NUMERO : 446

DATA : 18/01/2013

A P P U N T I

STUDENTE : Miglietta

MATERIA : Analisi Matematica I appunti + esercizi + riassunto
Prof. Camporesi

ANALISI I

3/10/11

INSIEMI E PRINCIPIO DI INDUZIONE

- Insieme: - definito dai suoi elementi $a \in A$
  - indicato con $\{\ \}$

- Insiemi INFINITI:
  - $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ numeri naturali
  - $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ numeri interi
  - $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0\right\}$ numeri razionali
  - $\mathbb{R} = \{x : x$ è un allineamento (numero) decimale qualsiasi$\}$ numeri reali
  - $\mathbb{C} = \{z = x + i \cdot y : x, y \in \mathbb{R},\ i = \sqrt{-1}\}$ (un po' immaginario) numeri complessi

- Proposizione logica $\rightarrow$ affermazione o V o F.

- Insieme finito $\rightarrow$ n° finito di elementi
  es $A_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$

- Sottoinsiemi: $A \subseteq B$ ⊂ (sottoinsieme o) = (stesso insieme)

  $\forall x \in A, x \in B \iff \forall x, (x \in A), x \in B$

  DIMOSTRAZIONE UGUAGLIANZA TRA DUE INSIEMI

  se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$ allora $A = B$

  $A \subset B$ sottoinsieme proprio (A strettamente contenuto in B)

TEOREMA: $|PA_n| = 2^n \quad \forall n \in N$

Dimostrazione: PRINCIPIO DI INDUZIONE (Teorema o proposizione che dipende da un indice naturale)

- per dimostrare che una proposizione $Q(n)$, $n \in N$ è vera $\forall n \in N$ è sufficiente verificare che:

1) $Q(0)$ è vera (oppure $Q(1)$ è vera se $Q(0)$ non ha significato

oppure $Q(n_0)$ è vera per un certo indice iniziale $n_0 \in N$)

2) fissato $n \in N$ generico vale l'implicazione:

$$Q(n) \Rightarrow Q(n+1)$$

supposta vera $Q(n)$ dimostro che è vera anche $Q(n+1)$

$Q(n)$: $|PA_n| = 2^n$

1) $n = 0$, $A_0 = \phi$, $Q(0)$ è vera

$n = 1$, $A_1 = \{1\}$, $Q(1)$ è vera

2) sia n fissato, $n \in N$ supponiamo che $Q(n)$ sia vera cioè che i sottoinsiemi di A_n:

- $\phi, \{1\}, \{2\}, \dots, \{n\}$
- $\{1,2\}, \dots, \{1,n\}$ — $\{2,3\}, \dots, \{2,n\}$
- $\{n-1, n\}$

$\vdots$

- $\{1, 2, \dots, n-1\}$
- $\{1, 2, \dots, n\}$

Operazioni tra insiemi

X = insieme ambiente

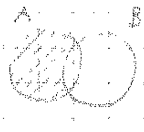
A, B, C sottoinsiemi di X

- intersezione $A \cap B = \{x \in X : x \in A, \in B\}$
- unione $A \cup B = \{x \in X : x \in A \text{ oppure } x \in B\}$

non in senso esclusivo: elementi [illegible]

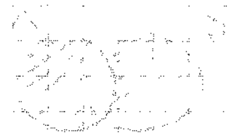
se $A \cap B = \emptyset$ A, B si dicono disgiunti

- $A \setminus B$ differenza $\rightarrow \{x \in X : x \in A, x \notin B\}$



es $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ numeri irrazionali (reali ma non razionali)

- differenza SIMMETRICA $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$



$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

- complementare di A $C(A)$:

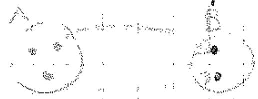
$C_X(A) = \{x \in X : x \notin A\}$

- LEGGI DI DE MORGAN

- $C(A \cup B) = C(A) \cap C(B)$
- $C(A \cap B) = C(A) \cup C(B)$

f INIETTIVA $\quad f: A \xrightarrow{1-1} B$

se ad elementi distinti di A corrispondono elementi distinti di B

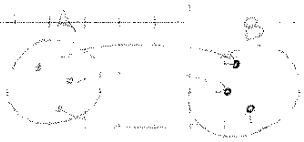


$$f: A \xrightarrow{1-1} B \iff \forall x_1, x_2 \in A,\ x_1 \neq x_2 \iff f(x_1) \neq f(x_2)$$

$$\iff \forall x_1, x_2 \in A,\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

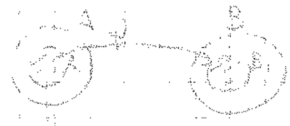
$\forall y \in \operatorname{im} f$ è immagine di un solo $x \in A$

Se $f: A \to B$ è sia iniettiva sia suriettiva f si dice Biunivoca $\quad f: A \xrightarrow[su]{1-1} B$



$B_1 \subseteq B$ la controimmagine di B_1 secondo la funzione $f: A \to B$ è $f^{-1}(B_1)$

$$f^{-1}(B_1) = \{x \in A : f(x) \in B_1\}$$

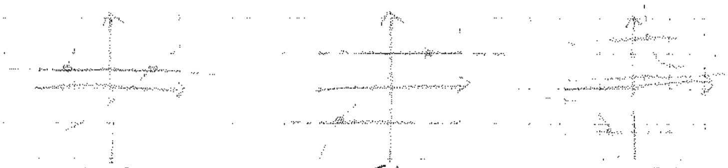


$$f_{1-1} \iff \forall y \in \operatorname{im} f,\ f^{-1}(y)$$

si riduce ad un insieme costituito da un solo elemento $\{x\}$

(es) Verificare iniettività del grafico

f è 1-1 $\Longleftrightarrow$ ogni retta orizzontale $y=K$, $K\in\mathbb{R}$ interseca G_f in al più un punto



NO SI SI

---

se $A_1 \subset A$, la RESTRIZIONE di f ad A_1 è la funzione $g: A_1 \to \mathbb{R}$ dove $g(x)=f(x)$ $\forall x\in A_1$

- si restringe la f ad un sottoinsieme del suo dominio

$g = f|_{A_1}$

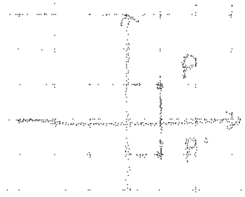
Se f non è 1-1 su A può capitare che una sua restrizione lo sia.

