NUMERO : 447 DATA : 18/01/2013

A P P U N T I

STUDENTE : Miglietta

MATERIA : Geometria,+ esercizi
Prof. Valabrega_Ugaglia

STUDENTE: DAVIDE [illegible]
A.A 2011-2012

RIASSUNTI DI GEOMETRIA

VERSORI IN COMPONENTI

sistema di riferimento cartesiano:

- $\{\hat{i}, \hat{j}\}$ BASE CANONICA di $\mathbb{R}^2$

- ogni vettore è somma delle sue proiezioni su x e y

$$\bar{V} = P_{R_x}(\bar{V}) + P_{R_y}(\bar{V}) = (\bar{V}\cdot\hat{i})\,\hat{i} + (\bar{V}\cdot\hat{j})\cdot\hat{j}$$

PONGO $\bar{V}\cdot\hat{i} = V_x$ $\quad$ $\bar{V}\cdot\hat{j} = V_y$

$$\Rightarrow \quad \bar{V} = V_x\cdot\hat{i} + V_y\cdot\hat{j}$$

$$\bar{V} = (V_x, V_y) \qquad |\bar{V}| = \sqrt{\bar{V}\cdot\bar{V}} = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$$

OPERAZIONI IN COMPONENTI

A) SOMMA

$$\begin{aligned}\bar{V} &= V_x\,\hat{i} + V_y\,\hat{j}\\ \bar{W} &= W_x\,\hat{i} + W_y\,\hat{j}\end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \bar{V} + \bar{W} = (V_x + W_x,\ V_y + W_y)$$

B) PRODOTTO PER UNO SCALARE

$\bar{V} = (V_x, V_y) \qquad a \in \mathbb{R}$

$$a\cdot\bar{V} = (aV_x,\ aV_y)$$

C) PRODOTTO SCALARE

- $\begin{cases}\hat{i}\cdot\hat{i} = |\hat{i}||\hat{i}| = 1 = \hat{j}\cdot\hat{j}\\ \hat{i}\cdot\hat{j} = 0 = \hat{j}\cdot\hat{i}\end{cases}$

- $\bar{V} = V_x\cdot\hat{i} + V_y\hat{j} \qquad \bar{W} = W_x\,\hat{i} + W_y\,\hat{j}$

$$\bar{V}\cdot\bar{W} = (V_x\cdot\hat{i} + V_y\cdot\hat{j})(W_x\,\hat{i} + V_y\,\hat{j})$$

$$= V_x\cdot W_x + V_y\cdot W_y$$

SOTTOSPAZIO VETTORIALE: Dato uno spazio V vettoriale su K, un sottoinsieme $W \subseteq V$ è un sottospazio vettoriale se è a sua volta spazio vettoriale con le operazioni di V.

- proprietà:

W è sottospazio $\Longleftrightarrow$

1) $0_V \in W$
2) $\forall \bar{v}, \bar{w} \in W \Rightarrow \bar{v} + \bar{w} \in W$
3) $\forall \bar{v} \in W,\ \forall \alpha \in K \Rightarrow \alpha \bar{v} \in W$

SISTEMA LINEARE: un sistema lineare in n incognite $x_1, x_2, \dots, x_n$ a coefficienti in K è un insieme di polinomi di 1° grado:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

dove $a_{ij} \in K$
$b_i \in K$

Def
- Una soluzione è un vettore $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n)$ che soddisfa le equazioni
- $AX = B$ risolvibile se ogni colonna di B è C.L delle colonne di A.
- Il sistema è OMOGENEO se $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0$

TEOREMA: L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo in n incognite, coefficienti in K, È SOTTOSPAZIO VETTORIALE di K^n

PROPOSIZIONI:

1) $\bar{v}$ è sempre L.I. tranne che se $\bar{v} = 0_V$

$\bar{v}$ L.D $\iff \alpha \cdot \bar{v} = 0_V$ con $\alpha \neq 0 \iff \bar{v} = 0_V$

2) $\bar{v_1}$ e $\bar{v_2}$ sono L.D $\iff$ uno è multiplo dell'altro

$\bar{v_1}, \bar{v_2}$ DIPENDENTI $\iff \alpha_1 \bar{v_1} + \alpha_2 \bar{v_2} = 0_V$

con almeno uno tra α_1 e $\alpha_2 \neq 0$

CASO $\alpha_1 \neq 0 \implies \bar{v_1} = \left(-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)\bar{v_2}$

3) $\bar{v_1}, \bar{v_2}, \dots, \bar{v_k} \in V$ se uno dei $\bar{v_j}$ è 0_V

$\implies$ sono L.D.

es. se $\bar{v_1} = 0_V$ prendo $a_1 = 1$ $a_2 = 0$ $a_3 = 0$ ... $a_k = 0$

quindi $1 \cdot \bar{v_1} + 0 \cdot \bar{v_2} + \dots + 0 \bar{v_k} = 0_V$

BASI

Def $\{\bar{v_1}, \dots, \bar{v_k}\}$ è una BASE di V se:

a) generano V

b) sono L. I.

MATRICI

MATRICE RIDOTTA

Def Una matrice A è ridotta per righe se in ogni riga non nulla c'è almeno un elemento non nullo sotto cui ci sono tutti zeri.

