NUMERO : 460 DATA : 18/02/2013

A P P U N T I

STUDENTE : Piscitelli

MATERIA : Analisi Matematica I
Prof. Cortese

Massimo e minimo 4-10-12

$A = [2, 5]$ max $A = 5$ min $A = 2$

$B = [1, 8)$ max $B = \nexists$ min $B = 1$ estensione limitata

$C = \mathbb{N}$ max $C = \nexists$ min $C = 0$ estensione illimitata

$$[1 \quad\quad 8) \quad 9 \quad 10 \quad\quad B \rightarrow$$

Limitatezza di $A \subseteq \mathbb{R}$

$A \subseteq \mathbb{R}$ è superiormente limitato $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists L \in \mathbb{R} : \forall x \in A ; x \leq L$

$A \subseteq \mathbb{R}$ è limitato $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists l, L \in \mathbb{R} \; \forall x \in A , l \leq x \leq L$

OSS 1 Se un insieme (come A) ammette max allora è S.L.

Maggiorante di un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$

L è maggiorante di $A \subseteq \mathbb{R} \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall x \in A : x \leq L$

Nota l'eventuale max A è maggiorante di A

Definiamo $A^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ è maggiorante di } A\}$

$A^+ = [5 ; +\infty)$ $B^+ = [8 ; +\infty)$ $C^+ = \emptyset$

Nota sia A^+, sia B^+ sono chiusi a sinistra, cioè ammettono minimo (il più piccolo dei maggioranti) $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ Sup A, Sup B

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, sia $A^+ \neq \emptyset$ allora per definizione, Sup $A = \min A^+$

Se $A^+ = \emptyset \Longleftrightarrow$ Sup $A = +\infty$ (per convenzione)

Assioma di completezza di $\mathbb{R}$

Ogni insieme A incluso in $\mathbb{R}$ (non vuoto e S.L.) ammette in $\mathbb{R}$ estremo superiore.

Oss Caratterizzazione del Sup A

Se $A \subseteq \mathbb{R}$ e S.L.

$L = \text{Sup } A \overset{def}{\Longleftrightarrow} (\forall x \in A : L \geq x) \wedge (\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A : x > L - \varepsilon)$

Coefficiente binomiale

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Valore assoluto

$$|X| = \begin{cases} X, & X \geq 0 \\ -X, & X < 0 \end{cases} \qquad |-5| = 5 \quad |17| = 17 \quad |0| = 0$$

$$|X| = \max\{X; -X\}$$

$$|X| = \sqrt{X^2}$$

Proprietà

I) $|X| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

II) $-|X| \leq X \leq |X|, \ \forall x \in \mathbb{R}$ es. $X = -5 \quad -|-5| = -5 < |-5|$

III) $|X| = 0 \Rightarrow X = 0$

IV) $|X| \leq a, \ a > 0 \Leftrightarrow -a \leq X \leq a$

V) $|X| \geq a, \ a > 0 \Leftrightarrow X \leq -a \vee X \geq a$

VI) $|X| = a, \ a > 0 \Leftrightarrow X = \pm a$

VII) $|X+y| \leq |X| + |y|, \ \forall x, y \in \mathbb{R}$ Disuguaglianza triangolare

Dimostrazione VII)

Dalla II) segue
$$-|X| \leq X \leq |X|, \ \forall x \in \mathbb{R}$$
$$-|y| \leq y \leq |y|, \ \forall y \in \mathbb{R}$$
$$\overline{-|X| - |y| \leq X + y \leq |X| + |y|}$$

poniamo $|X| + |y| = a \geq 0$

allora la III) diventa: $-a \leq (X+y) \leq a \Rightarrow$

$$\overset{IV}{\Rightarrow} |X+y| \leq a = |X| + |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad CVD$$

VIII) $\big||X| - |y|\big| \leq |X - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

Dimostrazione VIII)

Si può scrivere $|X| = |X - y + y| \overset{VII}{\leq} |X - y| + |y| \Rightarrow$

Esercitazione 10-10-12

$A \subseteq \mathbb{R}$

M maggiorante per A se $\forall x \in A$, $x \leq M$ es. $[2;3]$ $M = 4, 5, \dots$,

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon < \sup A$ $\exists x \in A$ $\varepsilon < x$ $(\leq \sup A)$

I) $\forall x \in A$ $x \leq \sup A$

II) $\forall \varepsilon < \sup A \Rightarrow \exists x \in A$ $\varepsilon < x$

Inf A

I) $\forall x \in A$ $x \geq \inf A$

II) $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}$ $\varepsilon > \inf A$, $\exists x \in A$ $x < \varepsilon$

ES $A = \{x \in \mathbb{R}, \frac{1}{2} < x \leq 3\} = \left(\frac{1}{2}; 3\right]$ $\inf A = \frac{1}{2}$

I) $\forall x \in A$ $x \geq \frac{1}{2}$

II) $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}$ $\varepsilon > \frac{1}{2}$, $\exists x \in A$ $x < \varepsilon$ es. $\frac{\frac{1}{2} + \varepsilon}{2} = x \in \mathbb{R}$

NOTA Se l'inf $A \in A$ allora $\inf A = \min A$ altrimenti non c'è minimo

ES 2 $B = \{x \in \mathbb{R}, x = \frac{2n}{n+1}, n \in \mathbb{N}\} = \{0, 1, \frac{3}{2}, \frac{8}{5}, \frac{5}{4}, \dots\}$

$\inf B = 0$ I) $\forall x \in B$ $x \geq 0$

II) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists x \in B$ $x < \varepsilon$ es. $x = 0$

Inoltre $\inf B = \min B$

$\sup B = 2$ Verifica: $x < 2$ $\frac{2n}{n+1} < 2$ $2n < 2n + 2$ $2 > 0$ sempre

$x < 2$ $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \forall x \in B$

Principio di induzione

I) $0 < 2$ Vero

II) Supponiamo che $\frac{2j}{j+1} < 2$ $\forall j \leq n$

$\frac{2(j+1)}{(j+1)+1} < 2$ $\frac{2j+2}{j+2} < 2$ $2j+2 < 2j+4$ $2 < 4$ Sempre Vero

II) $x > -\frac{1}{3}$

$x > 2$

$x < -\frac{1}{3} \vee x > 2$

$-2 \quad -\frac{1}{3} \quad 1 \quad 2$

$-2 < x \leq -\frac{1}{3}$ $\quad A = \left(-2; -\frac{1}{3}\right]$

$\inf A = -2 \quad \sup A = \max A = -\frac{1}{3}$

Valore assoluto

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{se } x-1 \geq 0 \quad x \geq 1 \\ 1-x & \text{se } x-1 < 0 \quad x < 1 \end{cases}$$

ES $B = \{x^2 + |x+1| \leq 4\} \cup \{\sqrt[3]{x^3 - x} \geq |x|\}$

I) $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x^2 + x + 1 \leq 4 \end{cases} \cup \begin{cases} x+1 < 0 \\ x^2 - x - 1 \leq 4 \end{cases}$

$x^2 + x - 3 \leq 0$ $\qquad x^2 - x - 5 \leq 0$

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+12}}{2}$ $\qquad x = \frac{+1 \pm \sqrt{1+20}}{2}$

$\frac{-1-\sqrt{13}}{2} \leq x \leq \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$ $\qquad \frac{1-\sqrt{21}}{2} \leq x \leq \frac{1+\sqrt{21}}{2}$

$\frac{-1-\sqrt{13}}{2} \quad -1 \quad \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ $\qquad \frac{1-\sqrt{21}}{2} \quad -1 \quad \frac{1+\sqrt{21}}{2}$

II) $\begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt[3]{x^3 - x} \geq x \end{cases} \cup \begin{cases} x < 0 \\ \sqrt[3]{x^3 - x} \geq -x \end{cases}$

$x^3 - x \geq x^3$ $\qquad x^3 - x \geq -x^3$

$x \leq 0$ $\qquad 2x^3 - x \geq 0$

$x = 0$ $\qquad x(2x^2 - 1) \geq 0$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 9 di 187

11 - 10 - 12

Prodotto cartesiano

Siano A, B due insiemi

$A \times B = \{(a, b) : a \in \cancel{b} \in A,\ b \in B\}$

NOTA $\{a, b\} = \{b, a\}$ ma $(a, b) \neq (b, a)$

ES $A = \{1 ; 2 ; 3\}$ $B = \{4, 1\}$

$A \times B = \{(1 ; 4)(1 ; 1)(2 ; 4)(2 ; 1)(3 ; 1)(3 ; 4)\}$

n° elementi $A \times B$ = n° elementi A · n° elementi B

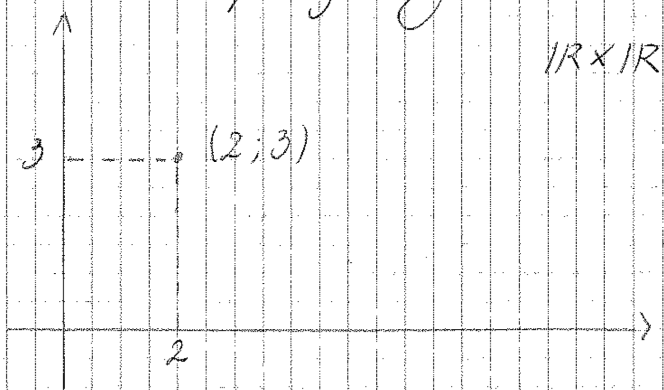
NOTA $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$

Relazione

Una relazione definita tra due insiemi A e B è un sottoinsieme di $A \times B$: $R \subseteq A \times B$

$R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\}$ (infiniti)

$R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 : x^2 + y^2 = 4\}$ (finito)



Funzione reale di variabile reale (o applicazione)

$X \subseteq \mathbb{R}$ $Y \subseteq \mathbb{R}$ $y = f(x)$

$f : X \subseteq \mathbb{R} \to Y \subseteq \mathbb{R}$ $x \in X \mapsto y \in Y$

$f : \forall x \in X, \exists y \in Y : y = f(x)$

ES $B = [0;1)$ qual è $f^{-1}(B)$? (fig 1)

$B \subseteq Y = \mathbb{R}$? Sì

$f^{-1}(B) = f^{-1}([0;1)) = (-1, 1)$

OSS 1 $f(f^{-1}(\bar{B}))$ essendo $\bar{B} \subseteq Y$ (codominio di f)

$\bar{B} = [-2; +1]$ $B \subseteq \mathbb{R}$

$f^{-1}(\bar{B}) = [-1; +1]$ $f(f^{-1}(\bar{B})) = [0; 1] \subseteq \bar{B}$

$f(f^{-1}(B)) = B \cap \operatorname{im} f \subseteq B$ essendo $\operatorname{im} f = f(X) = f(\operatorname{dom} f)$

OSS 2 $f^{-1}(f(A))$ essendo $A \subseteq X$ = dominio di f

$A = (1;2] \rightarrow f(A) = (1;4] \rightarrow f^{-1}((1,4]) = [-2;-1) \cup (1;2]$

$f^{-1}(f(A)) \supseteq A$

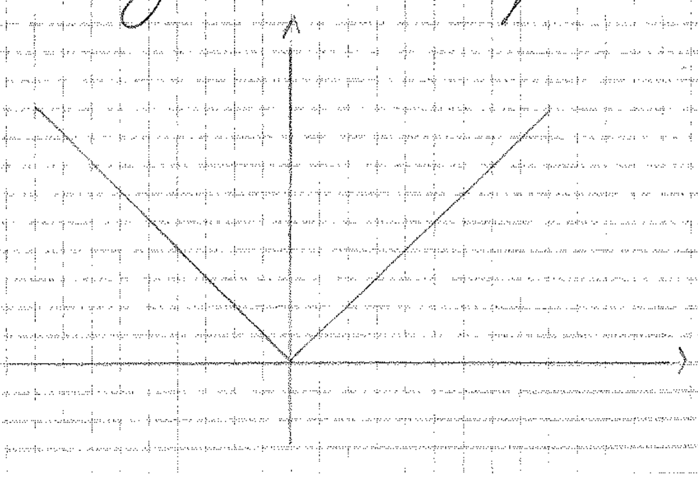
Estremo superiore di f su A

$\sup_{x \in \mathbb{R}} f(x) \Rightarrow \sup f(A)$

$A = (1;2] \rightarrow f(A) = (1;4]$ $\sup_{x \in (1;2]} f(x) = \max_{x \in (1;2]} f(x) = 4$

NOTA Si dice che $f(x)$ ammette max su A se $\sup_{x \in \mathbb{R}} f(x) \in f(A)$

ES 2 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto y = |x|$



$\sup_{x \in \operatorname{dom} f} f(x) = +\infty$

$\inf_{x \in \operatorname{dom} f} f(x) = \min_{x \in \operatorname{dom} f} f(x) = 0$

