NUMERO : 463

DATA : 18/02/2013

A P P U N T I

STUDENTE : Tomatis

MATERIA : Analisi Matematica I

Prof. Rolando

PROPOSIZIONI E CONNETTIVI LOGICI

Una proposizione logica è un enunciato di cui si può affermare senza o[mbra] di dubbio se sia vero o falso.
Le proposizioni logiche si possono unire a formare proposizioni composte usando i connettivi logici; essi sono:

1) $\neg$ (non logico o negazione logica): affermando che p (cioè la proposizione) sia vera, dico di conseguenza che $\neg p$ è falsa e viceversa

p	V	F
$\neg p$	F	V

2) $\wedge$ (congiunzione logica "et"): affermando che $p \wedge q$ è vera dico c[he] sia p che q sono vere

p	V	V	F	F
q	V	F	V	F
$p \wedge q$	V	F	F	F

N.B. $p \wedge q$ è vera se e solo se sono entrambe vere.

3) $\vee$ (disgiunzione logica "vel"): affermando che $p \vee q$ è vera, dico che almeno una fra le due proposizioni è vera

p	V	V	F	F
q	V	F	V	F
$p \vee q$	V	V	V	F

N.B. $p \vee q$ è vera se almeno una tra p e q è vera, altrimenti è falsa.

4) $\Rightarrow$ (implicazione logica): affermando che $p \Rightarrow q$ dico che non esse[re] contemporaneamente p ~~falsa~~ e q falsa.

p	V	V	F	F
q	V	F	V	F
$p \Rightarrow q$	V	F	V	V

N.B. $p \Rightarrow q$ è falsa solo se p è vera e q è falsa

N.B. p si dice ipotesi mentre q si dice tesi

N.B. p è CONDIZIONE SUFFICIENTE affinché valga
q è CONDIZIONE NECESSARIA affinché valga

L'implicazione logica è alla base della DIMOSTRAZIONE PER ASSURDO, cioè se p (la ipotesi) è vera e q (la tesi) è falsa, allora p deve essere falsa.

5) $\Leftrightarrow$ (equivalenza logica): affermando che $p \Leftrightarrow$ è vera, allora dico che $p \Rightarrow q$ e $q \Rightarrow p$

p	V	V	F	F
q	V	F	V	F
$p \Leftrightarrow q$	V	F	F	V

N.B. $p \Leftrightarrow q$ è vera se sono entrambe vere o fal[se]

N.B. p è CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE affi[n]ché valga q (similmente per q)

PROPRIETÀ:

1) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \Rightarrow \neg q)$ N.B. $\neg p \Rightarrow \neg q$ è la contronominale di $p \Rightarrow$

2) $\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q$

3) $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ N.B. 1ª legge di De Morgan

4) $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$ N.B. 2ª legge di De Morgan

6) $A \times B := \{(x,y) / x \in A \wedge y \in B\}$ N.B. A e B devono essere diversi da
↳ insieme delle coppie ordinate (x,y), con x 1° componente y 2° componente

N.B. $A \times B \neq B \times A$

esempi

$\{1,2\} \times \{a,b,c\} = \{(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c)\}$

In generale $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) / x_i \in A_i, \forall i = 1,2,\dots,n\}$

INSIEMI NUMERICI

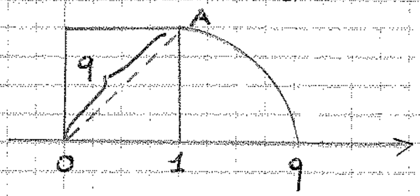
I principali insiemi numerici sono:

- $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,\dots\}$ sempre definita la somma e il prodotto
- $\mathbb{Z} = \{-3,-2,-1,0,1,\dots\}$ sempre definite somma, prodotto e differenza
- $\mathbb{Q} = \{\frac{n}{m} / n, m \in \mathbb{Z}$ primi fra loro, $m > 0\}$ sempre definite le 4 operazioni

N.B. $\mathbb{N}^* := \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\mathbb{Z}_+ := \{m \in \mathbb{Z} / m > 0\}$ (idem $\mathbb{Z}^*, \mathbb{Z}_-, \mathbb{Q}_\pm, \mathbb{Q}^*$)

N.B. $\forall q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ $q_1 \le \frac{q_1+q_2}{2} \le q_2$ SEMPRE

DIMOSTRAZIONE *



Applico il teorema di Pitagora al triangolo AO1:

$q^2 = (1)^2 + (1)^2$ $q^2 = 2$ $\nexists q \in \mathbb{Q} / q^2 = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow q \notin \mathbb{Q}$

LEMMA: $\forall m \in \mathbb{N}^*$, m^2 pari $\Rightarrow m$ pari

DIMOSTRAZIONE

Dimostriamo il lemma dimostrando la sua contronominale, cioè m^2 dispari $\Rightarrow m$ dispari;

$m = 2k+1$ $k \in \mathbb{N}$ eleviamo tutto al quadrato:

$m^2 = 4k^2 + 1 + 4k \Rightarrow m^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1 \Rightarrow m^2$ è dispari! c.v.d.

- $\mathbb{R}$, l'insieme dei numeri con allineamento decimale periodico e non.

$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, cioè ogni numero razionale è contenuto nei reali

Dato $q = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$, $q = \pm q_1, q_2 q_3 q_4 \overline{q_5}$, q_1 si dice cifra non decimale, $q_2 q_3 q_4$ si chiama antiperiodo mentre q_5 periodo.

- l'insieme $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ si chiama insieme degli irrazionali

Due numeri si dicono uguali se hanno tutte le cifre uguali (lo stesso allineamento)

Dato che lo 0 non ha segno $\mathbb{R} = \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \cup \mathbb{R}_-$

L'insieme $\mathbb{R}$ si dice completo, perché ogni elemento ha una posizione sulla retta e ogni punto della retta appartiene ai reali;

DIMOSTRAZIONE:

Dimostriamo che gli irrazionali rendono $\mathbb{R}$ completo.

Sia $q \in \mathbb{Q}$ e $q^2 = 2$ (vedi dim *), con $q = \frac{n}{m}$. Eleviamo tutto al quadrat

$q^2 = \frac{n^2}{m^2}$, ma $q^2 = 2 \Rightarrow \underset{(o)}{2m^2 = n^2} \Rightarrow 2m^2$ è pari quindi n^2 è pari!

VALORE ASSOLUTO E PROPRIETÀ

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |x| := \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

N.B. $|-x| = |x|$, $|x| \geq 0 \wedge |x| = 0 \iff x = 0$

Se rappresentiamo il $|x|$ su una retta, esso ci indica la distanza fra x e 0 mentre se rappresentiamo $|x-y|$ su una retta abbiamo la distanza fra x e cioè un segmento di estremi x e y e si indica con $d(x,y)$.

PROPRIETÀ:

1) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall a > 0$ $\quad |x| = a \iff x = \pm a$
$|x| < a \iff -a < x < a$
$|x| > a \iff x < -a \vee x > a$

Dal punto di vista geometrico vuol dire che trovo l'insieme degli $x \in \mathbb{R}$ c distano a dall'origine, che sono interni all'intervallo $(-a, a)$ o ch sono esterni all'intervallo $(-a, a)$
Dal punto di vista algebrico, invece, sono tutti i valori che soddisfano le disuguaglianze:
$-a < x < a$ se $|x| < a$
$-a < V \vee x > a$ se $|x| > a$

2) $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $\quad |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ con $y \neq 0$
$|x^m| = |x|^m \quad m \in \mathbb{Z}$

3) disuguaglianza triangolare $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad |x+y| \leq |x| + |y|$

DIMOSTRAZIONE:

Dalla definizione di modulo sappiamo che $|x|$, qualunque sia il segno d x, equivale a
$$-|x| \leq x \leq |x|$$
Analogamente
$$-|y| \leq y \leq |y|$$
Sommando membro a membro otteniamo
$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$$
Ma dato che
$$|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$$
allora
$$|x+y| \leq |x| + |y|$$
c.v.d.

4) $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad |x-y| \geq ||x| - |y||$

ESTREMI SUPERIORE E INFERIORE

DEFINIZIONE: Sia $A \subset \mathbb{R}$ superiormente limitato, si chiama:
- estremo superiore di A, e si indica con $\sup A$, il minimo dei maggioranti; $\sup A := \min\{b \in \mathbb{R} \,/\, b \text{ è maggiorante}\}$
- estremo inferiore di A, e si indica con $\inf A$, il massimo dei minoranti; $\inf A := \max\{a \in \mathbb{R} \,/\, a \text{ è minorante}\}$

TEOREMA: Ogni $A \subset \mathbb{R}$ superiormente limitato ammette estremo superiore

PROPRIETÀ:
1) l'estremo superiore è unico
2) caratterizzazione dell'estremo superiore: $S \in \mathbb{R}$ è l'estremo superiore $\iff$ S è un maggiorante di A: $\forall x \in A$, $x \leq S$
S è il più piccolo dei maggioranti di A, $\forall S' < S$ non è più il maggiorante di A ed $\exists x \in A$, $x > S'$ $\forall \varepsilon > 0$
$S - \varepsilon$ non è più maggiorante $\exists x \in A \,/\, x > S - \varepsilon$

DEF: Se $A \subseteq \mathbb{R}$ è superiormente illimitato si pone $\sup A = +\infty$
Se $A \subseteq \mathbb{R}$ è inferiormente illimitato si pone $\inf A = -\infty$

PROPOSIZIONE: $A \subset \mathbb{R}$ è superiormente illimitato; se il massimo esiste allora l'estremo superiore equivale al massimo ($\sup A = \max$)

NB. Ci sono casi in cui la funzione non è definita da espressioni analitiche

$$|x| = \begin{cases} x & se\ x \geq 0 \\ -x & se\ x < 0 \end{cases} \qquad [x] = \max\{k \in \mathbb{Z} / k \leq x\} = \begin{cases} \vdots \\ 1 & se\ x \in [1,2) \\ 0 & se\ x \in [0,1) \\ \vdots \end{cases}$$

Esse sono definite a tratti, cioè le espressioni analitiche variano in base al sottoinsieme che considero

NB. esistono funzioni dette elementari che sono descritte da procedimenti che indicano le leggi con cui operano (elevamento a potenza, logaritmi, ...

È indispensabile indicare il dominio di una funzione; ad esempio se il dominio di una funzione è $\mathbb{N}^*$, siamo in presenza di una successione.

DEFINIZIONE: essa è una funzione che è così definita $a: dom\, a \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $dom\, a := \{n \in \mathbb{N} / n \geq n_0\}$, $n_0 \in \mathbb{N}$; una successione si indica come a_n o $a(n)$

NB: se non viene specificato il dominio, esso viene inteso come il più ampio insieme di valori $x \in \mathbb{R}$ per cui la funzione ha senso nell'insieme ambiente (molto spesso $\mathbb{R}$)
Per sapere il dominio si cercano le condizioni di esistenza che risultano essere un insieme o un unione di intervalli

GRAFICO DI UNA FUNZIONE

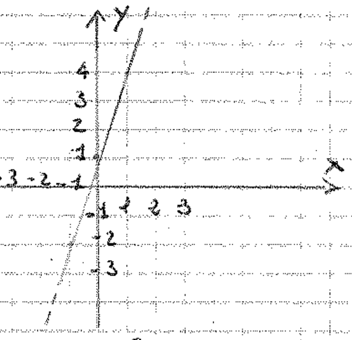
Una funzione è anche definita da un grafico, cioè un sottoinsieme di $X \times Y$ $G_f = \{(x,y) \in X \times Y / x \in dom f, y = f(x)\}$ e se la funzione è reale di variabile reale, sono punti di $\mathbb{R}^2$ (piano cartesiano). Esso è il luogo geometrico di equazioni $y = f(x)$, $x \in dom f$.

esempio

$y = 3x + 1$

$y = mx + q$

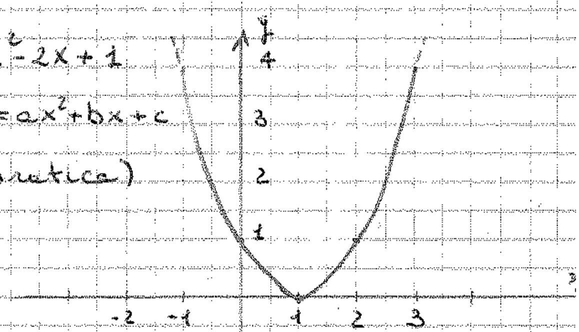
(affine o lineare se $q = 0$)



$y = x^2 - 2x + 1$

$g(x) = ax^2 + bx + c$

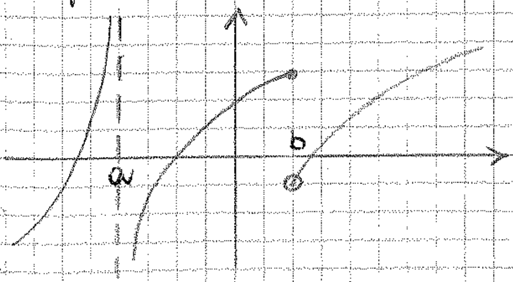
(quadratica)



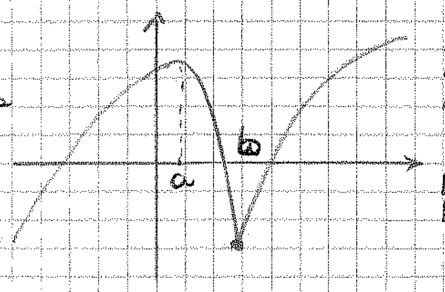
Dal grafico di una funzione si ottengono molte informazioni qualitative:

1. soddisfa la seguente affermazione (test delle rette verticali): un sottoinsieme del piano è grafico di una funzione se e solo se ogni retta verticale lo interseca al massimo in un punto
2. Data $f: dom f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, il dom f è la proiezione del grafico sull'asse x, l'im f è la proiezione del grafico sull'asse y
3. Data la funzione di 2. con $A \subseteq \mathbb{R}$, $f(A)$ è l'insieme delle immagini degli elementi di A, definita come $\{f(x) / x \in A \cap dom f\}$ ("immagine di A tramite f")
Praticamente guardo i punti di G_f con ascisse in A e li proietto sulla asse y.
4. Data sempre la funzione di 2. con $B \subseteq Y \equiv \mathbb{R}$, $f^{-1}(B) := \{x \in dom f / f(x) \in B\}$, ovvero l'insieme delle controimmagini degli elementi di B ("controimmagine di B attraverso f")
In pratica, guardo i punti di G_f con ordinate in B e li proietto sull'asse x
5. ad ogni funzione f, può essere assegnata una partizione data dai seguenti sottoinsiemi:
a) $D_+ := \{x \in dom f / f(x) > 0\} = f^{-1}((0; +\infty))$ insieme di positività di f
b) $D_0 := \{x \in dom f / f(x) = 0\} = f^{-1}(0)$ " degli zeri di f
c) $D_- := \{x \in dom f / f(x) < 0\} = f^{-1}((-\infty; 0))$ " di negatività di f
Risulta che:
b) sono le ascisse delle intersezioni fra G_f e l'asse x
a) ascisse dei punti sopra l'asse x
c) ascisse dei punti sotto l'asse x
6. può soddisfare la seguente affermazione (test delle rette orizzontali): una funzione è iniettiva se e solo se ogni retta orizzontale incontra il grafico