RANGO

Def Il RANGO (ρ) di una matrice ridotta per righe è il numero di righe non nulle.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 9 di 57

TEOREMA ROUCHÉ - CAPELLI

a) Il sistema $AX = B$ è COMPATIBILE (ammette soluzioni)

$\iff \rho(A|B) = \rho(A)$

b) se è compatibile $\Rightarrow$ le soluzioni dipendono da $n-p$ parametri liberi.
(n = n° incognite, $p = \rho(A) = \rho(A|B)$)

$\Rightarrow \infty^{n-p}$ soluzioni.

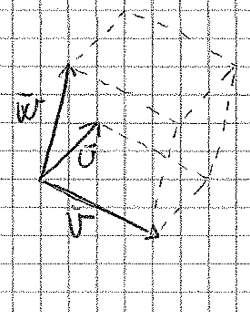
COROLLARIO: • Un sistema omogeneo $AX = 0$ è sempre compatibile

$\boxed{\text{OSS}}$ se un sistema è compatibile:
$\Rightarrow$ o ci sono infinite soluzioni oppure una sola soluzione $(\rho(A) = \rho(A|B) = \max)$

TEOREMA: L'insieme di tutte le soluzioni di un sistema completo è la somma di una soluzione particolare più tutte le soluzioni del sistema lineare omogeneo associato.

PRODOTTO MISTO: $(\bar{u} \wedge \bar{v}) \cdot \bar{w}$

$(\bar{u} \wedge \bar{v}) \cdot \bar{w}$ è il volume del PARALLELEPIPEDO:



prodotto misto $= 0 \iff$ sono complanari.

APPLICAZIONI LINEARI

Def $f: V \longrightarrow W$ (V, W spazi vettoriali su K)
è un' APPLICAZIONE LINEARE se:

i) $f(0_V) = 0_V$

ii) $f(\bar{v}_1 + \bar{v}_2) = f(\bar{v}_1) + f(\bar{v}_2)$

iii) $f(\alpha \bar{v}) = \alpha f(\bar{v}) \quad \forall \alpha \in K, \forall \bar{v} \in V$

ii) + iii) $\Rightarrow f(\alpha_1 \bar{v}_1 + \alpha_2 \bar{v}_2) = \alpha_1 f(\bar{v}_1) + \alpha_2 f(\bar{v}_2)$

Def NUCLEO
$f: V \longrightarrow W$ il NUCLEO ($\mathrm{Ker} f$)
è l'insieme delle controimmagini di 0_W
$= \{\bar{v} \in V \mid f(\bar{v}) = 0_W\} \subseteq V$
($0_V \in \mathrm{Ker} f$ SEMPRE)

Def Imf
$\mathrm{Im} f$ = IMMAGINE di f: insieme di tutti gli $f(\bar{v})$ al variare di $\bar{v}$ in V.
$\mathrm{Im} f = \{f(\bar{v}) \mid \bar{v} \in V\} \in W$

PROPOSIZIONE

se $f: V \longrightarrow W$ LINEARE $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\mathrm{Ker} f$ è SOTTOSPAZIO VETTORIALE di V
$\mathrm{Im} f$ " " " di W

$f: R^n \longrightarrow R^n$
$(x_1, \dots, x_n) \longrightarrow (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$
f APP LIN $\Leftrightarrow f_i(x_1, \dots, x_n)$ SONO POLINOMI LINEARI OMOGENEI

AUTOVALORI, AUTOVETTORI, AUTOSPAZI

ENDOMORFISMO

Def 1) Un ENDOMORFISMO di un K spazio-vettoriale è un app. lin.:

$$f: V \longrightarrow V$$

AUTOVETTORE

2) Dato $f: V \longrightarrow V$ ENDOMORFISMO, un vettore $\bar{v} \in V$ è un AUTOVETTORE se $\exists\, \lambda \in K$ tale che $f(\bar{v}) = \lambda \bar{v}$

• λ = AUTOVALORE

AUTOSPAZIO

3) Dato λ, l'AUTOSPAZIO V_λ associato a λ è l'insieme di tutti gli autovettori con autovalore λ.

$$V_\lambda = \{ \bar{v} \in V \,/\, f(\bar{v}) = \lambda \bar{v} \}$$

POLINOMIO CARATTERISTICO

4) $f: V \to V$ il POLINOMIO CARATTERISTICO è $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ con A "una matrice" di f

PROPOSIZIONE: Le radici (in K) del polinomio caratteristico sono AUTOVALORI di f.

f SEMPLICE

5) $f: V \to V$ è SEMPLICE se $\exists$ BASE di V FATTA DI AUTOVETTORI.

OSS radice semplice $\lambda_1 \Longleftrightarrow \underbrace{m(\lambda_1)}_{\text{MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA}} = 1$

BASI ORTONORMALI

- $\bar{u} \cdot \bar{v} = |\bar{u}||\bar{v}| \cdot \cos\vartheta$
- Un versore è un vettore di modulo 1
- $\bar{u} \cdot \bar{v} = 0 \iff \bar{u} \perp \bar{v}$
- Una **BASE ORTONORMALE** di V è una base di versori ortogonali

$$B = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n)$$

$$\begin{cases} e_i \cdot e_i = 1 \\ e_i \cdot e_j = 0 \quad \text{se } i \neq j \end{cases}$$

$$e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$$

- in R^n $B = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n)$ BASE ORTONORMALE si dice positiva se la matrice P che ha i vettori $\bar{e}_i$ come colonne è ORTOGONALE SPECIALE : $\det(P) = +1$