- Operazioni sui grafici

- $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con A simmetrico rispetto all'origine
  - si dice PARI se $f(-x)=f(x)$ $\forall x\in A$
  - si dice DISPARI se $f(-x)=-f(x)$ $\forall x\in A$

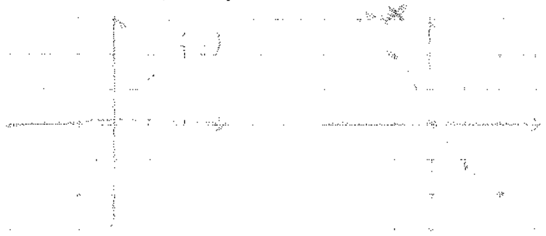
- Simmetria rispetto all'asse x

  $R: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$



$(x,y) \rightarrow (x,-y)$

da $f(x)$ a $-f(x)$



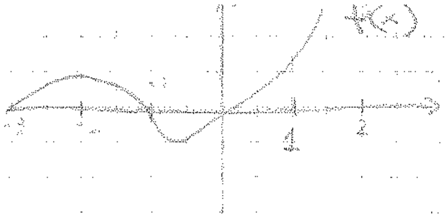
$f(x)$ è invariante ⟺ $-f(x) = f(x)$

quindi l'unico caso è $f(x)=0$

- A partire da G_f di $f(x)$ per disegnare il grafico di:

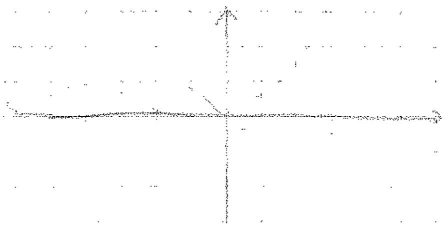
  - $f(x-c)$ si trasla G_f in orizzontale
    - a DX se $c>0$ } di $|c|$
    - a SX se $c<0$ } di $|c|$
  - $f(x)-c$ si trasla G_f in verticale
    - in giù se $c>0$ } di $|c|$
    - in su se $c<0$ } di $|c|$
  - $-f(x)$ G_f viene "riflesso" rispetto all'asse x
  - $f(-x)$ G_f " " " all'asse y
  - $-f(-x)$ G_f " " " all'origine
  - $f(|x|)$ si prende G_f per $x \geq 0$ e lo si "simmetrizza" rispetto all'asse y
  - $f(-|x|)$ vedi sopra con $x<0$

es

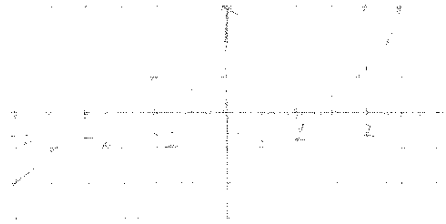


$f(x)$

$|f(x)|$



$f(x-1)$



$f: A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice:

- CRESCENTE se $\forall x_1, x_2 \in A$
  $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

- STRETTAMENTE CRESCENTE se $\forall x_1, x_2$
  $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$

- DECRESCENTE se $\forall x_1, x_2 \in A$
  $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

- STRETTAMENTE DECRESCENTE se $\forall x_1, x_2 \in A$
  $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$

- se una f è di uno di questi 4 tipi si dice monotona

- se una f è strettamente crescente o decrescente allora f è INIETTIVA (il viceversa non vale)

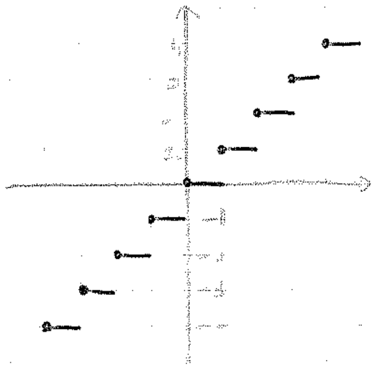
3) $f(x) = [x]$ = parte intera di x

$[x]$ = più grande intero $\leq x$

- $[0] = 0$ • $[0,5] = 0$ • $[2,7] = 2$ • $[\pi] = 3$
- $[-0,5] = -1$ • $[-1,5] = -2$ • $[-\pi] = -4$

$[x] = n$ se $n \leq x < n+1 \quad n \in \mathbb{N}$

$[x] = -n-1$ se $n-1 \leq x < -n$



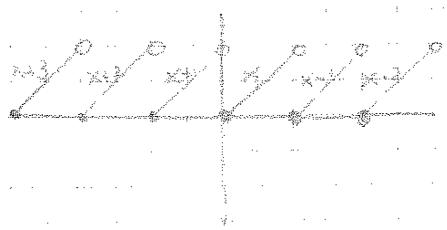
4) MANTISSA o parte frazionale di x

$$M(x) = x - [x]$$

$$M(-1,5) = -1,5 - (-2) = 0,5$$

$0 \leq M(x) < 1 \quad \forall x$

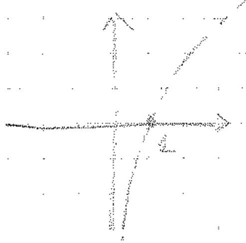
$M(n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