Una funzione è monotona nell' INTERVALLO DI MONOTONIA, e può averne anche più di uno, cioè avere intervalli di monotonia massimali

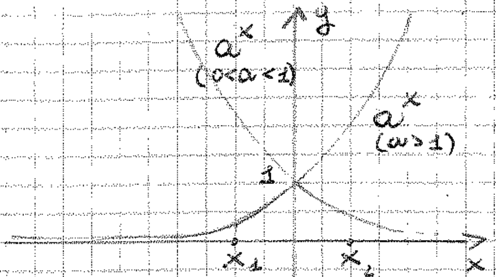


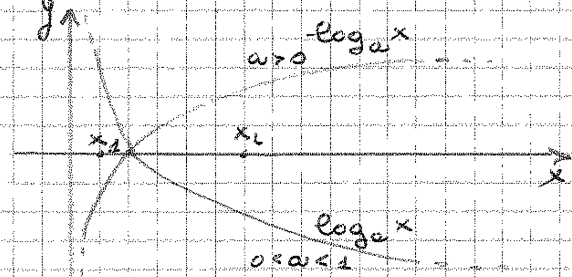
intervalli di monotonia
$(-\infty; a)$
$(a; b]$
$(b; +\infty)$



intervalli di monotonia
$(-\infty; a]$
$[a; b]$
$[b; +\infty)$

N.B. Il logaritmo e la funzione esponenziale sono funzioni globalmente, strettamente monotone



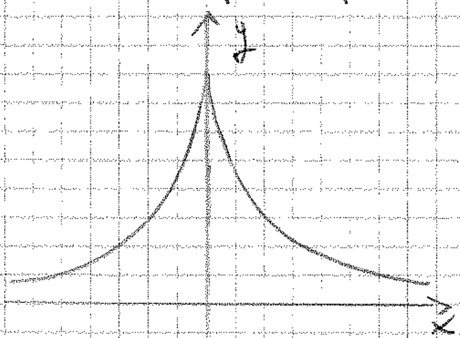


$$\begin{cases} a^{x_1} < a^{x_2} & \text{se } a > 1 \\ a^{x_1} > a^{x_2} & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

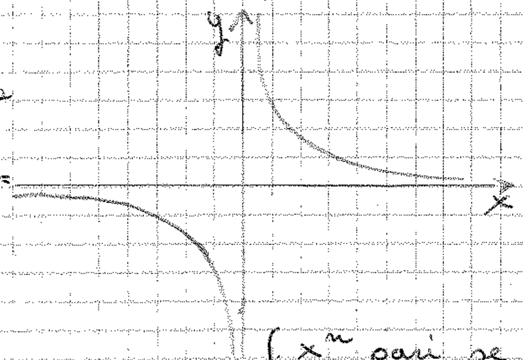
$$\begin{cases} \log_a x_1 < \log_a x_2 & \text{se } a > 1 \\ \log_a x_1 > \log_a x_2 & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

FUNZIONI PARI E DISPARI

DEFINIZIONE $f: \operatorname{dom} f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione con dominio simmetrico rispetto all'origine: $x \in \operatorname{dom} f \wedge -x \in \operatorname{dom} f$. Allora
- f è pari se $\forall x \in \operatorname{dom} f \;\; f(-x) = f(x)$
- f è dispari se $\forall x \in \operatorname{dom} f \;\; f(-x) = -f(x)$



pari (simmetria rispetto all'asse dell'ordinate)



dispari (simmetria rispetto all'origine
⇓
$0 \in \operatorname{dom} f$
$f(0) = f(-0)$
$= 0$

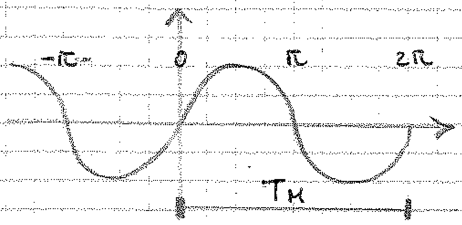
In base all'esponente $f(x) = x^n$ è pari o dispari. $\begin{cases} x^n \text{ pari se } n \text{ è pari} \\ x^n \text{ dispari se } n \text{ è dispari} \end{cases}$

FUNZIONI PERIODICHE

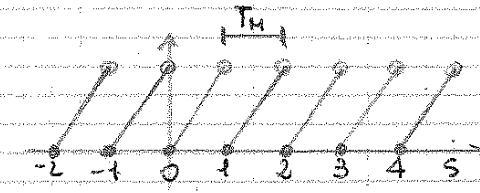
DEFINIZIONE. Sia $f: \operatorname{dom} f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; si dice che è periodica se esiste un numero reale $p > 0$ tale che $\forall x \in \operatorname{dom} f$, $x \pm p \in \operatorname{dom} f$ e $f(x+p) = f(x)$ e p si dice periodo di f.

N.B. $f(x+2p) = f((x+p)+p) = f(x+p) = f(x)$
$f(x-p) = f((x-p)+p) = f(x)$

DEFINIZIONE. $f: \operatorname{dom} f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è periodica e l'insieme dei suoi periodi ha minimo; tale minimo si chiama periodo minimo di f (T_M)



$T_M = 2\pi$



$M(x) = x - [x]$
$T_M = 1$

INTORNI

Possiamo avere due tipi di intorni: di un punto o di più/meno infinito.
Dato un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ e $r > 0$:

1. $I_r(x_0) = (x_0 - r, x_0 + r) := \{x \in \mathbb{R} \,/\, d(x, x_0) < r\}$ intorno completo di x_0 di raggio r
2. $I_r^*(x_0) = I_r(x_0) \setminus \{x_0\} := \{x \in \mathbb{R} \,/\, 0 < d(x, x_0) < r\}$ intorno completo di x_0 di raggio r bucato
3. $I_r(x_0^+) = [x_0, x_0 + r)$ $\quad I_r(x_0^-) = (x_0 - r, x_0]$ intorno unilaterale destro o sinistro
4. $I_r^*(x_0^+) = (x_0; x_0 + r)$ $\quad I_r^*(x_0^-) = (x_0 - r; x_0)$ intorni unilaterali bucati

• sia $r > 0$:
1. $I_r(+\infty) := (r; +\infty)$ intorno di $+\infty$ $\Rightarrow$ $I_r(\pm\infty) = I_r^*(\pm\infty)$
2. $I_r(-\infty) := (-\infty; r)$ intorno di $-\infty$

DEFINIZIONE (limite al finito): Sia $x_0 \in \mathbb{R}$, $f: \mathrm{dom} f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita almeno in un intorno bucato di x_0, eventualmente solo destro o solo sinistro.
Allora possiamo avere:
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \,/\, \forall x \in \mathrm{dom} f \;\; 0 < d(x, x_0) < \delta$$
cioè $d(f(x), \ell) < \varepsilon$

In termini di intorni
$\forall I_\varepsilon(\ell), \exists I_\delta(x_0) \,/\, \forall x \in \mathrm{dom} f,\; x \in I_\delta^*(x_0) \Rightarrow f(x) \in I_\varepsilon(\ell)$

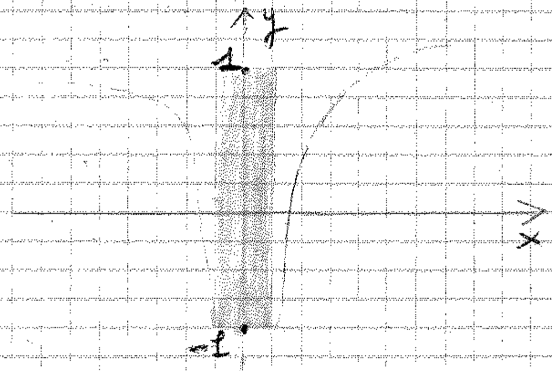
DEFINIZIONE (limite infinito al finito): Sia $x_0 \in \mathbb{R}$, $f: \mathrm{dom} f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita in un intorno bucato di x_0, eventualmente solo destro o sinistro.
Allora possiamo avere:
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty \iff \forall M > 0 \;\; \exists \delta > 0 \,/\, \forall x \in \mathrm{dom} f \;\; 0 < d(x, x_0) < \delta \Rightarrow f(x) > M \;\; (f(x) <$$

In termini di intorni
$\forall I_M(+\infty), \exists I_\delta(x_0) \,/\, \forall x \in \mathrm{dom} f,\; x \in I_\delta^*(x_0) \Rightarrow f(x) \in I_M(+\infty)$
$(f(x) \in I_M(-\infty))$

DEFINIZIONE (unificata di limite): Sia c un punto di $\mathbb{R}$ oppure $\pm\infty$, allora $\lim_{x \to c} f(x) = \ell$ (finito o infinito)
1. $f: \mathrm{dom} f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita in un intorno bucato di c oppure se $c = \pm\infty$ e f è una successione
2. $\forall I(\ell), \exists I(c) \,/\, \forall x \in \mathrm{dom} f,\; x \in I^*(c) \Rightarrow f(x) \in I(\ell)$

esempio $\lim_{x \to 0} \sin\frac{1}{x} = ?$

$\sin\left(-\frac{1}{x}\right) = -\sin\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow f(x)$ è dispari, guardo solo le $x > 0$



$-1 \leq \sin x \leq 1 \qquad -1 \leq \sin\frac{1}{x} \leq 1$

ci sono infiniti punti in cui $\sin\frac{1}{x} = 1$
e infiniti punti in cui $\sin\frac{1}{x} = -1$

$\left|\sin\frac{1}{x}\right| \leq 1 \Rightarrow \sin\frac{1}{x} \not\to \pm\infty \quad x \to 0$

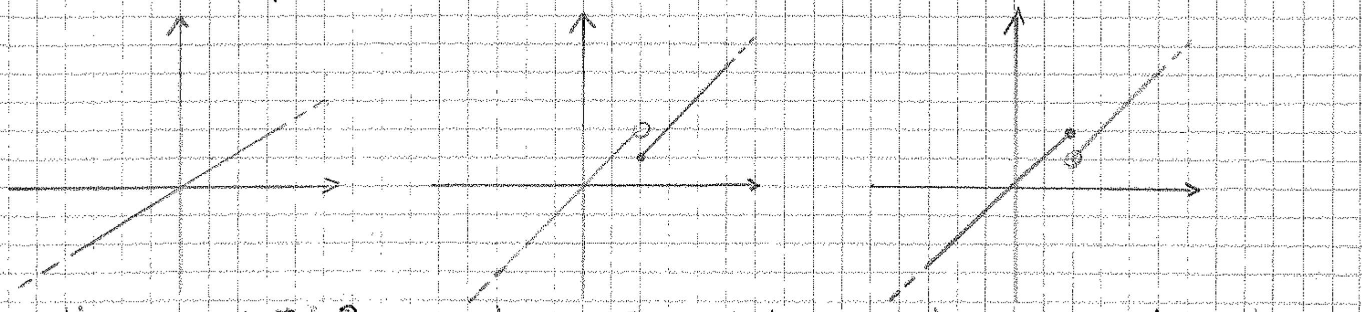
PROPRIETÀ (unicità del limite): Sia $c \in \mathbb{R}$, $f: \mathrm{dom} f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; allora $\lim_{x \to c} f(x)$ (finito o infinito) se esiste è unico

PROPRIETÀ (carattere locale del limite): Se $\exists I(c) \,/\, I^*(c) \cap \mathrm{dom} f \cap \mathrm{dom} g \neq \emptyset$, e $f(x) = g(x)$ in tale intersezione, allora $\lim_{x \to c} f(x)$ esiste $\iff \lim_{x \to c} g(x)$ esiste $\Rightarrow \lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x)$

PROPRIETÀ $\lim_{x \to c} f(x) = 0 \iff \lim_{x \to c} |f(x)| = 0$

- si dice che f è continua in x_0 da destra (sinistra) se $\lim_{x \to x_0^+ (x_0^-)} f(x) = f(x_0)$, cioè se $f_{[x_0, x_0+r)}(x)$ (o $f_{]x_0-r, x_0]}(x)$) è continua in

PROPRIETÀ: Se f è definita in un intorno completo di x_0, f è continua in x_0 $\Leftrightarrow$ f è continua in x_0 sia da destra che da sinistra



continua in tutto $\mathbb{R}$ — continua solo da destra in x_0 — continua solo da sinistra in x_0

TEOREMA: tutte le funzioni elementari e le funzioni razionali (polinomi) sono continue in tutto il loro dominio

Se f è elementare o razionale e $x_0 \in \mathrm{dom} f$, allora $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

PUNTI DI DISCONTINUITÀ

Sia $f: \mathrm{dom} f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita in un intorno di $x_0 \in \mathbb{R}$, eventualmente unilaterale ed eventualmente bucato

DEFINIZIONE: diciamo che x_0 è un punto di discontinuità per f se $x_0 \notin \mathrm{dom} f$ oppure $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$

Abbiamo tre tipi di discontinuità:

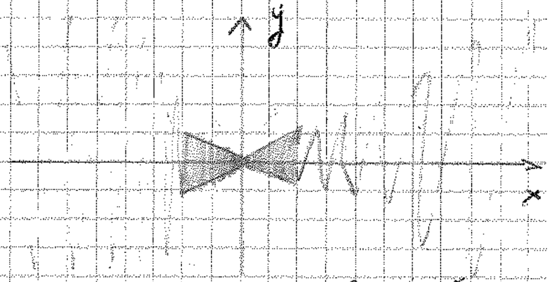
1) eliminabile, cioè:

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ esiste finito

$x_0 \notin \mathrm{dom} f \vee f(x_0) \neq \ell$

esempio: $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ $\quad \mathrm{dom} f \ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$



Per ottenere una funzione continua prolunghiamo per continuità, cioè

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq x_0 \\ \ell & \text{se } x = x_0 \end{cases}$$

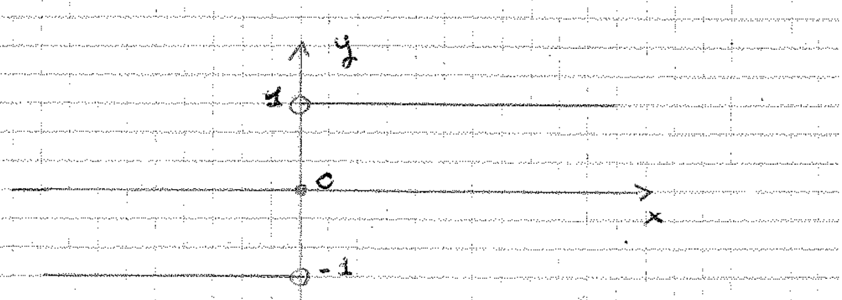
2) di salto o di prima specie, cioè:

$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$ finito, $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = m$ $\quad \ell, m$ finiti

$m \neq \ell$

esempio $f(x) = \mathrm{sign}(x)$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



Il salto, cioè la distanza fra m ed ℓ, si indica come $[f]_{x_0} = \lim_{x \to x_0^+} f(x) - \lim_{x \to x_0^-} f(x)$

se le operazioni ... mi:

$\ell + \infty = +\infty \quad (\ell \neq -\infty) \qquad \frac{\ell}{0} = \pm\infty \quad \frac{\pm\infty}{\ell} = \pm\infty \quad \frac{\ell}{\pm\infty} = 0$

$\ell + (-\infty) = -\infty \quad (\ell \neq +\infty)$

$\ell \cdot (\pm\infty) = \pm\infty \quad (\ell \neq 0) \qquad (\ell \neq 0) \quad (\ell \neq \pm\infty) \quad (\ell \neq \pm\infty)$

non sono definiti: $+\infty - \infty$, $0 \cdot \pm\infty$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ dette forme indeterminate

DIMOSTRAZIONI

I) $\lim_{x \to c} f(x) + g(x) = \ell + m$

Posto $\varepsilon > 0$, dimostriamo che vale $|f(x) + g(x) - \ell - m| < \varepsilon$ in $I^*(c)$.
dato che: $\lim_{x \to c} f(x) = \ell$, $\exists I'(c) / |f(x) - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall x \in I^*(c)$

$\lim_{x \to c} g(x) = m \quad \exists I''(c) / |g(x) - m| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall x \in I^*(c)$

Allora per ogni $x \in I'^*(c) \cap I''^*(c)$ abbiamo che:

$|f(x) + g(x) - \ell - m| \leq |f(x) - \ell| + |g(x) - m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ c.v.d.