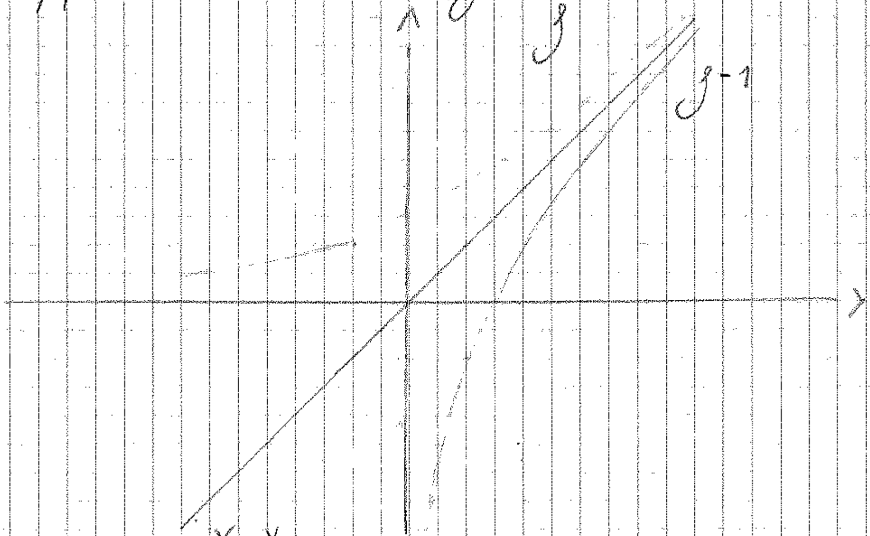
Funzione inversa

Sia $f: X \subseteq \mathbb{R} \to Y \subseteq \mathbb{R}$, una funzione biettiva, allora si può definire una nuova funzione denotata con f^{-1}

$f: X \to Y$ biettiva $x \longmapsto y = f(x)$

$f^{-1}: Y \to X$ $y \longmapsto x = f(y)$

Se la coppia $(x_1, y_1) \in \Gamma(f)$ allora
la coppia $(y_1, x_1) \in \Gamma(f^{-1})$



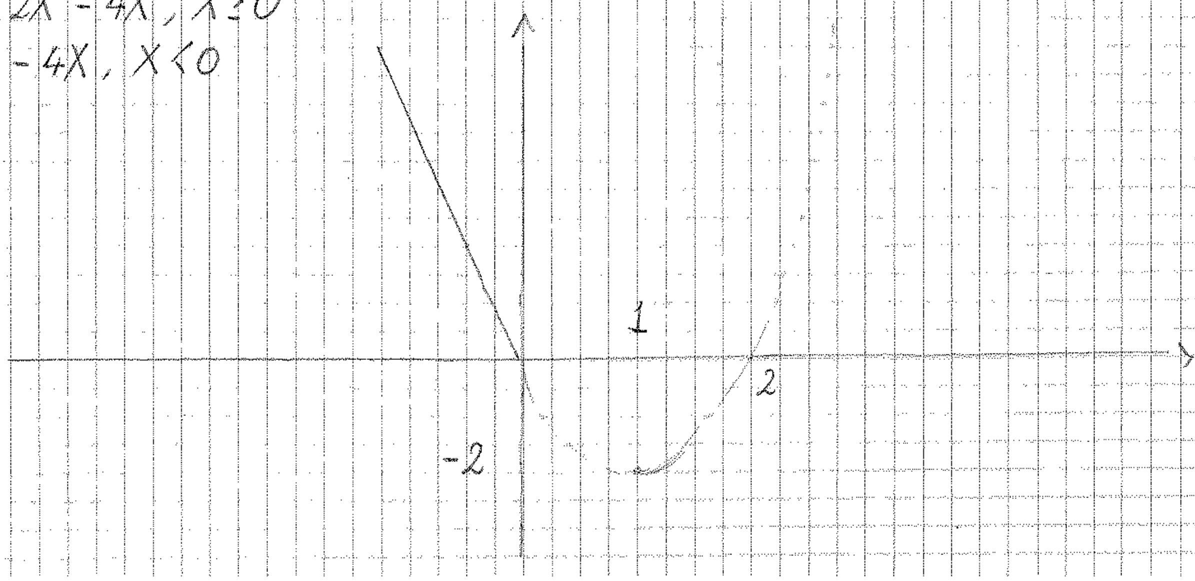
ESERCIZIO $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x \longmapsto x|x| + x(x-4)$

1) f è invertibile?

2) Se no renderla invertibile

3) Ricavare la funzione inversa

$$y = \begin{cases} 2x^2 - 4x, & x \geq 0 \\ -4x, & x < 0 \end{cases}$$



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 15 di 187

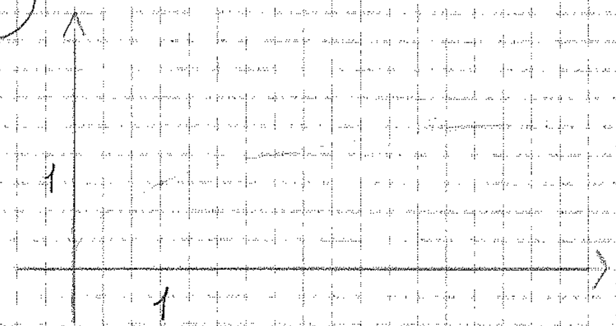
La condizione per costruire $g \circ f$ è che $I = \operatorname{im} f \cap \operatorname{dom} g \neq \emptyset$

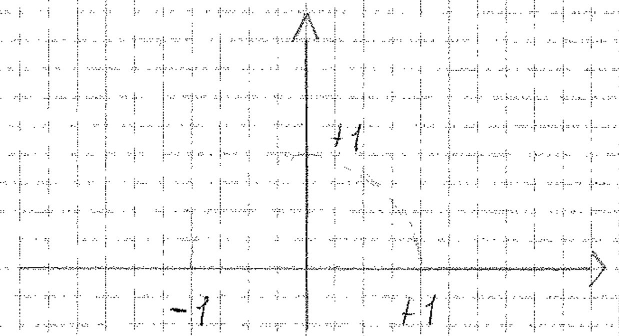
$\operatorname{dom} g \circ f = f^{-1}(\operatorname{im} f \cap \operatorname{dom} g)$

$\operatorname{im} g \circ f = g(\operatorname{im} f \cap \operatorname{dom} g)$

ES $f(x) = \sqrt{x}$

$g(x) = \sqrt{1 - x^2}$ $\quad g \circ f = ?$





$f : [0; +\infty) \longrightarrow [0, +\infty) \quad x \longmapsto y = \sqrt{x}$

$g : [-1; 1] \longrightarrow [0; +1]$

$I = \operatorname{im} f \cap \operatorname{dom} g = [0, +\infty) \cap [-1; 1] = [0; 1] \neq \emptyset$ esiste!

$\operatorname{dom} g \circ f = f^{-1}(I) = f^{-1}([0; 1]) = [0; 1]$

allora $g \circ f : [0; 1] \to [0; 1] \quad x \longmapsto g(f(x))$

$g(f(x)) = \sqrt{1 - f^2(x)} = \sqrt{1 - x}$

OSS 1 $f \circ g \circ h = (f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ Associatività

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 17 di 187

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ f é strett. decrescente su $\mathbb{R}^-$ e $\mathbb{R}^+$, ma non su $\mathbb{R} - \{0\}$.

OSS 1 Sia $f_1 : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f_2 : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

I) f_1, f_2 entrambe crescenti (o decresc.) su I allora $f_1 + f_2 = f$ é crescente (o decres) su I

OSS 2 La composizione di funzioni crescenti da vita a una funzione crescente.

Schema: $(+)$ = cres. $(-)$ = decr.

$f_1^+ \circ f_2^+ \to +$

$f_1^- \circ f^+ \to -$

$f_1^+ \circ f^- \to -$

$f_1^- \circ f_2^- \to +$

$f(x+kT)=f(x)$ con $k \in \mathbb{Z}$

T è definito come il più piccolo dei periodi di f

OSS 1 $f: A \to \mathbb{R}$ T-periodica su A

con $\alpha \neq 0$ $f\left(\frac{x}{\alpha}\right) \to$ è periodica di $T_1 = \alpha T$ con $\alpha \in \mathbb{Q}$

$f\left(\frac{x}{\alpha}\right)$, $f\left(\frac{x+\alpha T}{\alpha}\right) = f\left(\frac{x}{\alpha} + \frac{\alpha}{\alpha}T\right) = f\left(\frac{x}{\alpha}+T\right) = f\left(\frac{x}{\alpha}\right)$

ES $f_1 = \operatorname{sen}(4x)$ $\alpha = \frac{1}{4}$ $T = \frac{1}{4} 2\pi = \frac{\pi}{2}$

$f_2 = \cos\left(\frac{x}{3}\right)$ $\alpha = 3$ $T = 3 \cdot 2\pi = 6\pi$

$f_3 = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ $\alpha = \frac{3}{2}$ $T = \frac{3}{2} \cdot 2\pi = 3\pi$

OSS Siano $f_1, f_2: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

f_1 sia T_1-periodica su A

f_2 sia T_2-periodica su A

$f = f_1 + f_2$ è ancora periodica? Non sempre

I) Se $\frac{T_1}{T_2} \in \mathbb{Q}$ allora f è ancora periodica

II) Il periodo di f è pari al mcm $\{T_1 ; T_2\}$

ES 1 $f(x) = 5\cos(2x) + 3\sin(\sqrt{3}x)$

I) $\frac{T_1}{T_2} = \frac{\pi}{2\pi}\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \notin \mathbb{Q}$ (non periodica)

ES 2 $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{3}\right) + \cos(2x) - 3\sin(3x)$

$T_1 = 6\pi$ $T_2 = \pi$ $T_3 = \frac{2}{3}\pi$

II) mcm $\left\{6\pi, \pi, \frac{2}{3}\pi\right\} = $ mcm $\left\{\frac{18\pi}{3}, \frac{3\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right\} = \frac{18}{3}\pi = 6$

$I_M(X_0) = \{X \in \mathbb{R} : X_0 - \tau < X < X_0 + \tau\}_{\tau > 0}$

$\mathring{I}_M(X_0) = I_M(X_0) - \{X_0\} = \{X \in \mathbb{R} : 0 < |X - X_0| < \tau\}$

$|X - X_0| > 0 \iff X \neq X_0$

$I_K(+\infty) = \{X \in \mathbb{R} : X > K\}_{K \in \mathbb{R}}$

$I_K(-\infty) = \{X \in \mathbb{R} : X < K\}_{K \in \mathbb{R}}$

$I_{\tau_1}(X_0) \cap I_{\tau_2} = I_\tau(X_0) \quad \tau = \min\{\tau_1, \tau_2\}$

Successioni

Funzione che abbia come dominio $\mathbb{N}$

$a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \quad n \mapsto a_n \in \mathbb{R}$

$a_n = n^2 \to \{a_n\} = \{0, 1, 4, 9, \dots\}$

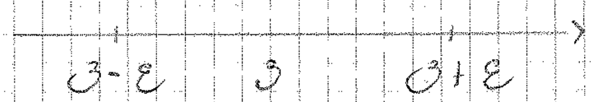
$b_n = (-1)^n \to \{b_n\} = \{-1, 1\}$

$c_n = \frac{3n}{n+1} \quad \{c_n\} = \{0, \frac{3}{2}, \frac{6}{3}, \dots\}$

Convergenza di una successione

$\lim_{n \to +\infty} a_n = l \in \mathbb{R} \overset{def}{\iff} \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon$

c_n



$n_0(\varepsilon)$ definitivamente interno all'intorno

ES $a_n = 2 - \frac{1}{n}, \; n > 0$

$a_1 = 1$

$a_2 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$a_3 = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$

$\lim_{n \to +\infty} a_n = 2 \overset{def}{\iff} \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \; n \geq n_0 \Rightarrow$
$\Rightarrow |a_n - 2| < \varepsilon \Rightarrow \left|2 - \frac{1}{n} - 2\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow$
$\Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$ Se $n > n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ allora $|a_n - 2| < \varepsilon$