PRODOTTO ESTERNO

$$|\bar{u} \wedge \bar{v}| = |\bar{u}||\bar{v}| \cdot \operatorname{sen}\vartheta \quad e \quad \begin{bmatrix} \bar{u} \wedge \bar{v} \perp \bar{u} \\ \bar{u} \wedge \bar{v} \perp \bar{v} \end{bmatrix}$$

- CASO PARTICOLARE : $|\bar{u}| = 1$ $\quad |\bar{v}| = 1$ $\quad \bar{u} \cdot \bar{v} = 0$, $\vartheta = \frac{\pi}{2}$

$$|\bar{u} \wedge \bar{v}| = 1 \cdot 1 \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

$\Rightarrow$ $\bar{u} \wedge \bar{v}$ è un versore ortogonale a $\bar{u}$ e $\bar{v}$

$\Rightarrow$ $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{u} \wedge \bar{v})$ è BASE ORTONORMALE di R^3 (positiva)

1) Q è DEFINITA POSITIVA se tutti gli $\alpha_i > 0$

2) " " " NEGATIVA " " " $\alpha_i < 0$

3) " " SEMIDEFINITA POSITIVA se $\alpha_i \geq 0$

4) " " " NEGATIVA " $\alpha_i \leq 0$

m almeno $\alpha_i = 0$ per quelle

5) " NON DEFINITA se $\exists\, \alpha_i > 0,\ \alpha_j < 0$

- REGOLA DI CARTESIO
  - Dato un polinomio, ad esempio:

$$t^4 + t^3 - t^2 + t^1 + 1 = 0$$

PER VAR VAR PER

$\Rightarrow$ 2 VARIAZIONI di segno $\Rightarrow$ 2 radici positive

2 PERMANENZE " " $\Rightarrow$ 2 radici negative

LIMITI

PROP Se ci sono 2 curve passanti per (x_0, y_0) tali che, avvicinandosi lungo γ_1 ottengo L_1 e lungo γ_2 ottengo $L_2 \neq L_1$

$$\Rightarrow \nexists \lim f(x,y) \,/\, (x,y) \to (x_0, y_0)$$

es

$$f(x,y) = \frac{x-y}{x+y} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = ?$$

- si restringe f alla curva γ_1 $\quad \gamma_1 = $ asse x $(y=0)$

$$f|_{\gamma_1} = f(x,0) = \frac{x-0}{x+0} = 1 \quad x \neq 0 \qquad \lim_{x\to 0} f|_{\gamma_1} = 1$$

- $f|_{\gamma_2}$ $\quad \gamma_2 = $ asse y $(x=0)$

$$f|_{\gamma_2} = f(0,y) = \frac{0-y}{0+y} = -1 \quad y\neq 0 \qquad \lim_{y\to 0} f|_{\gamma_2} = -1$$

$$\Rightarrow \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

es

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} \qquad \begin{matrix} x\to 0 & f|_{\gamma_1} \to 0 \\ y \to 0 & f|_{\gamma_2} \to 0 \end{matrix} \Rightarrow \text{il lim può esistere}$$

COORD POLARI

$$f(\rho\cos\vartheta, \rho \operatorname{sen}\vartheta) \quad \begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\operatorname{sen}\vartheta \end{cases} = \frac{\rho^2 \cdot \cos^2\vartheta \cdot \rho \operatorname{sen}\vartheta}{\rho^2 \underbrace{(\cos^2\vartheta + \operatorname{sen}^2\vartheta)}_{=1}}$$

$$= \rho\cos^2\vartheta \operatorname{sen}\vartheta \qquad -\rho \leq \rho\cos^2\vartheta \cdot \operatorname{sen}\vartheta \leq \rho$$

$$\Rightarrow \lim_{\rho\to 0} f(\rho\cos\vartheta, \rho\operatorname{sen}\vartheta) = 0 \quad \text{(INDIPENT. DA } \vartheta)$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

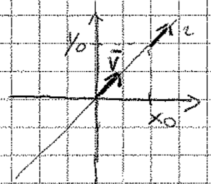
DERIVATA DIREZIONALE

Dato $P_0 = (x_0, y_0)$ e $\bar{V} = (\alpha, \beta)$ VERSORE,

la derivata direzionale di f in direzione di $\bar{V}$ nel punto $P_0 = \dfrac{\partial f}{\partial \bar{V}}(x_0, y_0) = D_{\bar{V}} f(x_0, y_0)$

r retta per P_0 // $\bar{V} = (\alpha, \beta)$

$$r: \begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases}$$



$f|_r = f(x_0 + \alpha t, y_0 + \beta t) =$ funzione di $t = g(t)$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \bar{V}}(x_0, y_0) = g'(0)$$

es

1) $f(x,y) = x \cdot y$ $\quad P_0 = (0,2)$ $\quad \bar{V} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \to \dfrac{\partial f}{\partial \bar{V}}(0,2) = ?$

$$r: \begin{cases} x = 0 + \frac{\sqrt{2}}{2} t \\ y = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} t \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} t \\ y = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} t \end{cases} \quad \text{EQ PARAM di } r$$

$$f|_r = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2} t, 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} t\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} t \left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2} t\right) = \sqrt{2}\, t + \frac{1}{2} t^2 = g(t)$$

$$g'(t) = t + \sqrt{2} \Rightarrow g'(0) = \sqrt{2} = \frac{\partial f}{\partial \bar{V}}(0,2)$$