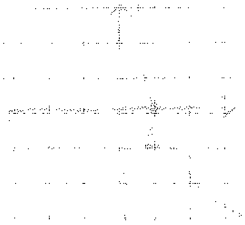


$n < x < n+1 \quad n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow M(x) = x - n$

7) $\log_a x : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$



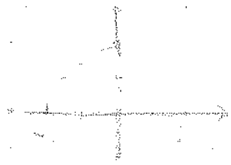


$f(x) = \log_a$ con $a > 1$ $\qquad$ $f(x) = \log_a$ con $0 < a < 1$

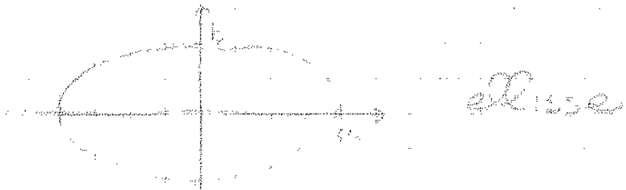
es $\log_{\frac{1}{2}} x = -\log_2 x$

8) $f(x) = \sqrt{1-x^2} : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$y = \sqrt{1-x^2} \qquad y^2 = 1 - x^2 \qquad x^2 + y^2 + 1$

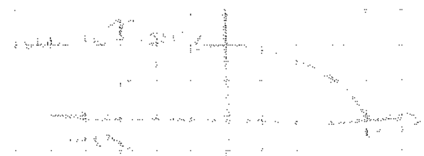


9) $G = \left\{ (x, y) : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \right\} \qquad a, b > 0$

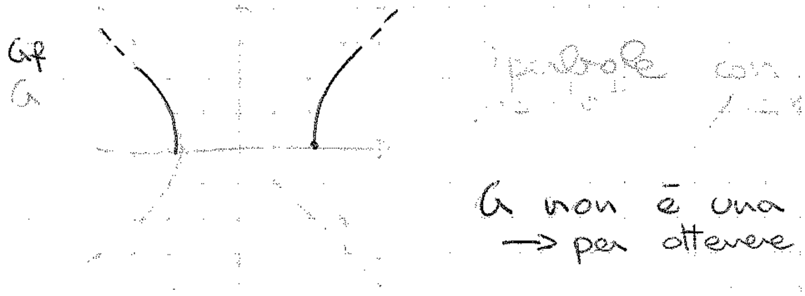


G non è una funzione $\longrightarrow$ per ottenere G_f: $y \geq 0$

$$y = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$



10) $G = \left\{ (x, y) : x^2 - y^2 = 1 \right\}$



G non è una funzione
$\longrightarrow$ per ottenere G_f $y \geq 0$

es $f(x) = x^2 - x - 2$ $\qquad g(x) = |x|$

- $g \circ f = g(f(x)) = |x^2 - x - 2|$

$\neq \qquad\qquad \neq$

- $f \circ g = f(g(x)) = x^2 - |x| - 2$

Nei casi più comuni la composizione avviene con funzioni f e g tali che l'immagine di f non è totalmente contenuta nel Dom di g

ovvero:

quindi: $\operatorname{dom} g \circ f = f^{-1}(\operatorname{im} f \cap \operatorname{dom} g)$

$\operatorname{im} g \circ f = g(\operatorname{im} f \cap \operatorname{dom} g)$

• FUNZIONI INVERSE

Sia $f: A \xrightarrow[su]{1-1} B$

dato $y \in B$ $\quad \exists!\ x \in A: f(x) = y$

Si definisce un'altra funzione: f^{-1}

$f^{-1}: B \longrightarrow A$ (SCAMBIO DOMINIO CON IMMAGINE)

$f^{-1}(y)$ FUNZIONE INVERSA di $f \rightarrow$ quell'unico $x \in A: f(x) = y$

per definizione si ha:

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$$

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall x \in A$$

$$f(f^{-1}(y)) = y \quad \forall y \in B$$

• PROPRIETÀ DELLE FUNZIONI INVERSE

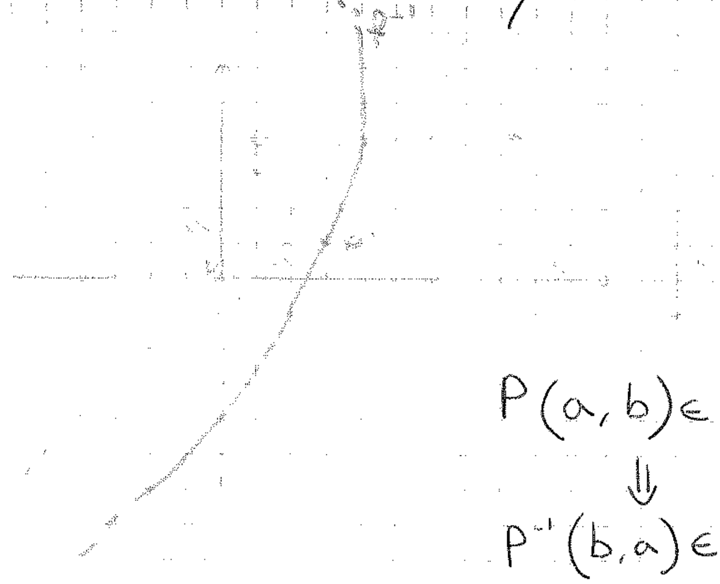
1) Se $f: A \longrightarrow B$ è biunivoca anche la sua inversa lo è.

