti alle variabili
(per ogni x esiste 1 y | $x + y = 1$ e $y = 1 - x$)
y dipende da x, y non è uguale per tutti
- $\exists y \ \forall x \mid x + y = 1$ F → $\exists y$ per primo = y è fissato per tutti
(esiste 1 y | per qualsiasi numero $x + y = 1$)

* NEGARE UNA PROPOSIZIONE - LEGGI DE MORGAN

$\forall$ ① $\sim (\forall x, p(x)) = (\exists x, \sim p(x))$ → basta 1 solo x che non verifichi la proprietà
($\sim$ negazione; $=$ se e solo se)

$\exists$ ② $\sim (\exists x, p(x)) = (\forall x, \sim p(x))$

$\wedge$ ③ congiunzione (e) → $\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$

$\vee$ ④ disgiunzione (o) → $\sim (p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$ — p o q sono vere, false solo se entrambe false

INSIEME COMPLEMENTO
$A' = \{x \mid x \notin A\}$ 

- $(A \cap B)' = A' \cup B'$
- $(A \cup B)' = A' \cap B'$ → 
- $A \setminus B = A \cap B'$ → 

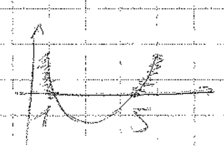
ESERCIZIO 3 Determina $A \cup B$

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x-4 \geq \sqrt{x^2-6x+5}\}$

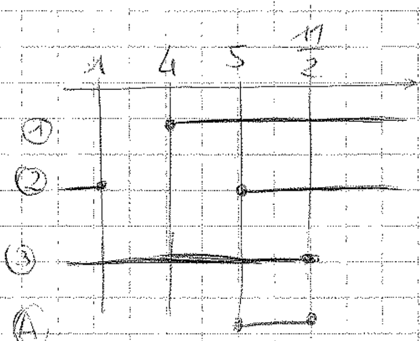
$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x+2 > \sqrt{x-1}\}$

(A) $\sqrt{x^2-6x+5} \leq x-4$

$$\wedge \begin{cases} ① \; x-4 \geq 0 \\ ② \; x^2-6x+5 \geq 0 \\ ③ \; x^2-6x+5 \leq (x-4)^2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} ① \; x \geq 4 \\ ② \; x^2-6x+5 \geq 0 \\ \quad (x-1)(x-5) = 0 \\ ③ \; \cancel{x^2}-6x+5 \leq \cancel{x^2}+16-8x \\ \quad 2x \leq 11 \\ \quad x \leq \frac{11}{2} \end{cases}$$



$x \leq 1 \vee x \geq 5$



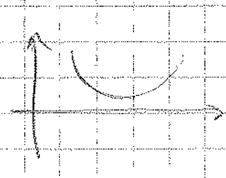
$A \left[5, \frac{11}{2}\right]$

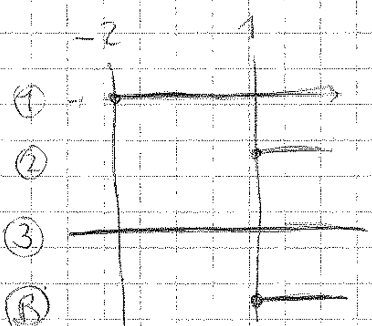
(B) $\sqrt{x-1} < x+2$

$$\begin{cases} ① \; x+2 > 0 \\ ② \; x-1 \geq 0 \\ ③ \; x-1 < (x+2)^2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} ① \; x \geq -2 \\ ② \; x \geq 1 \\ ③ \; x-1 < x^2+4+4x \rightarrow x^2+3x+5 > 0 \end{cases}$$

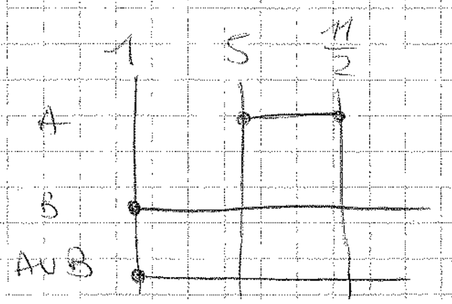
$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} =$

$= -3 \pm \sqrt{9+20} \quad \Delta <$





$A \cup B$

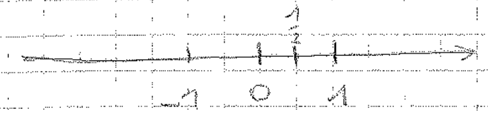


INSIEMI NUMERICI

- $\mathbb{N}$ = naturali = $\{0, 1, 2, 3 \ldots\}$ $\longrightarrow$ +, ·
- $\mathbb{Z}$ = interi = $\{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ $\longrightarrow$ +, ·, −

} elenco

- $\mathbb{Q}$ = razionali = $\left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$ $\longrightarrow$ +, ·, −, / ma non sempre $\sqrt{\ }$ $\rightarrow$ definito non come elenco ma con proprietà



se prendo r e s razionali, allora esiste un numero $\frac{r+s}{2}$

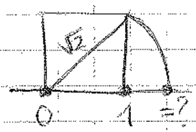
Quindi in ogni intervallo sulla retta cadono ∞ razionali.

(*) $r \in \mathbb{Q}$ è il più piccolo razionale > 0

$\frac{r}{2} > 0$

$\frac{r}{2} < r \rightarrow$ non è definibile il razionale più piccolo positivo

(*) se metto tutti i razionali su una retta riempio la retta?



non esiste un numero razionale che sia dato da una frazione $= \sqrt{2}$ quindi sulla retta ci sono dei buchi.

<u>TEOREMA</u>: NON ESISTE NESSUN RAZIONALE $r \in \mathbb{Q} \mid r^2 = 2$

<u>Dimostrazione per assurdo</u>:

- Supponiamo che esista $r \in \mathbb{Q} \mid r^2 = 2$

  $r = \frac{p}{q}$ $p, q \in \mathbb{Z}$

- Supponiamo che p e q <u>NON</u> siano <u>ENTRAMBI PARI</u>

  $\frac{p^2}{q^2} = 2$

- $p^2 = 2q^2$
- p^2 è pari perché è ottenuto moltiplicando un numero per 2
- Se p^2 è pari anche p è pari, quindi $p = 2K$ con $K \in \mathbb{Z}$
- $p = 2K$ $p^2 = 2q^2$

  $(2K)^2 = 2q^2$

  $4K^2 = 2q^2$

  $2K^2 = q^2 \rightarrow$ anche q^2 è pari, quindi anche q è pari

quindi p e q sono entrambi pari, questo non è possibile perché abbiamo supposto il contrario quindi non è neanche possibile che $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$, perciò $\sqrt{2}$ non è razionale

Dimostrare che $\sqrt{3}$ non è razionale

$r^2 = 3$ $r = \frac{p}{q}$ con $p, q \in \mathbb{Z}$ e <u>non</u> divisibili $\times$ 3

$\frac{p^2}{q^2} = 3$

$p^2 = 3q^2 \rightarrow p^2$ è div $\times$ 3, p è div $\times$ 3 $\rightarrow p = 3K$

$(3K)^2 = 3q^2 \rightarrow 9K^2 = 3q^2 \rightarrow 3K^2 = q^2 \rightarrow q^2$ è div $\times$ 3, q è div $\times$ 3

impossibile che entrambi siano div per 3 perché ho supposto il contrario, quindi non si può supporre $\sqrt{3}$ = razionale, perciò $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$

soluzione: $-2 \quad 0 \quad 2$

$|x|<2 \rightarrow$ numeri che distano da 0 meno di 2 $\qquad -2 \quad 0 \quad 2$

(*) $\sqrt{4}=2$ per definizione $\rightarrow$ la radice quadrata quando esiste è positiva

$x^2=4 \rightarrow +2, -2$

$\sqrt{4} \quad -\sqrt{4}$

$\sqrt{x^2}=|x| \rightarrow$ non da solo x, perché se x fosse negativo allora otterrei:

$x=-10$

$\sqrt{100}=\cancel{-10}$

solo se $x \geq 0$ allora $\sqrt{x^2}=x$

INTERVALLI DI NUMERI REALI

$a<b$

- $[a,b]=\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} \rightarrow$ INTERVALLO CHIUSO
- $]a,b[\;,\; (a,b)=\{x \in \mathbb{R} \mid a<x<b\} \rightarrow$ INTERVALLO APERTO
- $[a,b) \rightarrow$ SEMIAPERTO
- $[a,+\infty)=\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$ } sempre aperti dove c'è $\pm\infty$ perché ∞ non
- $(-\infty,a]=\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$ } è un numero

MAGGIORANTI, INSIEMI LIMITATI SUPERIORMENTE

$A \subset \mathbb{R}$

- A è LIMITATO SUPERIORMENTE se $\exists M \in \mathbb{R} \mid x \leq M \;\forall x \in A$

esempio: $A=[0,100] \rightarrow$ limitato superiormente perché esiste un numero maggiore di 100 $M=100,101,\ldots$ $\forall x \in A.$ $x \leq 100,101\ldots$

M può essere in A o no

- I numeri con tale proprietà sono i MAGGIORANTI di A
- A è LIMITATO SUPERIORMENTE se ha un MAGGIORANTE
- se A è limitato superiormente ha ∞ maggioranti

esempio: non hanno maggioranti: $\mathbb{N}$ $(0,+\infty)$

- vale lo stesso anche per A LIMITATO INFERIORMENTE:

$m \leq x \;\forall x \in A$, $m=$ minorante

esempio: $A=\left\{\frac{n}{n+1} \mid n=1,2,3\ldots\right\}$ $\qquad 0 \quad \frac{1}{2} \quad 1$

$M=1 \longrightarrow$ limitato superiormente

$\forall n, \;\frac{n}{n+1} \leq 1$

$\cancel{n} \leq \cancel{n}+1$

$0 \leq 1 \longrightarrow$ den. è sempre $>$ num, quindi frazione è sempre <1

guarda app.

MASSIMO (MINIMO)

Un maggiorante di A che $\in A$ si chiama massimo MAX di A.

MAX A $=M$ se ① M è un maggiorante
② $M \in A$

ESERCITAZIONE

- la distanza da x a 3 è 7 $\rightarrow |x-3| = 7$
- distanza da x a 5 è minore di 2 $\rightarrow |x-5| < 2$

$$-2 < |x-5| < 2$$
$$3 < x < 7$$

- la distanza da x a -3 è maggiore di 4 $\rightarrow |x+3| \geq 4$

$$x+3 \geq 4 \quad \vee \quad x+3 \leq -4$$
$$x \geq 1 \qquad x \leq -7$$

- x compreso tra -2 e 2 $\rightarrow |x| \leq 2$
- x compreso tra 4 e 6 $\rightarrow |x-5| < 1$

$$-1 < x-5 < 1$$
$$4 < x < 6$$

- x compreso tra -3 e 1 $\rightarrow$ intervallo

$$|x-y| < a \qquad |x| < a \qquad |x| > a$$
$$-a < x-y < a \qquad -a < x < a \qquad x > a \vee x <$$
$$|x+1| < 2$$
$$-2 < x+1 < 2$$
$$-3 < x < 1$$

- $y = \sqrt{\dfrac{x+3}{x-4}}$ $\quad \begin{cases} ① \dfrac{x+3}{x-4} \geq 0 \\ ② x-4 \neq 0 \rightarrow x \neq 4 \end{cases}$

① N $x \geq -3$
D $x > 4$

$(-\infty, 3] \cup (4, +\infty)$

- $y = \sqrt{\dfrac{x-1}{x^2-9}}$ $\quad \begin{cases} \dfrac{x-1}{x^2-9} \geq 0 \longrightarrow \text{N } x > 1 \\ x^2-9 \neq 0 \end{cases}$

D $x^2 - 9 > 0$

$(-\infty, -3] \cup [3, +\infty$

- $y = \sqrt{2 - \sqrt{x-3}}$ $\quad \begin{cases} 2 - \sqrt{x-3} \geq 0 \\ x-3 \geq 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} ① 2 \geq \sqrt{x-3} \\ ② x \geq 3 \end{cases}$

① $\sqrt{x-3} \leq 2$
$x - 3 \leq 4$
$x \leq 7$
② $x \geq 3$

$[3, 7]$

Esercitazione 1 di Analisi Matematica I

1 • Esercizi di logica matematica

1. Considerando la proposizione $p(x, y) =$ "*x è un multiplo di y*", dove x e y variano nell'insieme $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, dire se le seguenti proposizioni sono vere o false; indicare poi la negazione delle proposizioni false usando connettivi logici e quantificatori:

   – $\forall x \forall y, \quad p(x, y)$ – $\exists y \forall x, \quad p(x, y)$ – $\exists x \exists y, \quad p(x, y)$
   – $\forall y \exists x, \quad p(x, y)$ – $\forall x \exists y, \quad p(x, y)$ – $\exists x \forall y, \quad p(x, y)$.

2. Sia $p(x, y)$ la proposizione "$x^2 + y^2 < 4$", dove x e y sono numeri interi. Dire se le seguenti proposizioni sono vere o false

   – $\forall x, \forall y, \quad p(x, y)$ – $\forall x, \forall y, \quad \texttt{NOT}\, p(x, y)$ – $\forall x, \exists y, \quad p(x, y)$
   – $\forall x, \exists y, \quad \texttt{NOT}\, p(x, y)$ – $\exists x, \forall y, \quad p(x, y)$ – $\exists x, \forall y, \quad \texttt{NOT}\, p(x, y)$
   – $\exists x, \exists y, \quad p(x, y)$ – $\exists x, \exists y, \quad \texttt{NOT}\, p(x, y)$.

3. Mostrare con un esempio che la seguente proposizione è falsa:

   per qualsiasi scelta di tre insiemi A, B e C, $A \cup C = A \cup B \implies B = C$. = esercizio 4 su q.