MASSIMI E MINIMI

TEO Se P_0 è punto di massimo (o di minimo) di $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e se f derivabile in P_0 $\Rightarrow$ tutte le derivate parziali sono nulle

$(\nabla f(P_0)) = \vec{0}$ $\quad P_0$ è critico (stazionario)

$n=2$ Se $P_0 = (x_0, y_0)$ è punto di massimo per $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ la restrizione di f ad ogni retta per P_0 ha un massimo in P_0

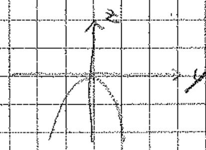
OSS 1) NON VALE IL VICEVERSA:

P_0 critico $\not\Rightarrow$ P_0 max o min

es $f(x,y) = x^2 - y^2$

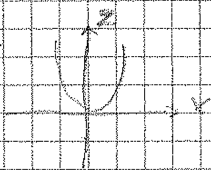
PUNTI CRITICI (in cui si annullano le derivate parziali) $\Rightarrow \begin{cases} f_x = 2x = 0 \\ f_y = -2y = 0 \end{cases} \Rightarrow (0,0)$ P. CRITICO

$f|_{x=0} = f(0,y) = 0 - y^2 = -y^2$



ha un MAX in $y=0$, $x=0$

$f|_{y=0} = f(x,0) = x^2$



ha un MIN in $x=0$, $y=0$

$\Rightarrow (0,0)$ né max né min MA PUNTO DI SELLA

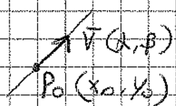
OSS 2) può capitare che P_0 sia punto di max (min) ma f non derivabile in P_0

GEOMETRIA PIANA

1) RETTA CARTESIANA $r: \; ax + by + c = 0$ $\quad ((a,b) \perp r)$

2) " PARAMETRICA

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases}$$



retta per P_0 // $\bar{v} = (\alpha, \beta)$

3) DISTANZA RETTA PUNTO

$P_0 = (x_0, y_0)$

$r: \; ax + by + c = 0$

$$\Rightarrow d(P_0, r) = \frac{|a x_0 + b y_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

4) CIRCONFERENZA centro $C = (a, b)$ raggio R

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

$$\gamma: \; x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \qquad C = \left(-\frac{\alpha}{2}, -\frac{\beta}{2}\right)$$

$$R = \sqrt{\frac{\alpha^2 + \beta^2}{4} - \gamma}$$

$\boxed{\text{OSS}}$

- dati $\vec{v} = (a, b)$ per ottenere $\vec{w} \perp \vec{v}$ scambio a e b e ne cambio uno di segno
- punto medio $M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$
- ASSE di $\overline{AB}$ = punti equidistanti da A e da B

- POSIZIONE DI UN punto o di una retta rispetto ad una circonferenza:

/ distanza dal centro

/ sistema

/ oppure (CONICHE) $\left(\begin{smallmatrix}\text{metodo per trovare} \\ \text{tg ad una conica}\end{smallmatrix}\right)$

γ conica di eq $(x \;\; y \;\; 1) \, B \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

$P_0 = (x_0, y_0) \in \gamma$ la tg in P_0 ha equazione:

$$(x_0 \;\; y_0 \;\; 1) \, B \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 27 di 57

ES) CLASSIFICARE e RIDURRE IN FORMA CANONICA

1) $x^2 + 4x + 2y^2 + 3 = 0$

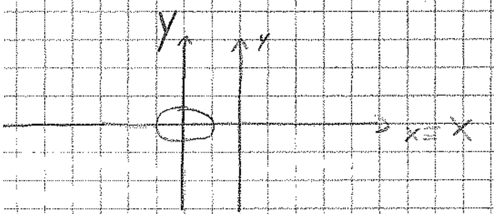
- completo i quadrati

$$(x+2)^2 + 2y^2 - 1 = 0$$

- cambio coordinate

$$\begin{cases} X = x+2 \\ Y = y \end{cases} \Rightarrow X^2 + 2Y^2 - 1 = 0$$

- ELLISSE F. CANONICA : $\dfrac{X^2}{1} + \dfrac{Y^2}{1/2} = 1$ semiassi $a = 1$, $b = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$



2) $x^2 - 2x - y^2 + 4y - 4 = 0$ ⊛

- USO le matrici

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

(A = blocco 2×2 in alto a sinistra)

$\rho(B) = 3$
$\det(B) \neq 0 \Rightarrow$ NON degenere
$\det(A) = -1 \Rightarrow$ iperbole

- F. CANONICA

$$\alpha X^2 + \beta Y^2 - \gamma = 0 \qquad B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

α, β AUTOVALORI DI A $\qquad \det B = -\alpha\beta\gamma \qquad \det A = \alpha\beta$

$$\gamma = -\frac{\det B}{\det A}$$

$$\Rightarrow 1X^2 - 1Y^2 - \gamma = 0 \qquad \gamma = -\frac{1}{-1} = 1$$

$$\Rightarrow \text{F.C} \quad X^2 - Y^2 - 1 = 0$$

- il CENTRO è la soluzione del sistema lineare associato alle prime due righe di B