$$f: A \xrightarrow[su]{1-1} B \Longrightarrow f^{-1}: A \xrightarrow[su]{1-1} B$$

e vale $(f^{-1})^{-1} = f$

- Se $f: A \xrightarrow[su]{1-1} B$ e $f^{-1}: B \xrightarrow[su]{1-1} A$ allora:

il grafico $G_{f^{-1}}$ è il simmetrico di G_f rispetto alla bisettrice $y=x$



$$P(a,b) \in G_f$$
$$\Downarrow$$
$$P^{-1}(b,a) \in G_{f^{-1}}$$

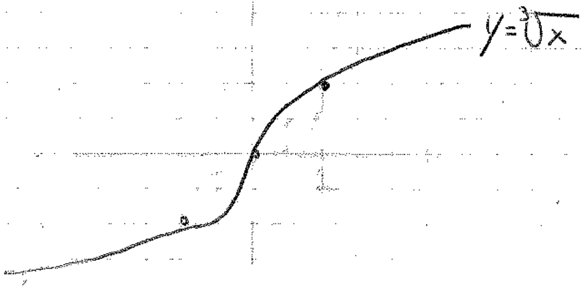
N.B. Vale se si disegna $G_{f^{-1}}$ con la variabile indipendente in orizzontale.

- Se $y=f(x)$ è data da una formula, per calcolare esplicitamente la funzione inversa si risolve l'equazione $y=f(x)$ per x in funzione di y, arrivando a $x=f^{-1}(y)$

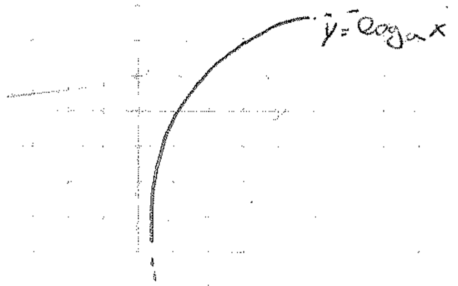
$\Rightarrow$ non è sempre possibile

ESEMPI DI INVERSE 10/10/11

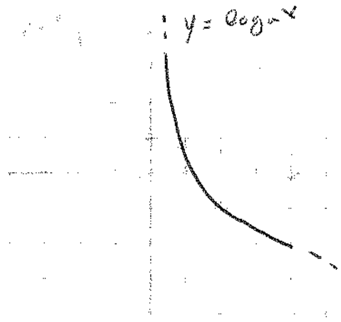
1) f inversa di $x^3 \to \sqrt[3]{x}$



2)



con $a>1$



con $0<a<1$

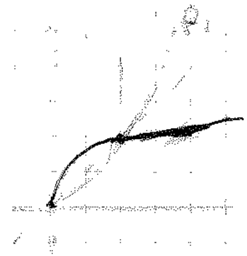
3) $f(x)=x^2$

non è 1-1

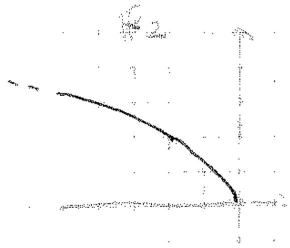
↓

va ristretta:

$f_1 = f|_{[0,+\infty)}$

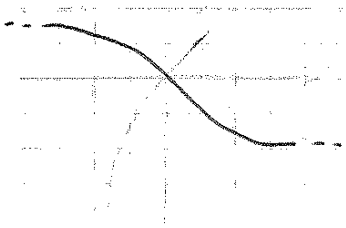


$f_2 = f|_{(-\infty,0]}$

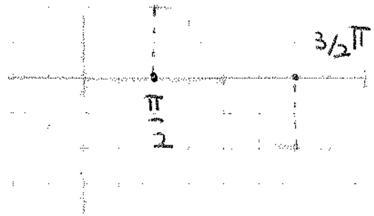


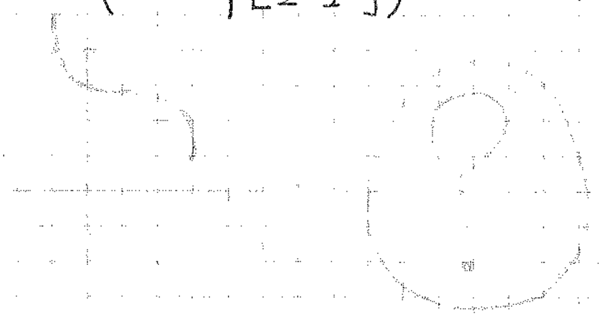
6) $\operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$

$$\operatorname{arctg} x = \left(\operatorname{tg} x \big|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}\right) : \mathbb{R} \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

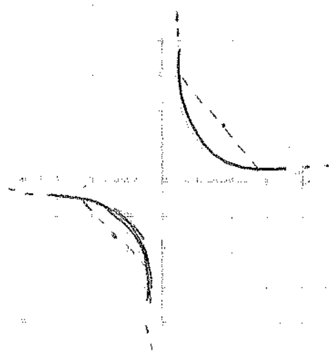


7) es con $f(x) = \operatorname{sen} x$ $\quad g(x) = \left(\operatorname{sen} x \big|_{[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi]}\right):$