2 • Esercizi sul valore assoluto

Scrivere le seguenti proposizioni usando il valore assoluto

1. x è 5 oppure -5 $|5|$
2. la distanza da x a 3 è 7 $|x-3|=7$ $\rightarrow |x-y|$
3. la distanza da x a 5 è minore di 2 $|x-5|<2$
4. la distanza da x a -3 è maggiore o uguale a 4 $|x+3| \geq 4$
5. x è compreso fra -2 e 2 $|x|<2$ — $|x|<2$, $x<2$, $x>-2$
6. x è compreso fra 4 e 6 $|x-5|<1$ $\longrightarrow$ 4 M 6, d; $d=6-4=2$, $M=4+\frac{d}{2}=5$
7. x è compreso fra -3 e 1 $|x+1|<2$ $\longrightarrow$ $d=1-(-3)=1+3=4$, $M=-3+\frac{d}{2}=-1$

x casuale all'interno di $[4,6]$ per essere compreso deve essere tale che la distanza tra x e $M < \frac{d}{2}$, quindi $|x-5|<1$

3 • Risolvere le seguenti equazioni e disequazioni

1. $\dfrac{x^2 + 2x - 3}{1 - 7x} \geq 0;$
2. $|x - 1| + |2x + 1| = 10;$
3. $|x^2 - 1| - |x^2 - 5| = 3;$
4. $\left| \dfrac{6x + 1}{2x + 5} - 3 \right| < 1;$
5. $\dfrac{2x - 3}{x^2 - 25} \geq \dfrac{1}{x - 5} + \dfrac{1}{x + 5};$
6. $\sqrt{x^2 - 6x} > x + 2;$
7. $2 + \dfrac{1}{x} > 0$
8. $\dfrac{x\sqrt{|x^2 - 4|}}{x^2 - 4} - 1 > 0;$
9. $|2|x| - 1| = 5;$
10. $\sqrt[3]{x + 4} = 3;$
11. $\sqrt{x - 1} - \sqrt{2x - 3} = 0;$
12. $\sqrt{x + 2} + \sqrt{3x - 1} > 0;$
13. $\sqrt{4x^2 + 12x + 9} = 3;$
14. $|x^2 - 5|x| + 4| > 1.$

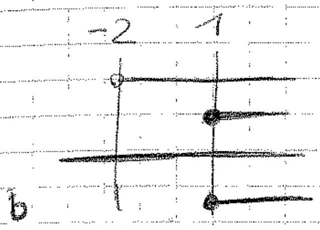
4 • Determinare esplicitamente i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$

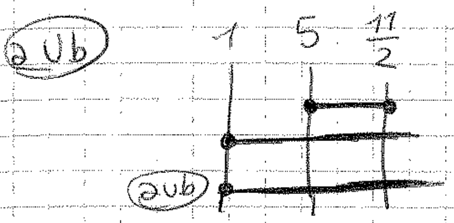
1. $A = \{x \in \mathbb{R} : (x + 2)(x - 1)(x - 5) < 0\} \cap \left\{x \in \mathbb{R} : \dfrac{3x + 1}{x - 2} \geq 0\right\};$
2. $B = \left\{x \in \mathbb{R} : x - 4 \geq \sqrt{x^2 - 6x + 5}\right\} \cup \left\{x \in \mathbb{R} : x + 2 > \sqrt{x - 1}\right\};$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 15 di 233

(b) $x+2 > \sqrt{x-1}$

$$\begin{cases} x+2>0 \\ x-1\geq 0 \\ (x+2)^2 > x-1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x>-2 \\ x\geq 1 \\ x^2+4+4x > x-1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x>-2 \\ x\geq 1 \\ x^2+3x+5>0 \quad \text{no} \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$





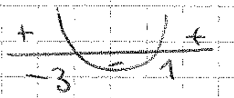
$A = [1, +\infty)$

3. ① $\dfrac{x^2+2x-3}{1-7x} \geq 0$

N $x^2+2x-3 \geq 0$ $\quad (x+3)(x-1) \geq 0$

$x_1 = -3$

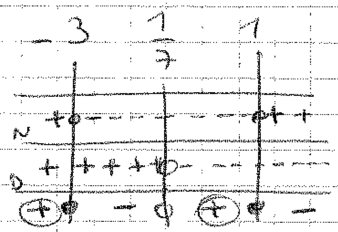
$x_2 = 1$



D $1-7x>0$

$-7x > -1$

$x < \dfrac{1}{7}$



$A = (-\infty, 3] \cup (\frac{1}{7}, 1]$

② $|x-1| + |2x+1| = 10$

se $x-1\geq 0$ e $2x+1 \geq 0$: $x-\cancel{1}+2x+\cancel{1} = 10$

$3x = 10$

$x = \dfrac{10}{3}$

se $x-1\geq 0$ e $2x+1\leq 0$: $x-1-2x-1=10$

$-x-2=10$

$-x=12$

$x=-12$

se $x-1\leq 0$ e $2x+1\geq 0$: $-x+1+2x+1=10$

$x+2=10$

$x=8$

se $x-1\leq 0$ e $2x+1\leq 0$: $-x+\cancel{1}-2x-\cancel{1}=10$

$-3x=10$

$x=-\dfrac{10}{3}$

③ $|x^2-1| - |x^2-5| = 3$ con $(x^2-1)=a$ e $(x^2-5)=b$

- $a>0$ e $b>0 \rightarrow \cancel{x^2}-1-\cancel{x^2}+5=3$
  x non ha sol. reali
- $a>0$ e $b<0 \rightarrow x^2-1+x^2-5=3$
  $2x^2=9$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 17 di 233

⑥ $\sqrt{x^2-6x}$ ...

a $\begin{cases} x^2-6x \geq 0 \\ x+2<0 \end{cases}$ $\cup$ b $\begin{cases} x+2>0 \\ (x^2-6x)>(x+2)^2 \end{cases}$

ⓐ • $x^2-6x\geq 0$

$x(x-6)\geq 0$

0 6

• $x<-2$

ⓑ • $x>-2$

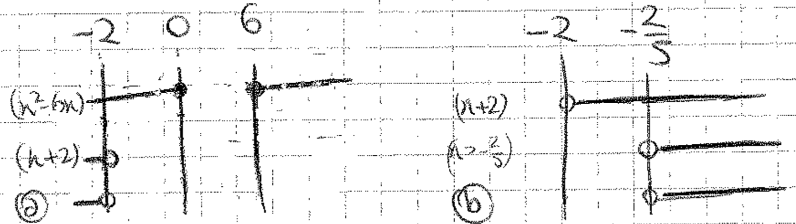
• $\cancel{x^2}-6x>\cancel{x^2}-4-4x>0$

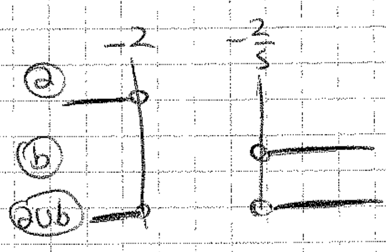
$-10x-4>0$

$-10x>4$

$x\geq \frac{4}{-10}\frac{2}{5}$

$x>-\frac{2}{5}$





$A=(-\infty,-2)\cup(-\frac{2}{5},+\infty)$

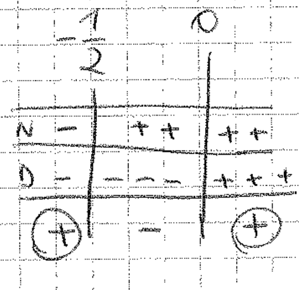
⑦ $2+\frac{1}{x}>0$

$\frac{2x+1}{x}>0$

N $2x+1>0$

$x>-\frac{1}{2}$

D $x>0$



$A=(-\infty,-\frac{1}{2})\cup(0,+\infty)$

⑧ $\frac{x\sqrt{|x^2-4|}}{x^2-4}-1>0$

$\frac{x\sqrt{|x^2-4|}-(x^2-4)}{x^2-4}>0$

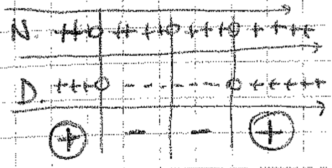
$\frac{x\sqrt{|(x-2)(x+2)|}-(x^2-4)}{x^2-4}>0$

$\boxed{N}$ $x\sqrt{|(x-2)(x+2)|}-(x^2-4)>0$

$x\sqrt{|(x^2-4)|}>x^2-4$

$\sqrt{|(x^2-4)|}>\frac{x^2-4}{x}$

a $\begin{cases} |x^2-4|>0 \\ \frac{x^2-4}{x}<0 \end{cases}$ $\cup$ b $\begin{cases} \frac{x^2-4}{x}>0 \\ x^2-4>\left(\frac{x^2-4}{x}\right)^2 \end{cases}$



$A = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

9) $|2|x|-1| = 5$

$x = |x|$
$y = |2|x|-1|$

a) $2x-1=5$
$2x=6$
$x=\frac{\cancel{6}^{3}}{\cancel{2}_{1}}$
$x=3$

b) $-2x+1=5$
$-2x=4$
$x=-2$

c) $-2x-1=5$
$-2x=6$
$x=-3$

d) $2x+1=5$
$2x=4$
$x=2$

$A=\{x \in \mathbb{R} \mid x=\pm 2, \pm 3\}$

10) $\sqrt[3]{x+4}=3$ indice dispari, quantità sotto radice può essere $\gtrless 0$

$(\sqrt[3]{x+4})^3=3^3$
$x+4=9$
$x=5$

11) $\sqrt{x-1}-\sqrt{2x-3}=0$
$\sqrt{x-1}=\sqrt{2x-3}$
$x-1=2x-3$
$-x=-2$
$x=2$

12) $\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-1}>0$ ($\rightarrow x+2\geq 0$ + $3x-1\geq 0$ $\mathbb{R}$ sempre ≥ 0)
$\sqrt{x+2}>-\sqrt{3x-1}$
Per radici con indice pari:
$x+2>0$
$3x-1>0 \longrightarrow$ con $-$ davanti allora $3x-1$ è sempre <0
perciò
$x+2>-3x+1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

1. $1\ x, y \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$

- $\forall x \forall y \mid p(x,y)$ F $\longrightarrow$ not $(\forall x \forall y, p(x,y)) \rightarrow \exists x \exists y$, not $p(x,y)$
- $\forall y \exists x \mid p(x,y)$ V
- $\exists y \forall x \mid p(x,y)$ F $\longrightarrow$ not $(\exists y \forall x, p(x,y)) \rightarrow \forall y \exists x$, not $p(x,y)$
- $\forall x \exists y \mid p(x,y)$ F $\longrightarrow$ not $(\forall x \exists y, p(x,y)) \rightarrow \exists x \forall y$, not $p(x,y)$
- $\exists x \exists y \mid p(x,y)$ V
- $\exists x \forall y \mid p(x,y)$ F $\longrightarrow$ not $(\exists x \forall y, p(x,y)) \rightarrow \forall x \exists y$, not $p(x,y)$

2. $x^2+y^2<4 \quad x,y \in \mathbb{Z}$

- $\forall x\ \forall y\ p(x,y) \rightarrow F$
- $\forall x, \exists y$ not $p(x,y) \rightarrow V$
- $\exists x, \exists y\ p(x,y) \rightarrow V$ (~~no~~ perché sia x che y sono elevati al quadrato perciò x^2 e y^2 sono nell'insieme $\mathbb{N}$)
- $\forall x, \forall y$ not$(x,y) \rightarrow F$
- $\exists x, \forall y\ p(x,y) \rightarrow F$
- $\exists x, \exists y$ not$(x,y) \rightarrow V$
- $\forall x, \exists y\ p(x,y) \rightarrow F$
- $\exists x, \forall y$ not $p(x,y) \rightarrow V$

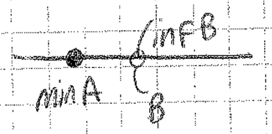
ESERCITAZIONE

- $A \subseteq B \quad A,B \in \mathbb{R}$ e $\neq \emptyset$

  $\inf B \leq \inf A$

  escludere tutte quelle con il min perché non è detto che l'insieme contenga l'inf, cioè che abbia un minimo.

- $A,B \in \mathbb{R}$ e $\neq \emptyset \quad \min A < \inf B$

  a) $x \in A \mid \min A < x < \inf B$ F
  b) $x \in A \mid \min A \leq x < \inf B$ V $\rightarrow$ è $A \leq x$ perché $\underline{x \in A}$
  c) esiste min B F $\rightarrow$ non è detto che ci sia un minimo

- $\inf A < \inf B$
  a) $\exists x \in A \mid \inf A < x < \inf B$ $\rightarrow$ non è detto che x sia $< \inf B$ F
  b) se $\exists \min B$ allora $= \min A$ F
  c) $\min A = \min B$ F
  d) $\min A < \min B$ V

- $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 2\} \rightarrow \sup A = \max A = 2$, $\inf A = 1$

  $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 27 \leq x^3 < 64\} \rightarrow 3 \leq x < 4 \quad [3,4)$ $\quad \inf A = \min A = 3$, $\sup A = 4$

  $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 3 + \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \rightarrow$ $\quad \inf A = 3$, $\sup A = \max A = 4$ $\quad 3 + \frac{1}{n} \rightarrow 0,\ n \rightarrow +\infty$

  $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{n}{n+1},\ n \in \mathbb{N}\} \rightarrow \inf A = \min A = 0$, $\sup A = 1$

  $E = \{1\} \cup (2,3] \cup (4,10) \rightarrow \inf A = \min A = 1$, $\sup A = 10$

  $F = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x^2 \leq x^4\} \rightarrow 2 < x^2 \wedge x^2 \leq x^4$

RIASSUNTO

$A \subseteq \mathbb{R}$
- limitato superiormente = A ha un maggiorante
- MAX A → maggiorante che $\in A$
- SUP A → minimo dei maggioranti
  - ↳ caratterizzare sup se e solo se
    1. $\forall x \in A \quad x \leq s$
    2. $\forall r < s \quad \forall x \in A \mid x > r$

    oppure

    2. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in A \mid \underbrace{s - \varepsilon}_{r} < x$ $\quad < s$

se A non è limitato superiormente → $\sup A = +\infty$
inferiormente → $\inf A = -\infty$

TEOREMA DI COMPLETEZZA: ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}$ limitato superiormente ha l'estremo superiore (cioè l'insieme dei maggioranti ha sempre un minimo)

↓

in $\mathbb{Q}$ è falso
esempio $A = \{r \in \mathbb{Q} \mid r^2 < 2\}$ → limitato superiormente ma non ha sup

$\sqrt{2}$ buco!

→ $\sqrt{2}$ in $\mathbb{R}$

DEFINIRE IN $\mathbb{R}$ $\sqrt{2}$
Numero moltiplicato per se stesso fa $\sqrt{2}$ non esiste
$\sqrt{2} = \text{def} \ \sup\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2\}$

esercizio
$A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto e limitato con $x \in A$
m = minorante
M = maggiorante
x, m, M, inf A, sup A come sono ordinati? $\quad m \leq \inf A \leq x \leq \sup A \leq M$

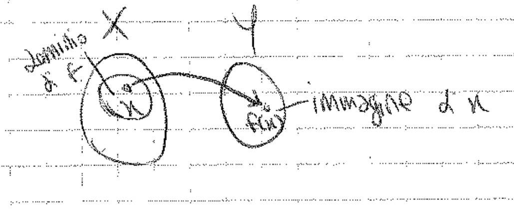
FUNZIONE

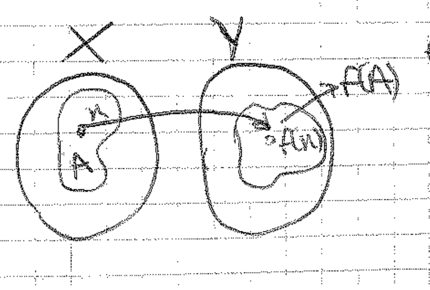
Una funzione f tra due insiemi X e Y è una legge che ad ogni elemento di X associa un solo elemento di Y.