Funzioni elementari

F. Esponenziale

$f(x)=a^x \quad a>0,\ a\in\mathbb{R}$

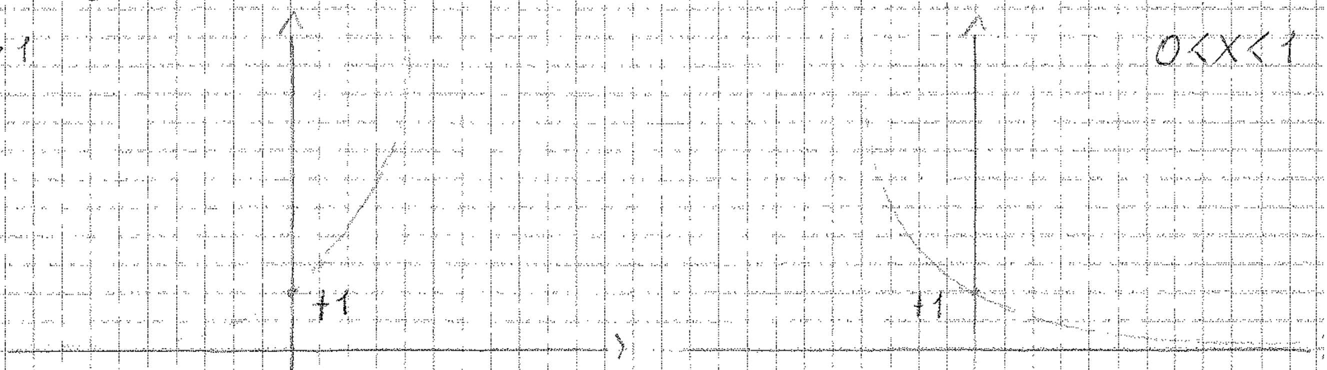
$\mathrm{Dom}\, f=\mathbb{R} \quad \mathrm{Imm}\, f=\mathbb{R}^+\setminus\{0\}=(0;+\infty)$

$\mathrm{Inf}\, f=0 \quad \mathrm{Sup}\, f=+\infty$

$f(-x)=a^{-x}=\frac{1}{a^x}=\frac{1}{f(x)}$ Non simmetrica

$f(x_1)=f(x_2)=a^{x_1}=a^{x_2} \Leftrightarrow x_1=x_2$ F. iniettiva

$a>1$ $\qquad$ $0<x<1$



Logaritmo (f. inversa dell'esponenziale)

$f(x)=\log_a x$

$\mathrm{Dom}\, f=(0;+\infty) \quad \mathrm{Imm}\, f=\mathbb{R}$

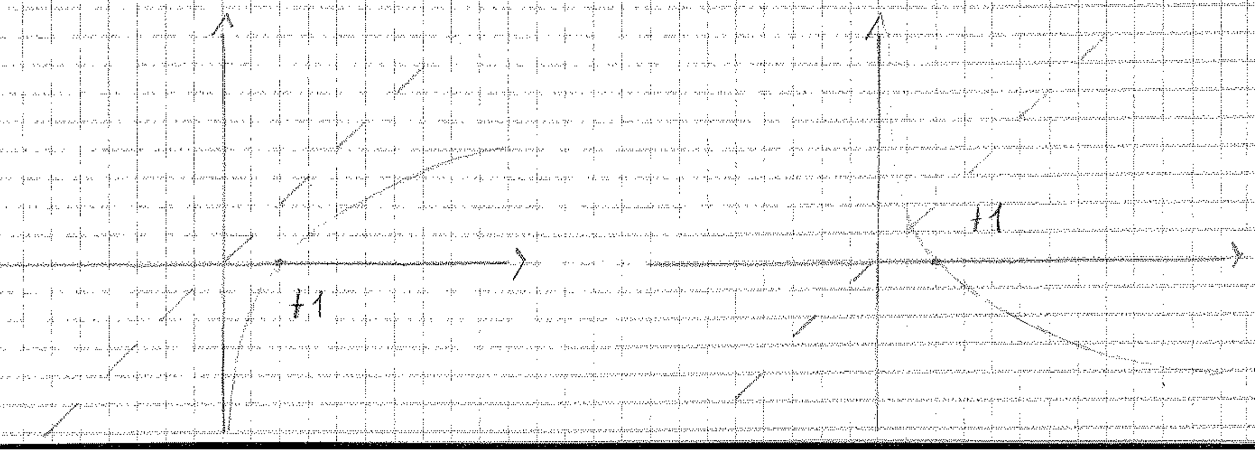
$\mathrm{Inf}\, f=-\infty \quad \mathrm{Sup}\, f=+\infty$

$f(x)\geq 0$ per $x\geq 1 \qquad f(x)<0$ per $0<x<1$

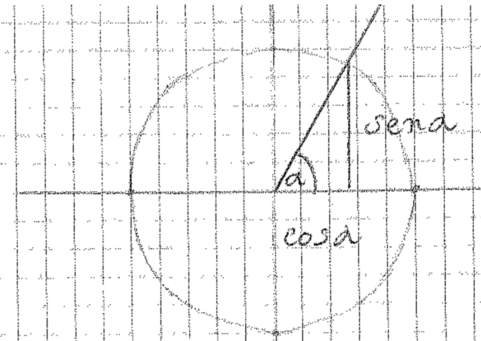
$f(-x)=\log_a(-x)$ F. non simmetrica

F. biettiva.

$a>1$



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 25 di 187



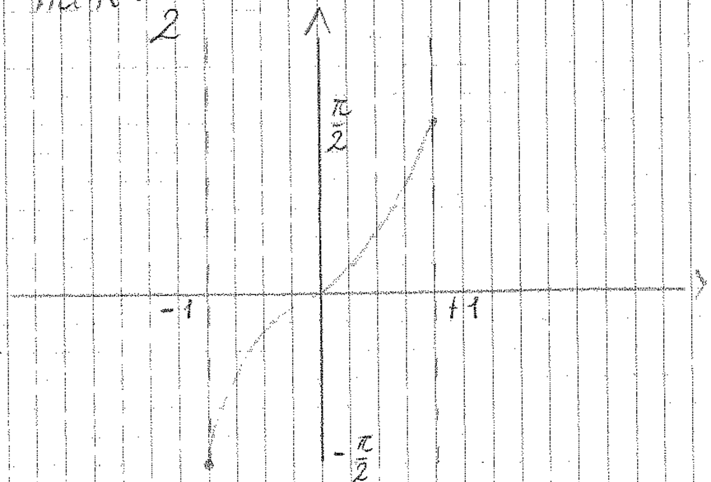
$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

Arcseno (f. inversa del seno)

Restrizione dom f: $\left[-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right]$

Dom $f^{-1} = [-1; +1]$ Imm $f^{-1} = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

Max $f = \frac{\pi}{2}$ min $= \frac{\pi}{2}$



Coseno

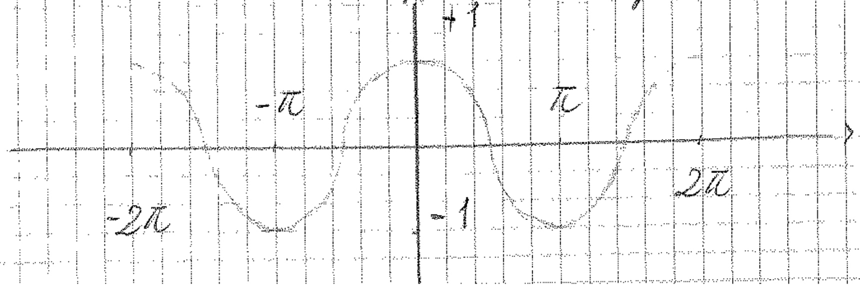
$f(x) = \cos(x)$ $p = 2\pi$ $\cos(x + 2K\pi) = \cos x$