8) $f(x) = \dfrac{1}{x}$



$\downarrow$

funzione simmetrica a $y = x$ quindi $f^{-1}(x) = f(x)$

• DIMOSTRAZIONE che $y = \dfrac{1}{x-p} + q$

è $y = \dfrac{1}{x}$ traslata in (p, q) $\circledast$

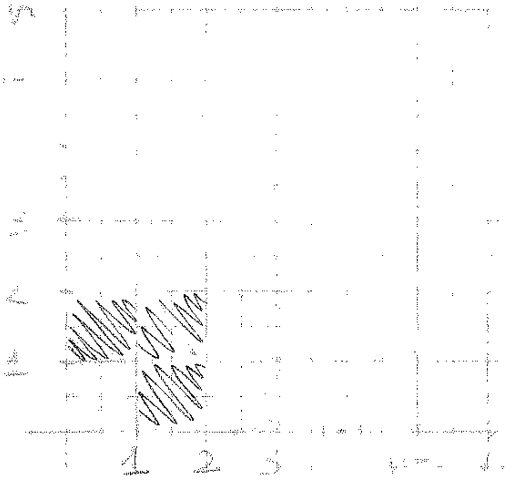
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 29 di 357

es 1) $\sum_{K=1}^{n} K = 1+2+\ldots+n = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$

• somma dei primi n numeri interi positivi

2) $\sum_{K=1}^{n}(2K-1) = 1+3+5+\ldots+2n-1 = n^2$

• somma dei primi n numeri dispari



Area quadrato?

$= n\cdot n = n^2$

n° quadratini di lato 1 $= 1+3+5+\ldots+2n-1$

Dalla 2) segue la 1)

$$n^2 = \sum_{K=1}^{n} 2K-1 = \sum_{K=1}^{n} 2K - \sum_{K=1}^{n} 1 =$$

$$= 2\cdot\sum_{K=1}^{n} K - n = n^2$$

$$2\cdot\sum_{K=1}^{n} K = n^2+n$$

$$\sum_{K=1}^{n} K = \frac{n(n+1)}{2}$$

COEFFICENTE BINOMIALE

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \qquad 0 \le k \le n \quad \text{dove } n, k \in \mathbb{N}^+$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)\cdot\cancel{(n-k)!}}{k!\;\cancel{(n-k)!}}$$

PROPRIETÀ FONDAMENTALI:

$$\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n} \qquad\qquad \binom{n}{1} = n = \binom{n}{n-1}$$

$$\binom{n}{2} = \frac{n\cdot(n-1)}{2} = \binom{n}{n-2}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad\qquad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \binom{0}{0} & & & \\ & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\ & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\ \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

TRIANGOLO DI
TARTAGLIA

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 33 di 357

TEOREMA

Il numero delle permutazioni di A_n è $n!$

$$(n)(n-1)(n-2)\dots 2\cdot 1 = n!$$

$0 < K \leq n$ DISPOSIZIONI dei numeri di A_n in K-uple ordinate senza ripetizioni

$$(a_1, a_2, \dots, a_K)$$

TEOREMA: Il numero di disposizioni $d_{n,K}$ di tali K-uple ordinate senza ripetizioni è:

$$d_{n,K} = n(n-1)(n-2)\dots(n-K+1)$$

$$= \frac{n!}{(n-K!)} = \binom{n}{K} K!$$

1) n possibilità

2) $n-1$ possibilità

⋮

K) $(n-K+1)$ possibilità

$$n(n-1)\dots(n-K+1)$$

TEOREMA Il n° totale di sottoinsiemi di A_n è 2^n.

Dim Tale numero è la somma:

$$\begin{pmatrix}\text{n° sottoinsiemi} \\ \text{di 0 elementi}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{n° sottoinsiemi} \\ \text{di 1 elemento}\end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix}\text{n° sottoinsiemi} \\ \text{di n elementi}\end{pmatrix}$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots\dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$$

$$= \sum_{K=0}^{n} = \dots = 2^n$$ dalla FORMULA DI NEWTON

con $a=b=1$

es K-uple ordinate di A_n con ripetizione sono

- terne del TOTOCALCIO $= 3^{13}$

es PROBLEMA DEI COMPLEANNI

prese K persone, la probabilità che ve ne siano 2 nate lo stesso giorno è:

$$q = 1 - \frac{d_{365,K}}{365^K} = 1 - \frac{365!}{(365-K)!\,365^K}$$

$$q_{23} = 0{,}507 \qquad q_{50} = 0{,}97$$

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} \leq \frac{p}{q} < a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \frac{1}{10^2}$$

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \dots + \frac{a_n}{10^n} \leq \frac{p}{q} < a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n} + \frac{1}{10^n}$$

TRONCATA n-esima di $\left(\frac{p}{q}\right)^{(n)} = a_0 + \frac{a_1}{10} + \dots + \frac{a_n}{10^n}$

Si può dimostrare che si ottiene in questo modo un allineamento decimale periodico

PERIODO $\longrightarrow$ blocco di cifre che si ripete indefinitivamente da un certo punto in poi dopo la virgola.

- Se il periodo è zero l'allineamento si dice FINITO $\downarrow$ NUMERI DECIMALI

- Gli altri allineamenti sono detti infiniti periodici

es calcolare il periodo di $\frac{100}{49}$

In generale $a_0, a_1 a_2 \dots a_k \; a_{k+1} \dots a_{k+n}$

$$\frac{a_0 a_1 a_2 \dots a_{k+n} - a_0 a_1 \dots a_k}{99 9 \dots 9 \, 00 \dots 0}$$

$0,\overline{9} = \frac{9}{9} = 1 \qquad 0,314\overline{9} = \frac{3149-314}{9000} = \frac{2835}{9000} = 0,315$

REGOLA PERIODO 9: $a_0, a_1 a_2 \dots a_k \overline{9}$

$=$

$a_0, a_1 a_2 \dots a_k + 1$

$\updownarrow$

corrispondenza biunivoca tra Q e allineamenti decimali finiti o infiniti periodici

- RAPPRESENTAZIONE GEOMETRICA di Q sulla retta

- fisso retta con origine O e fisso un punto U che individua l'unità di misura

$f: Q \to$ retta

$\frac{m}{n}$ = punto A : i segmenti orientati $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OU}$ soddisfano $\overrightarrow{OA} = \frac{m}{n} \cdot \overrightarrow{OU}$ = punto A tale che la distanza $\overline{OA} = |\overrightarrow{OA}| = \left|\frac{m}{n}\right|$ a dx dello zero se $\frac{m}{n} > 0$, a sx se $\frac{m}{n} < 0$.