$f: X \to Y$
se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f(x) = \sqrt{x}$ alla funzione non si possono dare in entrata numeri negativi

Il più grande sottoinsieme di X dove ha senso f(x) è DOMINIO di f ⇒ dom
quindi $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ammette che $f: \text{dom}(f) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cioè l'insieme di partenza è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$, non tutto $\mathbb{R}$

$f: X \to Y$ se $x \in \text{dom}(f)$, $f(x)$ si chiama IMMAGINE di x tramite f.
esempio $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f(x) =$ soluzione eq. $y^2 = x \xrightarrow{\text{sol}} y = \pm\sqrt{x}$ → non è una funzione perché ad ogni elemento di X associa + di un Y



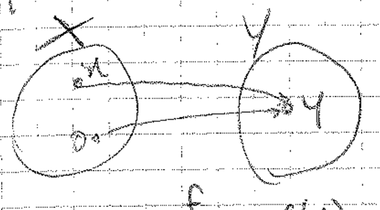


$f: X \to Y$
se $x \in A$
$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$

Fissiamo $y \in Y$

$\{x \in X \mid f(x) = y\} \rightarrow$ INSIEME DELLE CONTROIMMAGINI $= f^{-1}(y)$

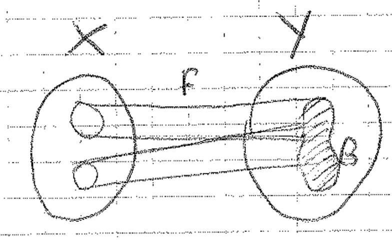
In generale non è una funzione, perché ad ogni y possono corrispondere + x



$$x \xrightarrow{f} f(x)$$
$$f(y) \xleftarrow{f^{-1}} y$$

$B \subset Y$

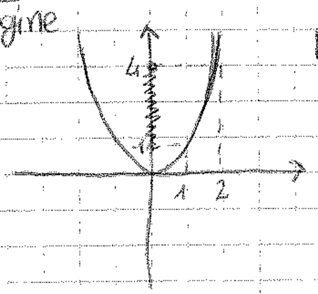
$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$



esempio: $f(x) = x^2 \quad X = Y = \mathbb{R}$

- immagine

$[1,2]$

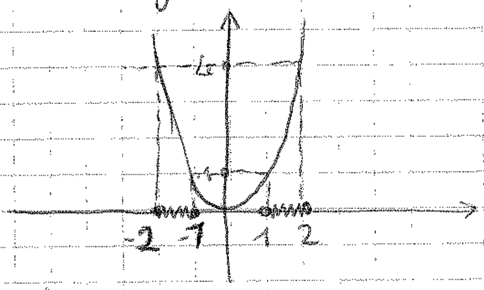


$f([1,2]) = [1,4]$

- controimmagine

prendo un sottoinsieme di Y. $B = [1,4]$

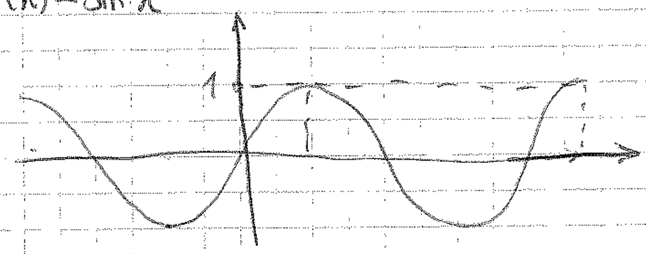
$f^{-1}(B) = [-2,-1] \cup [1,2]$



esempio

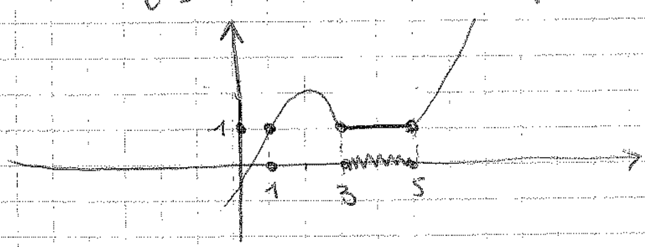
$f(x) = \sin x$

$f^{-1}(1) = \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$



esempio

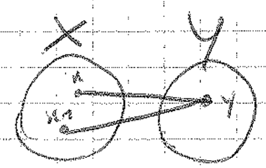
$f^{-1}(1) = \{1\} \cup [3,5] \rightarrow$ unici punti in cui può valere 1



$f: X \to Y$

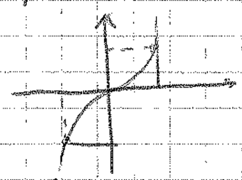
si dice INIETTIVA se
- $\forall y \in Y$, $f^{-1}(y)$ contiene al più un punto (al massimo
- $a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$ $\forall a, b \in dom(f)$

Negando la proposizione:
$\exists a, b$ diversi | $f(a) = f(b)$
quindi $y = f(a)$ ha 2 controimmagini $f(a)$ e $f(b)$

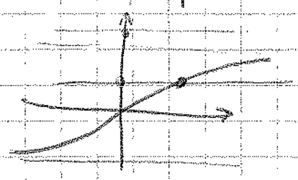


non iniettiva

esempio
- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
  $f(x) = x^2$
  non iniettiva, perché $-2 \neq 2$ hanno $f(2) = f(-2)$
- $f(x) = x^3$



iniettiva

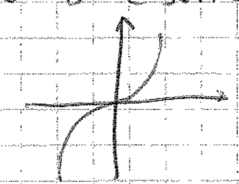
- 

iniettiva, perché o non ha controimmagini o se ci sono sono uniche

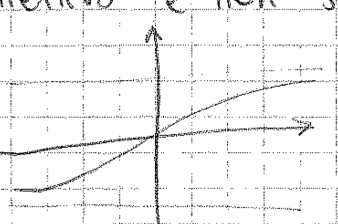
f è iniettiva se e solo se ogni retta orizzontale taglia il grafico in al più un punto

Se una funzione è sia INIETTIVA che SURIETTIVA = BIETTIVE allora qualsiasi retta orizzontale taglia la retta in 1 solo punto

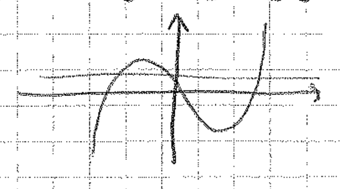
- iniettiva e suriettiva



- iniettiva e non suriettiva



- non iniettiva e suriettiva



Ma $\frac{\varepsilon}{2}$ è minore di ε quindi ε non è un minorante. Perciò non esistono numeri positivi che sono minoranti.
Perciò 0 è il massimo dei minoranti.

$\inf\limits_{\mathbb{R}} f = 0$

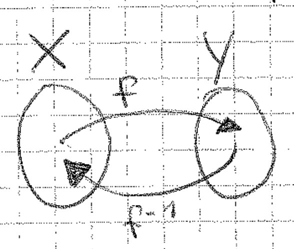
$\min\limits_{\mathbb{R}} f$ non esiste $\rightarrow$ quando min esiste allora $= \inf$, ma la funzione non assume valore 0

$f: X \rightarrow Y$ INIETTIVA $\forall y \in Y \quad f^{-1}(y) = \{x \in X \mid f(x) = y\}$

Se f è iniettiva $\forall y \in \mathrm{Im}(f)$
$f^{-1}(y)$ contiene esattamente un punto x.
x è l'unico punto di X tale che $f(x)=y$, quindi posso definire una funzione che va da $\mathrm{Im}(f)$ a valori in X
$\mathrm{Im}(f) \rightarrow X$ FUNZIONE INVERSA

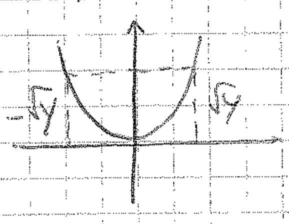
$f: X \rightarrow Y$ iniettiva si chiama funzione inversa di f la funzione che ad ogni $y \in \mathrm{Im}(f)$ associa l'unico $x \in X$ tale che $f(x)=y$ e si indica con f^{-1}:
$f^{-1}(y) = x$

<u>esempio</u> $f(x) = x^3$ iniettiva $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$
$f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$
$f^{-1}(8) = x \rightarrow$ l'unico x tale che $f(x) = 8$, quindi $x = 2$
$f^{-1}(8) = 2$
$f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$



- $\mathrm{dominio}(f^{-1}) = \mathrm{Im}(f) \subset Y$
- $\mathrm{Im}(f^{-1}) = \mathrm{dom}(f)$

<u>esempio</u> $f(x) = x^2$ non iniettiva



$\mathrm{Im}(f) = [0, +\infty)$
$y \in [0, +\infty) \Rightarrow x \quad f(x) = y$
$x^2 = y \rightarrow$ ci sono 2 valori della controimmagine
$\sqrt{y} \qquad -\sqrt{y}$

In questi casi si opera una RESTRIZIONE: restringere f ad un insieme qualunque A vuol dire guardare f solo su A

<u>esempio</u>: $f|_A \quad f(x) = x^2$
$A = [0, +\infty) \quad f|_A(x) = x^2$ se $x \geq 0 \quad x \in A$

esemp $f(x) = e^{\sqrt[3]{x-2}}$

$f^{-1}(y) =$ unico $x \mid f(x) = y =$ unico $x \mid e^{\sqrt[3]{x-2}} = y \longrightarrow$ INVERSA: trovare x in funzione di

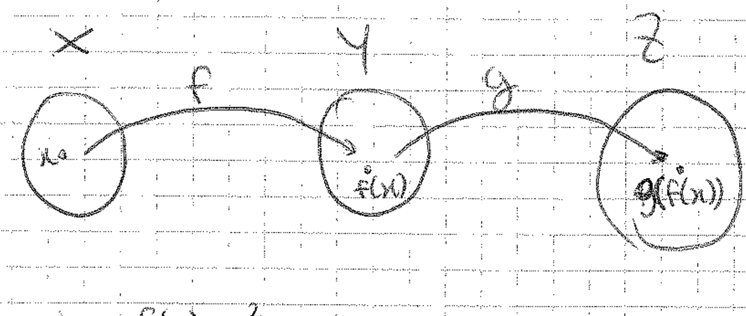
$e^{\sqrt[3]{x-2}} = y$

$\sqrt[3]{x-2} = \log y$

$x - 2 = \log^3 y$

$x = \log^3 y + 2 = f^{-1}(y)$

FUNZIONI COMPOSTE



Date f e g è definita una nuova funzione $g \circ f$ (g composta f)

$$\left.\begin{matrix} x \\ f(x) \\ g(f(x)) \end{matrix}\right\} (g \circ f)(x)$$

esempio $f(x) = x^2$

$g(x) = \frac{1}{y}$

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$ — $g(x^2) = \frac{1}{x^2}$ — $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x^2}$

Dominio $g(f(x))$

1) $x \in dom(f)$

2) $f(x) \in dom(g)$

esempio $f(x) = \frac{x+2}{|x-1|}$, $g(y) = \sqrt{y}$ $\Big\}$ $g(f(x)) = \sqrt{\frac{x+2}{|x-1|}}$

1) $x \in dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

2) $f(x) \in dom(g) = [0, +\infty)$

$f(x) \in [0, +\infty)$

$\frac{x+2}{|x-1|} \geq 0 \longrightarrow x + 2 \geq 0 \longrightarrow x \geq -2$

sempre ≥ 0 ← $|x-1|$

$x \in [-2, +\infty)$

$g \circ f \neq f \circ g$

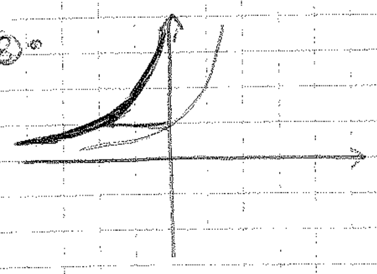
esempio $f(x) = \sqrt{x}$

$g(y) = \sin\left(\frac{1}{y+1}\right)$

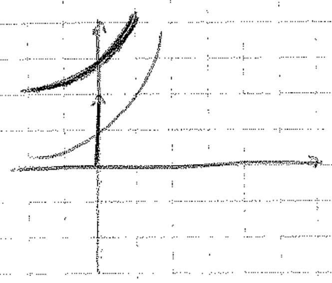
→ $g(f(x)) = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}+1}\right)$

→ $f(g(x)) = \sqrt{\sin\left(\frac{1}{\ldots}\right)}$

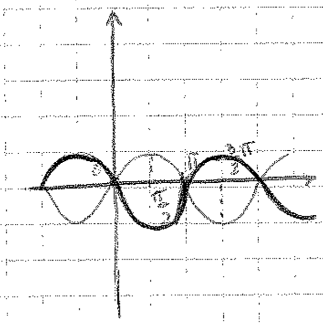
ESERCITAZIONE



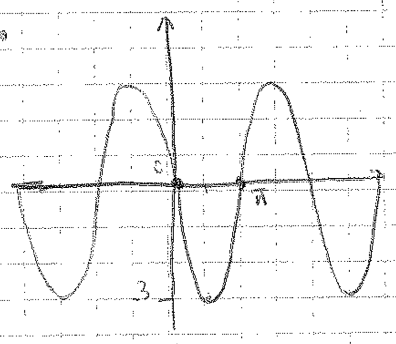
$e^{x+2} = e^{x-(-2)}$



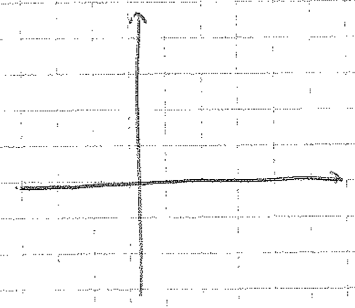
$e^x + 2$



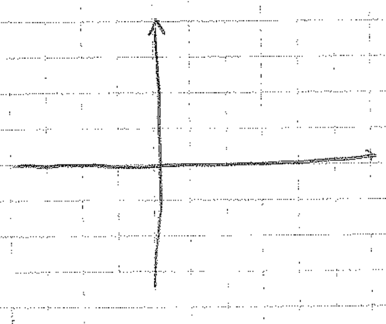
$\sin(3x)$



$-3\sin x$

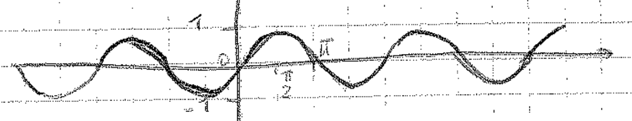


$|e^{3x} - 3|$

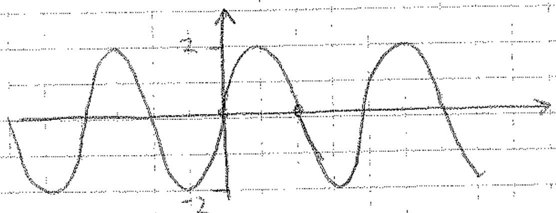


$e^{3|x|} - 3$

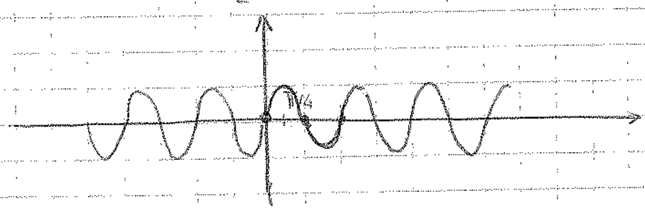
(10) • $f(x) = \sin x$

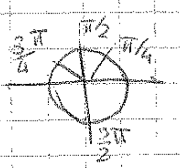


• $g(x) = 2\sin x$

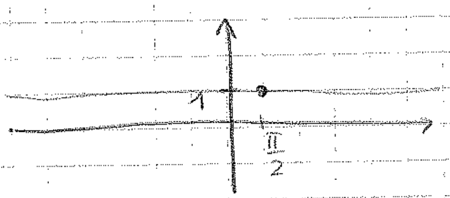


• $h(x) = \sin(2x)$

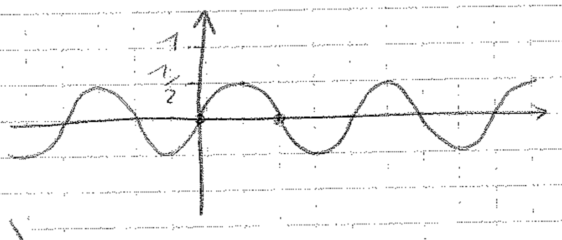




• $l(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$



• $m(x) = \frac{1}{2}\sin(x)$



(*) $\log\left(\frac{x\sqrt{|x^2-4|}-1}{x^2-4}\right)$

$\mathrm{dom}(f)\ \left\{ \frac{x\sqrt{|x^2-4|}-1}{x^2-4} > 0 \right.$

x^2-4 se $x^2-4>0$

$x<-2 \lor x>2$

allora

$\frac{x\sqrt{x^2-4}}{x^2-4} > 1$

sempre >0 (x^2-4)

se $x<-2$

negativo $x\sqrt{x^2-4} > x^2-4$ positivo

negativo > positivo non possibile

se $x>2$

$x^2(x^2-4) > x^4-8x^2+16$

$\cancel{x^4}-4x^2 > \cancel{x^4}-8x^2+16$

$4x^2-16>0$

$x^2-4>0$

$x>2$

$\boxed{(2,+\infty)}$

$-x^2+4$ se $x^2-4<0$

$-2<x<2$

allora

$\frac{x\sqrt{-x^2+4}}{x^2-4} < 1$

[essendo entrambi negativi e al quadrato $-6<-2$ ma $36>4$]