II) $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell}{m} \quad (m = 0^+, \ell > 0)$

Posto $M > 0$, dimostriamo che $\frac{f(x)}{g(x)} > M$ in $I^*(c)$

prendiamo $\varepsilon = \frac{\ell}{2} > 0$, per la definizione di limite abbiamo che $\exists I'(c) /$ in $I'^*(c)$ $f(x) > \ell - \frac{\ell}{2} = \frac{\ell}{2}$;

per la definizione di limite abbiamo che $\exists I''(c) /$ in $I''^*(x)$ $0 < g(x) < \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$

Allora $\forall x \in I'^*(c) \cap I''^*(c)$ si ha $\frac{1}{g(x)} > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} > \frac{f(x)}{\varepsilon} > \frac{\ell}{2\varepsilon}$

Basta scegliere quindi $M = \frac{\ell}{2\varepsilon}$ e prendere $I^*(c) = I'^*(c) \cap I''^*(c)$ c.v.d.

TEOREMA (di sostituzione): se $\lim_{x \to c} f(x) = \ell$ (finito o infinito) e g una funzione finita in $I^*(c)$;
inoltre si suppone che:
1. $\exists \lim_{y \to \ell} g(y)$ (finito o infinito)
2. g sia continua in ℓ (anche unilateralmente) oppure $\exists I(c) / f(x) \neq \ell$ in $I^*(c)$

Allora $\lim_{x \to c} g(f(x)) = \lim_{y \to \ell} g(y)$

esempio: $f(x) = \frac{\log(-x^2+4)}{x-2} \quad \lim_{x \to 2^-} f(x) = ?$

N.B. se $\ell = \pm\infty$ la 2ª ipotesi è sempre verificata

Esempi in cui applicare questo teorema sono:

1) se $\lim_{x \to c} f(x) = \ell$ (finito o infinito), $\lim_{x \to c} |f(x)| = \lim_{y \to \ell} |y|$

2) se $\lim_{x \to c} f(x) = \ell$ (finito o infinito), $\lim_{x \to c} e^{f(x)} = \lim_{y \to \ell} e^y$

3) se $\lim_{x \to c} f(x) = \ell > 0$ (finito o infinito), $\lim_{x \to c} \log(f(x)) = \lim_{y \to \ell} \log y$

4) se $\lim_{x \to c} f(x) = \ell > 0$ (finito o infinito) o $\lim_{x \to c} f(x) = 0^+$, $\lim_{x \to c} \sqrt{f(x)} = \lim_{y \to \ell} \sqrt{y}$

DIMOSTRAZIONE

$\forall x \in I^*(c)$ si ha $0 \leq |f(x)g(x)| = |f(x)||g(x)| \leq a|g(x)| \xrightarrow{x \to c} 0$ $\quad a = cost \quad$ c.v.d.

TEOREMA 2 (caso infinito): supponiamo $f(x) \leq g(x)$ in $I^*(c)$ allora:

- $\lim_{x \to c} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \to c} g(x) = +\infty$
- $\lim_{x \to c} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \to c} f(x) = -\infty$

NB. sapendo SOLO $f(x) \leq g(x)$ in $I^*(c)$, allora:

- se $\lim_{x \to c} g(x) = \ell_2$, $\lim_{x \to c} f(x) = \ell_1$ (finito o infinito)
- se $\lim_{x \to c} f(x) = \ell_1$, $\lim_{x \to c} g(x) = \ell_2$ (finito o infinito)
- se $\lim_{x \to c} f(x) = -\infty$ o $\lim_{x \to c} g(x) = +\infty$ non si può sapere niente

TEOREMA (limite funzioni monotone): Sia $c = x_0^-$ ($c = x_0^+$) oppure $c = +\infty$ ($c = -\infty$) e f monotona in un intorno $I^*(c)$. Allora $\lim_{x \to c} f(x)$ esiste (finito o infinito) e

$$\lim_{x \to c} f(x) = \begin{cases} \sup f(x) & f \text{ crescente in } I^*(c) \\ \inf f(x) & f \text{ decrescente in } I^*(c) \end{cases} \quad x \in I^*(c)$$

$$\left(\lim_{x \to c} f(x) = \begin{cases} \inf f(x) & f \text{ crescente in } I^*(c) \\ \sup f(x) & f \text{ decrescente in } I^*(c) \end{cases} \quad x \in I^*(c) \right.$$

DIMOSTRAZIONE.

sia f crescente su $I = I(+\infty)$ e $S = \sup f(x) < +\infty$ $x \in I$. Dimostriamo che: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = S$;

Sia $\varepsilon > 0$ fissato. Dato che S è un maggiorante di $f(I)$, $\forall x \in I$ si ha $f(x) \leq$ (a)
Poiché $S - \varepsilon$ non è più maggiorante di $f(I)$, $\exists x_\varepsilon \,/\, f(x_\varepsilon) > S - \varepsilon$ (b).
Essendo f crescente su I, $\forall x \in I$ si ha

$$x > x_\varepsilon \Rightarrow S - \varepsilon \underset{(b)}{<} f(x_\varepsilon) \leq f(x) \underset{(a)}{\leq} S < S + \varepsilon$$

Quindi $x \in I_{x_\varepsilon}(+\infty) \Rightarrow S - \varepsilon < f(x) < S + \varepsilon$ $\quad$ c.v.d.

LIMITI NOTEVOLI

I principali sono:

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

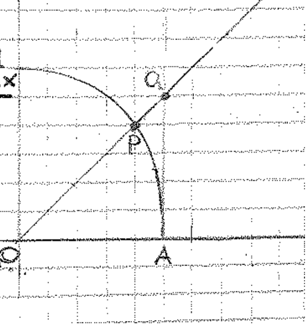
da cui si ricavano gli altri.

DIMOSTRAZIONE

$y = \frac{\sin x}{x}$ è pari, infatti $\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x}$

Perciò dimostriamo il limite solo da destra (è analogo a sinistra); sappiamo che $\forall x > 0$ $\sin x < x \Rightarrow \frac{\sin x}{x} < 1$

Consideriamo i punti $A(1,0)$, $P(\sin x, \cos x)$ e $Q(\tan x, 1)$ per $x < \frac{\pi}{2}$.



L'area di OAP < area di OAQ $\Rightarrow \frac{x}{2} < \frac{\sin x}{2\cos x} \Rightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x}$

$\frac{\overline{OA} \cdot \widehat{AP}}{2} = \frac{x}{2} \qquad \frac{\overline{OA} \cdot \overline{AQ}}{2} = \frac{tg x}{2}$

Quindi per $0 < x < \frac{\pi}{2}$: $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$

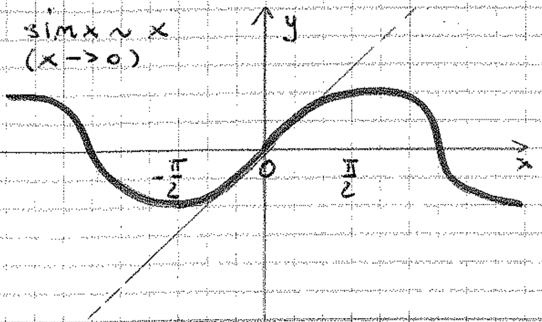
$\lim_{x \to 0^+} \cos x = 1 \Rightarrow 1 < \frac{\sin x}{x} < 1 \Rightarrow \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$ c.v.d.

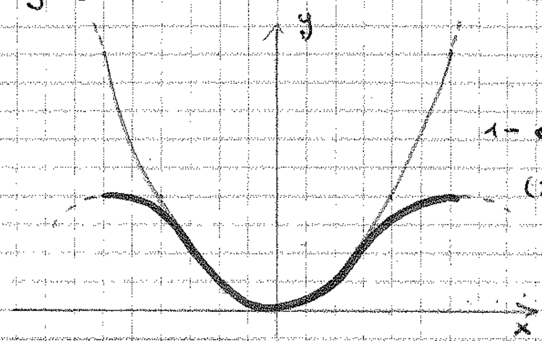
DIMOSTRAZIONE

$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 > 0 \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} > 0$ in $I^*(c)$ per il teorema della permanenza del segno

c.v.d.

$\sin x \sim x$
$(x \to 0)$





$1 - \cos x \sim \frac{1}{2} x^2$
$(x \to 0)$

TEOREMA (principio di sostituzione con termini equivalenti):
In un limite per $x \to c$ è corretto sostituire in esso:
- uno qualsiasi dei fattori di un prodotto (o tutti)
- numeratore o denominatore di un prodotto (o entrambi)

con funzioni che per $x \to c$ sono ad esse equivalenti.

NOTAZIONE: $f \sim \tilde{f}$ $x \to c$, g definita in $I^*(c)$:

$$\lim_{x \to c} f(x)g(x) = \lim_{x \to c} \tilde{f}(x)g(x) \quad \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{\tilde{f}(x)}{g(x)} \quad \lim_{x \to c} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \to c} \frac{g(x)}{\tilde{f}(x)}$$

COROLLARIO: Se $f \sim \tilde{f}$ e $g \sim \tilde{g}$ per $x \to c$ allora

$$\lim_{x \to c} f(x)g(x) = \lim_{x \to c} \tilde{f}(x)\tilde{g}(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)}$$

COROLLARIO: se $f \sim \tilde{f} \Rightarrow \exists \lim_{x \to c} f(x) \Leftrightarrow \exists \lim_{x \to c} \tilde{f}(x) \wedge \lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} \tilde{f}(x)$

DIMOSTRAZIONE:

In un intorno $I^*(c)$ si ha: $f(x)g(x) = \frac{f(x)}{\tilde{f}(x)} \cdot \tilde{f}(x)g(x)$;
se $\exists \lim_{x \to c} f(x)g(x)$ allora $\exists \lim_{x \to c} \tilde{f}(x)g(x)$, in particolare:

$$\lim_{x \to c} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to c} \underbrace{\frac{f(x)}{\tilde{f}(x)}}_{\to 1} \tilde{f}(x)g(x) = \lim_{x \to c} \tilde{f}(x)g(x) = \ell \qquad \text{c.v.d.}$$

esempi $\lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x^2+x}\,\sin x}{x^2 - 2x^{3/2}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\cancel{\sqrt{x}\,x}}{-2\cancel{\sqrt{x^3}}} = -\frac{1}{2}$

$\sin x \sim x$ $x \to 0^+$

$\sqrt{x^2+x} \sim \sqrt{x}$ $x \to 0^+$ perché $\lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x^2+x}}{\sqrt{x}} = \lim_{x \to 0^+} \sqrt{x+1} = 1$

$x^2 - 2\sqrt[3]{x^2} \sim -2\sqrt[3]{x^2}$ perché $\lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 - \sqrt[3]{x^2}}{2\sqrt[3]{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{2} + 1 = 1$

esempio $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2+x} - x) =$ (applicazione errata)

$\sqrt{x^2+x} \sim \sqrt{x^2} = x$ $x \to +\infty$ $\quad \lim_{x \to +\infty} (x - x) = 0$ falso

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+x} - x}{\sqrt{x^2+x} + x} \cdot \sqrt{x^2+x} + x = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2+x} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x(\sqrt{1+x^{-1}} + 1)} = \frac{1}{2}$$

Possiamo ora affermare che $\lim_{x \to c} f(x) = \ell \Leftrightarrow f(x) \sim \ell$ $x \to c$ (ℓ finito non nu

PROPOSIZIONE (combinazioni lineari di potenze nell'origine e all'infinito)
Se $f(x) = a_1 x^{r_1} + a_2 x^{r_2} + \ldots + a_n x^{r_n}$, $n \geq 2$ e $0 \leq r_1 < r_2 < \ldots < r$
e $a_1, a_2, \ldots, a_n \neq 0$ allora:

$$f(x) \sim a_n x^{r_n} \quad x \to \pm\infty \qquad f(x) \sim a_1 x^{r_1} \quad x \to 0^{\pm}$$

cioè per $x \to \pm\infty$ si prende il monomio ad esponente maggiore, per $x \to 0^{\pm}$ si prende il monomio ad esponente minore.

TEOREMA (principio di eliminazione dei termini trascurabili): sottointendiamo che gli o piccoli sono per $x \to c$;

$$\lim_{x \to c} \big(f(x) + o(f(x))\big)\big(g(x) + o(g(x))\big) = \lim_{x \to c} f(x)g(x)$$

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) + o(f(x))}{g(x) + o(g(x))} = \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$$

N.B. come sempre le funzioni $o(f(x))$ e $o(g(x))$ possono essere una qualunque funzione trascurabile rispetto a g e f.