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ -y + 2 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} x = 1 \\ y = 2 \end{matrix} \qquad \text{centro } C = (1, 2)$$

⊛ $(x-1)^2 - (y-2)^2 - 1 = 0$ cambio coord $\begin{cases} X = x-1 \\ Y = y-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ BASE ORTONORMALE di R^2

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$ ortogonale diagonalizza A

Verifico che è speciale

$\det P = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ SI

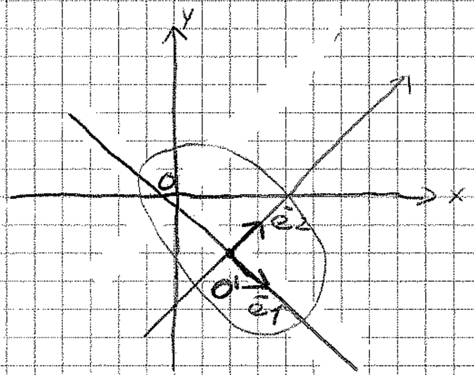
(se non lo è inverto $\bar{e}_1$ ed $\bar{e}_2$)

ROTOTRASLAZIONE

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} X + \frac{1}{\sqrt{2}} Y + 1 & \text{ASSE } X \,//\, V_2 \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}} X + \frac{1}{\sqrt{2}} Y - 1 & \text{ASSE } Y \,//\, V_8 \end{cases}$$

SEMIASSI $a = 2\sqrt{2}$ $b = \sqrt{2}$



GEOMETRIA NELLO SPAZIO

1)

$$r: \begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+y+z=2 \end{cases} \qquad A=(1,1,0)$$

a) r in forma parametrica

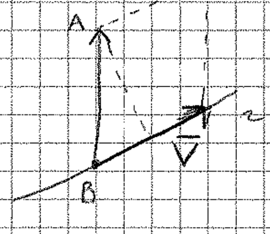
• RISOLVO IL SISTEMA:

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+y+z=2 \end{cases} \quad \begin{matrix} y+z=-x \\ y+z=2-2x \end{matrix} \quad -x=2-2x \quad \begin{cases} x=2 \\ y=-z-2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{F. PARAM} \quad \begin{cases} x=2 \\ y=-2-t \\ z=t \end{cases}$$

b) $\vec{v} \parallel r \qquad \vec{v}=(0,-1,1)$

c) $d(A,r)$



$$d(A,r) = \frac{|\vec{BA} \wedge \vec{v}|}{|\vec{v}|} \qquad \begin{matrix} B \in r \\ \vec{v} \parallel r \end{matrix}$$

per es. $\quad B=(2,-2,0) \in r$

$\vec{v}=(0,-1,1)$

$A=(1,1,0)$

$$B-A=(1,-3,0) \qquad \vec{BA} \wedge \vec{v} \quad \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -3\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$$

$$= (3,1,1)$$

$$|\vec{BA} \wedge \vec{v}| = \sqrt{9+1+1} = \sqrt{11} \qquad |\vec{v}| = \sqrt{2} \qquad d(A,r) = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{2}} = 3$$

d) $s \parallel r$ passante per A

$s \parallel r \iff s \parallel \vec{v} = (0,-1,1)$

$$s: \begin{cases} x = 1+0t \\ y = 1-1t \\ z = 0+1t \end{cases} \quad \begin{cases} x=1 \\ y=1-t \\ z=t \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x-1=0 \\ y+z-1=0 \end{cases}$$

forma parametrica $\qquad$ forma canonica

3) $\pi: x+2y+z=1$ $\qquad r: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-t \\ z = 1+t \end{cases}$

Verificare che $r \parallel \pi$ e trovare $d(r, \pi)$

- $(1+t)+2(2-t)+(1+t)=1$ MAI verificata
  $\Rightarrow r \parallel \pi$

oppure $\bar{V} = (1,2,1) \perp \pi$ $\qquad \bar{w} = (1,-1,1) \parallel r$

$\bar{V} \cdot \bar{w} = 0 \quad \bar{V} \perp \bar{w} \Rightarrow r \parallel \pi$

- $d(r, \pi)$

DISTANZA DI UN PUNTO P_0 da un PIANO π

$P_0 = (x_0, y_0, z_0) \qquad \pi: ax+by+cz+d=0$

$$d(P_0, \pi) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

quindi prendo un punto generico di r
e applico la formula

4) $r: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-t \\ z = 1+t \end{cases}$ $\qquad s: \begin{cases} x+y=3 \\ x-y+z=0 \end{cases}$

- incidenti in $P = (1,2,1)$
- trovare piano α che le contiene

/ PRENDO il FASCIO di PIANI per s

$$\lambda(x+y-3)+\mu(x-y+z)=0$$

$$x(\lambda+\mu)+y(\lambda-\mu)+\mu z-3\lambda=0$$

/ IMPONGO passaggio per un punto A dell'altra retta $(A \neq P)$

per ⓞ $A = (0,3,0)$

trovo $\lambda(x+y-3)=0 \qquad \alpha: x+y-3=0$

2) • circonferenza γ per i punti: $A = (1,0,0)$
$B = (1,2,0)$
$C = (0,0,1)$

$\boxed{\text{piano per } A, B, C}$

$$\begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A & z - z_A \\ x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \end{vmatrix} \Rightarrow \text{ottengo piano } \Pi$$

per trovare la circonferenza Π:

sistema $\begin{cases} \Pi: \dots \\ \sigma \text{ generica} \end{cases}$ impongo passaggio per i punti