$x\sqrt{-x^2+4} > x^2-4$

se $0<x<2$

$x^2(4-x^2) > x^4-8x^2+16$

$4x^2-x^4 > x^4-8x^2+16$

$-2x^4+12x^2-16>0$

$x^4-6x^2+8<0$

$(x^2-2)(x^2-4)<0$

• $x^2-2>0$

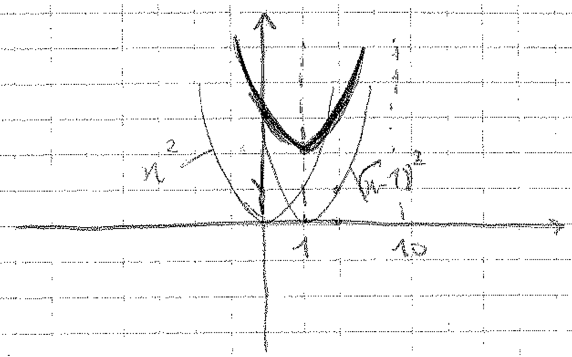
$x<-\sqrt{2} \lor x>\sqrt{2}$

$0<x<2$ non si...

perché devo intersecare con $x^2-4>0$, cioè $-2<x \lor x>2$

- $f(x) = 2 + (x-1)^2$

  invertibile su $[1,10]$



- f funzione definita su $\mathbb{R}$ $\quad I$ = intervallo
  - ⓐ $f(f^{-1}(I)) = I$ ✗ → sbagliate perché sto parlando di un intervallo e quindi di insiemi, non di funzioni
  - ⓑ $f^{-1}(f(I)) = I$ ✗
  - ⓒ $f(f^{-1}(I)) \subseteq I$
  - ⓓ $f^{-1}(f(I)) \subseteq I$ → sarebbe vera se $f^{-1}(f(I)) \supseteq I$
  - ⓔ $f(I) = f^{-1}(I)$ ✗

Dato che si parla di insiemi (I = intervallo) f^{-1} = controimmagine e non funzione inversa. Perciò la funzione può non essere iniettiva quindi è possibile la controimmagine della funzione sia un insieme $\supseteq I$

$x \in I \xrightarrow{f = x^2} f(x) = f(I)$

$x = 2 \qquad f(x) = 4$

$x = \pm\sqrt{2} \xleftarrow{f^{-1}(f(I))}$

quindi I ha solo un valore, ma $f^{-1}(f(I))$ può avere + valori di

$A \subseteq B \iff (x \in A \Rightarrow x \in B)$

$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$

$f^{-1}(I) \xrightarrow{f} I$

sia $y \in f(f^{-1}(I)) \Rightarrow \exists x \in f^{-1}(I) \mid f(x) = y$, cioè $y \in I$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \overset{\shortparallel}{\in I}$

(se funzione è iniettiva $f(x) = y \iff f^{-1}(y) = x$)

perciò

$A = f(f^{-1}(I))$

$B = I$

$A \subseteq B$

- $\mathbb{R} \xrightarrow{g} \underset{= \text{Im}(g)}{\mathbb{R}} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$

  $x \longrightarrow g(x) \longrightarrow f(g(x))$

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$

$\text{Im}(f \circ g) = \text{Im}(f)$ ✓ mentre $\text{Im}(g \circ f) = \text{Im}(f)$ è sbagliato perché:

$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$

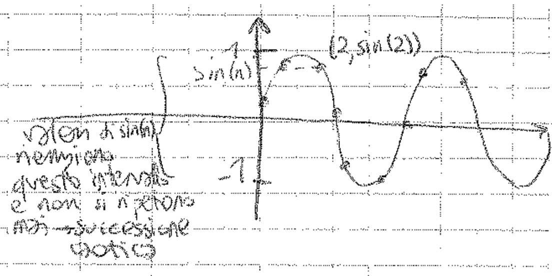
$x \qquad f(x) \qquad g(f(x))$
$\qquad\qquad\qquad\qquad \overset{\shortparallel}{\mathbb{R}}$

$f \circ g = x \to g(x) \to f(g(x))$

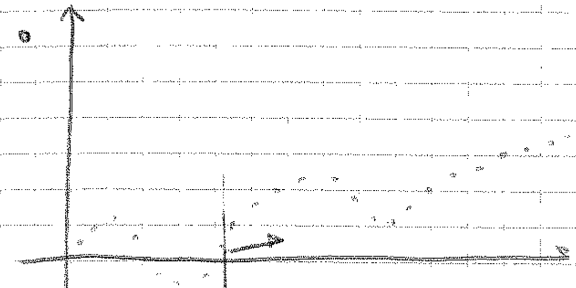
$g \circ f = x \to f(x) \to g(f(x))$

magari $f(x)$ mi limita il dominio non è detto che $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$

- $a_n = \sin(n)$

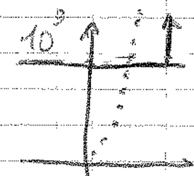


Sia a_n successione, si dice che una proprietà $P(n)$ vale definitivamente se $P(n)$ è vera per ogni n abbastanza grande.
- $P(n)$ vale da un certo n_0 in poi.
- $\forall n \geq n_0$
- $P(n)$ vale definitivamente se $\exists n_0 \mid P(n)$ è vera $\forall n \geq n_0$
- $P(n)$ è vera definitivamente se è vera $\forall n$ tranne un n° finito di casi



$a_n > 0$ definitivamente

- $a_n = n^2 \rightarrow a_n$ è definitivamente $>$ di 10^9



cioè da un certo punto in poi succede che $a_n > 10^9$

- $a_n = \frac{n}{n+1}$ la distanza di a_n da 1 è definitivamente $< \frac{1}{100}$

$|a_n - 1| \overset{?}{<} \frac{1}{100}$ definitivamente per n grande, cioè

$\exists n_0 \mid |a_n - 1| < \frac{1}{100} \quad \forall n \geq n_0$

$|a_n - 1| < \frac{1}{100}$ per quali n $a_n - 1$ è minore di $1/100$. Se $P(n)$ vale per $n \geq$ allora la proprietà vale definitivamente.

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \frac{1}{100}$$

$$\left|\frac{\cancel{n} - \cancel{n} - 1}{n+1}\right| < \frac{1}{100}$$

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{100}$$

$$100 < n+1$$

$n > 99 \rightarrow n_0$ $\longrightarrow$ la proprietà è vera con $n \geq 99$ cioè vale da un certo numero in avanti, perciò vale definitivamente

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 41 di 233

$\frac{3n}{2+5n^2} < \frac{3\cancel{n}}{5n^{\cancel{2}}} = \frac{3}{5n}$

$\frac{3}{5n} < \varepsilon$ per quali n?

$n > \frac{3}{5\varepsilon} \longrightarrow$ ma $\frac{3n}{2+5n^2} < \frac{3}{5n} \implies \frac{3n}{2+5n^2} < \varepsilon$

cioè $a < \varepsilon$ se $b > a$ e $b < \varepsilon$
il vantaggio è che b è scritto in modo più semplice di a

LIMITE FINITO PER $N \to \infty$ cioè $\lim_{n\to\infty} a_n = L \to L$ finito → definito come DISTANZA a_n da L

LIMITE +INFINITO PER $N \to \infty$ $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ esempio se $a_n = n^2$

$a_n > M$ definitivamente $\forall M \to$ non definibile con distanza, ma $a_n > M$

per dire che tende ad ∞ cioè è maggiore di un qualsiasi numero fissato, non si può più definire con la distanza

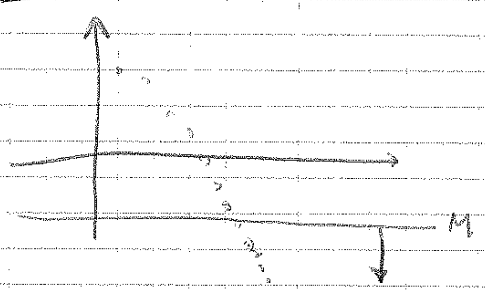
$\forall M, \exists n_0 \mid \forall n \geq n_0, a_n > M$

esempio
Mostriamo che $\lim_{n\to\infty} n^2 = +\infty$

prendo M:
$a_n > M$
$n^2 > M \longrightarrow$ vero per $n > \sqrt{M}$ n_0

LIMITE -INFINITO PER $N \to \infty$ $\forall M$ $a_n < M$ definitivamente
$\forall M$ $\exists n_0 \mid \forall n \geq n_0, a_n < M$

es $a_n = -n^2$



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 43 di 233

$|a_{142} - 2| < 0{,}007$ la distanza da 2 a a_n è minore di ε

$$\left|\frac{2\cdot 142+1}{142+1} - 2\right| < 0{,}007$$

$$\left|\frac{284+1-286}{143}\right| < 0{,}007$$

vero per valori maggiori di a_{142}

falso per valori minori di a_{142}

- Dire per quali valori n_0 è verificata la disuguaglianza $\frac{1}{n^2} < \varepsilon$ $\forall n > n_0$ con ε un numero >0 fissato. Calcolare n nei casi: $\varepsilon = 10^{-1}$, $\varepsilon = 10^{-2}$, $\varepsilon = 10^{-3}$ ...

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

Dato $\varepsilon > 0$, $\exists n \in \mathbb{N} \mid \forall n > n_0$ $\left|\frac{1}{n^2} - 0\right| < \varepsilon$

Infatti $\left|\frac{1}{n^2}\right| < \varepsilon$

$\frac{1}{n^2} < \varepsilon$

$1 < \varepsilon n^2$ numeri >0 non cambiano segno!

$\frac{1}{\varepsilon} < n^2$

$\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} < n$

$n > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} \longrightarrow n_0 = \left[\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}\right]$

se $\varepsilon = 0{,}1 \rightarrow \left[\frac{1}{\sqrt{0{,}1}}\right] = [3{,}16] = 3$

$n = 4$

$\left|\frac{1}{16}\right| < 10^{-1}$

se $\varepsilon = 0{,}01 \longrightarrow \left[\frac{1}{\sqrt{0{,}01}}\right] = [10] = 10$

$n = 11$

$\left|\frac{1}{121}\right| < 10^{-2}$

- $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$

- $\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{2-\frac{1}{n}} = 1$

- $\lim_{n\to\infty} (-1)^n$ = non esiste $\longrightarrow$ perché assume solo valori 1 e -1

- $\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \frac{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{\cancel{n}+1-\cancel{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} =$

- $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2}{n^2}+\frac{1}{n^2}}{\frac{n}{n^2}+\frac{2}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\underbrace{1+\frac{1}{n^2}}_{\to 1}}{\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}_{\to 0}} = +\infty$

- $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n\cdot 2 + 3^n\cdot 3}{2^n+3^n} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n\cdot 2+3}{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1} = 3$

$\frac{2}{3} < 0$, perciò elevato alla n con $n\to+\infty$ $a_n \to 0$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \mid \forall n > n_0, \; |a_n - l| < \varepsilon$

↓

$\forall x \; \exists y \rightarrow$ in questa forma y dipende da x, quindi n_0 dipende da $\varepsilon \rightarrow n_\varepsilon$

esempio: $\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \frac{1}{100} \rightarrow \varepsilon$

vero per $n \geq 99 \rightarrow n_0$

con $\varepsilon = \frac{1}{1000}$, $n \geq 999$

eclatante che n_0 dipende da ε. Anche perché in generale $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$

no è in funzione di ε

SUCCESSIONI

CONVERGENTI

$\lim_{n \to \infty} a_n = l \in \mathbb{R}$

a_n converge a l

DIVERGENTI POSITIVAMENTE

$\lim_{n \to \infty} a_n = \pm \infty$

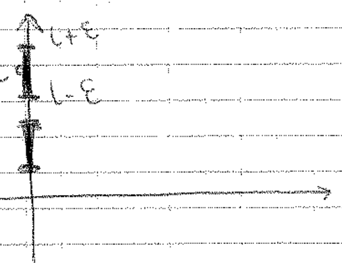
a_n diverge a $\pm \infty$

a_n SENZA LIMITI

- $a_n = (-1)^n = \cos(\pi n) \longrightarrow 1, -1, 1, -1$
- $a_n = (-1)^n \cdot n$

Come si fa a capire che/se a_n non ha limite?

① Se ci sono due intervalli disgiunti in cui cadono ∞ termini di a_n, allora a_n non ha limite



Non è possibile perché: $|a_n - l| < \varepsilon$ definitivamente. Quindi l non è limite perché ci sono ∞ valori che cadono nell'altro intervallo, e quindi non definitivamente nel 1° intervallo.

$a_n = n^2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} n\right)$

$0, 1, 0, -1, 0, 1$

$0, 1, 0, -9, 0, 25$

$I = (10, +\infty) \rightarrow$ cadono ∞ termini

$J = (-2, 1) \longrightarrow$ cadono ∞ termini, cioè tutti gli 0

la successione non ha limite

↓

non è possibile che da un certo punto in poi tutti convergano/divergano allo stesso punto.