2^ DIMOSTRAZIONE: si basa sull'unicità della fattorizzazione di un numero naturale n.

NUMERI PRIMI:

$m = 2^{a_1} \cdot 3^{a_2} \cdot 5^{a_3} \cdot 7^{a_4} \dots$ $\quad n = 2^{b_1} \cdot 3^{b_2} \cdot 5^{b_3} \cdot 7^{b_4} \dots$

$m^2 = 2^{2a_1} \cdot 3^{2a_2} \cdot 5^{2a_3} \cdot 7^{2a_4} \dots$ $\quad n^2 = 2^{2b_1} \cdot 3^{2b_2} \cdot 5^{2b_3} \cdot 7^{2b_4} \dots$

$$m^2 = 2n^2 \Longrightarrow 2^{2a_1} \cdot 3^{2a_2} \cdot 5^{2a_3} \dots = 2^{2b+1} \cdot 3^{2b_2} \cdot 5^{2b_3} \dots$$

IMPOSSIBILE

due numeri sono uguali se e solo se sono uguali le potenze dei fattori primi

---

Necessità di ampliare il campo $\longrightarrow d = \sqrt{2}$ è UNA DISTANZA

$\Downarrow$

occorre un numero per descriverla

$\Downarrow$

NUMERI REALI

NUMERI REALI

- Qualsiasi allineamento decimale con segno, periodico o non, cioè $x = a_0, a_1 a_2 \dots$

dove $a_0 \in \mathbb{N}$, $a_j \in \{0, 1, \dots, 9\}$

- I numeri che stanno in R ma non in Q si chiamano IRRAZZIONALI.

Si indicano con $R \subset Q$

$R \setminus Q$ allineamenti infiniti non periodici

- se $x>0$

$$x = a_0, a_1 a_2 \dots \Longrightarrow x^{(n)} \le x < x^{(n)} + 10^{-n}$$

$$x^{(n)} = a_0, a_1 a_2 \dots a_n$$

$$x^{(0)} = a_0 \qquad x^{(1)} = a_0, a_1 \qquad x^{(2)} = a_0, a_1 a_2$$

- per i negativi

Dati $x, y \ge 0$ $\qquad x = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots$

$y = b_0, b_1 b_2 b_3 \dots$

- Definizione $x+y$ e $x \cdot y$ $\longrightarrow$ si considerano le seguenti sequenze di numeri razionali

$$c_n = x^{(n)} + y^{(n)} \qquad d_n = \left(x^{(n)} \cdot y^{(n)}\right)^{(n)}$$

le successioni c_n e d_n sono stabilizzate e individuano ognuna un numero reale $(x+y, x \cdot y)$

- In generale una sequenza $z_0, z_1 \dots z_n$ di allineamenti si dice stabilizzata se disponendoli in una
(*)MATRICE INFINITA, ogni colonna, da un certo punto in poi diventa costante.

(*)
$z_0 = z_{00}, z_{01} z_{02} \dots \qquad z_1 = z_{10}, z_{11} z_{12} \dots \qquad z_2 = z_{20}, z_{21} z_{22} \dots$

es $\quad x = \frac{8}{9} = 0,\bar{8} \qquad y = \sqrt{2} = 1,414213562 \dots$

PROPRIETÀ: • densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$:

$A \subset \mathbb{R}$ A si dice denso in $\mathbb{R}$ se $\forall x \in \mathbb{R}$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists a \in A : d(x,a) = |x-a| < \varepsilon$

TEOREMA: • $\mathbb{Q}$ denso in $\mathbb{R}$

• l'insieme delle frazioni decimali è denso in $\mathbb{R}$

Dim $x \in \mathbb{R}^+$ $x^{(n)} \leq x \leq x^{(n)} + 10^{-n}$ $\forall n$

PROPRIETÀ DEI NUMERI REALI

1) In $\mathbb{R}$ ci sono due operazioni: $+$ e $\cdot$, tali che valgono le seguenti proprietà

1. ASSOCIATIVA

2. COMMUTATIVA

3. DISTRIBUTIVA

4. ESISTENZA DEGLI ELEMENTI NEUTRI

5. ESISTENZA DEGLI OPPOSTI

6. ESISTENZA DEI RECIPROCI

- Un insieme con due operazioni e in cui valgono le proprietà dalla 1 alla 6 si dice CAMPO o corpo commutativo

RELAZIONI D'ORDINE

Vi è in R una relazione d'ordine $\leq$:

- riflessiva $x \leq x$
- antisimmetrica $x \leq y$ e $y \leq x \Rightarrow x = y$
- transitiva: $x \leq y, y \leq z \Rightarrow x \leq z$

PROPRIETÀ:

(7) $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$

(8) $z > 0,\ x \leq y \Rightarrow zx \leq z \cdot y$

L'ordinamento è TOTALE: (Dati due elementi di R: $\forall x, y \in R$ vale che $x \leq y$ oppure $y \leq x$)

Un insieme in cui valgono le proprietà da (1) a (8) si dice CAMPO ORDINATO (campo commutativo ordinato)

Q e R

COMPLETEZZA (distingue Q da R)

- $A \subset R$ si dice superiormente limitato se $\exists\, m \in R$: $a \leq m \quad \forall a \in A$ $\quad$ m = MAGGIORANTE di A

A superiormente limitato $\Leftrightarrow \exists$ un maggiorante

- $A \subset R$ inferiormente limitato $\Leftrightarrow \exists$ un minorante m' tale che $a \geq m' \quad \forall a \in A$ $\quad$ finito $\neq$ limitato

- $A \subset R$ LIMITATO se lo è sia superiormente che inferiormente.