QUADRICHE

Luogo degli zeri di un polinomio di grado 2 in x, y, z

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + \dots$$

MATRICI

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ \hline a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{array}\right) \quad A^{3\times3}$$

1) $\rho(B) = 4$ NON DEGENERE

• $\rho(A) = 3$ [ellissoide; iperboloide 1 falda; iperboloide 2 falde

• $\rho(A) = 2$ [paraboloide ellittico $(\det B < 0)$; paraboloide iperbolico $(\det B > 0)$

2) $\rho(B) = 3$

- $\rho(A) = 3$ CONO
- $\rho(A) = 2$ CILINDRO [ellittico; iperbolico
- $\rho(A) = 1$ CILINDRO parabolico

studio di $4(1-\alpha^2)x^2 + y^2 + 16\alpha^2 x - 4(4\alpha^2+1) = 0$

$$B = \begin{pmatrix} 4(1-\alpha^2) & 0 & 8\alpha^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 8\alpha^2 & 0 & -4(4\alpha^2+1) \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 4(1-\alpha^2) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det B = -16(1-\alpha^2)(4\alpha^2+1) - 64\alpha^4$$
$$= -16 + \cancel{64\alpha^2} - \cancel{64\alpha^4} - 64\alpha^2 + 16\alpha^2$$
$$-16 - 48\alpha^2 < 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{NON DEGENERE}$$

$$\det A = 4(1-\alpha^2) \quad \left[\begin{array}{lll} 1-\alpha^2 > 0 & -1<\alpha<1 & \text{ellisse} \\ 1-\alpha^2 = 0 & \alpha = \pm 1 & \text{parabola} \\ 1-\alpha^2 < 0 & \alpha < -1 \vee \alpha > 1 & \text{iperbole} \end{array}\right.$$

---

es 2) Q: $x^2 - y^2 - 2z = 0$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

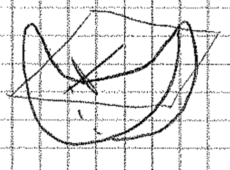
$\det B = a_{11} \cdot A_{11}$

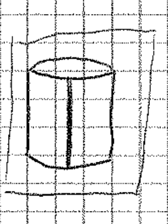
dove $A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \text{minore}$
$= +1$

$\det B = 1 > 0$ NON degenere

$\rho(A) = 2$ paraboloide iperbolico

- Il piano tangente a Q in un suo punto taglia Q in 2 rette per il piano



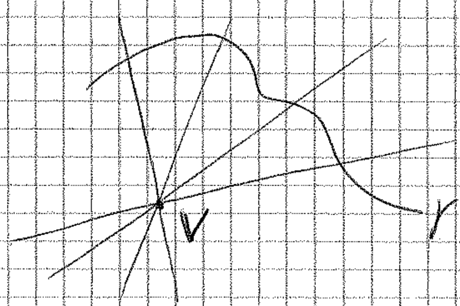


molteplicità 2
(RETTA DOPPIA)

- Il piano tangente alla superficie Q in un suo punto, la taglia in 2 rette passanti per il punto
si prenda per es $(0,0,0) \in Q$

CONI

Un cono è un'unione di infinite rette GENERATRICI che passano per un punto V (VERTICE) e che intersecano una curva $\gamma(t)$ (DIRETTRICE)



$V = (a, b, c)$

$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$

$$\Rightarrow \text{CONO} \begin{cases} x = a + s\,(x(t) - a) \\ y = b + s\,(y(t) - b) \\ z = c + s\,(z(t) - c) \end{cases}$$

es) CONO Vertice $V = (1, 2, 1)$
direttrice $\gamma(t) = (t^2 + 1, \cos t, t)$

$$\begin{cases} x = 1 + s t^2 \\ y = 2 + s(\cos t - 2) \\ z = 1 + s(t - 1) \end{cases}$$

CASI PARTICOLARI (In forma cartesiana)

- Un polinomio omogeneo in x, y, z è un CONO di Vertice $(0,0,0)$

es) $x^3 + 3x^2 y - xyz + yz^2 = 0$ cono con Vertice $(0,0,0)$

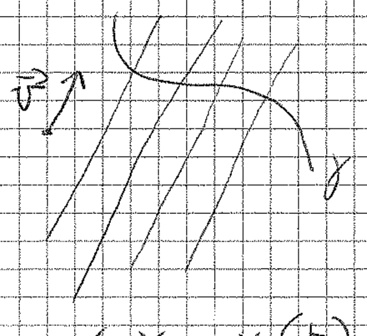
- Un polinomio omogeneo in $(x-a), (y-b), (z-c)$ è un CONO di Vertice (a, b, c)

es) $(x-1)y + (x-1)^2 + y(z+2) + (x-1)(z+2) = 0$

CONO $V = (1, 0, -2)$

CILINDRI

Unione di infinite rette GENERATRICI // che intersecano una curva γ (DIRETTRICE)



$\vec{v} = (a, b, c)$

$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = x(t) + as \\ y = y(t) + bs \\ z = z(t) + cs \end{cases}$$