Dom f: $\mathbb{R}$ Imm f: $[-1; +1]$

Sup f = Max $f = +1$ Inf f = min $f = -1$

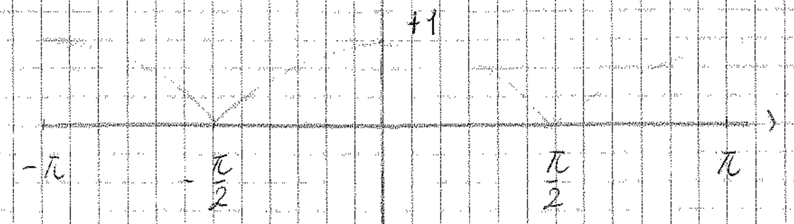
f. né iniettiva né suriettiva

$f(-x) = \cos(-x) = +\cos x = +f(x)$ f. ~~dis~~pari

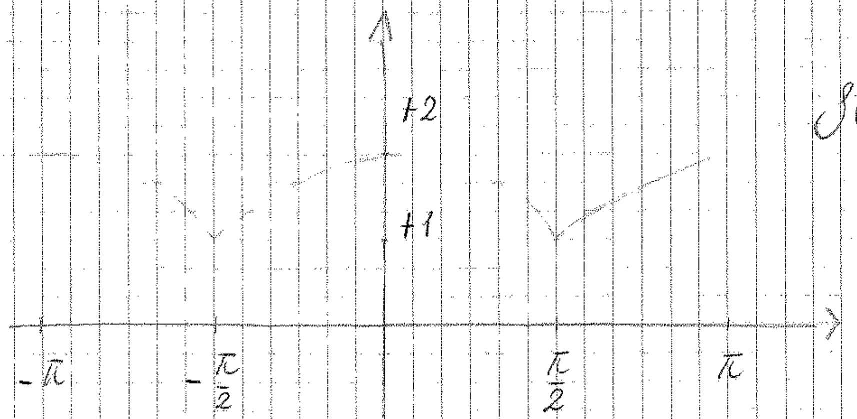


Esercitazione 11-10-12

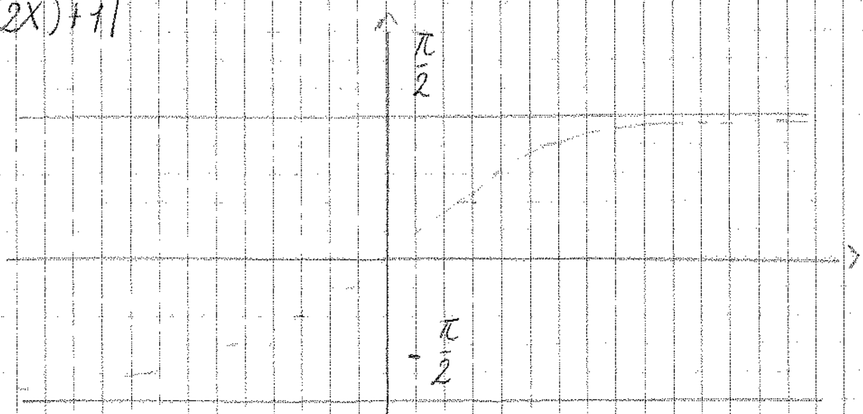
$f(X) = |\cos X|$



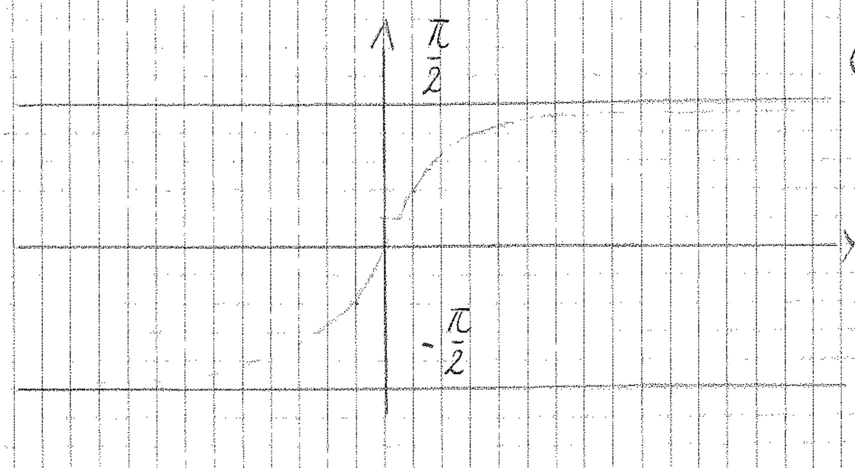
$f(X) = 1 + |\cos X|$



$f(X) = |\arctan(2X) + 1|$



$f(X) = \arctan($

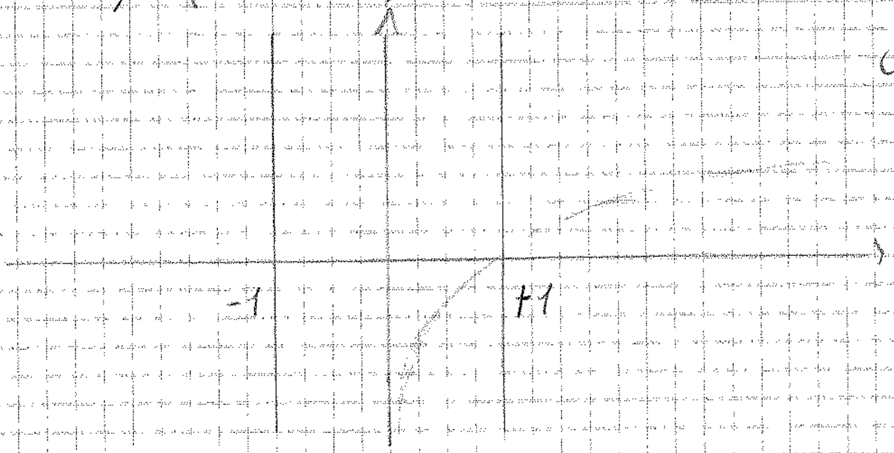


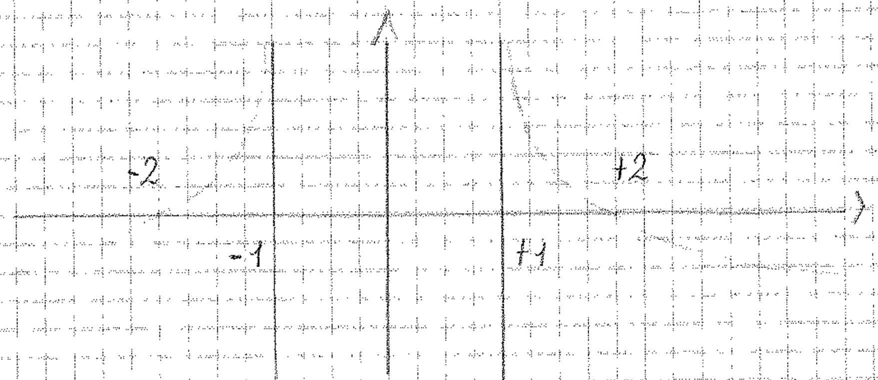
1) $f(x) = -\log(|x|-1)+2$

$\text{Dom} f = |x|-1>0 \quad |x|>1 \quad x<-1 \vee x>+1$

$\text{Dom} f = (-\infty; -1) \cup (+1; +\infty)$

$f(x) = \log(x)$





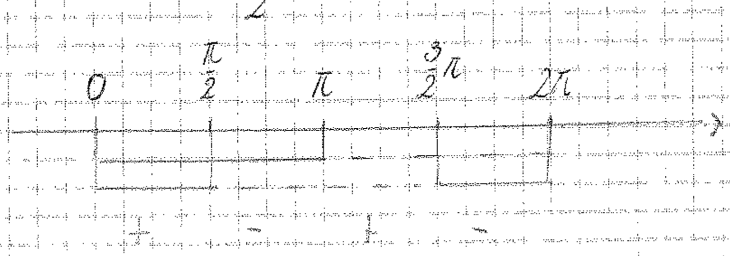
Domini

$f(x) = \log(\text{sen}x \cos x)$

$\text{Dom} f: \text{sen}x \cos x > 0$

$\text{sen}x > 0 \quad 2k\pi \leq x \leq \pi + (2k''+1)\pi$

$\cos x > 0 \quad 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi$



$\text{Dom} f = 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee \pi + 2k\pi < x < \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$

$f(x) \geq 0 \Rightarrow \cos x \,\text{sen}x \geq 1 \quad \nexists x \in D \quad f(x) < 0 \ \forall x \in D$

Dom $f = \mathbb{R}$

$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in D$

$\cosh(-x) = \frac{e^{-x}+e^{x}}{2} = \cosh(x)$ f. pari

Settore coseiperbolico di X (funzione inversa del coseno iperbolico)

$y = \log(x + \sqrt{x^2-1})$

NOTA $\operatorname{senh}^2 x - \cosh^2 x = \frac{e^{2x} - e^{-2x} - 2e^{x}e^{-x}}{4} - \frac{e^{2x} - e^{-2x} + 2e^{x}e^{-x}}{4} = \frac{-4}{-4} =$

Tangente iperbolica

$\tanh x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}$

N. oscillanti

a_n è oscillante e indeterminata se non è né convergente né divergente.

$$a_n = (-1)^n \begin{cases} 1 & \text{con } n \text{ pari} \\ -1 & \text{con } n \text{ dispari} \end{cases}$$

$\{a_n\}$ è regolare $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ è convergente o divergente

$\{a_n\}$ è monotona crescente $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1}$

$\{a_n\}$ è monotona strettamente cresc. $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : a_n < a_{n+1}$

Concetto di "definitivamente"

$p(n)$ è definitivamente modificata se $\exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0,\ p(n)$ è vera

$a_n = \frac{n-21}{n^2}$ è definitivamente positiva con $n > 21$

ES $\{a_n\}$ è definitivamente monot. cresc. $\overset{def}{\Leftrightarrow} \exists n_0,\ n \geq n_0 : a_n \leq a_{n+1}$

Teorema di regolarità

$\{a_n\}_{n \geq n_0} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

I) a_n sia monotona

T) a_n è regolare

Leg. I: ipotesi 1
T: tesi

COROLLARIO 1 $\{a_n\}_{n \geq 0}$

I) $\{a_n\}$ monotona crescente

II) a_n superiormente limitata (esiste un $K \in \mathbb{R} : a_n \leq K,\ \forall n$)

T) $\lim_{n \to +\infty} a_n = \sup \{a_n\}_{n \in \mathbb{N} \text{ o } n \geq n_0}$

COROLLARIO 2 $\{a_n\}_{n \geq n_0}$

I) a_n è monotona crescente

II) a_n è superiormente non limitata

T) $\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$

Cioè $\frac{a_n}{a_{n-1}} \geq +1 \ \forall n$ CVD I)

Dimostrazione II ipotesi

$b_n = a_n \left(1+\frac{1}{n}\right) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$

Voglio dimostrare che b_n è decrescente

$$b_n \quad b_{n+1} \quad \forall n$$

$$\frac{b_{n-1}}{b_n} \geq 1 \qquad \frac{b_{n-1}}{b_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \left(\frac{1+\frac{1}{n-1}}{1+\frac{1}{n}}\right)^{n+1} \cdot \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{-1} =$$

$$\left(\frac{\left(\frac{n-1+1}{n-1}\right)}{\frac{n+1}{n}}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{n-1}} = \left(\frac{n^2-1+1}{n^2-1}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{n-1}} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{n+1}} \geq * $$

$$= \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1} \geq 1+\frac{n+1}{n^2-1} = 1+\frac{1}{n-1} \quad \text{NOTA}$$

$$* \geq \left(1+\frac{1}{n-1}\right) \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{n-1}} = 1 \qquad \frac{b_{n-1}}{b_n} \geq 1 \ \forall n \ \text{CVD (II)}$$

b_n è decres.

$b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \ldots \geq b_n \ \forall n$

$b_1 = (1+1)^{1+1} = 2^2 = 4 \geq b_n = a_n \left(1+\frac{1}{n}\right) > a_n$

$\forall n : a_n < 4 \Rightarrow a_n$ è superiormente limitata CVD

Da I) + II) segue che $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$

Teorema di Unicità

Se $a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e $a_n \to l$ allora l è unico

$a \geq 0 \quad a < \varepsilon, \forall \varepsilon$

I) $\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} c_n = l \in \mathbb{R}$

II) definitivamente $a_n \leq b_n \leq c_n$

T) $\lim_{n \to +\infty} b_n = l$

OSS 1 Se $\{a_n\}$ è limitata
$\{b_n\}$ è un infinitesimo ($b_n \to 0$)
allora $c_n = a_n \cdot b_n \to 0$

ES 1 $c_n = (-1)^n \dfrac{n^3}{n^4+5} \to 0$
$(-1)^n$ limitato, $\dfrac{n^3}{n^4+5} \to 0$

OSS 2 $\{a_n\}$ $\{b_n\}$ $b_n \to +\infty$ Diverge
a_n è limitata, ma non si annulla infinite volte in un intorno di $+\infty$
allora $c_n \cdot b_n \to +\infty$

ES 2 $\lim_{n \to +\infty} \left(\cos \dfrac{\pi n}{2}\right) n^2$ = Non esiste, perché $\dfrac{\pi}{2} n$ sen $\in \mathbb{N}$ dispari allora $\cos\left(n \dfrac{\pi}{2}\right) = 0$
$\cos \dfrac{\pi n}{2}$ limitata, n^2 infinito

ES 3 $\lim_{n \to +\infty} \left(K + \sin\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)\right) \cdot n^3$, $n^3 \to +\infty$

$K - 1 \leq K + \sin\left(\dfrac{n\pi}{2}\right) \leq K + 1$

con $K > 1 \vee K < -1 \to$ il limite esiste e vale $+\infty$

con $-1 \leq K \leq 1 \Rightarrow$ limite non esiste

ES 4 $\lim_{n \to +\infty} \dfrac{4 + \sin(n)}{n}$

$$\frac{3}{n} \leq \frac{4+\sin(n)}{n} \leq \frac{5}{n}$$
$$\downarrow \qquad\quad \Downarrow \qquad\quad \downarrow$$
$$0 \qquad\quad 0 \qquad\quad 0$$

Algebra dei limiti $\overline{\mathbb{R}} = \{\mathbb{R}, +\infty, -\infty\}$

Se a_n e $b_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ allora

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 41 di 187

Successione a termini positivi $\{a_n\} : a_n > 0, \forall n$

Criterio del rapporto

Se $a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ è una successione a termini positivi e se

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

Allora $a_n \to +\infty$ se $q > 1$
$a_n \to 0$ se $q < 1$
$a_n \to ?$ se $q = 1$

Dimostrazione

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1 \iff \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 : n \geq n_0 : q - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < q + \varepsilon$$

ma se $q < 1$ posso scegliere l'arbitrarietà di ε $q + \varepsilon < 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow n \geq n_0 \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Rightarrow a_n$ definitivamente decrescente, ma anche $a_n > 0$ $\Big\}$ a_n convergente per corollario 1 B.W.

Per dimostrare che converge a 0 opero per assurdo

Se $a_n \to l \neq 0$ allora il limite $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{l}{l} = 1$ contro l'ipotesi $q < 1$

Per dimostrare che $q > 1$ basta considerare la successione

$$b_n = \frac{1}{a_n} \to \frac{1}{q} < 1$$

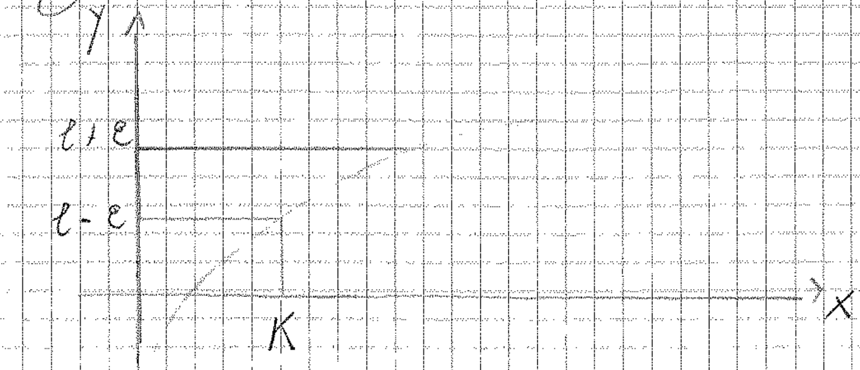
Criterio della radice

Se $a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ è una successione a term. posit.

se $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$

allora se $q < 1 \Rightarrow a_n \to 0$
se $q > 1 \Rightarrow a_n \to +\infty$
se $q = 1 \iff ?$

Limiti di funzione

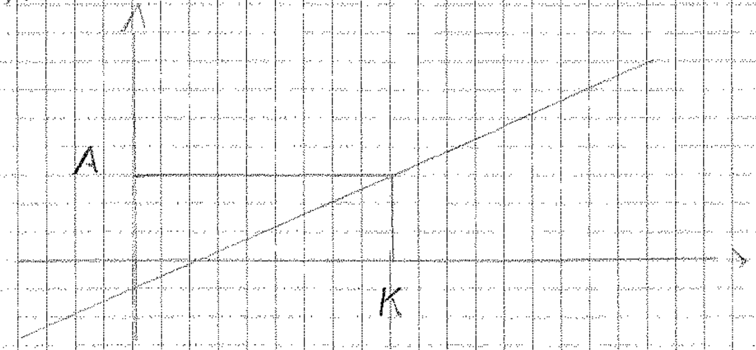


I) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \in \mathbb{R} \overset{def}{\iff} \forall \varepsilon>0, \exists K>0 : x\in dom f \wedge x>K \Rightarrow |f(x)-l|<$

Altra definizione:

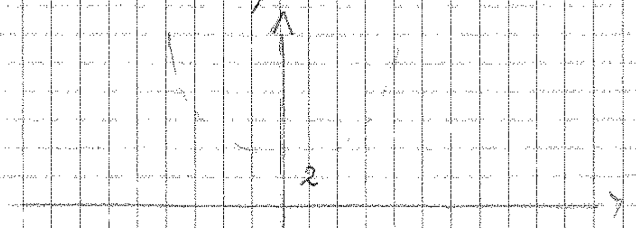
$x\in I_K(+\infty) \to y \in I_\varepsilon(l)$ $\left(x\in(K,+\infty) \Rightarrow y\in(l-\varepsilon, l+\varepsilon)\right)$

II $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \overset{def}{\iff} \forall A>0, \exists K>0 : x\in dom f\wedge x>K \Rightarrow f(x)>A$