TEOREMA → a_n = successione monotona, allora $\lim_{n\to\infty} a_n$ esiste, inoltre

~~se a_n è limitata, allora il limite è finito ($\in \mathbb{R}$)~~

se a_n è crescente allora $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup_n a_n$ → se: $\sup = \infty$ → non limitata; $\sup = l$ → limitata

se a_n è decrescente allora $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf_n a_n$

$\boxed{\text{Dimostrazione}}$: Nel caso a_n crescente e limitata

crescente → lim esiste e $= \sup_n a_n$; limitata → limite finito

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup_n a_n$$

chiamo $l = \sup_n a_n$

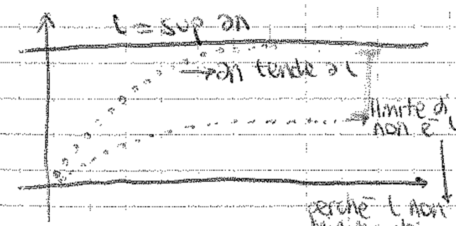
devo dimostrare che $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ → è la definizione di limite perciò devo dimostrare che

$\forall \varepsilon > 0 \quad |a_n - l| < \varepsilon$ definitivamente ($\exists n \mid \forall n \geq n_0$)

$$-\varepsilon < a_n - l < \varepsilon$$

$$l - \varepsilon < \underbrace{a_n < l + \varepsilon}_{\text{vero } \forall n}$$

$a_n \leq l \ \forall n$ per definizione di ~~estremo superiore~~



perché l non è il minimo dei maggioranti ma tutti i valori sono minori di l

quindi rimane da dimostrare $l - \varepsilon < a_n$ definitivamente

$l = \sup_n a_n$ = minimo dei maggioranti

$l - \varepsilon$ non è un maggiorante perché è + piccolo, quindi $\exists n_0 \mid a_{n_0} > l - \varepsilon$

$a_n \geq a_{n_0} \ \forall n \geq n_0$

perciò $\exists n_0 \mid \forall n \geq 0$ allora $a_n > l - \varepsilon$

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

① si dimostra che a_n CRESCENTE

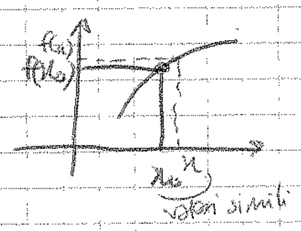
② si dimostra che a_n LIMITATA

$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ esiste ed è finito → $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ definizione di e (2,718... irrazionale)

LIMITI DI FUNZIONI

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad x_0 \in \mathbb{R}$ fissato

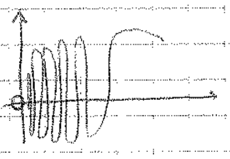
Cosa succede a $f(x)$ quando x si avvicina a x_0?

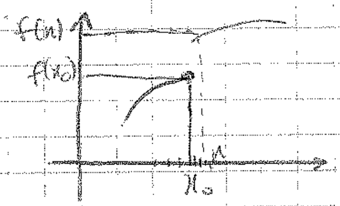


Sapere il valore $f(x_0)$ non serve

esempio

$f(x) = \sin \frac{1}{x}$



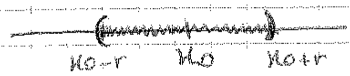


Sia $x_0 \in \mathbb{R}$, $r > 0$. Si chiama intorno di x_0 di raggio r

$I_r(x_0) = (x_0 - r, x_0 + r)$ oppure $\{x \in \mathbb{R} \mid x_0 - r < x < x_0 + r\}$

essendo punti che distano r da x_0 si possono scrivere come valore assoluto:

$\{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < r\}$



Intorno è un intervallo simmetrico rispetto a x_0, aperto, di ampiezza $2r$.

$I_r(x_0), I_s(x_0) \longrightarrow$ $I_r(x_0) \cap I_s(x_0)$, $I_r(x_0) \cup I_s(x_0)$ sono ancora intorni — PROPRIETÀ STABILE per tutti i tipi di intorni

Intorni di $+\infty$ e $-\infty$ $\longrightarrow$ per definizione sono gli intervalli

$(a, +\infty)$

$(-\infty, b)$

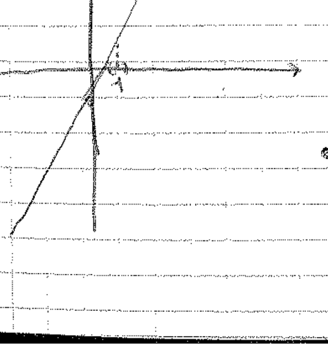
non vale la simmetria

PROPRIETÀ LOCALI DELLE FUNZIONI

Proprietà che è vera in un intorno, cioè $\exists I_r(x_0)$ dove la proprietà è ve

esempio

$f(x) = 2x - 1$



- f è positiva in un intorno di 1, cioè esiste un intorno di 1 per il quale tale proprietà è vera.

  $\exists I(x_0) \mid \forall x \in I(x_0)\ f(x) > 0$

  Tale proprietà non è globale perché assume dei valori negativi per $x < \frac{1}{2}$

- f è positiva in un intorno di 1/2? NO perché essendo che per definizione l'intorno deve essere simmetrico rispetto al punto, allora l'intorno di 1/2 avrà sempre anche valori negativi.

  Falso, cioè $\rightarrow \forall I(x_0) \mid \exists x \in I(x_0),\ f(x) < 0$

$f(x) \in I_\varepsilon(l)$ $|f(x) - l| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta \mid$ $\longrightarrow$ δ è in funzione di ε

$\forall x \ \ 0 < |x - x_0| < \delta \iff x \in I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$ si ha $|f(x) - l| < \varepsilon \iff f(x) \in I_\varepsilon(l)$

Il valore del limite per $x \to x_0$ di $f(x)$ non dipende da $f(x_0)$

Esercizi

- $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x \to x_0}} (2x+4) = 6$ $\longrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta \mid \forall x \ \ 0 < |x - 1| < \delta$ si ha $|2x+4| - 6 < \varepsilon$ proprietà

per verificare la proprietà:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta \mid \forall x \ \ 0 < |x - x_0| < \delta \iff$
$|a_n - l| < \varepsilon$

1. Dato ε, lo fisso > 0
2. Devo trovare δ che dipende da ε
3. $|a_n - l| < \varepsilon$
$x - x_0 < \delta$
- viceversa con $I_\delta(x_0)$ dato, se $x \in I_\delta(x_0)$ $|x - x_0| < \delta \Rightarrow$ $|a_n - l| < \varepsilon$

$\lim\limits_{x \to x_0} a_n = l$

Dato ε devo trovare δ

$\hookrightarrow$ fisso $\varepsilon > 0$

$|2x+4-6| < \varepsilon$ è vera quando:

$|2x - 2| < \varepsilon$

$2|x-1| < \varepsilon$

$|x - 1| < \varepsilon/2$

$\downarrow$

cioè $|2x+4-6| < \varepsilon$ è vera quando $|x-1| < \varepsilon/2$

$\downarrow$

viceversa $I_{\frac{\varepsilon}{2}}(1)$

se $x \in \underbrace{I_{\varepsilon/2}(1)}_{\text{intorno } I_\delta(x_0=1)}$, $|x - 1| < \boxed{\frac{\varepsilon}{2}}^{\,\delta} \Rightarrow |2x+4-6| <$

δ dipende da ε

- $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$

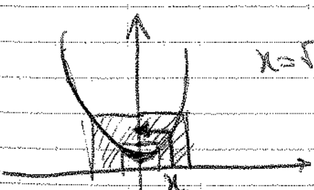
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta \mid \forall x, \ |x - \overset{x_0}{0}| < \delta$, si ha $|x^2 - 0| < \varepsilon$

è vero che dato ε esiste un δ che verifica la proprietà?

cioè per quali x: $x^2 < \varepsilon$?

$|x| < \sqrt{\varepsilon} \longrightarrow x \in I_{\sqrt{\varepsilon}}(0)$ cioè punti che distano da zero $\sqrt{\varepsilon}$

$\delta = \sqrt{\varepsilon}$



$x = \sqrt{\varepsilon}$ $(-\sqrt{\varepsilon}; +\sqrt{\varepsilon})$

$\downarrow$

$(-\varepsilon, \varepsilon)$

cioè se prendo x in un intorno di x_0 $(-\sqrt{\varepsilon}, 0)$ o $(0, +\sqrt{\varepsilon})$ allora $f(x)$ cade in $(0, +\varepsilon)$

ESERCITAZIONE

1. $a_n = 4^n + (-5)^n$ → limite se esiste è unico, quindi a_n non può tendere sia a $-\infty$ che $+\infty$

se successione è oscillante non diverge né converge. → quindi $\lim_{n\to\infty} a_n$ = non esiste

2. a_n decrescente → $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n$

→ o tende ad un numero o ad un infinito, però ha sempre un limite

$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$

$\neq +\infty$

$\neq -\infty$

3. $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = -3 \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = 0$

$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$ → a_n non può essere limitata perché $\forall n \cdot 0 = 0$

- $\lim_{n\to\infty} \underbrace{(-3n)}_{a_n} \underbrace{\left(\frac{1}{n}\right)}_{b_n}^{\to 0} = -3 \qquad -3n \to -\infty$

$\underbrace{(-3n)}_{a_n} \underbrace{\left(\frac{1}{-n}\right)}_{b_n}^{\to 0} = -3 \qquad -3n \to +\infty$

b risp. giusto è $|a_n| \to +\infty$ perché comprende entrambi i casi

4. $b_n = a_n + \frac{n-1}{n+1}$

$b_n - a_n = \cancel{a_n} + \frac{n-1}{n+1} - \cancel{a_n} \xrightarrow{\text{per } n\to\infty} b_n - a_n = \frac{\cancel{n}(1-\frac{1}{n})}{\cancel{n}(1+\frac{1}{n})} = 1$

- $b_n - a_n$ converge a 1 ✓
- $\{a_n b_n\}$ converge → no se una delle due è illimitata
- $\{b_n - a_n\}$ è illimitata inferiormente → no se una delle due è illimitata
- $\{a_n b_n\}$ è limitata → no se una delle due è illimitata

5. $\lim_{n\to\infty} a_n = l \in \mathbb{R} \qquad b_n = (-1)^n \cdot n^2$ → non ha limite perché è oscillante

- se $l = 0$ allora il limite esiste e vale zero → $\lim_{n\to\infty} a_n$ non esiste F

$a_n = \{0, 0, 0, 0 \ldots\}$

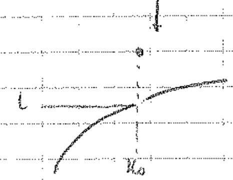
- $\underbrace{\left(\frac{1}{n}\right)}_{a_n} \cdot (-1)^n \cdot n^2 = (-1)^n \cdot n$ → se $l = 0$ allora $\frac{1}{n}$ non esiste

- $\lim_{n\to\infty} a_n b_n$ esiste, allora vale zero ✓

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 55 di 233

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ → ① $\forall I(l)\ \exists I(x_0) \mid \forall x \in I(x_0) \setminus \{x_0\}$ si ha $f(x) \in I(l)$

con $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$l \in \mathbb{R}$



⑥ $\frac{\sin x}{x}$ non definito per $x=0$

escluso il punto x_0 il comportamento di tale funzione è regolare per $x \to x_0$

insieme di tutti gli possibili = insieme di tutti i raggi possibili

$I(l) = I_\varepsilon(l)$

$\forall I(l) \quad \forall \varepsilon$

$I(x_0) = I_\delta(x_0)$

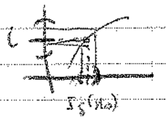
② $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta \mid I_\varepsilon(l)\quad I_\delta(x_0)\quad (0 < |x - x_0| < \delta) = x \in I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$

perché sostituendo $x = x_0$ la distanza di x_0 x_0 non è minore stretta di zero.

$\forall x \mid 0 < |x - x_0| < \delta$ si ha $|f(x) - l| < \varepsilon$ → se x verifica la disuguaglianza allora $f(x)$ rispetta quella sotto

$|f(x) - l| < \varepsilon$

③ $f(I(x_0) \setminus \{x_0\}) \subset I(l)$ →



$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ → f è continua in x_0, proprietà puntuale = vale per un punto

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta \mid |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \overset{l}{f(x_0)}| < \varepsilon$

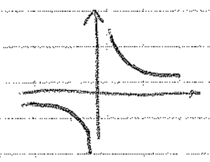
si esclude la parte di disuguaglianza > 0. Si accetta $x = x_0$ perché allora $f(x_0) - f(x) < \varepsilon$ sempre vero.

~~① il limite esiste~~
~~② il limite $= f(x_0)$~~

- se f è continua in ogni punto di $A \subset \mathbb{R}$ ($A \subset dom(f)$) allora si dice che f è continua in A.
- se $A = dom(f)$ si dice che f è continua

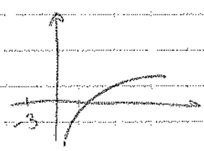
esempio

$f(x) = \frac{1}{x}$



non continua perché f non è continua in tutti i punti del dominio, infatti in $x=0$ $f(x)$ non esiste.

$f(x) = \log(x)$

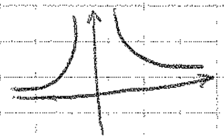


non ha senso chiedere se $f(x)$ è continua in -3 perché non è un punto della funzione

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \quad x_0 \in \mathbb{R}, \; l \in \mathbb{R}$

esempio

$f(x) = \frac{1}{x^2}$



per $x \to 0$
$f(x)$ assume valori sempre + grandi

$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \quad \forall I(+\infty) \; \exists I(x_0) \mid \forall x \in I(x_0) \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in I(+\infty)$

Ricordando che un intorno di ∞ è: $(M, +\infty) \to$ quindi dire $\forall I(+\infty) = \forall M$ valore per cui si differenziano gli intorni

- se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ allora la condizione è $|f(x) - l| < \varepsilon$
- se $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ allora la condizione è $f(x) > M$

$\forall M \; \exists \delta \mid x \in I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M$

$\downarrow$

esempio

$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty \quad \forall M \; \exists \delta \mid 0 < |x| < \delta \Rightarrow \frac{1}{x^2} > M$

Dato M, esiste un delta che verifica?