DIMOSTRAZIONE:

$$\lim_{x \to c} \big(f(x) + o(f(x))\big)\big(g(x) + o(g(x))\big) =$$

$$\lim_{x \to c} \left(f(x)\left(1 + \underbrace{\frac{o(f(x))}{f(x)}}_{\to 0}\right)\right)\left(g(x)\left(1 + \underbrace{\frac{o(g(x))}{g(x)}}_{\to 0}\right)\right) = \lim_{x \to c} f(x)g(x) \qquad \text{c.v.d.}$$

(Analogo ragionamento per il prodotto)

esempio: $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x} - x + \cos x}{x + \sin x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x + o(x) + o(x)}{x + o(x)} = -1$

PROPRIETA' (degli o piccoli):
- $o(f) \pm o(f) = o(f)$
- $o(\lambda f) = o(\lambda)$, $\lambda \cdot o(f) = o(f)$ $\quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \neq 0$
- $g \cdot o(f) = o(f \cdot g)$ se $g(x) \neq 0$ in $I^*(c)$
- $o(g) \cdot o(f) = o(f \cdot g)$
- $(o(f))^\alpha = o(f^\alpha)$ $\quad \forall \alpha > 0$ in $I^*(c)$
- $(f + o(f))^2 = f^2 + o(f)^2$
- $f = o(g) \Rightarrow o(f) = o(g)$
- $f \sim g \Rightarrow o(f) = o(g)$

esempio: $\displaystyle \lim_{x \to 0^+} \frac{e^x - \cos x}{\log(1 + 3x)} =$

$e^x = 1 + x + o(x) \quad x \to 0^+$

$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \quad \Rightarrow \quad \displaystyle \lim_{x \to 0^+} \frac{1 + x + o(x) - 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{3x} =$

$\log(1 + 3x) \sim 3x \qquad \displaystyle = \lim_{x \to 0^+} \frac{x + o(x)}{3x} = \frac{1}{3}$

Ricapitolando:
- $x^\alpha = o(x^\beta)$ $x \to 0^+$ $\Leftrightarrow$ $\displaystyle \lim_{x \to 0^+} \frac{x^\alpha}{x^\beta} = \lim_{x \to 0^+} x^{\alpha - \beta} = 0$ $\quad \alpha > \beta$
- $x^\alpha = o(x^\beta)$ $x \to +\infty$ $\Leftrightarrow$ $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{x^\beta} = \lim_{x \to +\infty} x^{\alpha - \beta} = 0$ $\quad \alpha < \beta$

Essi valgono per $x \to 0^-$ o a $-\infty$ se sostituiamo a x, $|x|$.

- $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \Leftrightarrow \sin x \sim x \quad x \to 0 \Leftrightarrow \sin x = x + o(x) \quad x \to 0$
- $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2 \quad x \to 0 \Leftrightarrow \cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \quad x \to 0$
- $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\log(1 + x)}{x} = 1 \Leftrightarrow \log(1 + x) \sim x \quad x \to 0 \Leftrightarrow \log(1 + x) = x + o(x)$
- $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \Leftrightarrow e^x - 1 \sim x \quad x \to 0 \Leftrightarrow e^x = 1 + x + o(x) \quad x \to 0$
- $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{(1 + x)^\alpha - 1}{x} = \alpha \Leftrightarrow (1 + x)^\alpha - 1 \sim \alpha x \quad x \to 0 \Leftrightarrow (1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x) \quad x$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ si ha $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty \Leftrightarrow x^\alpha = o(e^x) \quad x \to +\infty$
- $\forall \alpha > 0$ si ha $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = 0 \Leftrightarrow \log x = o(x^\alpha) \quad x \to +\infty$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ si ha $\displaystyle \lim_{x \to -\infty} |x|^\alpha e^x = 0 \Leftrightarrow e^x = o(|x|^{-\alpha}) \quad x \to -\infty$
- $\forall \alpha > 0$ si ha $\displaystyle \lim_{x \to 0^+} x^\alpha \log x = 0 \Leftrightarrow \log x = o(|x|^{-\alpha}) \quad x \to 0^+$

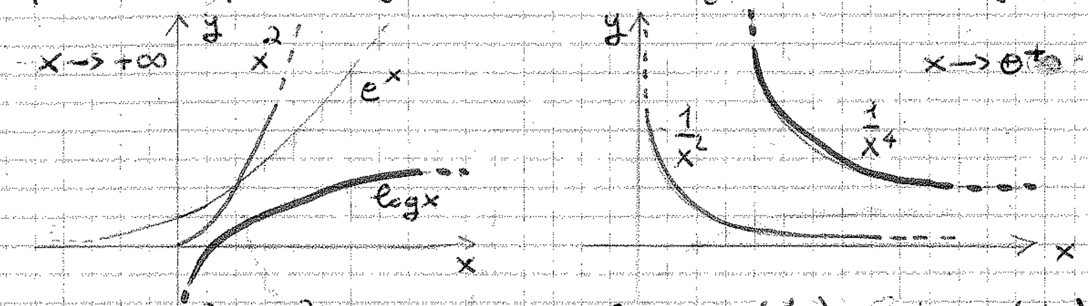
infinitesimi dello stesso ordine.
per $x \to 0$ $1-\cos x \simeq x^2$ $1-\cos x$ è un infinitesimo dello stesso ordine di x^2

(2) per $x \to 0^+$ si ha $\lim_{x\to 0} \frac{x^\alpha}{x^\beta} = 0 \ \forall \beta < \alpha$:
- se $\alpha, \beta > 0$, x^α è un infinitesimo di ordine superiore $\forall x^\beta$, con $\beta < \alpha$
- se $\alpha, \beta < 0$, x^α è un infinito di ordine inferiore $\forall x^\beta$, con $\beta < \alpha$

per $x \to +\infty$ si ha $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^\alpha}{x^\beta} = 0 \ \forall \beta > \alpha$:
- se $\alpha, \beta > 0$ x^α è un infinito di ordine inferiore ad ogni x^β con $\beta >$
- se $\alpha, \beta < 0$, x^α è un infinitesimo di ordine superiore ad ogni x^β, $\beta >$

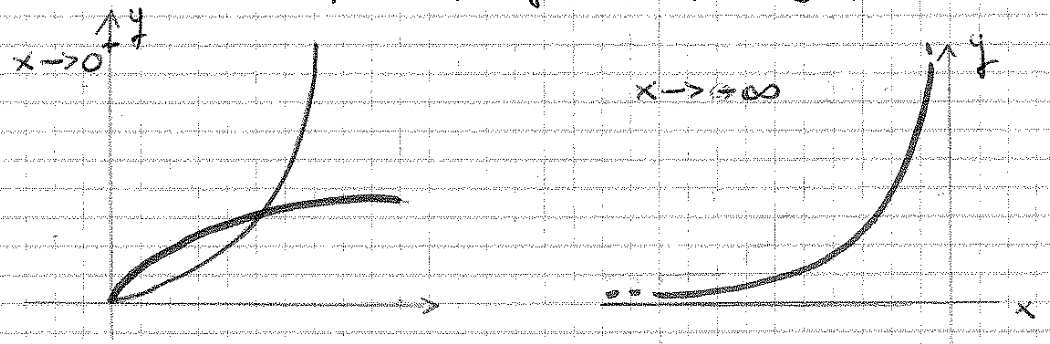
(3) per $x \to +\infty$ $\log x = o(x^\alpha)$ e $x^\alpha = o(e^x)$ $\forall \alpha > 0$;
$\log x$ è un infinito di ordine inferiore di ogni potenza positiva che è infinito di ordine inferiore ad e^x
per $x \to -\infty$ $e^x = o\left(\frac{1}{|x|^\alpha}\right)$ $\forall \alpha > 0$, e^x è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a qualsiasi potenza negativa
per $x \to 0^+$ $\log x = o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$ $\forall \alpha > 0$, $\log x$ è un infinito di ordine inferiore rispetto a qualsiasi potenza negativa

Prendiamo due infiniti f e g, con $f = o(g)$ per $x \to c$; dato che $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ f diverge più lentamente di g, oppure f è di ordine inferiore rispetto a g e $\forall \varepsilon > 0 \ \exists I^*_{x_\varepsilon}(c) / |f(x)| < \varepsilon |g(x)|$



$\log x = o(x^\alpha)$ $x^\alpha = o(e^x)$ $\log x = o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$ $\frac{1}{x^\alpha} = o\left(\frac{1}{x^\beta}\right)$ $\alpha < \beta$

Prendiamo due infiniti f e g, con $f = o(g)$ per $x \to c$, dato che $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} =$



$x \to 0^+$ $x^3 = o(x^2)$ $x^2 = o(\sqrt{x})$ $x \to -\infty$ $e^x = o\left(\frac{1}{x^4}\right)$ $\frac{1}{x^4} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$

NB fra due infinitesimi è trascurabile quello di ordine superiore, ment fra due infiniti è trascurabile quello di ordine inferiore

Per sapere quanto velocemente diverge o converge un infinito o un infinitesimo serve un infinito o un infinitesimo campione $\varphi(x)$

DEFINIZIONE (ordine e parte principale): f è un infinito/infinitesimo campione in c, se $\exists \alpha > 0, l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:
$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{\varphi(x)^\alpha} = l$ cioè $f(x) \sim l\varphi(x)^\alpha$, $f(x) = l\varphi(x)^\alpha + o(\varphi(x)^\alpha)$ $x \to$
si dice che f è un infinito/infinitesimo di ordine α rispetto a φ e $l\varphi(x)^\alpha$ si dice parte principale

N.B se $\exists\, l, \alpha \Rightarrow \exists!\, l, \alpha$, $p(x) = l\varphi(x)^\alpha$

PROPOSIZIONE: un predicato $p(x)$ con $x \in \mathbb{N}$ è vero definitivamente se
$\exists N \in \mathbb{N} \,/\, p(x)$ è vera $\forall x > N$

Una successione può essere:
- convergente ad $\ell \in \mathbb{R}$ se $\forall \varepsilon > 0 \quad |a_n - \ell| < \varepsilon$ definitivamente
- divergente a $+\infty$ se $\forall M > 0 \quad a_n > M$ definitivamente
- divergente a $-\infty$ se $\forall M > 0 \quad a_n < -M$ definitivamente
- regolare se è divergente o convergente
- irregolare se è oscillante o indeterminata

Se $a_n = b_n$ definitivamente allora a_n è regolare se e solo se è regolare b_n e, allora, abbiamo $\lim_{x \to +\infty} a_n = \lim_{x \to +\infty} b_n$

N.B. il carattere di una successione, cioé il suo essere divergente o convergente, non cambia se modifico un numero finito di termini

TEOREMA (di sostituzione): se f è una funzione definita in $I^*(c)$ e $\lim_{n \to \infty} c_n = c$ (finito o infinito); inoltre
- $\lim_{x \to c} f(x) = \ell$ (finito o infinito)
- f è continua in c o $c_n \neq c$ definitivamente

allora il $\lim_{n \to \infty} f(c_n) = \ell$

Questo teorema dice che se $\exists \lim_{x \to +\infty} f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, allora vale la seguente uguaglianza:

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{x \to +\infty} f(x)$$

es 1

provare che $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$

$a_n = \sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} = e^{\log n^{\frac{1}{n}}} = e^{\frac{1}{n} \log n} = e^0 = 1$ infatti $\frac{1}{n}$ è un infinito di ordine superiore a $\log n$

Ma non sempre è possibile passare dal limite di una funzione a quello di una successione; oppure può esistere anche se non esiste quello della funzione:

- $\lim_{n \to \infty} a_n = \ell$ anche se $\lim_{x \to \infty} a_x = \nexists$ ($\lim_{n \to \infty} \sin(\pi n) = 0$ ma $\nexists \lim_{x \to +\infty} \sin(x)$)
- $(-1)^n = \begin{cases} 1 & n \text{ pari} \\ -1 & n \text{ dispari} \end{cases}$ $\quad \lim_{x \to +\infty} (-1)^x =$ non ha senso ($(-1)^{\frac{1}{2}}$ non si può fare)

$n! = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 \quad \lim_{x \to +\infty} x! =$ non ha senso

es

$\lim_{n \to \infty} n! = ?$ $\quad n! = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 \quad n! \geq n \quad n \xrightarrow{n \to +\infty} +\infty \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} n! = +\infty$

$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{(-1)^n + n!} = ?$ $\quad (-1)^n$ è limitata $\Rightarrow (-1)^n = o(n!)$

$$\frac{1}{(-1)^n + n!} = \frac{1}{n! + o(n!)} = \frac{1}{+\infty} = 0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{1}{(-1)^n + n!} = 0$$

$\lim_{n \to \infty} (-1)^n n \log\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) = ?$ $\quad \log\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) \sim \frac{(-1)^n}{n} \Rightarrow$

$$\lim_{n \to \infty} (-1)^n \cancel{n} \cdot \frac{(-1)^n}{\cancel{n}} = 1$$

DIMOSTRAZIONE

Se $\exists \lim_{n\to\infty} a_n$ allora $\lim_{k\to\infty} a_{m_k} = \lim_{k\to\infty} a_{m_k}$ per il teorema precedente

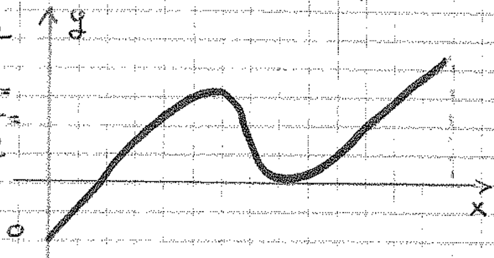
esempio

$\lim_{n\to\infty} (-1)^n$ non esiste perché $\lim_{k\to\infty} (-1)^{2k} \neq \lim_{k\to\infty} (-1)^{2k+1}$ $(1 \neq -1)$

TEOREMI SULLE FUNZIONI CONTINUE

NB. Il limite chiuso e limitato (es $[a;b]$) viene anche detto compatto

TEOREMA (di esistenza degli zeri): una funzione continua su un intervallo compatto $[a,b]$ che assume valori di segno opposto agli estremi dell'intervallo ammette almeno uno zero in tale intervallo;



praticamente, se $f \in C([a,b])$ e tale che $f(a)f(b)<0$ allora $\exists x_0 \in (a;b)$ tale che $f(x_0)=0$.
in particolare se f è strettamente monotona su $[a,b]$, allora $\exists!\, x_0 \in (a,b)$ tale che $f(x_0)=0$ (la funzione è iniettiva in $[a,$

DIMOSTRAZIONE:

Sia $f(a)<0<f(b)$, sia $c=\frac{a+b}{2}$ il punto medio di $[a,b]$, se $f(c)=0$, allora c è il punto cercato.
Altrimenti scelgo $[a;c]$ se $f(c)>0$, altrimenti $[c;b]$ se $f(c)<0$. Ora abbiamo $f(a_1)<0<f(b_1)$, con a_1 e b_1 i nuovi estremi dell'intervallo e scelgo $c_1=\frac{a_1+b_1}{2}$ e se $f(c_1)=0$ allora c_1 è il punto cercato, altrimenti ripeto i passi fatti prima fino a trovare un punto c_n tale che $f(c_n)=0$, o una successione di intervalli annidati tali che:
- $f(a_n)<0<f(b_n)$
- $b_n-a_n=\frac{b_{n-1}-a_{n-1}}{2}=\ldots=\frac{b-a}{2^n}$

In tal caso abbiamo $a \le a_{n-1} \le a_n \le b_n \le b_{n-1} \le b$

Le due successioni sono limitate $\Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ e $\exists \lim_{n\to\infty} b_n = \beta$

$\beta-\alpha = \lim_{n\to\infty}(b_n-a_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{2^n} = 0 \Rightarrow \alpha=\beta$

Poniamo $\alpha=\beta=x_0$ dato che $x_0=\sup a_n \le b \wedge x_0=\inf b_n \ge a \Rightarrow x_0 \in [a;$
e quindi

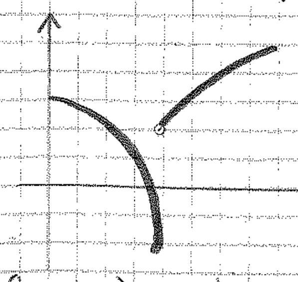
$$0 \underset{\text{corol. teorema permanenza segno}}{\le} \lim_{n\to\infty} f(b_n) \underset{\text{sostituzione}}{=} f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \underset{\text{corol. teorema permanenza segno}}{\le} 0$$

$f(x_0)=0$ C.V.D.