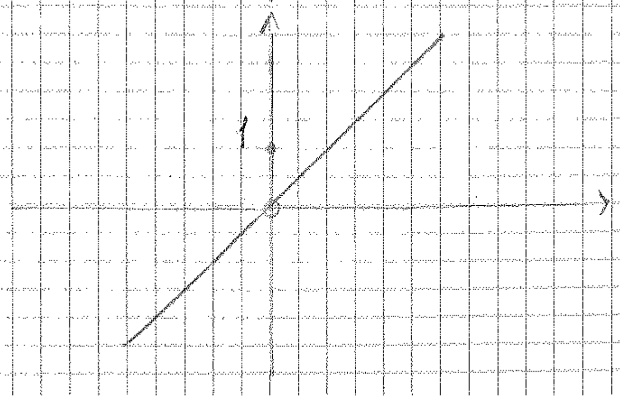


Funzione continua in un punto (x_0)

$f(x)=x^2+2$



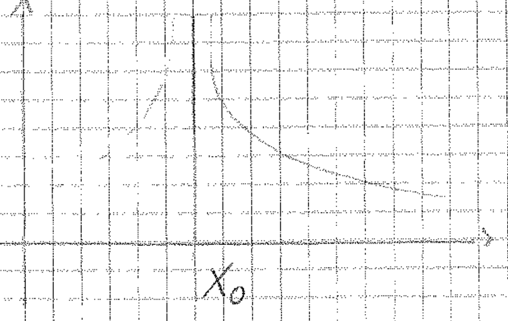
$f(x)=[\cos x]+x$



Si può definire la f

f è continua su I $\overset{def}{\iff}$ se è continua per $\forall x \in I$

OSS Tutte le funzioni elementari (tranne mantissa, segno e parte intera) sono continue nel loro dominio.



$$\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty \overset{def}{\iff} \forall A>0,\ \exists\delta>0: x\in dom f \wedge |x-x_0|<\delta \Rightarrow f(x)>A$$

ES $\lim_{x\to 1}\frac{1}{x^2-x}=\infty$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty \overset{def}{\iff} \forall A>0,\ \delta>0: x\in dom f \wedge 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)|>A$$

$$\left|\frac{1}{x^2-x}\right|>A \Rightarrow |x^2-x|<\frac{1}{A} \qquad -\frac{1}{A}<x^2-x<\frac{1}{A}$$

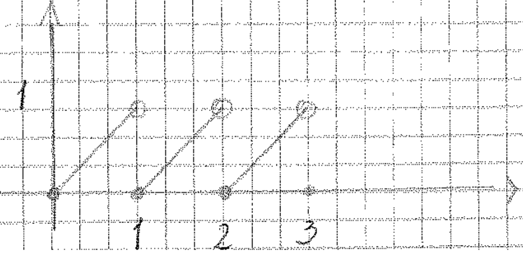
$$\begin{cases} x^2-x+\frac{1}{A}>0 \\ x^2-x-\frac{1}{A}<0 \end{cases} \qquad \begin{cases} Ax^2-Ax+1>0 & 1) \\ Ax^2-Ax-1<0 & 2) \end{cases}$$

1) $x=\frac{A\pm\sqrt{A^2-4A}}{2A}=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{A^2-4A}}{2A}$ $\quad x<\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{A^2-4A}}{2A} \vee x>\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{A^2+4A}}{2A}$

2) $x=\frac{A\pm\sqrt{A^2+4A}}{2A}=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{A^2+4A}}{2A}$ $\quad \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{A^2+4A}}{2A}<x<\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{A^2+4A}}{2A}$

$\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{A^2-4A}}{2A} \quad \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{A^2-4A}}{2A} \quad \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{4A^2-4A}}{2A} \quad 1 \quad \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{A^2+4A}}{2A}$

Limiti laterali



25-10-12

ES $f(X) = \begin{cases} \sin 1/X & X \neq 0 \\ 0 & X = 0 \end{cases}$

$\sin \frac{1}{X} = 0 \qquad \frac{1}{X} = K\pi \qquad X = \frac{1}{K\pi}$

$\sin \frac{1}{X} = 1 \qquad \frac{1}{X} = \frac{\pi}{2} + 2K\pi \qquad X = \frac{1}{\pi/2 + 2K\pi}$

$h = 0 \qquad X_0 = \frac{1}{\pi/2} = \frac{2}{\pi}$

$h = 1 \qquad X_1 = \frac{1}{\pi/2 + 2\pi} = \frac{2}{5\pi}$

$h = 2 \qquad X_2 = \frac{2}{9\pi}$

$\lim_{X \to 0} f(X)$ = Non esiste = Discontinuità di seconda sp.

ES 2 $\quad f \begin{cases} e^{1/X-1} & X \neq 1 \\ 0 & X = 1 \end{cases}$

$\lim_{X \to 1^-} e^{\frac{1}{X-1}} = e^{-\infty} = 0$

$\lim_{X \to 1^+} e^{\frac{1}{X-1}} = e^{+\infty} = +\infty$

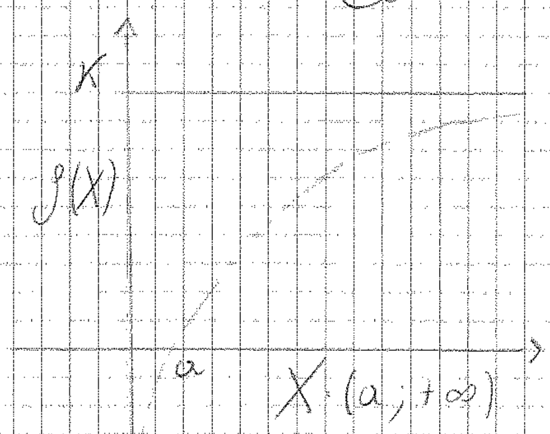
Discontinuità seconda specie

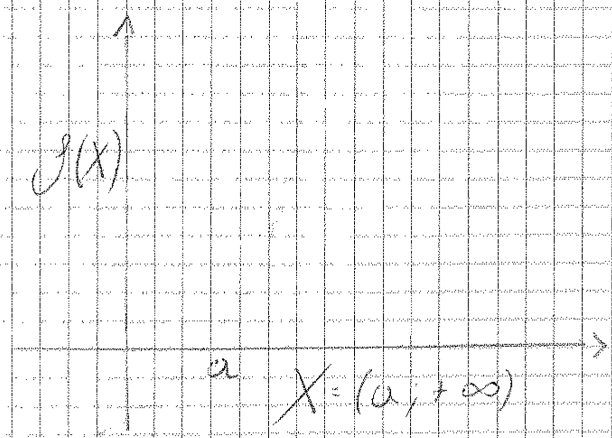
TEOREMA 1

Sia $f\ X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $X = (a; +\infty)$

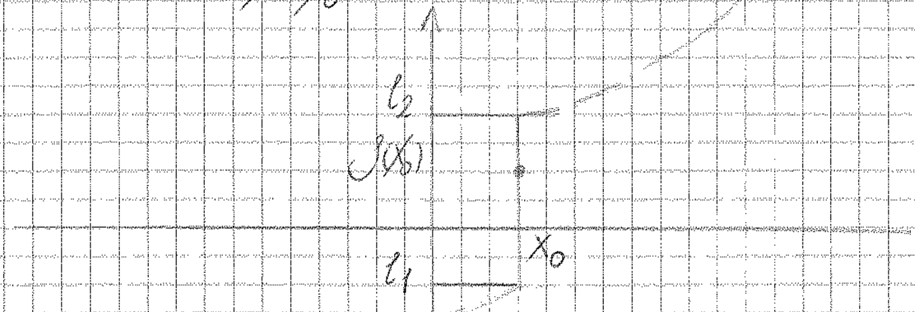
I) f sia monotona su $(a; +\infty)$

T) $\lim_{X \to +\infty} f(X) \begin{cases} \sup f(X) & \text{se } f \text{ è crescente} \\ \inf f(X) & \text{se } f \text{ è decrescente} \end{cases}$





T) $\lim_{x \to x_0^-} f(x) \leq f(x) \leq \lim_{x \to x_0^+} f(x)$



NOTA D'ora in avanti con x_0 o c potremo indicare i simboli
$x_0, x_0^+, x_0^-, +\infty, -\infty$

Teorema di unicità

$f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

I) Suppongo che $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$

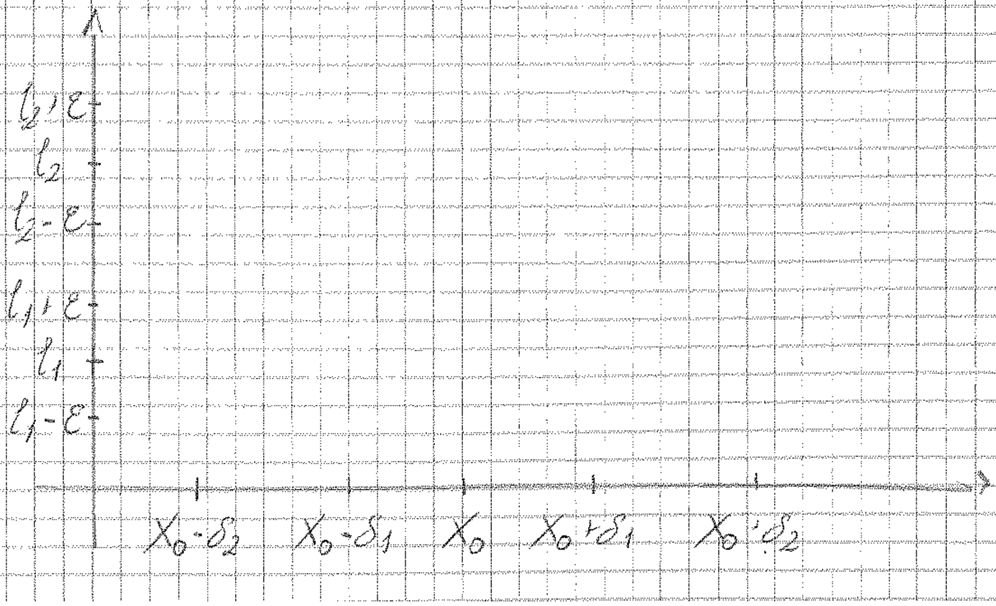
T) Il limite è unico

Dimostrazione (per l finito)

Accettiamo per assurdo che $\underset{(1)}{\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1} \wedge \underset{(2)}{\lim_{x \to x_0} f(x) = l_2}$ con $l_1 \neq l_2$

(1) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - l_1| < \varepsilon$
(2) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_2 > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - l_2| < \varepsilon$

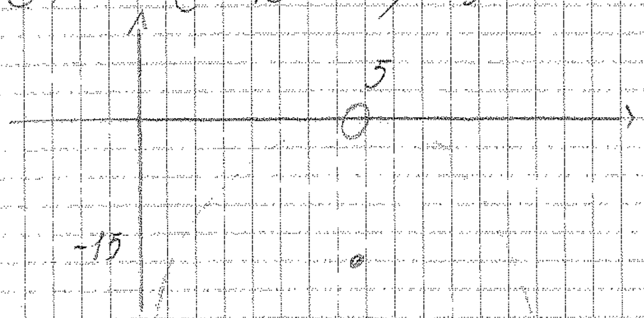
NOTA $|f(x) - l_1| < \varepsilon \iff l_1 - \varepsilon < f(x) < l_1 + \varepsilon$
$|f(x) - l_2| < \varepsilon \iff l_2 - \varepsilon < f(x) < l_2 + \varepsilon$



T) $l \geq 0$

NOTA Sia per il primo che per il secondo teorema valgono anche nel caso $l = \infty$

ES $f(x) = \begin{cases} -(x-5)^4 & x \neq 5 \\ -15 & x = 5 \end{cases}$



$\lim_{x \to 5} f(x) = 0$

$f(x) < 0 \ \forall x \in \dot{I}_\delta(5)$

Teorema del confronto

$f, g : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

I) $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \wedge \lim_{x \to x_0} g(x) = m$

II) $f(x) \leq g(x) \ \forall x \in \dot{I}(x_0)$

T) $l \leq m$

Teorema del doppio confronto

$f, g, h : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

I) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = l$

II) $\exists \dot{I}_c(x_0) : f(x) \leq g(x) \leq h(x)$

T) $\exists \lim_{x \to x_0} g(x) = l$

Dimostrazione

I) $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{\delta} > 0 : 0 < |x - x_0| < \bar{\delta} \Rightarrow l - \varepsilon < h(x) < l + \varepsilon$

Scelto $\delta^* = \min\{\delta, \bar{\delta}, c\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall x \in \dot{I}_{\delta^*}(x_0) \Rightarrow l - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < l + \varepsilon$ CVD

II) $\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = 0$

Dimostrazione

$0 \leq |f(x) \cdot g(x)| \leq c \cdot g(x) \quad \forall x \in I(x_0)$

$\downarrow 0 \qquad \downarrow 0$

Teorema sul limite di una funzione composta
(o teorema di sostituzione o teorema del cambiamento di variabile)