A limitato $\Leftrightarrow \exists\, m, m' \in R$: $m' \leq a < m$

$\quad$ " $\quad \Leftrightarrow \exists\, c > 0 : |a| \leq c \quad -c \leq a \leq c$

$$A = \{x \in Q : x^2 \leq 2\} = \{x \in Q : -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}\}$$
$$= Q \cap [-\sqrt{2} ; \sqrt{2}]$$

$\nexists \max A \ \wedge \ \nexists \min A$ $\quad$ $\sqrt{2}$ = più piccolo maggiorante, $-\sqrt{2}$ = più grande minorante

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in A : \sqrt{2} - \varepsilon < a < \sqrt{2}$

- Dato $A \subset R$, il più piccolo dei maggioranti di A (se esiste) si chiama estremo superiore di A $\quad \sup A$

- Il più grande dei minoranti $\rightarrow$ estremo inferiore di A $\quad \inf A$

$$S = \sup A \iff \begin{cases} S \text{ maggiorante di } A \\ \forall\, l \text{ maggiorante} \quad S \leq l \end{cases}$$

$$S' = \inf A \iff \begin{cases} S' \text{ minorante di } A \\ \forall\, l' \text{ minorante} \quad S' \geq l \end{cases}$$

- se $\exists \sup \in A$ / " " $\inf \in A$ $\Big\}$ sono unici
- se $\exists \max A \Longrightarrow \max A = \sup A$
- se $\exists \min A \Longrightarrow \min A = \inf A$
- se $\exists\, m = \sup A$ e se $m \in A \Longrightarrow m = \max A$
- se $\exists\, m = \inf A$ e se $m \in A \Longrightarrow m = \min$

conseguenza: COMPLETEZZA

- dato un numero positivo $y \in \mathbb{R} : y > 0$
  $n \in \mathbb{N}, n > 1$ $\exists$ uno e uno solo $(\exists!)$ $\ell \in \mathbb{R}^+$
  tale che $\ell^n = y$: $\ell = \sqrt[n]{y}$

Dim $A = \{x \in \mathbb{R}, x \geq 0, x^n \leq y\}$

A non è vuoto ed è superiormente limitato, infatti $y+1$ MAGGIORANTE

$\Rightarrow \exists \ell = \sup A \in \mathbb{R}$

Dalle proprietà dell'estremo sup si dimostra che $\ell^n > y$ e $\ell^n < y$ non possono essere quindi:

$\ell^n = y$

FUNZIONI ESPONENZIALI

- funzioni logaritmiche $\log_a x$
- " potenza a esponente reale x^α

$a > 0$ $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}, n > 0$ $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$

$a^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a}$ $a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$ $a^{-\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{a^{-3}} = \sqrt[4]{\frac{1}{a^3}} =$

$= \frac{1}{\sqrt[4]{a^3}} = \frac{1}{a^{\frac{3}{4}}}$

ANALISI I 17/10/2011

$\mathbb{R}$ campo ordinato completo

• Intervalli in $\mathbb{R}$: $(a, b \in \mathbb{R} : a < b)$

- (a,b): $\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ LIMITATO APERTO
- $[a,b]$: $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ LIMITATO CHIUSO
- $(a,b]$
- $[a,b)$
- $(a,+\infty)$: $\{x > a\}$ ILLIMITATO APERTO
- $[a,+\infty)$ ILLIMITATO CHIUSO
- $(-\infty,b)$: $\{x < b\}$
- $(-\infty,b)$
- $(-\infty,+\infty) = \mathbb{R}$

• PROPRIETÀ DEGLI INTERVALLI: sono i sottoinsiemi connessi di $\mathbb{R}$, cioè presi $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$, l'intervallo si dice connesso se $[x_1 ; x_2] \in I$

- A si dice numerabile se è equipotente a $\mathbb{N}$ cioè $\exists f : \mathbb{N} \xrightarrow[\text{su}]{1-1} A$ posso allora enumerare gli elementi di A scrivendo:

$$a_0 = f(0) \quad a_1 = f(1) \quad \dots \quad a_n = f(n)$$

TEOREMA: $\mathbb{Q}$ è numerabile

Dim presi $\frac{p}{q} > 0$ $\quad q \neq 0 \quad p+q =$ altezza della frazione

posso enumerare per altezze crescenti

$$n = p+q \qquad (p,q) \qquad q \neq 0$$

$$\begin{array}{lllll}
 & (p,q) \to p/q & & & \\
n=1 & (0,1) \to 0 & & & \\
n=2 & \cancel{(0,2)} \to 0 & (1,1) \to 1 & & \\
n=3 & \cancel{(0,3)} \to 0 & (1,2) \to \frac{1}{2} & (2,1) \to 2 & \\
n=4 & \cancel{(0,4)} \to 0 & (1,3) \to \frac{1}{3} & \cancel{(2,2)} \to 1 & (3,1) \to 3 \\
n=5 & \cancel{(0,5)} \to 0 & (1,4) \to \frac{1}{4} & (2,3) \to \frac{2}{3} & (3,2) \to \frac{3}{2} \quad (4,1)
\end{array}$$