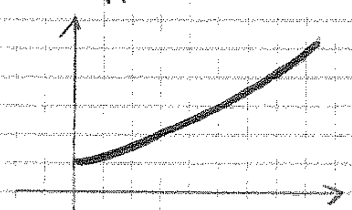
N.B. Con questo metodo abbiamo una stima dell'errore commesso:

$a_n \le x_0 \le b_n$ $\quad b_n-a_n=\frac{b-a}{2^n} \Rightarrow |c_n-x_0| \le \frac{b_n-a_n}{2} = \frac{b-a}{2^{n-1}}$ $\left(c_n=\frac{a_n+b_n}{2}\right.$

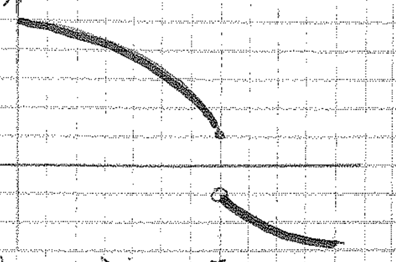
N.B. Tutte le ipotesi sono sufficienti ma nessuna è anche necessaria



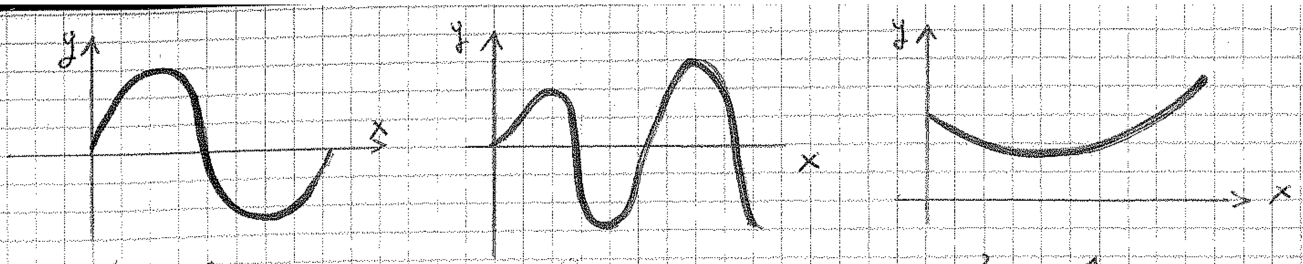
f non è continua e $f(a)f(b)>0$



f continua ma $f(a)f(b)>0$



f non è continua ma $f(a)f(b)<0$



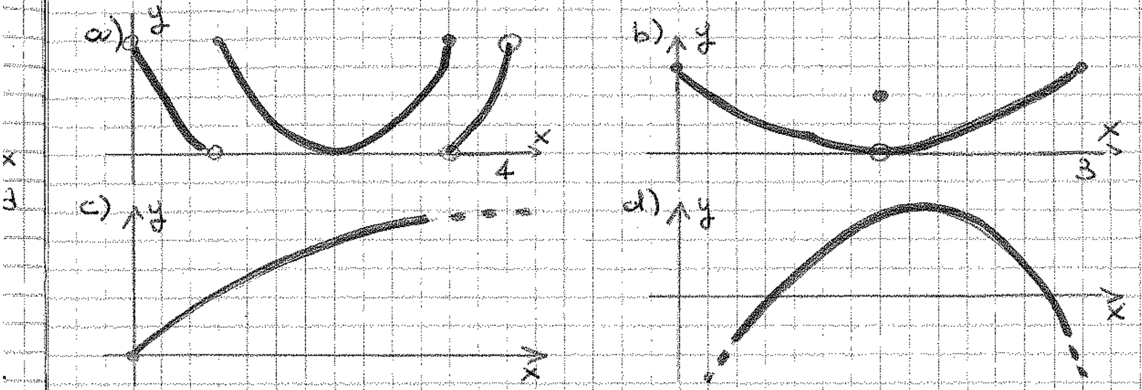
$y = 8x^4 - 12x^2 + 4x$ $\quad$ $y = 2\sin x \operatorname{arctg} x$ $\quad$ $y = x^2 - x + \frac{1}{2}$

In questi casi $f((a,b)) = (c,d)$ può essere di qualunque tipo; invece se $f(I)$ $[a,b]$, allora deve essere necessariamente essere $I = [a,b]$

TEOREMA (di Weierstrass): Una funzione continua su un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$, ammette massimo e minimo su questo intervallo; ovvero
f continua su $[a,b]$ compatto $\Rightarrow f([a,b])$ intervallo compatto con $a = \min f(x)$, $b = \max f(x)$

Praticamente se $f \in C([a,b])$, allora $\exists x_m$ e x_M tale che $f(x_m) = \min f(x)$ e $f(x_M) = \max f(x)$ e in particolare essa è limitata.

N.B. nessuna ipotesi è condizione sufficiente e necessaria



a) $f \notin C([0,4])$
b) $f \in C([0;3])$
c) $f \in C([0;+\infty))$ ma $\nexists \max f$
d) $f \in C((0;1))$ ma $\nexists \min f$

LEMMA: Sia $A \subseteq \mathbb{R} \neq \emptyset$ con almeno due punti distinti. A è un intervallo se e solo se $\forall x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2$ abbiamo $[x_1, x_2] \subseteq A$

DIMOSTRAZIONE:

Supponiamo che A sia limitato, con $a = \min A$ e $b = \max A$; Essendo a e b rispettivamente un minorante e un maggiorante, $A \subseteq [a,b]$.
Ora prendiamo un $x_0 \in (a,b)$; poiché $x_0 > a = \inf A$, x_0 non è un minorante, quindi $\exists x_1 \in A$ tale che $x_1 < x_0$; allo stesso modo $x_0 < b = \sup A$, x_0 non è un maggiorante di A, quindi $\exists x_2 \in A$ tale che $x_2 > x_0$.
Quindi $x_1, x_2 \in A$ tali che $x_1 < x_0 < x_2$ e risulta $x_0 \in [x_1, x_2] \subseteq A$
In conclusione $(a,b) \subseteq A \subseteq [a,b] \Rightarrow A$ è un intervallo $\quad$ C.V.D.

TEOREMA: sia $f \in C(I)$ con I qualunque; allora:
- f è iniettiva su I se e solo se f è strettamente monotona su I
- se f è iniettiva, allora $f^{-1}: f(I) \to I$ è continua su $f(I)$

N.B. f strettamente monotona su $A \subseteq \operatorname{dom} f \Rightarrow f$ iniettiva su A
f iniettiva su $A \not\Rightarrow f$ è strettamente monotona su $A \subseteq \operatorname{dom} f$

DEFINIZIONE: $f: \operatorname{dom} f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definita almeno in $I(x_0)$ eventualmente unilaterale.
Si chiama derivata di f in x_0 il numero $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ se esiste. In tal caso si dice che f è derivabile in x_0 e che la retta $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ è la retta tangente a Gf in x_0.

NOTAZIONE: $f'(x_0)$ Lagrange $\quad \dot{f}(x_0)$ Newton $\quad \frac{df}{dx}(x_0)$ Liebniz $\quad Df(x_0)$ Cauchy

$= \lim_{x \to x_0} \underbrace{\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)}_{\to f'(x_0)} g(x_0) + \lim_{x \to x_0} \underbrace{\left(\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right)}_{\to g'(x_0)} f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g$

c.v.

esempio $f(x) = x e^x \sin x \quad f'(x) = ?$

$d(f(x)g(x)) = e^x \sin x + x(e^x \sin x + e^x \cos x) = e^x \sin x + x e^x \sin x + e^x \cos(x)\, x$

3. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)} \qquad g(x_0) \neq 0$

esempio $f(x) = tg\,x \quad f'(x) = ?$

$d(tg) = d\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x$

COROLLARIO: $d\left(\frac{1}{f(x)}\right) = -\frac{f'(x_0)}{f^2(x_0)}$

TEOREMA (derivate composte): f una funzione derivabile in $x_0 \in \mathbb{R}$ e g derivabile in $y_0 \in dom f$
Se $g \circ f$ è ben definita (cioè $\neq \emptyset$) in $I(x_0)$ (eventualmente unilaterale), allora la composta $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$

esempio $f(x) = \log(\cos x) \quad dom f: \{\forall x \in \mathbb{R} / \cos x > 0\}$

$d(f) = \log(\cos x) = \frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) = -tg\,x$

TEOREMA (funzione inversa): sia f invertibile e continua in $I(x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$ (eventualmente unilaterale), ed $\exists f'(x_0) \neq 0$, allora f^{-1} (con $y_0 = f(x_0)$) è uguale a:

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

esempio $g(x) = arctg\,x = \frac{1}{tg\,x^{-1}} \quad dom: \forall x \in \mathbb{R}$

$f^{-1}(y) = tg\,x_{|(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})} = f(x) \quad \exists f'(x) = 1 + tg^2 x \quad \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$f(x)$ è invertibile e continua su $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{1+tg^2 x} =$

$x = arctg\,x \Rightarrow = \frac{1}{1+tg^2(arctg\,x)} = \frac{1}{1+x^2}$

PROPRIETÀ: $f: dom f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pari/dispari e derivabile in $\forall x \in dom$
$\Rightarrow f': dom f \to \mathbb{R}$ è dispari/pari

DIMOSTRAZIONE:

Supponiamo f pari, cioè $\forall x \in dom f \quad f(-x) = f(x) \Rightarrow g(x) = f(-x) = -f'$

PUNTI DI NON DERIVABILITÀ

DEFINIZIONE: f sia definita almeno in $I(x_0^+)$; si chiama derivata destra di f in x_0 il valore
$d(f_+(x)) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$
se esiste finito o infinito
Se $f'_+(x_0) \in \mathbb{R}$ si dice che f è derivabile da destra

La definizione di derivata sinistra $f'_-(x_0)$ è analoga

Se $f'_+(x_0) \in \mathbb{R}$, si dice che la retta $y = f(x_0) + f'_+(x_0)(x-x_0)$ è la retta tangente destra a G_f in x_0
Se $f'_+(x_0) = \pm\infty$ si dice che la retta tangente $x = x_0$ è tangente a destra di G_f
Se f è definita in un $I(x_0)$ completo allora: $\exists f'(x_0) \Leftrightarrow \exists f'_\pm(x_0)$ entrambe finite e tali che $f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$

4) $f(x) = \operatorname{arctg} x$ $x \to 0$ calcola ordine di infinitesimo e parte principale

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^{\alpha}} \overset{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{1}{\alpha x^{\alpha-1}} = \frac{1}{\alpha} \lim_{x \to 0} \frac{1}{(1+x^2)x^{\alpha-1}} = \frac{1}{\alpha} \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^{0}}$$

$= \ell \in \mathbb{R}/0 \Rightarrow \alpha = 1$

$\operatorname{arctg} x \sim x$ $x \to 0$, $\operatorname{arctg} x = x + o(x)$ $x \to 0$

$\operatorname{arcsen} x \sim x$ $x \to 0$, $\operatorname{arcsen} x = x + o(x)$ $x \to 0$

5) confronti di crescita (dimostrazioni tramite De L'Hôspital)

- $\lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x^{\alpha}} \overset{H}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{x^{\alpha}} = 0 \quad \forall \alpha > 0$
- $\lim_{x \to 0^+} x^{\alpha} \log x \overset{H}{=} \lim_{x \to 0^+} \alpha x^{\alpha-1} \cdot \frac{1}{x} = \alpha \lim_{x \to 0^+} x^{\alpha} = 0 \quad \forall \alpha > 0$

COROLLARIO (tappabuchi): sia f derivabile in $I^*(x_0)$; se:
1) $\lim_{x \to x_0^{\pm}} f'_{\pm}(x_0) = \ell$ (finito o infinito)
2) f continua in x_0

allora $\exists f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} f'(x_0) = \ell$ finito

PUNTI DI ESTREMO E TEOREMA DI FERMAT.

DEFINIZIONE (di massimo e minimo). Sia $f: \operatorname{dom} f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in \operatorname{dom} f$, il punto x_0 può essere:
- un punto di massimo assoluto per f $f(x_0) = \max f \equiv \max(\operatorname{Im} f)$ cioè $\forall x \in \operatorname{dom} f$ $f(x) \leq f(x_0)$
- un punto di massimo relativo per f $\exists I(x_0) / f(x_0) = \max f$, cioè $\forall x \in \operatorname{dom} f \cap I(x_0)$ $f(x) \leq f(x_0)$
- un minimo assoluto se $\forall x \in \operatorname{dom} f$ $f(x_0) \leq f(x)$
- un minimo relativo se $\forall x \in I(x_0) \cap \operatorname{dom} f$ $f(x_0) \leq f(x)$

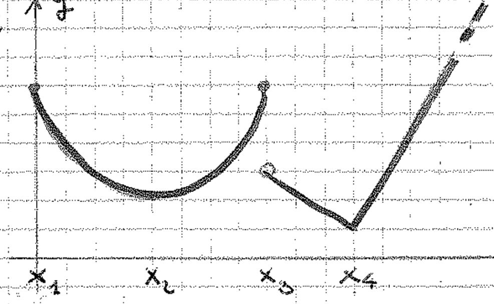
N.B. I minimi e i massimi sono anche detti estremi e i punti di minimo e di massimo sono anche detti estremanti o punti di estremo (locali o globali se sono relativi o assoluti)
Essi si dicono stretti se $\forall x \in \operatorname{dom} f \cap I(x_0)$, $x \neq x_0 \Rightarrow f(x) \neq f(x_0)$

Queste affermazioni sono validi in qualunque sottointervallo di dom f

N.B. I punti di estremo globali (o assoluti) se esistono sono unici e sono anche relativi nell'intorno di quel punto

La funzione f a lato è definita su $[0; +\infty)$; di essa possiamo dire:
- non ha massimi assoluti
- ha però due massimi relativi:

$f(x_1) = \max f(x)$ $x \in I(x_1)$
$f(x_3) = \max f(x)$ $x \in I(x_3)$



- due punti di minimo relativi:

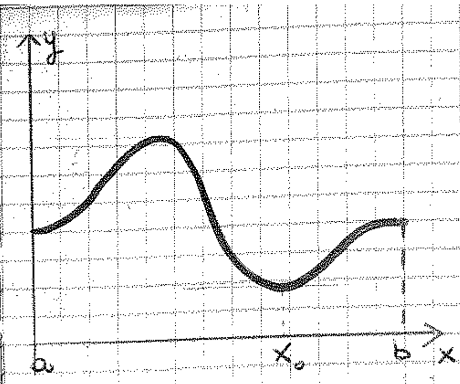
$f(x_2) = \min f(x)$ $x \in I(x_2)$
$f(x_4) = \min f(x)$ $x \in I(x_4)$

- un punto di minimo assoluto coincidente con $f(x_4)$.