Siano $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g: Y \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(X) \subseteq Y$

Siano $x_0, y_0 \in \overline{\mathbb{R}}$

I) f sia definita su $I(x_0) \setminus \{x_0\}$ ed $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$

II) Sia g definita su $I(y_0) \setminus \{y_0\}$ e valga una delle due condizioni seguenti:

a) g è definita e continua in y_0

b) $f(x) \neq y_0 \ \forall x \in X \wedge$ esiste $\lim_{y \to y_0} g(y) \in \mathbb{R}$

T) $\lim_{x \to x_0} g[f(x)] = \lim_{y \to y_0} g(y)$

ES $\lim_{x \to 0} x \cdot \sin \frac{1}{x}$ ①

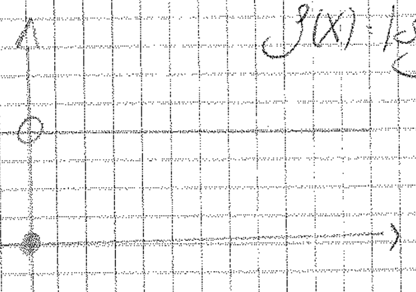
$\lim_{y \to 0} |\text{sign}\, y|$ ②

$\lim_{x \to 0} \left|\text{sign}\left(x \cdot \sin \frac{1}{x}\right)\right|$ ③

① $-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq +1 \quad x \to 0^+$

$-x \leq x \sin \frac{1}{x} \leq x$

$\downarrow 0 \qquad \downarrow 0 \qquad \downarrow 0$

② 

$f(x) = |\text{sign}\, y|$

$\lim_{y \to 0} |\text{sign}\, x| = 1$

III) $\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = l \cdot m \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow$
$\Rightarrow |f(x) \cdot g(x) - l \cdot m| < \varepsilon$

$$|f(x) \cdot g(x) - l \cdot m - f(x) \cdot m| = |f(x) \cdot (g(x) - m) + m(f(x) - l)| \overset{D.T.}{\leq}$$
$$\leq |f(x)| \cdot |g(x) - m| + |m| \, |f(x) - l| \leq (|l| + \varepsilon) \, \varepsilon + |m| \varepsilon =$$
$$= \varepsilon (|l| + \varepsilon + |m|) = \varepsilon \cdot K, \; K > 0$$

$\lim_{x \to x_0} |f| = |l| \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_3 : 0 < |x - x_0| < \delta_3 \Rightarrow |l| - \varepsilon <$
$< |f| < |l| + \varepsilon \qquad \delta^* = \min\{\delta_1 ; \delta_2 ; \delta_3\}$

$$\lim_{t\to 0} \frac{e^{\alpha t}-1}{e^t-1}\cdot\frac{\alpha t}{\alpha t} = \lim_{t\to 0}\frac{e^{\alpha t}-1}{\alpha t}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\alpha t}{e^t-1}$$

Posto $z=\alpha t$ $\quad t\to 0 \Rightarrow z\to 0$

$$\underbrace{\lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z}}_{1}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\alpha}{\underbrace{\frac{e^t-1}{t}}_{1}} = \alpha$$

OSS $\quad f(x)^{g(x)} \stackrel{def}{=} e^{g(x)\ln f(x)}$ $\quad$ Campo di esistenza $f(x)>0$

$y=(x^2-1)^{\frac{1}{x}}$ $\quad \begin{cases} x^2-1>0 \\ x\neq 0 \end{cases}$

$\left[\, y=(x^2-1)^{\pi} \quad C.E.\ x^2-1>0 \quad e^{\pi\ln(x^2-1)} \,\right]$

$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}$ $\quad [\infty^0]\ \ [0^0]\ \ [1^\infty]$

ES $\quad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{\frac{x^2+3}{x+\sqrt[3]{x}}} = 1^\infty = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{x^2+3}{x+\sqrt[3]{x}}\cdot\ln\left(\frac{x-2}{x+1}\right)}$

$$\frac{x^2+3}{x+\sqrt[3]{x}} = \frac{x^2(1+3/x^2)}{x(1+1/x^{2/3})} = \frac{x(1+3/x^2)}{1+1/x^{2/3}}$$

$$\ln\left(\frac{x-2}{x+1}\right) = \ln\left(1-\frac{3}{x+1}\right)\cdot\frac{-3/(x+1)}{-3/(x+1)}$$

$y=-\frac{3}{x+1}$ $\quad$ se $x\to+\infty \Rightarrow y=0$

$$\lim_{y\to 0}\ln\left(\frac{1+y}{y}\right)=1$$

$$\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1+3/x^2}{1+1/x^{2/3}}\cdot\ln\left(\frac{1+y}{y}\right)\left(-\frac{3x}{x+1}\right)} = e^{-3}$$

Criterio di non esistenza dei limiti

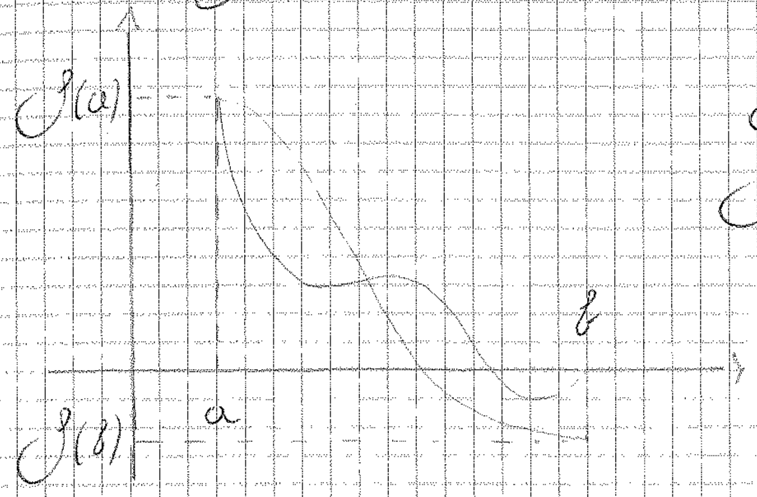
Sia f una funzione continua

$a_n\to l \qquad b_n\to l \qquad l\in\overline{\mathbb{R}}$

Se $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) \neq \lim_{n\to+\infty} f(b_n)$ allora

$\lim_{x\to l} f(x)$ non esiste

OSS Se f è strettamente monotona su $[a;b]$ allora $\bar{x}$ è un



$f(a)>0$
$f(b)<0$

Dimostrazione $a_0 = a \quad b_0 = b$

$$c_0 = \frac{b+a}{2} \quad \begin{cases} f(c_0) = 0 \to c_0 = \bar{x} \\ f(c_0) > 0 \to a_1 = c_0 , \ b_1 = b_0 \\ f(c_0) < 0 \to a_1 = a_0 , \ b_1 = c_0 \end{cases}$$

$[a_1 ; b_1] \subseteq [a, b] \quad f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$

$$c_1 = \frac{b+a}{4} \quad \begin{cases} f(c_1) = 0 \to c_1 = \bar{x} \\ f(c_1) > 0 : a_2 = c_1 ; \ b_2 = b_2 \\ f(c_1) < 0 : a_2 = a_1 ; \ b_2 = c_1 \end{cases}$$

$[a_2 ; b_2] \subseteq [a_1 ; b_1] \subseteq [a, b]$

Ampiezza $[a_n ; b_n] = \frac{b-a}{2^n}$

$\{a_n\}$ è crescente, superiormente limitata da b_n

$\{b_n\}$ è decrescente, inferiormente limitata da a_n

$\Rightarrow a_n \to l_1 , \ b_2 \to l_2$

(1) $\lim_{n\to+\infty} (b_n - a_n) = \lim_{n\to+\infty} b_n - \lim_{n\to+\infty} \ l_2 - l_1$

ma anche $\lim_{n\to+\infty} (b_n - a_n) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{b-a}{2^n}\right) = 0$

U.L. $\Rightarrow l_2 - l_1 = 0 \Rightarrow l_2 = l_1 = l \quad \begin{matrix} a_n \to l \\ b_n \to l \end{matrix}$

Proprietà simboli di Landau

1) $f \sim g$ per $x \to c \Rightarrow f \asymp g$ per $x \to c$

2) $f = o(g)$ per $x \to c \Rightarrow f = O(g)$ per $x \to c$

3) $f \asymp g$ per $x \to c \Leftrightarrow \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0$

$\Rightarrow \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{l\, g(x)} = 1 \Rightarrow f(x) \sim l\, g(x)$ per $x \to c$

4) $f \sim g$ per $x \to c \Leftrightarrow \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

$\Rightarrow \lim_{x \to c} \left[\frac{f(x)}{g(x)} - 1\right] = 0$

$\Rightarrow \lim_{x \to c} \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} = 0 \Rightarrow f(x) - g(x) = o[g(x)]$ per $x \to c$

$\Rightarrow f(x) = g(x) + o[g(x)]$ $x \to c$

Osservazione

$\forall \lambda \neq 0 : \lambda o(f) = o(\lambda f) = o(f)$ per $x \to c$

Rilettura limiti notevoli

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x \sim x$ per $x \to 0$

$\overset{4}{\Leftrightarrow} \operatorname{sen} x = x + o(x)$ per $x \to 0$

$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - \cos x \asymp x^2$ per $x \to 0$

$\overset{3}{\Leftrightarrow} 1 - \cos x \sim \frac{1}{2} x^2$ $x \to 0$

$\overset{4}{\Leftrightarrow} 1 - \cos x = \frac{1}{2} x^2 + o\left(\frac{1}{2} x^2\right)$

$\cos x = 1 - \frac{1}{2} x^2 + o(x^2)$ per $x \to 0$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{ch} x - 1}{x^2} = \frac{1}{2}$ $\quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

Algebra degli o-piccolo

1) $o(f) \pm o(f) = o(f) \quad x \to c$

2) $o(o(f)) = o(f) \quad x \to c$

3) $g \cdot o(f) = o(f \cdot g) \quad x \to c$

4) $o(g) \cdot o(f) = o(f \cdot g) \quad x \to c$

5) $o(f) + o(f) = o(f) \quad x \to c$

6) $[o(f)]^K = o(f^K) \quad x \to c \quad K > 0$

7) $[f + o(f)]^K = f^K + o(f^K) \quad x \to c$

8) $\frac{o(f)}{g} = o\left(\frac{f}{g}\right) \quad x \to c$

① Dimostrazione 5

$\varphi = o(f + h)$ con $h(x) = o(f)$

allora $\varphi = o(f)$

$\varphi = o(f + h)$ per $x \to c \iff 0 = \lim_{x \to c} \frac{\varphi}{f + h} =$

$= \lim_{x \to c} \frac{\varphi}{f\left[1 + \frac{h}{f}\right]} = \lim_{x \to c} \frac{\varphi}{f} \Rightarrow \varphi = o(f)$

Caso notevole $x \to 0$

$x^m = o(x^n)$ per $x \to 0 \Rightarrow m > n$

invece per $x \to +\infty \Rightarrow m < n$

$o(x^n) \pm o(x^m) = o(x^K) \quad K = \min\{n, m\}$

ii) $f_1 = o(f) \wedge g_1 = o(g)$ per $x \to c$

Tes. 1

$$\lim_{x\to c} \left[f(x) + f_1(x)\right]\left[g(x) + g_1(x)\right] = \lim_{x\to c} f(x) \cdot g(x)$$

Tes. 2

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)+f_1(x)}{g(x)+g_1(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} \iff \lim_{x\to c} \frac{f(x)+o[f(x)]}{g(x)+o[g(x)]} = \lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$$

NOTA

Se $f \sim f_1$ e $g \sim g_1$

NON è VERO che $\lim_{x\to c} \left[f(x) \pm g(x)\right] = \lim_{x\to c} \left[f_1 \pm g_1\right]$

NOTA

$$\lim_{x\to+\infty} \left[\frac{\ln\left(1+\frac{x^2}{x^3+3}\right)}{\frac{x^2}{x^3+3}}\right] = 1$$

$$\lim_{\varphi\to 0} \frac{\ln(1+\varphi)}{\varphi} = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{3x+\cos x}{2x-\operatorname{sen} x}\right)$$

$$\frac{3x-1}{2x+1} \leq \frac{3x+\cos x}{2x-\operatorname{sen} x} \leq \frac{3x+1}{2x-1}$$

$$\frac{3}{2} \qquad\qquad \frac{3}{2} \qquad\qquad \frac{3}{2}$$

)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}\left(\sqrt[4]{\cos x}-1\right)\left(\ln\sqrt{x^2+9}-\ln 3\right)}{\operatorname{senh}\left(e^{e^x}-e^{-\cos x}\right)\left(e^{\frac{2x^2}{3x+5}}-1\right)}$$

Infinitesimi [e infiniti]

$f, g : I(c) \to \mathbb{R}$

i) $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = 0 \quad [\infty]$

$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} 0 & 1) \\ \infty & 2) \\ l \neq 0 \in \mathbb{R} & 3) \\ \text{N.E.} & 4) \end{cases}$