$\frac{1}{x^2} > M \longrightarrow x^2 < \frac{1}{M}$

$0 < |x| < \frac{1}{\sqrt{M}} \quad$ con $M > 0 \Rightarrow \frac{1}{x^2} > M$

esclude lo zero

$\delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \quad \forall I(-\infty) \; \exists I(x_0) \mid \forall x \in I(x_0) \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in I(-\infty)$

posto $(-\infty, M)$ un intorno di $-\infty$, allora:

$\forall M \; \exists \delta \mid 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < M$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \quad l \in \mathbb{R} \quad \forall I(l) \; \exists I(+\infty) \mid \forall x \in I(+\infty) \Rightarrow f(x) \in I(l)$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists M \mid x > M \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

esempio

$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x+1}{x-4} = 2 \quad \forall \varepsilon > 0 \; \exists M \mid \forall x > M \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists M \mid \forall x > M \Rightarrow \left| \frac{2x+1}{x-4} - 2 \right| < \varepsilon$

Per trovare M:

$\left| \frac{2x+1}{x-4} - 2 \right| < \varepsilon$

$\left| \frac{2x + 1 - 2x + 8}{x-4} \right| < \varepsilon$

$\left| \frac{9}{x-4} \right| < \varepsilon$

$\frac{9}{x-4} < \varepsilon$

tolgo valore assoluto perché mi basta che M esista e non mi interessa che sia >4 tanto x tende a $+\infty$.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 59 di 233

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta \ \ x \in I^+(x_0) \setminus \{x_0\}$

$\hookrightarrow [x_0, x_0+\delta) \implies |f(x) - l| < \varepsilon$

$\hookrightarrow x_0 < x < x_0 + \delta$

ESERCITAZIONE

- verificare usando def. $\lim_{x \to 2} (3x-5) = 1$: $\forall \varepsilon > 0$ si deve dimostrare $\exists \delta > 0 \mid$

$0 < |x-2| < \delta \implies |3x - 5 - 1| < \varepsilon$

infatti $|3x - 5 - 1| < \varepsilon$ → lavoro con questi perché ε è stato e posto >0

$|3x - 6| < \varepsilon$

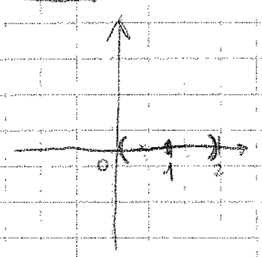
$|3(x-2)| < \varepsilon$

$3|x-2| < \varepsilon$

$|x-2| < \frac{\varepsilon}{3}$

$\delta = \frac{\varepsilon}{3}$

- $\lim_{\boxed{x \to 1}} (2x^2+3) = 5$ $\quad \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid \forall x \in dom(f), \ 0 < |x-1| < \delta \implies |2x^2 + 3 - 5|$



infatti $|2x^2 - 2| < \varepsilon$

$2|x^2-1| < \varepsilon$

se intorno è raggio = 1 di 1 allora il fattore = 0, sicuramente $< \varepsilon (>0)$

$2 \cdot |x-1| \cdot |x+1| < \varepsilon$

tutti i punti che distano da 1 meno di 1

supponiamo di prendere $x \in I_1(1)$, cioè $0 < x < 2$

vero perché x può assumere valori $0 < x < 2$

$\underbrace{1 < |x+1|}_{x=0} = \underbrace{x+1 < 3}_{x=2}$

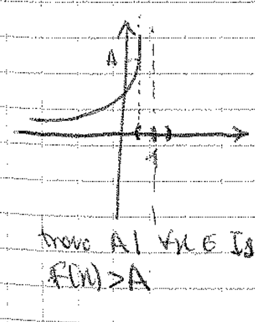
$|2x^2 + 3 - 5| < 2 \cdot 3|x-1|$ → $6|x-1|$ è sicuramente $< \varepsilon$, perché se $|2x^2+3-5| < 6|x-1|$ allora sarà $< \varepsilon$

$|2x^2+3-5| < \underbrace{6|x-1| < \varepsilon}_{< \varepsilon/6}$ dato che l'intorno considerato è $I_1(1)$, se $x_{max} = 2$ allora l'intorno con δ min sarà $(1, \varepsilon/6)$

$\delta = \min(1, \varepsilon/6)$

- $\lim_{x \to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$ $\quad \forall A > 0 \ \exists \delta > 0 \mid \forall x \in dom(f) \ 0 < |x - x_0| < \delta \implies f(x) >$

infatti $\forall A > 0, \ \delta > 0 \mid 0 < |x-1| < \delta \implies \frac{1}{(x-1)^2} > A$



$\frac{1}{(x-1)^2} > A$

$(x-1)^2 < \frac{1}{A}$

trovo A | $\forall x \in I_\delta(1)$ $f(x) > A$

$|x-1| < \frac{1}{\sqrt{A}} \ \delta$

3) $\lim_{n\to+\infty} a_n = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n \longrightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

$$= \left(\frac{\frac{n}{n}+\frac{1}{n}}{\frac{n}{n}-\frac{1}{n}}\right)^n = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n} \qquad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e \qquad \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \to e^{-1}$$

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \left[\left(1+\frac{1}{-n}\right)^{-n}\right]^{-1} = e^{-1}$$

$$= \frac{e}{e^{-1}} = e^1 \cdot e^1 = e^2$$

4) a_n monotona, per $n \to \infty$

b) non è indeterminata

5) $\lim_{n\to\infty} \frac{\log n^{10} + \sin n}{\sqrt{n} - 3} = 0$ (limitato; $\sqrt{n}-3 \to \infty$)

a) 10
b) $\nexists$
c) $+\infty$
d) 0
e) 1

6) a_n limitata inferiormente

a) $\forall k>0\ \exists\ \bar{n} \in \mathbb{N} \mid n>\bar{n} \Rightarrow a_n > k$ → definito male ($\forall k>0$ e poi usa k)
b) $\forall n\ a_n \geq 0$ → non è detto che 0 sia il valore + basso di a_n
c) $\exists k<0 \mid \forall n\ a_n < k$ → limitato sup.
d) $\exists \bar{n} \in \mathbb{N} \mid n>\bar{n} \Rightarrow a_n > 0$ → non è detto che a_n debba essere solo >0
e) $\exists k<0 \mid \forall n,\ a_n > k$ V → perché $\forall n$ a_n è $\geq$ di un certo valore k

ESERCIZIO

a) $\lim_{x\to 0^+} \sin\frac{1}{x} \neq 1$

b) dimostrare che limite non esiste

$f(x) \begin{cases} x^2+1 & se \ x \neq 0 \\ 1 & se \ x = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \tilde{f}(x) = x^2+1$ su $\mathbb{R}$

$\lim_{x \to 0} f(x)$

continua

$f \longrightarrow \tilde{f}$ ESTENSIONE PER CONTINUITÀ – estendendo la funzione in un punto dandole un valore che la renda continua nel punto in cui è discontinua.

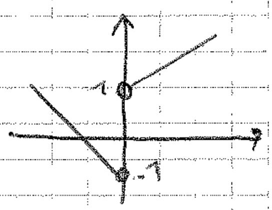
CASO ② : SALTO o 1ª SPECIE

$\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ e $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ esistono, sono finiti ma sono DIVERSI

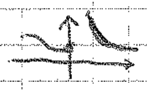
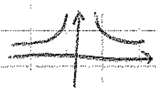
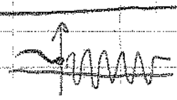
Si dice che f ha un salto in x_0

esempio

$f(x) \begin{cases} x+1 & se \ x > 0 \\ x-1 & se \ x < 0 \end{cases}$



CASO ③ : TUTTI GLI ALTRI CASI o 2ª SPECIE

- limite $= \infty$ 
- uno dei lim dx o sx $= \infty$ ⟶
- entrambi sono ∞ ⟶ 
- uno dei due non esiste ⟶ 

PROPRIETÀ DEI LIMITI ★

$x \to c \begin{cases} x_0 \\ +\infty \\ -\infty \\ x_0^+ \\ x_0^- \end{cases}$ f, g, h ... definite per lo meno su $I(c) \setminus \{c\}$

TEOREMA PERMANENZA DEL SEGNO

Supponiamo che: $\lim_{x \to c} f(x) = l$, cioè limite esiste con $l = +\infty$ oppure $L > 0$ cioè il limite ha un segno

allora esiste $I(c) \mid \forall x \in I(c) \setminus \{c\}, f(x) > 0$ ⟶ importante che sia STRETTAMENTE >

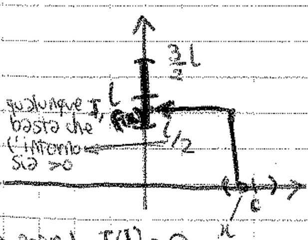
(Proprietà locale → vale x un intorno)

DIMOSTRAZIONE

Nel caso $l > 0$, $l \in \mathbb{R}$

per la definizione di limite: $\forall I(l) \ \exists I(c) \mid \forall x \in I(c) \setminus \{c\} \Rightarrow f(x) \in$

Fisso $I(l) = I_{\frac{l}{2}}(l) = \left(\frac{l}{2}; \frac{3l}{2}\right)$



$\exists I(c) \mid \forall x \in I(c) \setminus \{c\} f(x) \in \left(\frac{l}{2}; \frac{3l}{2}\right)$

① prendo $I(l) > 0$
② allora poi posso fissare $I(c)$

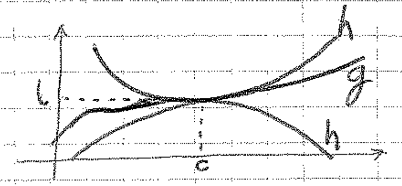
$l > 0$

$f(x) \in \left(\frac{l}{2}; \frac{3l}{2}\right)$

$f(x) > l/2 > 0$ → cioè per x in un intorno $I(c)$, $f(x)$ è positivo.

TEOREMA DEL CONFRONTO

f, g, h definite su $I(c) \setminus \{c\}$.
supponiamo che $\forall x \in I(c) \setminus \{c\}$ $f(x) \le g(x) \le h(x)$
supponiamo che $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} h(x) = l$



allora $\lim_{x \to c} g(x) = l$

DIMOSTRAZIONE

- Si deve dimostrare che $\forall I_\varepsilon(l)\ \exists I_\delta(c) \mid \forall x \in I(c) \setminus \{c\},\ g(x) \in I(l)$

$$\forall \varepsilon\ \exists \delta \mid \forall x \in (c-\delta, c+\delta),\ l-\varepsilon < g(x) < l+\varepsilon$$

- Sappiamo che $\lim_{x \to c} f(x) = l$. Per ε dato sopra $\exists I'(c) \mid \forall x \in I(c) \setminus \{c\}$, $f(x) \in I_\varepsilon(l)$, $l-\varepsilon < f(x) < l+\varepsilon$
- Trovo $I''(c) \mid \forall x \in I''(c) \setminus \{c\}$, $l-\varepsilon < h(x) < l+\varepsilon$
- $I'(c) \cap I''(c) \cap J(c)$ è un intorno di c. Prendo x in questo intorno (x

$$\underbrace{l-\varepsilon < f(x)}_{\substack{\text{perché} \\ x \in I'}} \underbrace{\le g(x) \le h(x)}_{x \in J(c)} \underbrace{< l+\varepsilon}_{x \in I''(c)} \longrightarrow l-\varepsilon < g(x) < l+\varepsilon$$

esempio

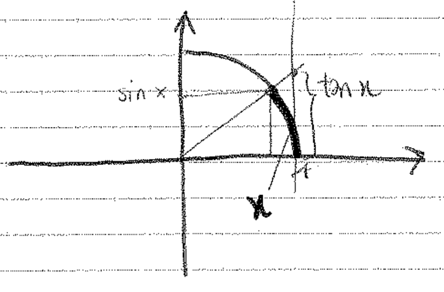
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \textbf{LIMITE NOTEVOLE}$$

① Basta mostrare che $\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1 \longrightarrow$ perché $\sin x$ è dispari, x è dispari
prodotto o quoziente di funzioni dispari è pari.
$f(-x) = f(x)$

[DISPARI: $f(-x) = -f(x)$]

② Basta considerare $0 < x < \frac{\pi}{2} \longrightarrow \forall I(1)\ \exists I^+(0) \mid \ldots$
cioè basta che ci sia un QUALSIASI intorno di zero.

$I^+(0) \cap [0, \frac{\pi}{2})$



$0 < x < \frac{\pi}{2}$

$\sin x < x < \tan x$) divido per $\sin x$

$$\frac{\sin x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\tan x}{\sin x}$$

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

$$\underbrace{\cos x}_{f} < \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{g} < \underbrace{1}_{h} \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

definite in un intorno dx di zero

per teorema confronto: $\lim_{x\to c} |f(x)\cdot g(x)| = 0$

esempio

- $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} \cdot \sin\frac{1}{x}$

$\hookrightarrow \lim_{x\to 0^+} \underset{g\to 0}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0} \sqrt{0} = 0$

$\hookrightarrow \underbrace{\left|\sin\frac{1}{x}\right|}_{f \text{ limitata tra } -1 \text{ e } 1} \le 1$ oscilla ma è limitata

$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\cdot \sin\frac{1}{x} = 0$

- $\lim_{x\to +\infty} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to +\infty} \underset{g\to 0}{\frac{1}{x}} \cdot \underset{f \text{ limitata}}{\sin x} = 0$

ALGEBRA DEI LIMITI

$\lim_{x\to c} f(x) = l$

$\lim_{x\to c} g(x) = m$

con l, m finiti

1. $\lim_{x\to c} f(x) + g(x) = l + m$
2. $\lim_{x\to c} f(x)\cdot g(x) = l \cdot m$
3. $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m}$ se $m \neq 0$
4. $l + \infty = +\infty$
5. $+\infty + \infty = +\infty$
6. $-\infty + m = -\infty$
7. $-\infty - \infty = -\infty$
8. $l \cdot +\infty \to +\infty$ con $l>0$; $\to -\infty$ con $l<0$
9. $+\infty \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$
10. $\frac{+\infty}{l} \to +\infty$ se $l>0$; $\to -\infty$ se $l<0$
11. $\frac{M}{\pm\infty} = 0$
12. $\frac{M}{0} =$ con $M \neq 0$ (segno; modo con cui tende a zero)

$\hookrightarrow$ es: $\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x \to 1}{\sin x \to 0} = +\infty$

- $\sin x$ tende a zero ma con valori positivi per $x\to 0^+$
- viceversa per $x \to 0^-$, $f(x) \to -\infty$

si usa soprattutto se ci sono limiti sx e dx

$\lim_{x\to 3} \frac{2}{x-3}$ scritto così non esiste perchè lim dx $\neq$ lim sx.

si studiano lim separatamente a sx e dx

$\hookrightarrow \lim_{x\to 3^+} \frac{2}{x-3 \to 0^+} = +\infty$

$\hookrightarrow \lim_{x\to 3^-} \frac{2}{x-3 \to 0^-} = -\infty$ valori vicini a 3 ma + piccoli di 3

Si dice che $\lim_{x\to c} g(x) = 0^{\pm}$

$\Updownarrow$

$\begin{cases} \lim_{x\to c} g(x) = 0 \\ g(x) \gtrless 0 \text{ in un intorno di zero} \end{cases}$ es x^2

- se $m>0$: $\frac{m}{0^{\pm}} = \pm\infty$ $\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\cos x \to 1}{x^2 \to 0^+} = +\infty$
- se $m<0$ $\rightarrow$ inverto segno del denominatore

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos x + x^2 + e}{\sin x + e^{-3x} + x^2} = 1$$

$\sin x$ limitato

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - 4x^3 + x\sin x}{\sin(3x^2) + x^2} = -\infty$$ infinito d'ordine sup. con - davanti

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi x^2+1}{2x^2-1}\right)}{\log(\arctan x)} = \frac{1}{\log\pi - \log 2}$$

$\rightarrow \sin\frac{\pi}{2} = 1$, $\arctan x \rightarrow \frac{\pi}{2}$

- $f(x) = e^{x\cos x} \rightarrow \lim_{x\to\pi} \log(f^3(x)) = \lim_{x\to\pi} \log e^{3x\cos x} = \lim_{x\to\pi} 3x\cos x =$

$$\lim_{x\to\pi} +3x\cdot\cos x = -3\pi$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2+3}{x^2}\right)^{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{3}{x^2}\right)^{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \left[\left(1+\frac{1}{\frac{x^2}{3}}\right)^{\frac{x^2}{3}}\right]^3 = e^3$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{\sin^2 3x} = \frac{\frac{1-\cos 2x}{2x^2}\cdot 2x^2}{\frac{\sin^2 3x}{(3x^2)}(3x^2)} = \frac{2}{9}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt[3]{2+x^3} - \sqrt[3]{1+2x^2+x^3}\right) \ldots$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin(x^2-1)}{x-1} = \frac{\sin(x^2-1)\cdot(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{\sin(x^2-1)}{(x^2-1)}\cdot(x+1) = 2$$

$$\lim_{x\to+\infty} x\sin\frac{1}{x} = 1 \longrightarrow t=\frac{1}{x} \Rightarrow x=\frac{1}{t} \rightarrow \frac{\sin t}{t} = 1$$