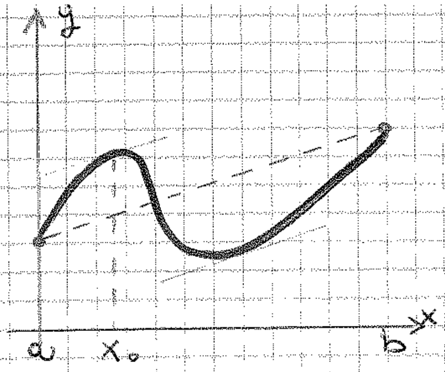
Un punto di estremo può essere:
- un estremo di I
- un punto di non derivabilità
- un punto di discontinuità

TEOREMA (di Fermat): Sia $f: \operatorname{dom} f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in \operatorname{dom} f$; se:
1. f è definita in un intorno completo di x_0 e derivabile in x_0
2. x_0 è un punto di estremo per f

Allora $f'(x_0) = 0$

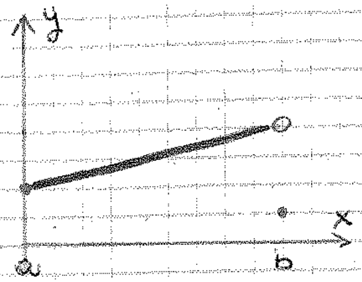


$f \in C([a,b])$,
$f \in C^1((a,b))$
$f(a) = f(b)$
$\exists x_0 \in (a,b) /$
$f'(x_0) = 0$
Th. Rolle

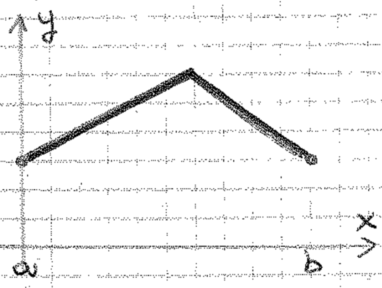


$f \in C([a,b])$
$f \in C^1((a,b))$
$\exists x_0 \in (a,b) /$
$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'($
Th. Lagrange

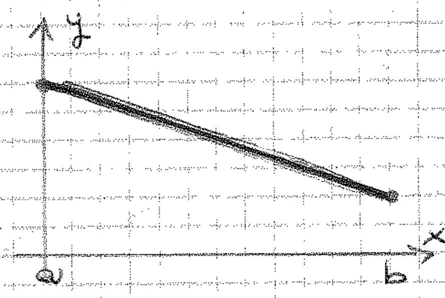
N.B. Le ipotesi sono condizioni sufficienti ma non necessarie; devono cioè essere tutte verificate



$f \notin C([a,b])$



$f \notin C^1((a,b))$



$f(a) \neq f(b)$

I seguenti teoremi sono conseguenze del teorema di Lagrange.

TEOREMA (caratterizzazione delle costanti): Sia f una funzione continua su un intervallo I e in un intervallo I° (insieme dei punti interni). Allora:

$$f \text{ costante su } I \iff f'(x) = 0 \quad \forall x \in I^\circ$$

DIMOSTRAZIONE:

L'implicazione da sinistra a destra è stata dimostrata con Rolle. Dimostriamola nel verso opposto

poniamo $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$; applichiamo Lagrange a $[x_1, x_2] \subseteq I$; allora esiste un punto $\xi(x_i) \in (x_1, x_2) \subseteq I^\circ$ tale che

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) = 0$$

quindi $f(x_1) = f(x_2)$ c.v.d.

TEOREMA (intervalli di monotonia): Sia f una funzione continua e derivabile rispettivamente in I e I°. Allora:
1. f è crescente su $I \iff f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I^\circ$
2. $f'(x) > 0 \quad \forall x \in I^\circ \Rightarrow f$ crescente strettamente su I.

DIMOSTRAZIONE

Dimostriamo la 1 da sinistra a destra; sia $x_0 \in I^\circ$; dato che f è crescente su I, $\forall x \in I$:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad \text{infatti} \begin{cases} f(x) \geq f(x_0) & \text{se } x > x_0 \\ f(x) \leq f(x_0) & \text{se } x < x_0 \end{cases}$$

e quindi per il corollario della permanenza del segno abbiamo che

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

Dimostriamo la 1 in senso inverso; abbiamo $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$. Applicando Lagrange su $[x_1, x_2] \subseteq I$ allora $\exists \xi \in (x_1, x_2) \subseteq I^\circ$ tale che

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \geq 0 \quad (*)$$

$\iff \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - a_0 - a_1(x-x_0) - a_2(x-x_0)^2}{(x-x_0)^2} \overset{H}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x_0) - a_0}{0} = \frac{0}{0}$ (H)

$\overset{H}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x_0) - a_1 - 2a_2(x-x_0)}{2(x-x_0)}^2 = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - a_1}{x - x_0} = \infty \iff f'(x_0) \neq a_1$

dunque se $a_1 = f'(x_0)$ $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{2}\left(\frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}\right) = \frac{1}{2} f''(x_0) = a_2$ c.v.d.

TEOREMA (Taylor-Peano): $\forall n \geq 1$, se $f \in C^n(x_0) \Rightarrow \exists !$ polinomio $T_n(x)$ di grado minore o uguale n tale che:

$f(x) = T_n(x) + o((x-x_0)^n)$ $x \to x_0$

con $T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ polinomio di Taylor di f in x_0 di ordine n.

N.B. Il polinomio $T_n(x)$ viene detto di Mac Laurin se $x_0 = 0$ e il suo sviluppo viene chiamato sviluppo di Mc Laurin di f in x_0 di ordine n con resto nella forma di Peano

SVILUPPI DI MCLAURIN DI ALCUNE FUNZIONI

- $f(x) = e^x$ $f \in C^\infty(\mathbb{R})$

$f^k(x) = e^x$ $\forall k > 0 \Rightarrow f^k(0) = e^0 = 1$

$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(0)}{k!} x^k + o((x^n))$ $x \to 0$

$= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o((x)^n)$

$T_n(e^x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$ $x \to x_0 = 0$

- $f(x) = \sin x$ $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ $\sin x$ funzione dispari

$f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$, $f^{(4)}(x) = \sin x$, ...

$f'(x) = f'''(x) = f^{(5)}(x) = \ldots = f^{n+1}(x) = 1$ $f''(x) = f^4(x) = \ldots = f^{2n+2}(x) = 0$

$\sin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(x)}{k!} x^k + o(x^n)$

$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+3})$

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + o(x^n)$ $x \to x_0 = 0$

$\cos x$ funzione pari $\Rightarrow \cos x = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + \ldots + o(x^n)$ $x \to x_0 = 0$

- $f(x) = (1+x)^\alpha$ $\alpha \in \mathbb{R}$

$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$, $f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$, ... $f^k(x) = \binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$

N.B. $\binom{\alpha}{0} := 1$

$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^n)$ $x \to x_0$

DEFINIZIONE $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, si pone $\binom{\alpha}{0} := 1$ e $\forall k > 0$ $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)}{k!}$

- $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + o(x^n)$

- $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + o(x^n)$

N.B. Ogni funzione continua ammette almeno una primitiva ma una funzione che ammette primitiva non è detto che sia continua come ad esempio $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$

N.B. La primitiva di una funzione non è unica, ogni funzione che ha una primitiva, ne ha allora infinite e ogni primitiva si distingue dalle altre per una costante $c \in \mathbb{R}$

DIMOSTRAZIONE:

Sia F una primitiva di f, allora $\forall x \in I$ abbiamo:

$$G'(x) = \frac{d}{dx}(F(x) + C) = F'(x) = f(x)$$

LEMMA: Siano f e g due primitive di una stessa funzione, allora esiste una $c \in \mathbb{R}$ tale che $F(x) = G(x) + c$

DIMOSTRAZIONE: $\forall x \in I$, sapendo che $F(x)$ e $G(x)$ sono primitive, abbiamo

$$\frac{d}{dx}(F(x) - G(x)) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

e quindi, per il teorema di caratterizzazione delle costanti, $F(x) - G(x)$ è costante su I

L'insieme di tutte le primitive si chiama integrale indefinito e indicato con: $\int f(x)\,dx$

NOTAZIONE $\int f(x)\,dx = \{F(x) + c \;/\; F$ è una primitiva di $f,\ c \in \mathbb{R}\}$
$= F(x) + C$

L'integrale non è la funzione inversa della derivata: infatti l'integrale fornisce infiniti risultati la derivata solo 1.

N.B. $\displaystyle\int \frac{d}{dx} F(x)\,dx = F(x) + c \quad \forall x \in I$

$$\frac{d}{dx}\int F(x)\,dx = F(x) \quad \forall x \in I$$

CALCOLO DEGLI INTEGRALI INDEFINITI

$F(x)$	$F(x)$	$\int F'(x)\,dx$
K	0	$\int 0\,dx = K + c$
x	1	$\int dx = x + c$
$\frac{x^{2+1}}{2+1}$	x^2	$\int x^2 dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} + c$
$\log\lvert x\rvert$	$\frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x}dx = \log\lvert x\rvert + c$
e^x	e^x	$\int e^x dx = e^x + c$

$F(x)$	$F'(x)$	$\int F'(x)\,dx$
$\sin x$	$\cos x$	$\int \sin x\,dx = \cos x + c$
$-\cos x$	$+\sin x$	$\int$ [illegible]
$tg\,x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tg\,x + c$
$arctg\,x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{dx}{1+x^2} = arctg\,x + c$
$arcsin\,x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arcsin\,x + c$

TEOREMA (linearità dell'integrale): $f, g \in C(I)$, I intervallo, allora $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ (entrambi non nulli); allora:

$$\int \alpha f(x) + \beta g(x)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx$$

esempio: $\int (2x^2 - \sqrt{x} + 1)\,dx =$

$$= \int 2x^2 dx - \int \sqrt{x}\,dx + \int dx = \frac{2}{3}x^3 dx - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + x + c$$

esempio $\int tg\,x\,dx =$ $\quad y = \cos x \quad dy = -\sin x\,dx$

$= \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{dy}{y} = -\log|y| + c = -\log(\cos x) + c$

Il teorema di sostituzione $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(t)dt = F(t)+c = F(\varphi(x))+c$ con $t = \varphi(x)$, $dt = \varphi'(x)dx$, che dice in pratica che se $F(t)$ è primitiva di $f(t)$ allora $F(\varphi(x))$ è primitiva di $f(\varphi(x))\varphi'(x)$ può essere usato all'inverso, cioè si può arrivare ad applicare questo teorema eseguendo opportune sostituzioni, ma la funzione usata come sostituzione deve essere invertibile in I e bisogna conoscerne l'inversa. Dunque abbiamo in formule:

$\int f(t)dt = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = G(x)+c = G(\varphi^{-1}(t))+c$

esempio $\int \sqrt{1-t^2}\,dt$

Dobbiamo scegliere $\varphi(x)$ tale che essa sia un quadrato (per eliminare radice quadrata) ad esempio $\varphi(x) = t = \sin x$, $dt = \cos x\,dx$

$\sin x$ in $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ è invertibile, infatti $\sin^{-1}(x) = \arcsin x$ e in $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ la funzione è biettiva e quindi ammette $\int\sqrt{1-t^2}\,dt$.

$\int\sqrt{1-t^2}\,dt = \int\sqrt{1-\sin^2 x}\cdot(\cos x\,dx) = \int\sqrt{\cos^2 x}\cos x\,dx =$

Dato che $\cos x \geq 0 \ \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ $\sqrt{\cos^2 x} = |\cos x| = \cos x$

$= \int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}dx =$

N.B.
$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$

$= \int \frac{1}{2}dx + \int \frac{1}{2}\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos y \cdot \frac{1}{2}dy =$

$y = 2x \quad dy = 2dx$

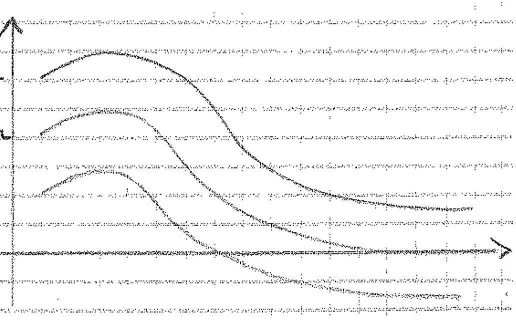
$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x = \frac{1}{2}\arcsin t + \frac{1}{\cancel{4}_2}\cancel{\sin(2\arcsin t)}(\sqrt{1-\cancel{\sin^2(\arcsin t)}})$

$= \frac{1}{2}\arcsin t + \frac{1}{2}t\sqrt{1-t^2} + c$

N.B. Alcune funzioni ammettono primitive, ma esse non sono esprimibili tramite funzioni elementari ed esse vengono dette funzioni non integrabili elementarmente.
Esempi di queste funzioni sono:
$\int \frac{e^x}{x}dx$, $\int \frac{1}{\log x}dx$, $\int \frac{\cos x}{x}$, $\int \cos(x^2)dx$, $\int \sin(x^2)dx$

N.B. Tutte le funzioni razionali sono integrabili elementarmente, in particolare integrando un polinomio otteniamo un polinomio di grado $n+1$, mentre integrando funzioni razionali fratte si ottengono combinazioni lineari di funzioni razionali logaritmi di funzioni razionali e arcotangenti di funzioni razionali

N.B. Una funzione che ammette primitive su un I, $x_0 \in I \Rightarrow y_0 \in \mathbb{R}$ $\exists!$ la primitiva F_0 che rende vera $F_0(x_0) = y_0$, ovvero c'è un unica primitiva che passa per il punto (x_0, y_0)
Ciò significa che possiamo risolvere il problema di cercare le primitive soddisfacenti la condizione $y(x_0) = y_0$



$\begin{cases} y'(x) = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ $\rightarrow$ condizione iniziale

Questo problema verrà ripreso con le equazioni differenziali e questo problema viene detto problema di Cauchy con condizione iniziale $y(x_0) = y_0$

e il valore comune ai due integrali è chiamato integrale definito di f su [a,b] (nel senso di Riemann) ed è indicato con il simbolo:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Se $f(x) \geq 0$ su $[a,b]$, allora definiamo area $(T_{f,a,b}) := \int_a^b f(x)\,dx$ se f è integrabile su $[a,b]$, mentre diciamo che $T_{f,a,b}$ non è dotato di area se f non è integrabile su $[a,b]$

esempio:

Vogliamo integrare $f(x)=k$ su $[a,b]$, $\forall \sigma \in [a,b]$ $m_i = M_i = k$ e dunque

$$s_{f,\sigma} = S_{f,\sigma} = k\sum_{i=1}^{k}(x_i - x_{i-1}) = k(x_n - x_0) = k(b-a)$$

La somma superiore e la somma inferiore sono uguali e indipendenti da σ e quindi $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = k(b-a)$ e dunque:

$$\int_a^b f(x)\,dx = k(b-a) \qquad \left[\text{N.B. } \int_a^b 0\,dx = 0 \quad \int_a^b 1\,dx = (b-a)\right]$$