1) f è infinitesimo di ordine superiore a g
[f è infinito di ordine inferiore]

2) f è infinitesimo di ordine inferiore a g
[f è infinito di ordine superiore]

3) f e g hanno lo stesso ordine di infinitesimo
[stesso ordine di infinito]

4) f e g sono infinitesimi non confrontabili
[infiniti non confrontabili]

Parte principale

$\lim_{x \to c} f(x) = 0 \quad [\infty]$

$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{[g(x)]^{\alpha}} = l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Rispetto all'infinitesimo campione $g(x)$, $f(x)$ ha parte principale $p.p. = l \cdot g(x)^{\alpha}$ e ha ordine di infinitesimo α

Esempio

$f(x) = \operatorname{sen}\left(\sqrt[4]{\cos x} - 1\right) \to 0$ se $x \to 0$

$g(x) = x$

06/11/12

NOTA

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

con $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$

Se l è finito $\neq 0$ (infinità dello stesso ordine)

$\Leftrightarrow f \asymp g$ per $x \to x_0$

Se $l = 0$, $f = o(g)$ per $x \to x_0$ $\Leftrightarrow$ l'ordine di infinito di g è maggiore dell'ordine di infinito di f

Se $l = +\infty$ $g = o(f)$ per $x \to x_0$ $\Leftrightarrow$ l'ordine di infinito di f è superiore a quello di g

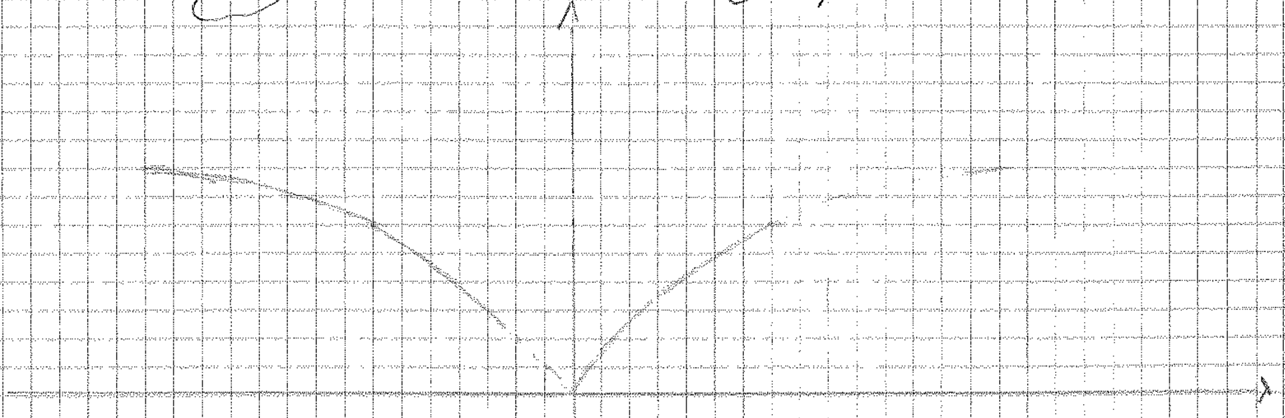
ESEMPIO

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{1 - \sqrt[3]{x}} \qquad x \neq 1$$

$x \to 0$

$$f(x) \sim \frac{x^{2/3}}{1} = x^{2/3} \Leftrightarrow f(x) = x^{2/3} + o(x^{2/3}) \quad \text{per } x \to 0$$

$pp(x) = x^{2/3}$ infinitesimo di ordine $\frac{2}{3}$ (per $x \to 0$)



Asintoticità

$f, g : I(+\infty) \to \mathbb{R}$

f è asintotica a g per $x \to +\infty \overset{\text{def}}{\iff} \lim_{x \to +\infty} (f - g) = 0$

ES $f(x) = x^3 \quad g = x^3 - \frac{1}{x}$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x^3 - \frac{1}{x}} = 1 \Rightarrow f \sim g \quad x \to +\infty$

NOTA $f(x) = x^3 \quad g = x^3 - \frac{1}{x}$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x^3 - \frac{1}{x}} = 1 \Rightarrow f \sim g \quad x \to +\infty$

NOTA 2 $f_1(x) = x^3 + \sqrt[3]{x} \quad f_2(x) = x^3 \quad f_3(x) = x^3 + \sin x$

$x \to +\infty \quad f_1 \sim f_2 \sim f_3$

f_1 è asintotica a f_2 ?

$\lim_{x \to +\infty} (f_1 - f_2) = \lim_{x \to +\infty} (x^3 + \sqrt[3]{x} - x^3) = +\infty$ Non asintotiche

f_3 è asintotica a f_2 ?

$\lim_{x \to +\infty} (f_3 - f_2) = \lim_{x \to +\infty} (x^3 + \sin x - x^3) = N.E.$ Non asintotiche

TEOREMA

Siano $f, g : I(+\infty) \to \mathbb{R}$

i) f, g siano asintotiche a $+\infty$

T) Allora $f \sim g$ per $x \to +\infty$

Dimostrazione

$f \sim g$ per $x \to +\infty \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f}{g} = 1 \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{f-g}{g} = 0 \quad f - g \to 0$ per

Due funzioni asintotiche sono sempre equivalenti, ma non vale sempre il contrario.

Se esiste finito $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{x-2}{x+1}} = e = m$

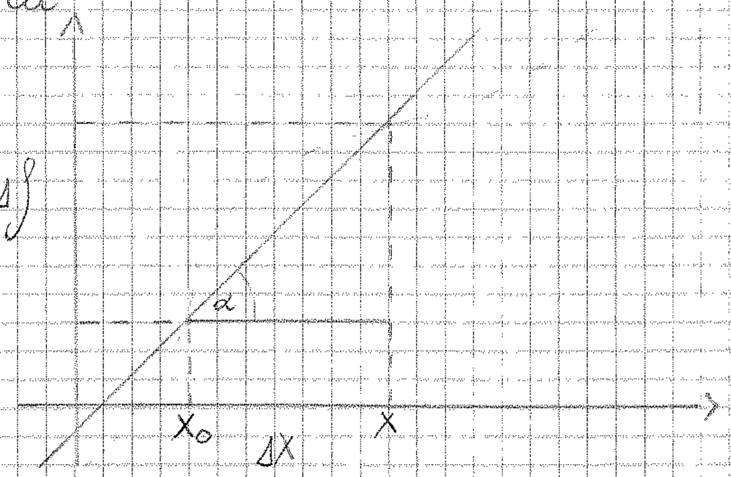
Se esiste finito $\lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to+\infty} \left[x \cdot e^{\frac{x-2}{x+1}} - ex\right] =$

$= \lim_{x\to+\infty} ex\left(e^{\frac{x-2}{x+1}-1} - 1\right) = \lim_{x\to+\infty} ex\left[e^{-\frac{3}{x+1}} - 1\right] =$

$= \lim_{x\to+\infty} ex\left[1 - \frac{3}{x+1} + o\left(\frac{1}{x+1}\right) - 1\right] = -3e$

A. obliquo $x \to +\infty$ $y = ex - 3e$

Derivata



$f: I(x_0) \to \mathbb{R}$

$x_0 \in \text{dom} f$

$\Delta x = x - x_0$ $\quad \Delta f = f(x) - f(x_0)$

$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

$\tan\alpha = \left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\right) = m$ secante $p p_0$

Equazione della retta secante:

$y = s(x) = f(x_0) + \left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\right)_{x_0} (x - x_0)$ $\quad y = f(x_0) + m_{s(x)} (x - x_0)$

Se $\Delta x \to 0$ allora (se esiste il limite) $\frac{\Delta f}{\Delta x} = m_{sec} \to m_{tan}$

Definizione

Sia $f: I(x_0) \to \mathbb{R}$

Dimostrazione

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \overset{def}{\Longleftrightarrow} f \text{ è continua in } x_0$$

$$\lim_{x\to x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0$$

$$\lim_{x\to x_0} \{f(x) - f(x_0)\} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)} (x-x_0) = 0 \quad \text{CVD}$$

$$\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) \text{ esiste finito per ipotesi} \right]$$

NOTA: Derivabilità locale implica continuità locale

Esempi vari

$f(x) = |x|$ in $x_0 = 0$ è continua, ma non derivabile

$$\left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\right)_{x_0} = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{|x|-0}{x} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & x>0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\right)_{x_0} &= \lim_{x\to 0^+} (1) = 1 \\ \lim_{x\to 0^-} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\right)_{x_0} &= \lim_{x\to 0^-} (-1) = -1 \end{aligned}\right\} \nexists f'(0) \text{ Non derivabile}$$

OSS $f(x) = \sqrt[3]{x}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x}-0}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{2/3}} = +\infty$$

f non è derivabile in $x_0 = 0$

$[f'(0) = +\infty$ (con "abuso")$]$

tang: $x = 0$

Derivata di funzioni elementari

OSS (Formula dell'incremento finito)

Sia $f: I(x_0) \to \mathbb{R}$ derivabile in x_0

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) \quad \text{esiste finito}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{x-x_0} = 0 \Rightarrow f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0) =$$

$$= o(x-x_0) \quad x \to x_0$$

3) $f(x) = a^x$ $\quad \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{a^x - a^{x_0}}{x - x_0} = \left[t = x - x_0 \quad \begin{matrix} x \to x_0 \\ t \to 0 \end{matrix} \right] =$

$$= \frac{a^{(x_0+t)} - a^{x_0}}{t} = \frac{a^{x_0}}{t}(a^t - 1) = \frac{a^{x_0}}{t}\left(a^{t \ln a} - 1\right) =$$

$$= \frac{a^{x_0}}{t}\left(t \ln a + 1 + o(t) - 1\right) = a^{x_0}\left(\ln a + o(1)\right)$$

$$\lim_{t \to 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\right)_{x_0} = \lim_{t \to 0} a^{x_0}\left(\ln a + o(1)\right) = a^{x_0} \cdot \ln a$$

$$D a^x = a^x \cdot \ln a$$

Caso notevole cioè $a = e$ $\quad D e^x = e^x$

4) $f(x) = \ln x$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\ln x - \ln x_0}{x - x_0} = \frac{\ln(x_0 + t) - \ln x_0}{t} =$$

$$\left[t = x - x_0 \quad x \to x_0 \Rightarrow t \to 0 \right]$$

$$= \frac{\ln\left(1 + \frac{t}{x_0}\right)}{t} = \frac{\frac{t}{x_0} + o(t)}{t} = \frac{\frac{t}{x_0} + o(t)}{t} = \frac{1}{x_0} + o(1)$$

$$\lim_{t \to 0} \left(\frac{\Delta t}{\Delta x_0}\right)_{x_0} = \frac{1}{x_0} \qquad D \ln x = \frac{1}{x}, \; x > 0$$

5) $D|x| = \frac{|x|}{x}, \; x \neq 0$

Algebra delle derivate

Siano $f, g : I(x_0) \to \mathbb{R}$ derivabili in x_0

Allora anche le funzioni:

1) $y = f(x) \pm g(x)$

2) ~~$y = \frac{1}{f(x)} \quad f(x_0) \neq 0$~~ $\quad y = f(x) \cdot g(x)$

3) $y = \frac{1}{g(x)} \quad f(x_0) \neq 0$

4) $y = \frac{f(x)}{g(x)} \quad g(x_0) \neq 0$

Dimostrazione 4

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x - x_0}$$

Si osservi che $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$

$$D\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = D\left[f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}\right] = f'(x_0) \cdot \frac{1}{g(x_0)} + f(x_0) \cdot D\left[\frac{1}{g(x_0)}\right] = \text{(per la 3)}$$

$$= \frac{f'(x)}{g(x_0)} + f(x_0)\left(-\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}\right) = \frac{f'(x_0)\,g(x_0) - f(x_0)\,g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 83 di 187

Teorema della derivata della funzione inversa

$f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

i) f è continua e invertibile su I

ii) $x_0 \in I$, f sia derivabile in x_0 e $f'(x_0) \neq 0$

T) f^{-1} è derivabile in $y_0 = f(x_0)$ e $(f^{-1})'_{y_0} = \dfrac{1}{f'(x_0)}$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}} \qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{y_0} = \frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)_{y_0}}$$

ES $f(x) = \operatorname{sen} x$ $\quad f : \left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right] \to [-1 ; +1]$ $\quad x \mapsto y$

$f^{-1} [-1 ; +1] \to \left[-\frac{\pi}{2} , \frac{\pi}{2}\right]$

$y \mapsto x = \arcsin y$ (non scambiamo x, y)

$$(\arcsin y)'_{y_0} = \frac{1}{(D\sin x)_{y_0}} = \frac{1}{\cos x_0} \qquad \cos x_0 = \pm\sqrt{1 - \sin^2 x}$$

$$\frac{1}{\cos x_0} = \frac{1}{+\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{+\sqrt{1-y_0^2}}$$