$x\to\infty, t\to 0$

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\cos x+1}{\cos 3x+1} = \lim_{x\to\pi} \frac{\cos x+1}{\cos(2x+x)+1} = \lim_{x\to\pi} \frac{\cos x+1}{\cos 2x\cdot\cos x - \sin 2x\sin x + 1} =$$

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\cos x+1}{(\cos^2 x - \sin^2 x)\cos x - 2\sin^2 x\cos x + 1} = \lim_{x\to\pi} \frac{\cos x+1}{\cos^3 x - \sin^2 x\cos x - 2\sin^2 x\cos x + 1} =$$

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\cos x+1}{\cos^3 x - (1-\cos^2 x)\cos x - 2(1-\cos^2 x)\cos x + 1} = \lim_{x\to\pi} \frac{\cos x+1}{\cos^3 x - \cos x + \cos^3 x - 2\cos x + 2\cos^3 x + 1} =$$

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\cos x+1}{4\cos^3 x - 3\cos x + 1} \xrightarrow[x\to\pi,\ t\to -1]{t=\cos x} \lim_{t\to -1} \frac{t+1}{4t^3-3t+1}$$

	4	0	-3	1
-1		-4	4	-1
	4	-4	1	0

$$= \lim_{t\to -1} \frac{\cancel{t+1}}{\cancel{(t+1)}(4t^2-4t+1)} =$$

FUNZIONI RAZIONALI

rapporto tra polinomi

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0}{b_k x^k + \dots + b_1 x + a_0}$$

raccogliere il TERMINE IMPORTANTE, cioè termine che tende prima all'infinito

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n\left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_0}{x^n}\right)}{x^k\left(b_k + \frac{b_{k-1}}{x} + \dots + \frac{b_0}{x^k}\right)}$$

se $n>k$ $\lim = \infty$

se $n=k$ $\lim = \frac{a_n}{b_k}$

LIMITI NOTEVOLI

- $$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\cos x}$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\cos x} = \lim_{x\to0}\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to1}\cdot\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to1}\cdot\underbrace{\frac{1}{1+\cos x}}_{\to1/2} = \frac{1}{2}$$

REGOLA DI SOSTITUZIONE

Supponiamo che $\lim_{x\to c} f(x) = l$, allora data g, $\lim_{x\to c} g(f(x)) = \lim_{y\to l} g(y)$

$\begin{cases} y=f(x) \\ \text{se } x\to c \\ \text{allora } y\to l \end{cases}$

esempi

- $\lim_{x\to1^+} \arctan\left(\frac{1}{x-1}\right)$

  $g \quad (f(x))$

① chiamo $y=f(x)=\frac{1}{x-1}$

② se $x\to 1^+$, $y=\frac{1}{x-1}=+\infty \rightarrow$ se $x\to1^+$, $y\to+\infty$

③ $\lim_{x\to1^+}\arctan\left(\frac{1}{x-1}\right) = \lim_{y\to+\infty}\arctan(y) = \frac{\pi}{2}$

- $\lim_{x\to+\infty}\log\left(\sin\frac{1}{x}\right)$

① $x\to+\infty$, quindi $\frac{1}{x}\to0$

② quindi $\sin\frac{1}{x}\to0$

③ quindi $\lim_{x\to+\infty}\log\left(\sin\frac{1}{x}\right) = -\infty$

• $\lim_{x \to +\infty} (2 - \cos x)\, x \longrightarrow$ teorema confronto

$2 - \cos x \geq 1$

quindi

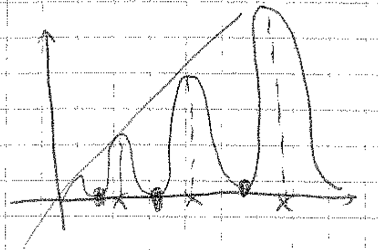
$(2 - \cos x)\, x \geq x \longrightarrow +\infty$

la funzione a sx è maggiore di una funzione che tende ad ∞, quindi è anche lei tende a ∞

• $\lim_{x \to +\infty} (1 - \cos x)\, x \longrightarrow 1 - \cos x \geq 0$

$(1 - \cos x)\, x \geq 0$ se funzione ≥ 0, limite ≥ 0 esiste per TEOREMA PERMANENZA SEGNO

NON ESISTE



• se $a_n = 2\pi n$ $\quad a_n \to +\infty$

$\lim_{n \to +\infty} \underbrace{(1 - \cos(2\pi n))}_{0\ \forall n} 2\pi n = \boxed{0}$

$\neq$

• se $b_n = (2n+1)\pi$ $\quad b_n \to +\infty$

$\lim_{n \to +\infty} (1 - \cos((2n+1)\pi))(2n+1)\pi = \lim_{n \to +\infty} 2 \cdot (2n+1)\pi = \boxed{+\infty}$

LIMITI NOTEVOLI

• $\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

① $\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a \quad a \neq 0$

DIMOSTRAZIONE

sostituzione $x = ay$ (con $a > 0$)

ovvero $y = \frac{x}{a}$ se $x \to +\infty$, $y \to +\infty$

$\lim_{y \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{ay} = \lim_{y \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{y}\right)^y\right]^a$ oppure $\left[\lim_{y \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y\right]^a$

$\left(1 + \frac{1}{y}\right)^y \to e$

② $\lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = e \longrightarrow y = \frac{1}{x}$ se $x \to 0^\pm$, $y \to \pm\infty$

$\lim_{y \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e$

importante se sostituisco vedere se $x \to c$, a cosa tende y

• $\lim_{x \to 0^+} x \log x = 0$

7) $\lim_{x \to -\infty} \frac{\dots}{x^2 5^x + 4^x} = \frac{\dots}{x^2 - \left(\frac{4}{5}\right)^x} = \frac{2x\left(\frac{e}{5}\right)^x}{x^2} = \frac{2}{x} \cdot \left(\frac{e}{5}\right)^x = \frac{2\left(\frac{e}{5}\right)^x}{x} = -\infty$

- 0
- 4/5
- 1
- ~~$-\infty$~~
- $+\infty$

divido per pot. maggiore essendo $0 < \frac{e}{5} < 1$ con $x \to -\infty$ $f(x) \to +\infty$

posso non considerarli perché tende la stessa quantità sia al num. che al den.

esponenziale va + velocemente ad ∞ di x quindi va ad ∞, però x dà segno −, perciò $-\infty$

8) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{e^x+1}{e^x}\right)^{e^x} = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{\cancel{e^x}}{\cancel{e^x}} + \frac{1}{e^x}\right)^{e^x} \underset{[t=e^x]}{=} \lim_{t \to +\infty} \left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e$

- ~~e~~
- e^e
- 0
- $+\infty$
- 1

9) $\lim_{x \to +\infty} 2x(\log(3x+2) - \log(3x)) = \lim_{x \to +\infty} 2x\log(3x+2) - 2x\log(3x) =$

$= \lim_{x \to +\infty} \log\left(\frac{3x+2}{3x}\right)^{2x} = \lim_{x \to +\infty} \log\left(1+\frac{2}{3x}\right)^{2x} =$

$= \lim_{x \to +\infty} \left(\left(1+\frac{1}{\frac{3}{2}x}\right)^{\frac{3}{2}x}\right)^{4/3} = \log e^{4/3} = 4/3$

- 0
- 2/3
- $+\infty$
- 1
- ~~4/3~~

10) $\lim_{x \to +\infty} \left(\log(3e^{2x}+4) - \frac{2x^2+5}{x}\right) = \log(3e^{2x}+4) - \left(\frac{2x^2}{x} + \frac{5}{x}\right) = \log(3e^{2x}+4) - 2x - \frac{5}{x} =$

raccolgo $3e^x$

$= \log 3e^{2x}\left(1+\frac{4}{3e^{2x}}\right) - 2x - \frac{5}{x} = \log 3 + \log e^{2x} + \log\left(1+\frac{4}{3e^{2x}}\right)$

$= 2x - \frac{5}{x} = \log 3 + \cancel{2x} - \cancel{2x} - \frac{5}{x} \to 0 + \log 1 \to 0 = \log$

- 0
- 1
- ~~log 3~~
- $+\infty$
- log 4

11) $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\frac{2x^2}{x+4}}}{e^{2x}} = \frac{\lim_{x \to +\infty} e^{\frac{2x^2}{x+4}}}{\lim_{x \to +\infty} e^{2x}} = \frac{e^{\left[\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2}{x+4}\right]}}{e^{\left[\lim_{x \to +\infty} 2x\right]}} =$ stessa base, posso sottrarre e

e^x è sempre continua, quindi sfrutto composizione di funzi

$= e^{\left[\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2}{x+4} - \lim_{x \to +\infty} 2x\right]} = e^{\left[\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2}{x+4} - 2x\right]} = e^{\left[\lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{2x^2} - \cancel{2x^2} - 8x}{x+4}\right]} =$

$= e^{\left[\lim_{x \to +\infty} \frac{-8\cancel{x}}{\cancel{x}\left[1+\frac{4}{x}\right]}\right]} = e^{-8}$

- 0
- ~~e^{-8}~~
- 1
- e^4
- 3e

esercizio

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-\sin x)^{\frac{3}{2}}-1}{\sin x} = \frac{3}{2} \qquad y = \text{sen } x \quad \begin{matrix} x\to 0 \\ y \to 0 \end{matrix}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)^{\frac{3}{2}}-1}{\cos x} \qquad y=\cos x \quad \begin{matrix} x\to 0 \\ y \to 1 \end{matrix} \;!$$

si ottiene un risultato $\neq$ da $3/2$ perché se $x\to 0$, $y\to 1$.

- Deve sempre valere $\lim_{x\to 0} \frac{(1+f(x))^{\frac{3}{2}}-1}{f(x)}$ $\quad y=f(x)$ solo se $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$
- $\lim_{x\to c} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to c} e^{g(x)\log f(x)}$

PROPRIETÀ GLOBALI DELLE FUNZIONI CONTINUE

cioè vere non solo in un punto, cioè più ampie delle proprietà puntuali.

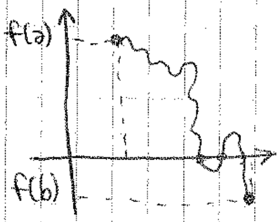
$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua

Def. Si dice che $c \in \mathbb{R}$ è uno zero di f se $f(c)=0$

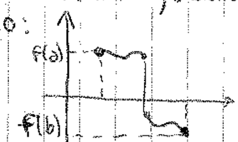
Trovare gli zeri di una funzione vuol dire risolvere l'equazione $f(x)=0$

- **TEOREMA DI ESISTENZA DEGLI ZERI:**

Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua.
Se $f(a)\cdot f(b)<0$, cioè $f(a)$ e $f(b)$ hanno segni opposti, allora f ha almeno uno zero nell'intervallo $[a;b]$



Se la funzione non è continua, allora questa proprietà non vale, ad esempio:



Se f è anche strettamente monotona in $[a,b]$, allora lo zero è unico

se $f(x)$ è strettamente decrescente, una volta passata da zero non può ritornare positiva

esempio

$$\underbrace{e^x + x - 2\cos x}_{f(x)} = 0$$

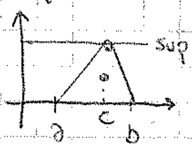
$$\left.\begin{aligned} f(0) &= 1+0-2 = -1 < 0 \\ f(1) &= \underbrace{e+1}_{3,\ldots} - \underbrace{2\cos(1)}_{2\,(\text{al max})} > 0 \end{aligned}\right\}$$ esiste uno zero nell'intervallo $(0,1)$

VAIERSTRASS
• TEOREMA DI WEIERSTRASS

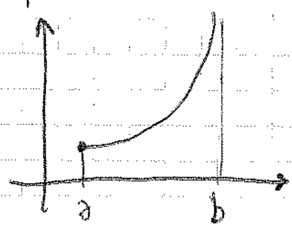
Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua
Allora f assume massimo e minimo in $[a,b]$,
cioè $\exists\, x_m \in [a,b] \mid f(x_m) = \inf_{[a,b]} f$, x_m è il minimo di f

IPOTESI
① $[a,b]$: intervallo chiuso e limitato
② f continua

esempi

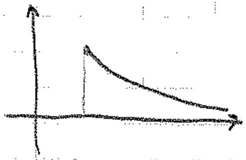
•


ma non ci sono punti in cui f assume valore c → $f(x) \neq \sup f$, f non ha max } f non continua

• $[a,b)$


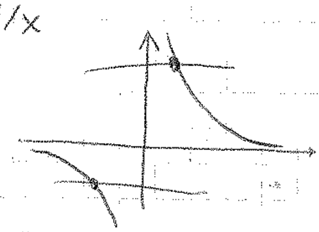
sup f = $+\infty$
f non ha max

intervallo non chiuso e limitato

• $[a, +\infty)$


1/x

Se f strettamente monotona ⇒ f è iniettiva, cioè $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

esempio
1/x


iniettiva ma non monotona

Ma non vale il viceversa

• TEOREMA

Supponiamo che f sia continua in un intervallo I, allora f è strettamente monotona se e solo se f è iniettiva.

1/x non è monotona perché non definita su un intervallo, infatti ha un buco in x=0

Se f è iniettiva, $\exists\, f^{-1}$ inversa : $f^{-1}(f(x)) = x$

CONFRONTO LOCALE DI FUNZIONI

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^4+2x+1}{5x^4+x^2-3} = \frac{3}{5} =$$

contano solo i termini di grado massimo

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^4+0}{5x^4+0} = \frac{3}{5}$$

SIMBOLI DI LANDAU

Ci sono due funzioni f e g definite in un intorno di c $I(c)\setminus\{c\}$.