CLASSI DI FUNZIONI INTEGRABILI

Esistono funzioni limitate non integrabili come ad esempio la funzione di Dirichlet:

$$f: [0,1] \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Infatti $\forall \sigma \in [0,1]$ $m_i = 0$ $M_i = 1$ e $s_{f,\sigma} = \sum_{i=1}^{k} 0(x_i - x_{i-1}) = 0$ e

$S_{f,\sigma} = \sum_{i=1}^{k} 1(x_i - x_{i-1}) = 1$ e quindi $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \neq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$ è quindi non ha integrale su $[0,1]$

TEOREMA: Sono integrabili su $[a,b]$ tutte le funzioni:
- limitate su $[a,b]$, continue su (a,b) tranne eventualmente in un numero finito di punti
- monotone su $[a,b]$

DEFINIZIONE: Sia $f: \text{dom} f \to \mathbb{R}$ una funzione, essa si dice continua a tratti su $[a,b]$ chiuso e limitato se $f_{|[a,b]}$ è continua su $[a,b]$ tranne eventualmente in un numero limitato di punti, in cui siano presenti discontinuità di salto o eliminabili

PROPRIETÀ DELL'INTEGRALE DEFINITO

Introduciamo l'insieme delle funzioni integrabili su $[a,b]$ nel senso di Riemann:

$$R([a,b]) := \{f : \text{dom} f \to \mathbb{R} \,/\, \exists \textstyle\int_a^b f\}$$

Se $a<b$ la definizione viene estesa con le seguenti convenzioni; $f \in R([a,b])$

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx \qquad \int_c^c f(x)\,dx = 0 \quad \forall c \in [a,b]$$

PROPRIETÀ:
1) $c \in [a,b]$ $f \in R([a,b]) \iff f \in R([a,c]) \wedge f \in R([c,b])$, cioè se una funzione è integrabile su $[a,b]$ allora è ancora integrabile su ogni sottointervallo di $[a,b]$
2) sia $f \in R(I)$, allora $\forall a,b,c \in I$ (presi in qualunque ordine)
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$
3) siano $f = g$ in $\forall x \in [a,b]$ tranne in un numero finito di punti allora $f \in R([a,b]) \iff g \in R([a,b])$ e allora

Se inoltre $f \in C([a,b])$, allora $\exists\, \xi \in [a,b] \;/\; f(\xi) = \mu$

DIMOSTRAZIONE:

sia $m := \inf_{x\in[a,b]} f(x)$ e $M := \sup_{x\in[a,b]} f(x)$; per monotonia rispetto all'integrando:

$m \le f(x) \le M \quad \forall x \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b M dx$ e quindi in

$(b-a)m \le \int_a^b f(x)dx \le (b-a)M$ e dividendo per $(b-a)$ otteniamo:

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M;$$

Supponendo che $f \in C([a,b])$ $\exists\, \xi \in [a,b] \;/\; f(\xi) = \mu$ (per Weierstrass) c.v.

TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO $\int$

NOTAZIONE: sia I un intervallo qualunque; le funzioni integrabili localmente su I vengono denotate con $R_{loc}(I)$

ad esempio se abbiamo $f \in C(I) \Rightarrow f \in R_{loc}(I)$

Se $f \in R_{loc}(I)$ e $x_0 \in I$, allora $\forall x \in I$ posso considerare $\int_{x_0}^x f(t)dt$; da questo notiamo che:

- $x > x_0$, f è integrabile su I per ipotesi
- $x = x_0$ $\int_{x_0}^{x_0} f(t)dt = 0$ per convenzione
- $x < x_0$ $\int_{x_0}^x f(t)dt = -\int_x^{x_0} f(t)dt$ che è integrabile su I per ipotesi

Possiamo dunque definire una funzione $F_{x_0}: I \to \mathbb{R}$ ponendo:

$$F_{x_0}(x) := \int_{x_0}^x f(t)dt \quad \forall x \in I$$

detta funzione integrale di f con punto base x_0

DIMOSTRAZIONE:

Il teorema afferma che $\forall x \in I$ $F_x'(x)$ esiste e vale $f(x)$, cioè ciò vuol dire $F_+'(x) = f(x)$ $\forall x \in I^\circ$ (x estremo sinistro di I se contenuto) e $F_-'(x) = f(x)$ $\forall x \in I^\circ$ (x estremo destro di I se contenuto)

$\forall x \in I^\circ$ o x estremo sinistro di I risulta $F_+'(x) = f(x)$, cioè:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\int_{x_0}^{x+h} f(t)dt - \int_{x_0}^{x} f(t)dt\right) = \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\left(\int_{x_0}^{x+h} f(t)dt - \int_{x}^{x_0} f(t)d\right.$$

$$\underset{\uparrow}{=} \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x+h} f(t)dt \quad \forall h$$

additività dell'integrale rispetto al dominio

$\frac{1}{h}$ è la media integrale di f su $[x, x+h] \subseteq I$ su cui f è continua quindi per il teorema della media $\exists f(\xi_h)$ /con $\xi_h \in [x, x+h]$

$$x \le \xi_h \le x+h \xrightarrow{h\to 0} x \le \xi_h \le x \Rightarrow \lim_{h\to 0^+} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f(\xi_h) \underset{\uparrow}{=} f($$

f è continua su I

COROLLARIO (Teorema di Torricelli-Barrow): Sia I un intervallo qualunque, con $f \in C(I)$ e G una primitiva qualunque di f su I, allora:

$$\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a) \quad \forall a,b \in I$$

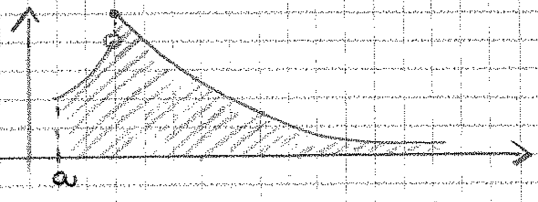
DIMOSTRAZIONE:

$F_a(x) = \int_a^x f(t)dt$ è una primitiva di f su I (per il teorema fondamentale del calcolo integrale).

$G(x)$ come $F_a(x)$ per ipotesi

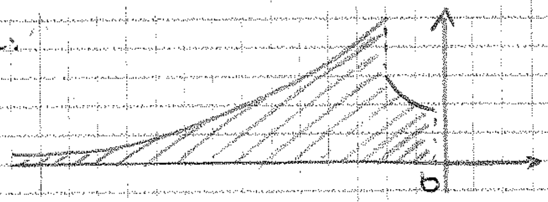
DEFINIZIONE: Sia $f \in R_{loc}([a,b])$. Si pone

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx := \lim_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)\,dx \equiv \lim_{t \to +\infty} F_a(t) \text{ se } \exists \text{ limite}$$



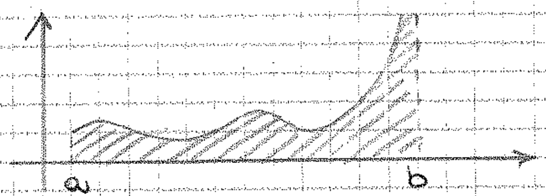
DEFINIZIONE: Sia $f \in R_{loc}((-\infty,b])$. Si pone:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx := \lim_{t \to -\infty} \int_t^b f(x)\,dx \equiv \lim_{t \to -\infty} F_b(t) \text{ se } \exists \text{ limite}$$



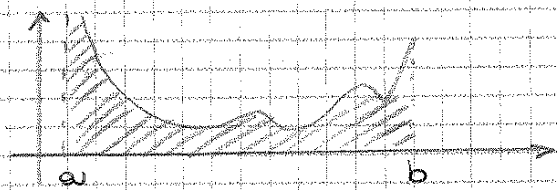
DEFINIZIONE: Sia $f \in R_{loc}([a,b))$. Si pone

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)\,dx \equiv \lim_{t \to b^-} F_a(t) \text{ se } \exists \text{ limite}$$



DEFINIZIONE: Sia $f \in R_{loc}((a,b])$. Si pone

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)\,dx \equiv \lim_{t \to a^+} F_b(t)$$



NB. Se $f \in R([a,b])$, gli integrali impropri al finito coincidono con quelli definiti

DEFINIZIONE: Un integrale improprio viene detto:
- convergente, se il limite esiste finito
- divergente, se il limite esiste infinito
- oscillante, se il limite non esiste

esempio $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{a}}\,dx \quad \forall a > 0$

$a=1)$ $\lim_{t \to +\infty} \int_1^t \frac{1}{x}\,dx = \lim_{x \to +\infty} \left[\log x\right]_1^t = \log +\infty - \cancel{\log 1} = +\infty$

$a \neq 1)$ $\lim_{t \to +\infty} \int_1^t \frac{1}{x^a}\,dx = \lim_{t \to +\infty} \left[\frac{x^{-a+1}}{-a+1}\right]_1^t = \frac{t^{-a+1}}{-a+1} = \begin{cases} +\infty & a<1 \\ \frac{1}{a-1} & a>1 \end{cases}$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a}\,dx = \begin{cases} +\infty & \text{se } a \leq 1 \\ \frac{1}{a-1} & \text{se } a > 1 \end{cases}$$

esempio: $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^a}\,dx = \quad \forall a > 0$

$a=1)$ $\lim_{t \to a^+} \int_t^b \frac{1}{(x-a)^a}\,dx = \left[\log|x-a|\right]_t^b = \log(b-a) - \log(t-a) = +\infty$

$a \neq 1)$ $\lim_{t \to a^+} \int_t^b \frac{1}{(x-a)^a}\,dx = \left[\frac{(x-a)^{a-1}}{a-1}\right]_t^b = \frac{(b-a)^{a-1} - (t-a)^{a-1}}{a-1} = \begin{cases} +\infty & a>1 \\ \frac{(b-a)^{a-1}}{a-1} & a<1 \end{cases}$

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^a}\,dx = \begin{cases} +\infty & a \geq 1 \\ \frac{(b-a)^{a-1}}{a-1} & a<1 \end{cases}$$

PROPRIETÀ (additività integrale improprio): Se $f \in R_{loc}([a,+\infty))$, allora

$$\forall b > a \quad \int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^{+\infty} f(x)\,dx$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 49 di 61

2) $\int_I g(x)dx$ converge $\Rightarrow \int_I f(x)dx$ converge ; se $0 \le f \le g$ risulta
$0 \le \int_I f(x)dx \le \int_I g(x)dx$

TEOREMA (criterio del confronto asintotico): se $f \sim g$ $(x \to c)$, ciò implica che $\int_I f(x)dx$ e $\int_I g(x)dx$ hanno lo stesso carattere

NB. se $h \in R_{loc}([a,+\infty))$ e $\exists \lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \ell$; se $\ell \neq 0 \Rightarrow \int_I h(x)dx$ diverge
infatti $\int_a^{+\infty} \ell dx = \ell x \Big|_a^{+\infty} = a\ell + (+\infty) = +\infty$

TEOREMA (criterio di convergenza assoluta): qualunque sia il segno di f risulta che:
$\int_I |f(x)|dx$ converge $\Rightarrow \int_I f(x)dx$ convergente
e si dice che f è assolutamente integrabile in senso improprio su I

esempio $\int_0^1 \frac{x^2+1-e^x}{x^2+x^3}dx =$

$$= \int_0^1 \frac{x^2+1-e^x}{x^2+x^3}dx \sim \int_0^1 \frac{x^2-x+o(x)}{x^2+o(x)}dx \sim \int_0^1 \frac{-x+o(x)}{x^2+o(x)}dx \sim \int_0^1 -\frac{1}{x}dx$$

$\int_0^1 -\frac{1}{x}dx$ diverge $\Rightarrow \int_0^1 \frac{x^2+1-e^x}{x^2+x^3}dx$ diverge

esempio $\int_1^{+\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \cdot -\frac{1}{\sqrt{x}}dx =$ $\qquad t = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad x \to +\infty \quad t \to 0$

$$= \int_0^{+\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \cdot \frac{-1}{\sqrt{x}}dx = \int_0^{+\infty} \cancel{\frac{1}{\sqrt{x}}} - \frac{1}{6\sqrt[2]{t^3}} - \cancel{\frac{1}{\sqrt{x}}} + o\left(\frac{1}{\sqrt[2]{t^3}}\right)dx = 0$$

esempio: $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\log x}dx =$

cerco un $g(x)$ tale che $\frac{1}{\sqrt{x}\log x} \ge g(x)$, $\forall x \in I(+\infty)$ con $\int_2^{+\infty} g(x)$ divergente. $\log x = o(x^a)$ $\forall a > 0$ $x \to +\infty \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}\log x} \ge \frac{1}{\sqrt{x}\cdot x^a}$

$\frac{1}{x^{a+1/2}}$ $a = \frac{1}{2}$ diverge $\Rightarrow \int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\log x}dx$

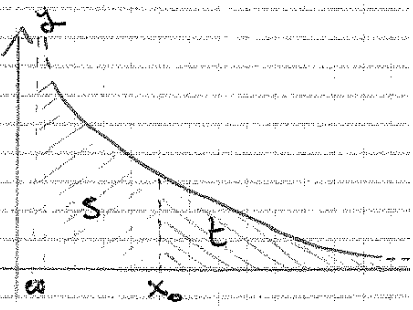
CASI CON PIÙ SINGOLARITÀ

Può succedere che ci siano più punti che rendono l'integrale improprio.