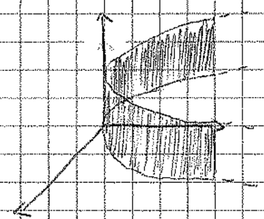
1) cilindro // $\vec{v} = (1, 2, -1)$
direttrice $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$

$$\begin{cases} x = t + s \\ y = t^2 + 2s \\ z = t^3 - s \end{cases}$$

2) cilindro // $\vec{v} = (0, 0, 1)$
direttrice $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = t^3 + s \end{cases}$$

eq. CARTESIANA : $\begin{cases} t = x \\ y = x^2 \end{cases}$ $\quad y - x^2 = 0$

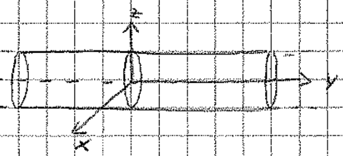


/ Siamo nello spazio 3D
/ z può assumere qualsiasi valore

CASI PARTICOLARI

- l'eq $f(x, y) = 0$ è cilindro // asse z
- l'eq $f(x, z) = 0$ " " // asse y
- l'eq $f(y, z) = 0$ " " // asse x

es $x^2 + z^2 - 1 = 0$



CURVE

$\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \qquad \gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$

Def γ REGOLARE se INIETTIVA, DERIVABILE (C^∞) con $\gamma' \neq (0,0,0)$

$\gamma'(t_0)$ = vettore tangente in $\gamma(t_0)$

$\Rightarrow$ retta tg in $\gamma(t_0)$ è la retta per $\gamma(t_0)$ // a $\gamma'(t_0)$

Def γ BIREGOLARE se regolare e valgono le seguenti proprietà equivalenti:

- $\gamma'(t_0)$ e $\gamma''(t_0)$ L.I. $\forall t$
- $\gamma'(t_0) \neq 0 \Rightarrow \gamma''(t_0)$ (NON NULLO) $\not\parallel$ $\gamma'(t_0)$
- $\gamma'(t_0) \wedge \gamma''(t_0) \neq 0$

PIANO OSCULATORE:

/ tra tutti i piani passanti per t_0 è quello che approssima meglio la curva in un intorno di t_0

/ in $\gamma(t_0)$ è $\perp$ a $\gamma'(t_0) \wedge \gamma''(t_0)$

$\boxed{\text{PROP}}$ se γ è PIANA ($\gamma \subseteq \pi$) $\Rightarrow$ il piano osculatore in ogni punto è π

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 45 di 57

- $\gamma(t) = (e^t+1, \log t, 3-2e^t)$ PIANA

$x = e^t+1 \qquad e^t = x-1$

$z = 3-2e^t \qquad z = 3-2(x-1)$

$= 5-2x$ contiene γ

- $\gamma(t) = (\cos t, 2\operatorname{sen} t - \cos t, \operatorname{sen} t)$

$y = 2z - x$ contiene γ

curva piana
RELAZIONE LINEARE tra x, y, z

---

2) $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$

a) REGOLARE ? / γ iniettiva? se $x(t)$, $y(t)$ oppure $z(t)$ (anche solo una) INIETTIVA $\Rightarrow \gamma(t)$ INIETTIVA

/ $\gamma' = (1, 2t, 3t^2) \neq (0,0,0)$ sempre $\Rightarrow$ REGOLARE

b) $(1,1,1) = \gamma(1)$ retta tg è // $\gamma'(1) = (1,2,3)$

$$r \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+2t \\ z = 1+3t \end{cases}$$

PIANO OSCULATORE $\perp \gamma'(1) \wedge \gamma''(1)$
passante per $\gamma(1) = (1,1,1)$

OSS
La tangente è sempre contenuta nel piano osculatore

per trovare il piano osculatore:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$6(x-1) - 6(y-1) + 2(z-1) = 0$

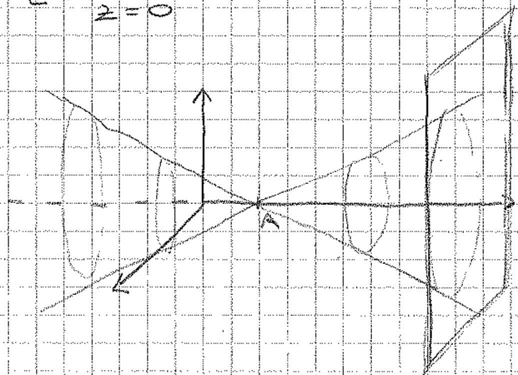
$6x - 6y + 2z - 2 = 0$ PIANO OSCULATORE $\boxed{3x - 3y + z - 1 = 0}$

b) interseco r con asse y

$$\begin{cases} x-z=0 \\ x-y+1=0 \\ x=0 \\ z=0 \end{cases}$$ asse y

$y=1$
$x=0$
$z=0$

$r \cap \text{asse } y = A(0,1,0)$



$\gamma_t = \pi_t \cap \sigma_t$

π_t è un piano $\perp$ asse y e passa per $P_t\,(t, t+1, t)$

$\Rightarrow \pi_t : \; y = t+1$

σ centro $A=(0,1,0)$ raggio $d(A, P_t)$

$R = \sqrt{t^2+t^2+t^2} = \sqrt{3t^2}$

$\sigma_t : \; x^2+(y-1)^2+z^2 = 3t^2$

$x^2+y^2+z^2-2y+1-3t^2=0$

$\pi_t : \; y=t$

$$\begin{cases} x^2+(y-1)^2+z^2=3t^2 \\ y=t+1 \qquad t=y-1 \end{cases}$$ elimino t