$\frac{f(x)}{g(x)}$ → casi significativi: $f\to0,\ g\to0$ oppure $f\to\infty,\ g\to\infty$

con $g(x)\neq0$ in $I(c)\setminus\{c\}$

Def. Si dice che f è **EQUIVALENTE** a g per $x\to c$ se $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=1$

$f\sim g$ per $x\to c$

Se $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=0$ si dice che f è **TRASCURABILE** rispetto a g

(infatti funzione al numeratore è molto minore rispetto a g se il rapporto è uguale a zero)

$f=o(g)$ f è "o piccolo" di g quando $x\to c$

esempi

- $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$

  $\sin x \sim x$ per $x\to0$

- $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\tan x} = \lim_{x\to0} \cancel{\sin x}\cdot\frac{\cos x}{\cancel{\sin x}} = \lim_{x\to0}\cos x = 1$

  $\sin x \sim \tan x$ per $x\to0$

- $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to0} \underbrace{x}_{\to0}\cdot\underbrace{\frac{1-\cos x}{x^2}}_{\to\frac{1}{2}} = 0$

  $1-\cos x = o(x)$ quando $x\to0$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 83 di 233

ALGEBRA DEGLI o PICCOLI

$\boxed{x \to 0}$

1) $o(x^n) \pm o(x^n) = o(x^n)$

$$\left.\begin{array}{l} f = o(x^n) \\ g = o(x^n) \end{array}\right. \Rightarrow f \pm g = o(x^n)$$

DIMOSTRAZIONE

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) \pm g(x)}{x^n} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^n} \pm \lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x^n} = 0 \pm 0 = 0$$

$f \pm g = o(x^n)$

2) $o(x^n) \pm o(x^m) = o(x^{\min(n,m)})$

Esempio

$$\left.\begin{array}{l} f = o(x^2) \\ g = o(x^n) \end{array}\right. \quad f \pm g = o(x^2) \to \text{minimo dei 2 esponenti}$$

3) $x^m \cdot \underbrace{o(x^n)}_{f} = o(x^{n+m})$

$\frac{f}{x^n} \to 0$

$x^m \cdot f(x) = o(x^{n+m})$? $\quad \lim_{x\to 0} \frac{x^m f(x)}{x^{n+m}} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^m}}{\cancel{x^m}} \cdot \frac{f(x)}{x^n} = 0$

4) $o(x^n) \cdot o(x^m) = o(x^{n+m})$

$$\frac{(f \cdot g)}{x^{n+m}} = \frac{f}{x^n} \cdot \frac{g}{x^m} \to 0$$

5) $o(x^n)^k = o(x^{kn})$

LIMITI NOTEVOLI PER $x \to 0$

- $\sin x \sim x \longrightarrow \sin x = x + o(x)$
- $\frac{1-\cos x}{x^2} \to \frac{1}{2}$

$$\frac{1-\cos x}{\frac{1}{2}x^2} \to 1$$

$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$

$1-\cos x = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$

$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$

- $\lim_{x\to c} (f+o(f))(g+o(g)) = \lim_{x\to c} f\cdot g$

esempi

- $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(2x)}{\sin^2(3x)}$

$\to \cos t = 1 - \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)$ per $t\to 0$

$\cos(2x) = 1 - \frac{1}{2}(2x)^2 + o(x^2)$

$1-\cos(2x) = 2x^2 + o(x^2)$

$\to \sin t = t + o(t)$

$\sin(3x) = 3x + o(x)$

$\sin^2(3x) = (3x+o(x))^2 = 9x^2 + 6x\,o(x) + o(x)^2 =$ $o(x^2) + o(x^2) = o(x^2)$

$= 9x^2 + o(x^2)$

$\lim_{x\to 0} \frac{2x^2+o(x^2)}{9\cdot x^2+o(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cancel{x^2}}{9\cancel{x^2}} = \frac{2}{9}$

- $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)+x^3}{4x+5\log(1+x)}$

$\lim_{x\to 0} \frac{2x+o(x)+x^3}{4x+5(x+o(x))}$

$\lim_{x\to 0} \frac{2x+o(x)}{9x+o(x)} = \frac{2}{9}$

- per $x\to +\infty$
le potenze basse sono trascurabili rispetto alle potenze basse

- $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^3}{x^4} = 0$ $\quad x^3 = o(x^4)$ per $\to +\infty$
- $\lim_{x\to +\infty} \frac{5x^6 + \boxed{3x^4+2x^3+1}}{3x^6 + \boxed{2x^5+x^3}} = \frac{5x^6+o(x^6)}{3x^6+o(x^6)} = \frac{5\cancel{x^6}}{3\cancel{x^6}} = \frac{5}{3}$

$\to$ che divisi per x^6 sono trascurabili

$x^k = o(x^n)$ $x\to\infty$
$\forall\, k<n$

$o(x)^k$ vuol dire che $(f(x))^k = (o(x))^k = o(x^k)$

$x^3\, o(x^4) = o(x^{4+3}) = o(x^7)$

$o(x^2)\cdot o(x^4) = o(x^6)$

- per $x\to\infty$ le funzioni di grado $\overset{min}{\text{maggiore}}$ sono o piccoli di quelle di grado maggiore

$\frac{x^{min}}{x^{mag}}$ per $x\to\infty = \frac{1}{x^n} \to 0$ $\quad x^{min} = o(x^{mag})$

- per $x\to 0$ funzioni di grado maggiore sono o piccoli di quelle di grado minore

$\left(e^{1/x} - 1 - 2\sin\frac{1}{x}\right)x$

$e^{1/x} - 1 - 2\sin\frac{1}{x} = \cancel{1} + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) - \cancel{1} - 2\left(\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) =$

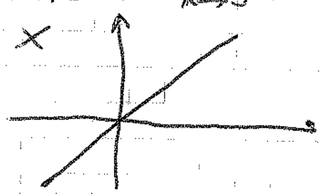
$= \frac{1}{x} - \frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$

$\lim_{x \to +\infty} \left(e^{1/x} - 1 - 2\sin x\right)x = \lim_{x \to +\infty} \left(-\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)x = \lim_{x \to +\infty} \left(-1 + o(1)\right) = -1$

- Se $f \to 0$ ($o(1)$) per $x \to c$ si dice che f è $\boxed{\text{infinitesima}}$ in c
- Se $f \to \pm\infty$ per $x \to c$ si dice che f è infinita in c, è un $\boxed{\text{infinito}}$ in c
- f, g sono infinitesime per $x \to c$
  se $f = o(g)$ quando $x \to c$, f è un INFINITESIMO di ordine SUPERIORE a g
  - $x \to 0$
    $x^4 = o(x^2)$
    x^4 infinitesimo di ordine superiore a x^2
  - $x \to \infty$
    f, g infinite
    x^4 è infinito di ordine superiore a x^2, cioè tende + velocemente a ∞
    $x^2 = o(x^4)$ per $x \to \infty$
- f, g sono infinite per $x \to c$
  se $f = o(g)$ quando $x \to c$, g è infinita di ordine superiore a f

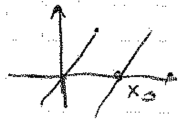
Confrontare le funzioni con una funzione fissa "campione"
↳ $f \to 0$ in $x \to 0$

x



$\sin \sim x$
$1 - \cos \sim \frac{1}{2}x^2$ → la sto confrontando con una potenza di x

Sia f infinitesima o infinita per $x \to c$.
Prendiamo un campione $\varphi(x)$ infinitesima o infinita per $x \to c$
Se $f = o(1)$ per $x \to 0$ allora $\varphi(x) = x$
Se $f = o(1)$ per $x \to x_0$ allora $\varphi(x) = x - x_0$



il campione è sempre DATO

$f = o(1)$ a $+\infty$
$\varphi(x) = \frac{1}{x}$

se $\alpha = 1 \rightarrow \lim \frac{f}{\varphi^\alpha} = 1$
- ordine di infinitesimo è 1
- parte principale è x

$f(x) \sim x$ per $x \to 0$

② $\frac{1}{1+t} = (1+t)^{-1} = 1 - t + o(t)$

$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o x$ per $x \to 0$

$f(x) = \frac{x + o(x)}{1 + x^2}$

$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + o(x^2)$

$f(x) = x + o(x) \cdot (1 - x^2 + o(x^2)) = x - x^3 + x\, o(x^2) + o(x) - x^2 o(x^2) + o(x) o(x^2) =$

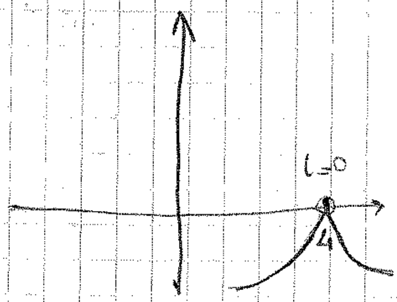
$= x + o(x)$

- parte principale x
- ordine di infinitesimo 1

ESERCITAZIONE

- f continua in $x = 0$ e $\lim_{x \to 0} f(x) = -1$
  1. ~~$\sqrt{5 + f(0)} = 2$~~
  2. $\sqrt{5 + f(0)} \in [-2, 0]$
  3. $\sqrt{5 + f(0)} \geq \sqrt{5}$
  4. $\sqrt{5 + f(x)}$ non continua in $x = 0$
  5. nessuna delle altre risposte

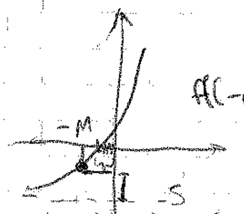
- $\lim_{x \to 4} f(x) \geq 0$
  1. $\exists\ I_{x=4}$ dove $f(x) \geq 0$
  2. $\exists\ I_{x=4}$ dove $f(x) > 0$
  3. $f(4) \geq 0$
  4. $f(4) > 0$
  5. ~~nessuna delle altre~~



- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
  1. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$
  2. se esiste $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$ allora $l > 0$
  3. $\lim_{x \to \infty} f(x) > 0$
  4. ~~se esiste limite allora $l \geq 0$~~
  5. $\lim_{x \to \infty} f(x) \geq 0$

- $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -5$

① f limitata
② ~~$\exists M>0 \mid f((-\infty, M))$ è un insieme limitato~~
③ $\inf_{\mathbb{R}} f = 5$
④ $f(x)<0 \quad \forall x \in \text{dom} f$
⑤ $\forall M>0,\ f((-\infty,-M))$ insieme limitato



$f((-\infty, M))$

cioè devo trovare un M | l'immagine è limitata.

- $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cosh x}{2x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 5 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ allora $\lim_{x\to 0} f(x)$

$-\frac{1}{4}$ perché $\frac{1-\cosh x}{x^2} = -\frac{1}{2}$

- $\lim a_n = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n \longrightarrow \left(1 + \frac{2}{n-1}\right)^n$

$\frac{a}{b} = \frac{1}{\frac{b}{a}}$

① 1
② e
③ e^{-1}
④ ~~e^2~~
⑤ $+\infty$

$\left(1 + \frac{1}{\frac{n-1}{2}}\right)^{\boxed{\frac{n-1}{2} + 1} \cdot 2} \longrightarrow \frac{n-1}{2}\cdot 2 \quad + \frac{1}{2}\cdot 2$

$\left[\left(1 + \frac{1}{\frac{n-1}{2}}\right)^{\frac{n-1}{2}}\right]^2 \left(1 + \frac{1}{\frac{n-1}{2}}\right)^1$

$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$

$e^2 \qquad\qquad 1$

- $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1-6x} - 1}{5x + x^3} = \frac{\sqrt[3]{1-6x} - 1}{x(5+x^2)}$

ⓐ 2/5
ⓑ 0
ⓒ 6/5
ⓓ ~~-2/5~~
ⓔ $-\infty$

$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$

$(1+x)^\alpha \sim 1 + \alpha x$

$(1-6x)^{1/3} - 1 \sim \frac{1}{3}(-6x)$ per $x\to 0$

$5x + x^3 \sim 5x$ per $x \to 0$

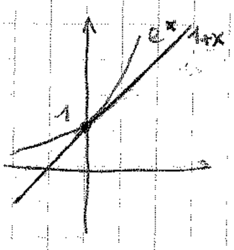
$\frac{-2\cancel{x}}{5\cancel{x}} = -\frac{2}{5}$

DERIVATE

- $e^x = 1 + x + \underbrace{o(x)}_{\text{errore}} \quad x \to 0$

e^x è uguale a $1+x$ a meno di un errore che tende a zero più velocemente di x

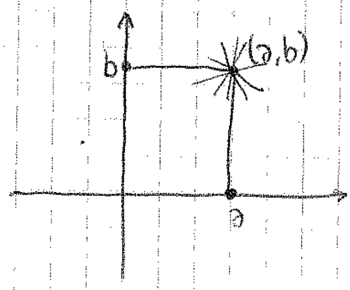
$f(x) = 1+x$



e^x e $1+x$ hanno pendenza simile per $x \to 0$

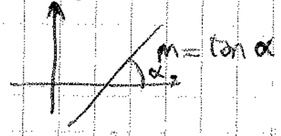
Approssimare una funzione con una retta che passa per il punto dove voglio approssimare, cioè APPROSSIMAZIONE LOCALE

$e^x - (1+x) = o(x)$

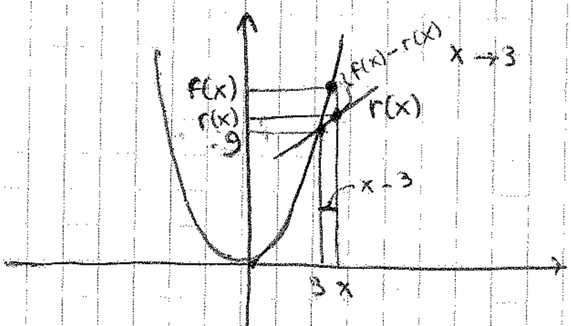
- 

$y = b - m(x-a) \to$ equazione di una generica retta passante per (a,b) tranne la retta verticale

con $m \in \mathbb{R}$ → COEFFICIENTE ANGOLARE = tangente α



Prendo $f(x) = x^2$ con $x_0 = 3$.
Voglio cercare una retta che passa per $(3, \overset{f(3)}{9})$ e approssima x^2 con un errore $o(x-3)$ per $x \to 3$ cioè la distanza di x da 3
[scrivendo $o(x)$ per $x \to 0$ in realtà scrivo $o(x-0)$]



devo dimostrare che la distanza $f(x) - r(x)$ è molto più piccola rispetto a $x-3$, caratteristica che ha solo la retta tangente

$y = 9 + m(x-3)$

Esiste $m \in \mathbb{R} \mid x^2 = 9 + m(x-3) + o(x-3)$?

$x^2 - 9 - m(x-3) = o(x-3)$ → cioè la differenza tra la curva x^2 e la retta tende a zero ($o(x-3)$) più velocemente f si dice derivabile se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = m$ esiste ed è finito

- Chiamo $h = x - x_0$
  ↳ se $x \to x_0$
  $h \to 0$

$f(x_0+h) = f(x_0) + \boxed{m}h + o(h)$ per $h \to 0$

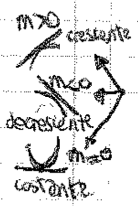
- $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = m + o(1)$

- $f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h)$ per $h \to 0$

- $f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)} + o(x-x_0)$

se tangente esiste, è unica

$y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$ → retta tangente al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$



f continua in x_0 si può scrivere come: $f(x) = f(x_0) + o(1)$ per $x \to x_0$
f derivabile in x_0: $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)$ per $x \to x_0$
$f'(x_0)$ = COEFF. ANGOLARE della tangente al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$ → SIGNIFICATO GEOMETRICO

TEOREMA

f derivabile in x_0 ⇒ f continua in x_0
Quindi continuità e derivabilità sono due proprietà, ma la derivabilità è una proprietà più forte

f derivabile: $f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)}_{\text{è continua}}$ per $x \to x_0$
↳ tende a zero, cioè è $o(1)$

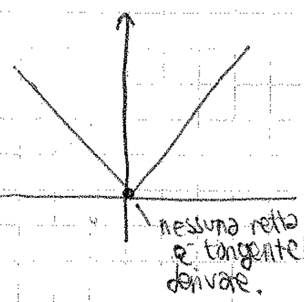
NON È VERO IL VICEVERSA

f continua si può scrivere come:
$f(x) = f(x_0) + o(1)$
perché per definizione di continuità
$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, cioè
$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{f(x_0)} = 1$, $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{f(x_0)} - 1 = 0$
$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{f(x_0)} = 0$
cioè
$\frac{f(x) - f(x_0)}{f(x_0)} \to 0 \Rightarrow o(1)$
$f(x) - f(x_0) = f(x_0) \cdot o(1)$ → $o(1)$
$f(x) = f(x_0) + o(1)$
una funzione moltiplicata x una che tende a zero, tende a zero.

esempio
$f(x) = |x|$
non è vero che $\lim_{h \to 0} \frac{|h| - |0|}{h}$ non esiste finito

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

per $h > 0$
$\lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = 1$
per $h < 0$
$\lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$



nessuna retta passante per (0,0) è tangente, quindi non si può derivare.