DEFINIZIONE: siano $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ ed $f \in R_{loc}((a,b))$; se prendiamo un qualunque $x_0 \in (a,b)$, si pone:

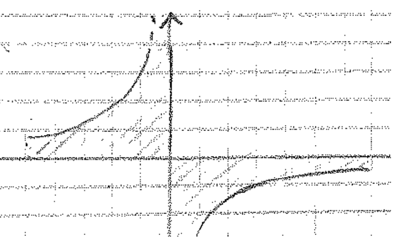
$$\int_a^b f(x)dx := \int_a^{x_0} f(x)dx + \int_{x_0}^b f(x)dx$$

se e solo se i due integrali a destra esistono finiti e infiniti e non danno forme indeterminate



DEFINIZIONE: siano $a < c < b \in \mathbb{R}$ ed $f \in R_{loc}([a,c)) \cap R_{loc}((c,b])$. allora si pone:

$$\int_a^b f(x)dx := \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$



MODULO E CONIUGATO DI UN COMPLESSO

Dato un qualunque $z = x+iy$, abbiamo che

$|z| := \sqrt{x^2+y^2}$ $\quad \bar{z} := x - iy$ (coniugato)

$|z|$ rappresenta la distanza di z dall'origine

$\bar{z}$ è il simmetrico rispetto all'asse x

PROPRIETA' (modulo):

1) $|z| \geq 0 \wedge |z| = 0 \Rightarrow z = 0$

2) $r > 0 \Rightarrow \begin{cases} |z| = r & z \in \text{circonferenza con } C(0,0) \text{ e } r>0 \\ |z| < r & z \in \text{cerchio con } C(0,0) \text{ e } \ldots \end{cases}$

3) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (disuguaglianza triangolare)

4) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$, $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|} \Rightarrow |z^n| = |z|^n \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad (z \neq 0, n < 0)$

5) $Re(z) \leq |z| \quad Im(z) \leq |z|$

PROPRIETA' (coniugato)

1) $\bar{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$, $\bar{z} = -\bar{z} \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$

2) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

3) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$, $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \Rightarrow \overline{z^n} = \bar{z}^n \quad \forall z \in \mathbb{C}, z \neq 0, n < 0$

4) $|\bar{z}| = |z|$, $\bar{\bar{z}} = z$

5) $z + \bar{z} = 2Re(z)$, $z - \bar{z} = 2i\,Im(z) \Rightarrow Re(z) = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$, $Im(z) = \dfrac{z - \bar{z}}{2i}$

6) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

DIMOSTRAZIONE:

5) $z + \bar{z} = x + iy + x - iy = 2x \Leftrightarrow 2Re(z)$

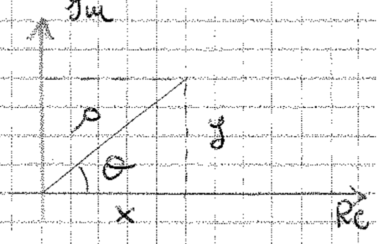
$z - \bar{z} = x + iy - (x - iy) = 2iy \Leftrightarrow 2i\,Im(z)$

Fino ad adesso abbiamo lavorato con i numeri complessi in forma algebrica $z = x+iy$

Esistono, però, altri due modi di rappresentare i numeri complessi:
- in forma trigonometrica
- in forma esponenziale

FORMA TRIGONOMETRICA

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \quad \text{con } \rho > 0 \text{ e } \theta \in [0, 2\pi]$$



$\rho = \sqrt{x^2+y^2} \Leftrightarrow |z|$ $\quad \theta$ conviene ricavarselo di volta in volta

$z = \rho\cos\theta + i\rho\sin\theta \Rightarrow z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$

$\theta + 2k\pi$ sono tutti ammissibili per rappresentare lo stesso z, il cui argomento che cade in $(-\pi; \pi]$ viene indicato con $Arg\, z$

N.B. $z = 0 \Rightarrow |z| = 0 \Leftrightarrow \rho = 0$ e θ indeterminato

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi \\ \rho_1 = \rho_2 \end{cases}$$

esempio $z = i + 1$

$|z| = \rho = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ $\quad \cos\theta = \dfrac{1}{\ldots}$, $\sin\theta = \dfrac{1}{\ldots} \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{\ldots}$

$$\begin{cases} r = \rho^n \\ n\theta_2 = \theta_1 + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ \theta_2 = \dfrac{\theta_1 + 2k\pi}{n} \end{cases}$$

$k=0 \Rightarrow \theta_2 \equiv \theta_0 = \dfrac{\theta_1}{n}$

$k=1 \Rightarrow \theta_2 \equiv \theta_1 = \dfrac{\theta_1}{n} + 2\pi$

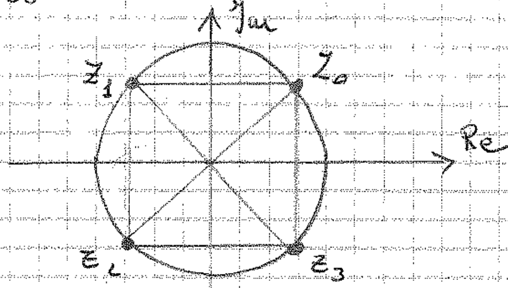
$\vdots$

$k=n \Rightarrow \theta_2 = \theta_n = \theta_0 + 2\pi$ (da n si ripetono gli stessi valori)

dunque troviamo n radici distinte date da $z_k = \sqrt[n]{r}\, e^{i\theta_k}$, con $\theta_k = \dfrac{\theta_1}{n} + \dfrac{2k\pi}{n}$ $(k = 1, 2, \dots, n-1)$

N.B. z_k hanno tutte lo stesso modulo $\sqrt[n]{|w|}$, e quindi stanno tutte sulla stessa circonferenza di raggio $\sqrt[n]{|w|}$

Le radici sono i vertici di un poligono regolare di n lati inscritto nella circonferenza di centro l'origine e raggio $\sqrt[n]{|w|}$



NB. se $n = 2$ avrò due radici, i cui argomenti sono:

$\theta_0 = \dfrac{\theta_1}{2}$ e $\theta_1 = \dfrac{\theta_1}{2} + \pi$

EQUAZIONI ALGEBRICHE

DIMOSTRAZIONE (teorema radici complesse di polinomi reali)

Vogliamo dimostrare che $P(z_0) = 0 \Rightarrow P(\bar{z}_0) = 0$

Da un lato abbiamo che $P(z_0) = 0 \Rightarrow \overline{P(z_0)} = \bar{0} = 0$

D'altra parte possiamo calcolare $\overline{P(z_0)}$

$P(z_0) = a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + a_{n-2} z_0^{n-2} + \dots + a_0$

$\overline{P(z_0)} = \overline{a_n z_0^n} + \overline{a_{n-1} z_0^{n-1}} + \overline{a_{n-2} z_0^{n-2}} + \dots + \overline{a_0}$

$= \overline{a_n} \cdot \overline{z_0^n} + \overline{a_{n-1}} \cdot \overline{z_0^{n-1}} + \overline{a_{n-2}}\, \overline{z_0^{n-2}} + \dots + \overline{a_0}$

$= a_n \cdot \bar{z}_0^n + a_{n-1} \cdot \bar{z}_0^{n-1} + a_{n-2} \cdot \bar{z}_0^{n-2} + \dots + a_0 \iff P(\bar{z}_0) = 0$

DEFINIZIONE: $e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$ $(e^x > 0\ \forall x)$ c.v.d

NB. $i^0 = 1,\ i^1 = i,\ i^2 = -1,\ i^3 = -i,\ i^4 = 1, \dots$

TEOREMA (radici complesse di polinomi reali): Se i coefficienti di $P(z)$ sono tutti reali, allora $P(z_0) = 0$ se e solo se $P(\bar{z}_0) = 0$

In parole povere, se tutti i coefficienti $a_0, a_1, \dots \in \mathbb{R}$, allora le soluzioni dell'equazioni $P(z) = 0$ sono coppie coniugate di numeri complessi

TEOREMA (fondamentale dell'algebra): da $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$, $\exists\ 1 \le k \le n$ numeri complessi $z_1, z_2, \dots, z_k$ e altrettanti numeri reali interi $m_1, m_2, \dots, m_k$ tali che:

$$P(z) = a_n (z - z_1)^{m_1} (z - z_2)^{m_2} \cdot (z - z_3)^{m_3} \cdot \ldots \cdot (z - z_k)^{m_k}$$
$$\text{con } m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_k = n$$

Ciascun esponente m_j rappresenta la molteplicità della radice z_j

RADICI QUADRATE COMPLESSA

Le radici quadrate del numero complesso w sono opposte: infatti $z^2 = |w| e^{i\varphi} \iff z = \pm\sqrt{|w|}\, e^{i\frac{\varphi}{2}}$, di cui quella positiva è detta radice quadrata principale di w

$$y(x) = \int \frac{x^3}{3} + xc_1 + c_2 \, dx = \frac{x^4}{12} + \frac{x^2}{2}c_1 + xc_2 + c_3$$

EDO DI PRIMO ORDINE IN FORMA NORMALE

Esse hanno questa forma: $y' = f(x,y)$. Il grafico di ogni soluzione viene detto curva integrale.
Le EDO di primo ordine in forma normale della forma $y' = g(x)h(x)$ sono dette a variabili separabili.
Data $y: I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \text{dom}\, g \wedge y \in \text{dom}\, h, \forall y \in I$

Useremo le seguenti convenzioni:
- f, g sono $\neq 0$
- dom g è un intervallo / $g \in C(I)$
- dom h è un unione di intervalli / $g \in C^1(\text{dom}\, h)$ e zeri isolati

TEOREMA (soluzioni costanti): se $y(x) \equiv a$, $y: \text{dom}\, g \to \mathbb{R}$. Allora a è soluzione $\Leftrightarrow h(a) = 0$

DIMOSTRAZIONE:

y è soluzione $\Leftrightarrow$ verifica la equazione $\forall x \in \text{dom}\, g \Leftrightarrow 0 = g(x)h(a)\ \forall$
$\Leftrightarrow h(a) = 0$. Quindi le soluzioni costanti sono tante quanti gli zeri di h.
Queste soluzioni sono dette integrali singolari

PROPRIETÀ: $\forall x \in \text{dom}\, g \times \text{dom}\, h$ passa una e una sola curva integrale

PROPRIETÀ: $\forall$ ~~soluzione~~ non costante assume valori in uno solo degli intervalli aperti disgiunti (finiti o infiniti) che compongono dom h privato degli eventuali zeri

Possiamo affermare che gli zeri e gli estremi di di h e dom h mantengono i grafici delle funzioni non costanti in determinate parti del piano cartesiano

NB: g ammette primitive su $\forall x \in \text{dom}\, g$, mentre $\frac{1}{h}$ ammette primitive su $\forall x \in \text{dom}\, h \setminus \{0 \text{ di } g\}$

TEOREMA: (soluzioni non costanti) Sia $y: I \to \mathbb{R}$ non costante è soluzione $\Leftrightarrow \forall x \in I$ $H(y(x)) \stackrel{*}{=} G(x) + c$ qualunque si H di $1/h$ e una qualsiasi c costante reale

$H(y(x)) = G(x) + c$ viene detto integrale generale non singolare in forma implicita

NB: qualunque H è strettamente monotona su dom $h \setminus \{$zeri di $h\}$ e quindi è invertibile su $I \subseteq \text{dom}\, h$.
quindi possiamo esplicitare la $y(x)$, quando possibile,
$y(x) = H^{-1}(G(x) + c)$

RISOLUZIONE EDO 1° ordine:
- si scrive l'equazione con la notazione di Leibniz $\frac{dy}{dx} = g(x)h$
- si separano le variabili nei due membri $\frac{dy}{h(y)} = g(x)dx$
- si integrano entrambi i membri $\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(x)dx$
- si calcolano gli integrali e si sostituisce $y = y(x)$ nel risultato del primo

N.B. integrale generale = soluzioni costanti + soluzioni non costanti

esempio $y' = \frac{y^2 - 1}{2xy}$ $\quad y' = \frac{y^2-1}{2y} \cdot \frac{1}{x}$ $\quad$ dom $f = \{\forall x \in \mathbb{R} / x > 0\}$

dom $g = \{\forall x \in \mathbb{R} / y \neq 0\}$

$g(y) = 0 \Leftrightarrow y^2 - 1 = 0 \quad y = \pm 1$

$y(x,c) = e^{-\log x}(-x+c) = -xe^{-\log x} + e^{-\log x} \cdot c = -1 + \frac{c}{x} \quad c \in \mathbb{R}, x > 0$

$y(2,c) = 1 \iff \frac{c}{2} - 1 = 1, \; c = 4 \Rightarrow y(x,4) = \frac{4}{x} - 1$

LE EQUAZIONI LINEARI DI 2° ORDINE A COEFFICIENTI COSTAN

Sono le equazioni che sono in questa forma $y'' + ay' + by = g(x)$, con $a, b \in \mathbb{R}$ costanti con $g: I \to \mathbb{R}$, $g \in C(I)$.
Se $g(x) = 0$ l'equazione si dice omogenea, altrimenti si d... e completa e $g(x)$ si dice termine forzante o termine noto

NB. Tutte le soluzioni sono definite su tutto l'intervallo I

LEMMA 1: l'integrale generale dell'equazione omogenea $y'' + ay' + by = 0$ è:

$$y_0(x, c_1, c_2) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

con c_1, c_2 costanti arbitrarie e $y_1(x), y_2(x)$ integra... particolari (che non siano uno multiplo dell'altro

Per ricavare $y_1(x)$ e $y_2(x)$ dobbiamo studiare le radici del polinomio caratteristico associato all'equazione $\lambda^2 + a\lambda + b$
Il Δ di questo polinomio può essere:
- < 0, due soluzioni complesse coniugate
- $= 0$, due soluzioni reali e coincidenti
- > 0, due soluzioni reali e distinte

TEOREMA (generale dell omogenea): l'integrale generale dell'equazione omogenea $y'' + ay' + by = 0$ possono essere:
- $y_0(x, c_1, c_2) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (λ_1, λ_2 $\mathbb{R}$ distin...
- $y_0(x, c_1, c_2) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 e^{\lambda x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (λ_1, λ_2 $\mathbb{R}$ coinciden...
- $y_0(x, c_1, c_2) = c_1 e^{\alpha x}\cos(\beta x) + c_2 e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ ($\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$)

LEMMA 2: l'integrale generale dell'equazione completa $y'' + ay' + by =$ è

$$y_0(x, c_1, c_2) = y_0(x, c_1, c_2) + y_p(x) \quad \forall x \in I$$

dove $y_0(x, c_1, c_2)$ è l'integrale generale dell'equazione omogenea $y'' + ay' + by = 0$ e y_p è un integrale particolare qualunque

TEOREMA (metodo di somiglianza): sia $y'' + ay' + by = g(x)$ un equazione completa:
- se $g(x) = p_n(x)e^{\mu x}$ con μ qualunque $\in \mathbb{R}$ e $p_n(x)$ polinomio di grado $n \geq 0$. Allora ha un integrale della forma:

$$y_p(x) = q(x)e^{\mu x}x^m$$

con $q(x)$ polinomio di grado $\leq n$ e m molteplicità di μ come soluzione caratteristica

- se $g(x) = p_n(x)\cos\theta x$ o $g(x) = p_n \operatorname{sen}(\theta x)$ con $\theta \in \mathbb{R}$ qualunque e $p_n(x)$ polinomio di grado $n \geq 0$. Allora ha un integrale particolare del tipo

$$y_p(x) = (q_1(x)\cos(\theta x) + q_2(x)\operatorname{sen}(\theta x))\, x^m$$

con $q_1(X), q_2(X)$ polinomi di grado $\leq n$ e m molteplicit... di $i\theta$ come soluzione dell'equazione caratteristica

- se $g(x) = e^{\mu x}(p_1(x)\cos(\theta x) + p_2(x)\operatorname{sen}(\theta x))$ con $\mu, \theta \in \mathbb{R}$ qualunque e $p_1(x), p_2(x)$ polinomi di grado $n \geq 0$. Allora ha integrale particolare

$$y_p(x) = e^{\mu x}[q_1(x)\cos(\theta x) + q_2(x)\operatorname{sen}(\theta x)]\, x^m$$

con $q_1(x), q_2(x)$ polinomi di grado $\leq n$ e m molteplicit... di $\mu + i\theta$ come soluzione dell'equazione caratteristic...

In pratica bisogna trovare le curve integrali per (x_0, y_0) e tangenti alla retta di pendenza y_1 in (x_0, y_0)

TEOREMA (esistenza e unicità per le equazioni lineari 2): $g(x)$ è definita e continua su I e sia $x_0 \in I$ $\forall y_0, y_1 \in \mathbb{R}$ il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = g(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

ha soluzione unica, definita su tutto I

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 61 di 61