$S \; x^2+(y-1)^2+z^2=3(y-1)$

$x^2-2(y-1)^2+z^2=0$ polinomio omogeneo in x, y, z

$\Rightarrow$ cono di vertice $A=(0,1,0)$

1) $\sigma(u,v) = (1+2u+v^2,\ 3u+2v^2,\ 1-u-v)$

a) σ regolare

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} = (2,3,-1) \qquad \frac{\partial \sigma}{\partial v} = (2v,\ 4v,\ -1)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 2v & 4v & -1 \end{vmatrix} = \bar{i}(-3+4v) - \bar{j}(-2+2v) + \bar{k}(8v-6v)$$

$$= (4v-3,\ 2v-2,\ 2v) = N(u,v)$$

$N(u,v)$ sempre $\neq (0,0,0)$

$\Longrightarrow$ regolare

oppure uso MATRICE JACOBIANA

$$\begin{pmatrix} 2 & 2v \\ 3 & 4v \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ riduco } C_2 \to C_2 - C_1 \begin{pmatrix} 2 & 2v-2 \\ 3 & 4v-3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \rho(J) = 2$$

$\Downarrow$

REGOLARE

LINEE COORDINATE

i) $v = v_0$ cost

$\sigma(u, v_0) = (1+2u+v_0^2,\ 3u+2v_0,\ 1-u-v_0)$

CURVA $\begin{cases} x = 1+v_0^2+2u \\ y = 2v_0^2+3u \\ z = 1-v_0-u \end{cases}$

RETTA per $(1+v_0^2,\ 2v_0^2,\ 1-u_0)$ e $/\!/ \ (2,3,1)$

ii) $u = u_0$ cost

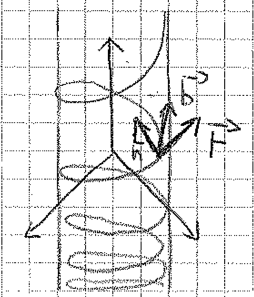
$\sigma(u_0, v) = (1+2u_0+v^2,\ 3u_0+2v^2,\ 1-u_0-v)$

CURVE

1) $\gamma(t) = (4\cos t,\ 4\operatorname{sen} t,\ 3t)$

$\gamma: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ $\qquad \vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$

contenuta in un cilindro $x^2+y^2=16$ (pag. successiva)



/ con ascissa curvilinea s

$$\underbrace{\vec{t} = \frac{d\gamma}{ds} \qquad \vec{n} = \frac{d\vec{t}}{ds}}_{\text{individuano PIANO OSCULATORE}} \Big/ \left|\frac{d\vec{t}}{ds}\right|$$

$\vec{b} = \vec{t} \wedge \vec{n}$ versore binormale $\perp$ piano osculatore

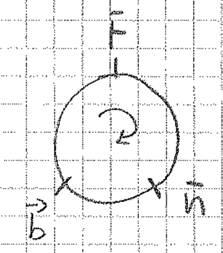
$\vec{t}, \vec{n}, \vec{b} \Longrightarrow$ BASE ORTONORMALE

/ senza ascissa curvilinea

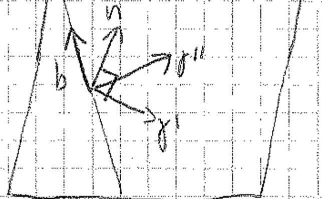
$$\vec{t} = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} \qquad \vec{b} = \frac{\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)}{|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)|}$$

$\vec{n} = \vec{b} \wedge \vec{t}$

VERSORI DEL TRIEDRO FONDAMENT.



piano osculatore



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 53 di 57

ESERCIZI GENERALI

DIAGONALIZZARE ORTOGONALMENTE

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$$

data F.Q. $x^2 + 9y^2 + 6xy$

trovare forma canonica e cambio di base che porta in F.C.

$\boxed{\text{OSS}}$ se il ρ NON è MAX

$\Rightarrow$ un autovalore è zero

polin. caratt. $t^2 - 10t + 0 = 0$

$t(t-10) = 0$

AUTOVALORI $t = 0$, $t = 10$

(F.Q. semi definita positiva)

F. canonica: $0x^2 + 10y^2$

AUTOSPAZI

$t = 0$ $\quad A - 0I = A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{cases} x + 3y = 0 \\ x = -3y \end{cases}$

$$V_0 = \{ (-3y, y) / y \in \mathbb{R} \} = \mathcal{L}((-3,1))$$

normalizzo $\bar{v} = (-3, 1)$ $\quad \bar{e}_1 = \left(-\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}} \right)$

Avendo 2 autovettori $\neq$ gli autospazi sono $\perp$

(perchè A simm) $\longrightarrow$ norm $\begin{matrix}(-3,1)\\(1,3)\end{matrix}$ trovo BASE ORTONORMALE

$\boxed{V_{10}}$

$A - 10I = \begin{pmatrix} -9 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad y = 3x$

$$V_{10} = \{ (x, 3x) / x \in \mathbb{R} \} = \mathcal{L}((1,3))$$

normalizzo $\bar{w} = (1, 3)$ $\quad \bar{e}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}} \right)$

$(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ BASE ORTONORMALE di $\mathbb{R}^2$ fatta di autovettori

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 57 di 57