ES $f(x) = \tan x$ $\quad f : \left(-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ $\quad x \to y = \tan x$

$f^{-1} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right)$ $\quad y \to x = \arctan y$

$$(\arctan y)'_{y_0} = \frac{1}{D(\tan x)} = \frac{1}{1 + \tan^2 x_0} = \frac{1}{1 + y_0^2}$$

OSS $y = f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$ $\quad f(x) > 0$

$$y' = e^{g(x)\ln f(x)} \cdot \left(g'(x)\ln f(x) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)}\right)$$

Se esiste finito $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ prende il nome di derivata destra $f'_+(x_0)$

$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_-(x_0)$ derivata sinistra

NOTA Se f è definita solo per $x \geq x_0$ allora, se esiste, $f'_+(x_0) = f'(x_0)$

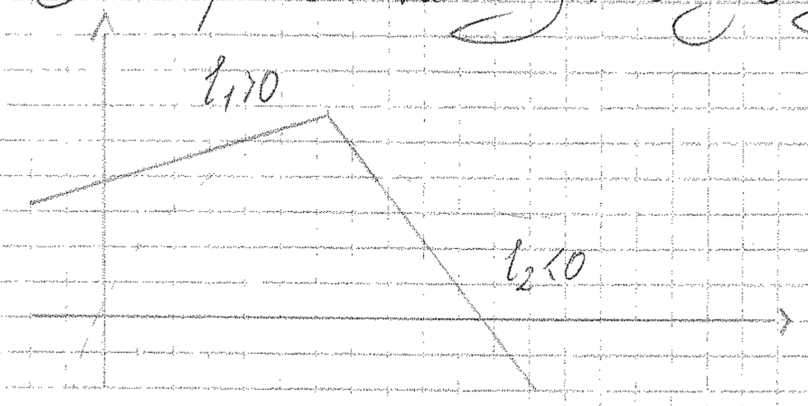
Criterio di derivabilità

f derivabile in $x_0 \Leftrightarrow f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = f'(x_0)$

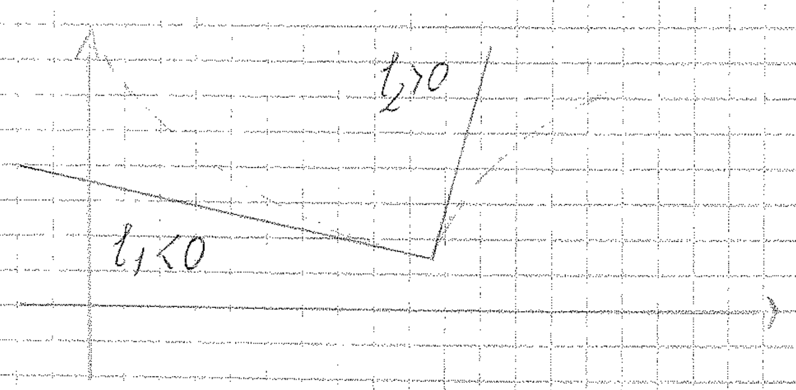
1) Se $f'_-(x_0) = l_1 \in \mathbb{R} \wedge f'_+(x_0) = l_2 \in \mathbb{R}$

con $l_1 \neq l_2$ punto angoloso

N.B. Diamo per scontato il fatto che f sia definita e continua in



Max relativo



Min relativo

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 87 di 187

Se $f'_+(x_0) = -\infty \wedge f'_-(x_0) = +\infty$

Cuspide in x_0

ES $y = \sqrt[7]{x^5 |x-2|}$

$$x_0 = 0 \quad \left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\right)_0 = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sqrt[7]{x^5|x-2|} - 0}{x} = \frac{|x-2|^{1/7}}{x^{2/7}}$$

$$\lim_{x \to 0^\pm} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\right)_0 = \lim_{x \to 0^\pm} \frac{|x-2|^{1/7}}{x^{2/7}} = \left[\frac{2^{1/7}}{0^+}\right] = +\infty$$

Flesso a tangente verticale

$$x_0 = 2 \quad \left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\right)_0 = \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{\sqrt[7]{x^5|x-2|} - 0}{(x-2)} = x^{5/7} \frac{(2-x)^{1/7}}{(x-2)}$$

$$\lim_{x \to 2^+} x^{5/7} \frac{|x-2|^{1/7}}{(x-2)} = \lim_{x \to 2^+} x^{5/7} \frac{1}{(x-2)^{6/7}} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 2^-} x^{5/7} \frac{(2-x)^{1/7}}{(x-2)} = \lim_{x \to 2^-} x^{5/7} \frac{-1}{(x-2)^{6/7}} = \frac{-2^{5/7}}{0^+} = -\infty$$

Criterio di derivabilità locale

Sia $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

i) f continua su $I(x_0)$, $x_0 \in \mathrm{dom} f$

ii) f derivata su $I(x_0) \setminus \{x_0\}$

iii) esiste finito $\lim_{x \to x_0} f'(x) = l \in \mathbb{R}$

T) f è derivabile in x_0 e si ha $f'(x_0) = l$

ES $f(x) = \begin{cases} \sin(x^2) + 2x, & x \geq 0 \\ e^x - 1 + x, & x < 0 \end{cases}$

f è continua in $x > 0 \vee x < 0$

15/11/12

$f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

i) f sia continua in $I(x_0)$

ii) f sia derivabile in $I(x_0) / \{x_0\}$

iii) esiste $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = l \in \mathbb{R}$

T) Allora esiste $f'(x_0) = l$ [condizione sufficiente]

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$ Controesempio di Peano

f è continua in x_0

$$f'(x) = 2x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \cdot \cos\frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x \cdot \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \to 0} \left(\underbrace{2x \cdot \sin\frac{1}{x}}_{\downarrow 0} - \cos\frac{1}{x}\right) = N.E.$$

Attraverso la definizione:

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\right)_{x_0 = 0} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x} - 0}{x} = \lim_{x \to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$$

$$\left[\underset{\substack{\Downarrow \\ 0}}{-x} \leq \underset{\substack{\Downarrow \\ 0}}{x \sin\frac{1}{x}} \leq \underset{\substack{\Downarrow \\ 0}}{x}\right] \qquad f'(0) = 0$$

Massimo e minimo

$f: [a; b] \to \mathbb{R}$

sia $x_0 \in [a, b]$

x_0 è punto di massimo assoluto (globale) su $[a, b]$ $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$
$\forall x \in [a; b],\ f(x) \leq f(x_0) = M$

M si dice massimo di f

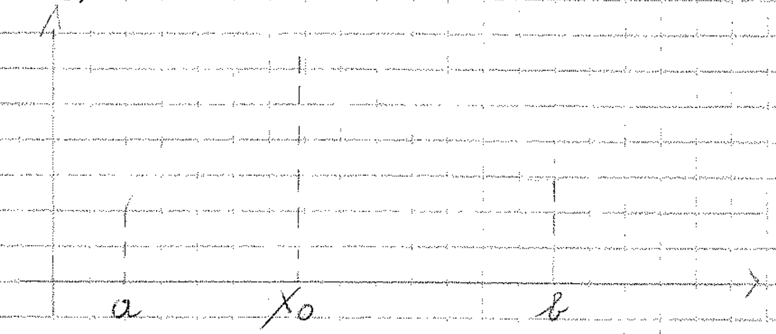
Punti di massimo relativo: x_2, x_4, c, x_6.
Punti di massimo assoluto: $\nexists$
Punti di minimo relativo: a, x_1, x_3, e, x_5, b
Punti di minimo assoluto: x_5

Teorema di Fermat:

Sia $f: [a, b] \to \mathbb{R}$

i) $x_0 \in (a, b)$, x_0 punto di derivabilità di f
ii) x_0 è punto di massimo o minimo relativo
T) Allora $f'(x_0) = 0$ cioè x_0 è punto stazionario (o critico)

Dimostrazione



Se x_0 è punto di max rel allora scelto x sufficientemente vicino a x_0 e $x < x_0 \Rightarrow f(x) \leq f(x_0) \Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$

$\left[\begin{array}{l}(x - x_0) < 0 \\ f(x) - f(x_0) \leq 0\end{array}\right]$ Se calcolo $\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ = esiste finito e vale $f'_-(x_0)$

Scelto x sufficientemente vicino a x_0 e $x > x_0 \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$
essendo $f(x)$ massimo relativo $\Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$ $\left[\begin{array}{l}f(x) - f(x_0) \leq 0 \\ x - x_0 > 0\end{array}\right]$

Se calcolo $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ = esiste finito per la i) e vale $f'_+(x_0)$

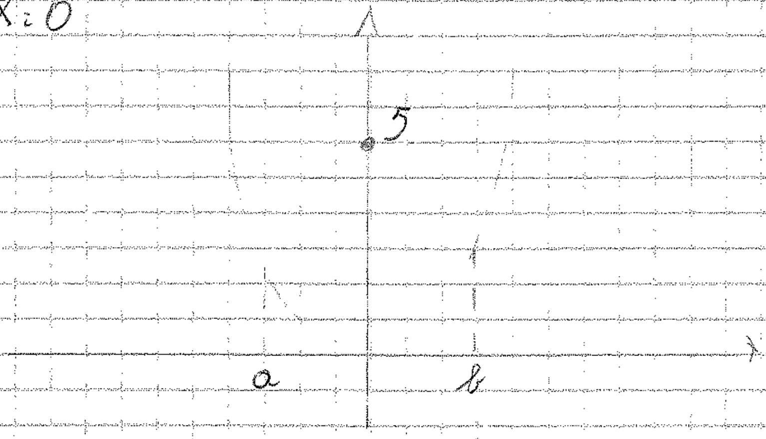
Per il teorema della permanenza del segno:

x_0 è punto di minimo assoluto, ma non è punto stazionario, perché non derivabile.

OSS 3 I punti di max o min relativi sono da ricercarsi tra:

1) I punti stazionari
2) I punti di non continuità
3) I punti di non derivabilità
4) I punti di estremo del dominio

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 0 \\ 5, & x = 0 \end{cases}$$



$a = -1$ punto di massimo relativo
$b = +1$ punto di massimo relativo
$x_0 = 0$ punto di massimo relativo e assoluto

Teorema di Rolle

$f : [a; b] \to \mathbb{R}$

$\mathcal{C}$ = continua

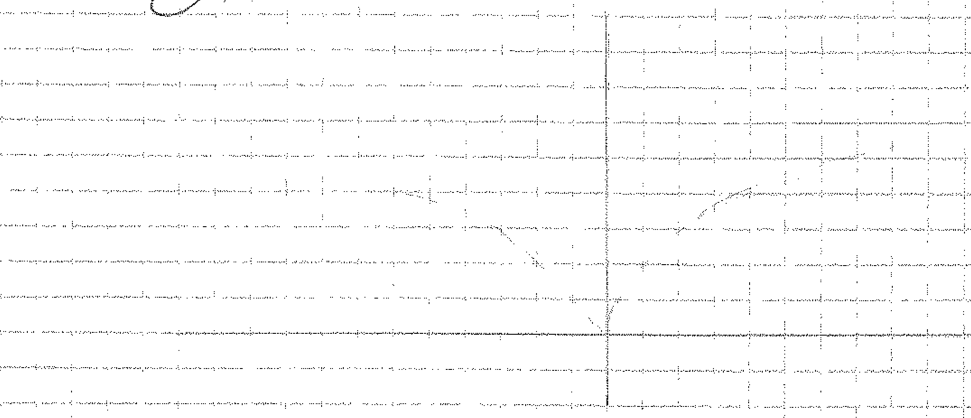
$\mathcal{D}$ = derivabile

i) $f \in \mathcal{C}([a, b])$
ii) $f \in \mathcal{D}((a, b))$
iii) $f(a) = f(b)$

T) $\exists\, c \in (a, b)$ $f'(c) = 0$

Non si applica Rolle, perché f non è continua

ES 3 $f(x)=\sqrt[4]{|x|}$ su $[-1;1]$



Le ipotesi i) e iii) sono verificate, ma f non è derivabile in $x_0 \Rightarrow$ Non si applica Rolle

Corollario al teorema di Rolle

$f: [a;b] \to \mathbb{R}$

i) f è derivabile su $(a;b)$

ii) Tra i due zeri di f cade certamente uno zero di $f'(x)$

ES $f(x)=x^4(x-6)(x-10)$

f è continua e derivabile su $\mathbb{R}$

su $(0;6)$ esiste uno zero di $f'(x)$

su $(6;10)$ esiste uno zero di $f'(x)$

ES $f(x)=\cos x \cdot \ln(1+2^{\sin x})$

f è continua e derivabile su $\mathbb{R}$

Zeri di f sono $x_K=\frac{\pi}{2}+K\pi$ con $K\in\mathbb{Z} \Rightarrow f$ ammette infiniti

Variante al teorema di Weierstrass

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$