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$$

$$f(0)=0 \quad f(1)=1 \quad f(2)=\frac{1}{2} \quad f(3)=2 \quad f(4)=\frac{1}{3}$$
$$f(5)=3 \quad f(6)=\frac{1}{4} \quad f(7)=\frac{2}{3} \quad f(8)=\frac{3}{2} \quad f(9)=4$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 57 di 357

SUCCESSIONI E LIMITI

Una successione è una funzione $a: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$

(a_n invece di $a(n)$)
(f_n ... $f(x)$)

es $a_n = n^2$ $0, 1, 4, 9, \dots$

$a_n = (-1)^n$ $-1, 1, -1, 1, \dots$ (*)

$a_n = \sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} = 1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \dots$

$a_n = \sqrt[n]{2} = 2^{\frac{1}{n}}$: $2, \sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, \dots$

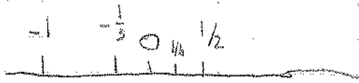
(*) $(-1)^n$ alterna un positivo ad un negativo

$a_n = \frac{(-1)^n}{n} = -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ (*)

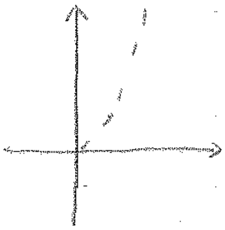
$a_n = K \ \forall n$: $K, K, K, \dots$

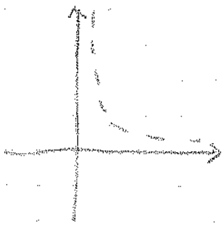
- rappresentazioni grafiche

1) a_n sulla retta $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$



2) grafico $a_n = n^2$ $a_n = \frac{1}{n}$

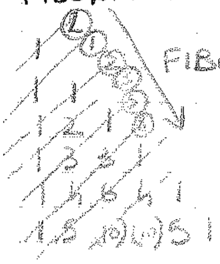




- Successioni definite per ricorrenza

es $a_0 = 0$ $a_1 = 1$ $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ $\forall n \geq 2$

SEQUENZA DI FIBONACCI $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots$



FIBONACCI $\longleftrightarrow$ Relazione con i binomiali

---

es successione di ERONE

$a_1 = 2$ $a_2 = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{2}{a_1}\right) = \frac{3}{2} = 1,5$ ... $a_n = \left(a_{n-1} + \frac{2}{a_{n-1}}\right)$

$a_3 = 1,41\overline{6}$ $a_n = 1,414215$ si avvicinano a $\sqrt{3}, \sqrt{4} \dots$

LIMITI

- Definizione di limite: (SUCCESSIONI INFINITESIME)

Si dice che a_n è infinitesima o che tende a zero o che ha limite zero e si scrive:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \qquad a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

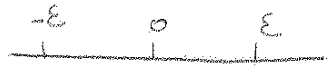
se fissato comunque $\varepsilon > 0$ si ha definitivamente che

$|a_n| < \varepsilon$ quindi $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \iff \forall \varepsilon > 0$

$\exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \forall n > \bar{n}$ vale che $|a_n| < \varepsilon \qquad -\varepsilon < a_n < \varepsilon$

graficamente sulla retta: $d(x, x_0) = |x - x_0| =$ = distanza $\qquad |a_n| = d(a_n, 0)$

$\Rightarrow a_n \to 0$ se fissato un intorno di 0 cioè $(-\varepsilon, \varepsilon)$



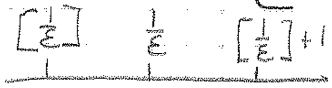
da un certo $\bar{n}$ in poi tutti gli a_n cadono in esso per $n > \bar{n}$

$\bar{n} = \bar{n}(\varepsilon)$ $\quad \bar{n}$ dipende da ε (diminuendo ε $\bar{n}$ aumenta)

es

- $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

$\varepsilon > 0 \qquad \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{n} > \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$



Basta prendere $\bar{n} = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$

$[x] \to$ parte intera di x

$\frac{1}{\varepsilon}$ sta tra la sua parte intera e quella successiva

- $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \qquad \varepsilon > 0 \qquad \frac{1}{n^2} < \varepsilon \qquad n^2 > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$

$$\bar{n} = \left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right]$$

esercizi

1) $\lim_{n \to \infty} \frac{n+1}{n} = 1$

2) $a_n = \sqrt[n]{2} = 2^{\frac{1}{n}}$

$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{2} = 1 \qquad \varepsilon > 0 \qquad |\sqrt[n]{2} - 1| < \varepsilon$

$1 - \varepsilon < \sqrt[n]{2} < 1 + \varepsilon$

sempre verificata

si verifica $\sqrt[n]{2} < 1 + \varepsilon$

$2^{\frac{1}{n}} < \log_2(1+\varepsilon)$

$n > \frac{1}{\log_2(1+\varepsilon)} \qquad \bar{n} = \left[\frac{1}{\log_2(1+\varepsilon)}\right]$

on tutte le successioni sono convergenti

$a_n = (-1)^n = 1, -1, 1, -1, \dots$

$a_n = \text{sen}\,\frac{\pi}{2} n \quad \begin{cases} 0 & n = 0, 2, 4, 6, \dots \\ 1 & n = 1, 5, 9, 13, \dots \\ -1 & n = 3, 7, 11, \dots \end{cases}$

$\nexists \lim a_n \Longrightarrow a_n$ OSCILLANTE

Si verifica dalla definizione di limite che posti:

$b_n = a_{2n} \qquad a_0\ a_2\ a_4$

$c_n = a_{2n+1} \qquad a_1\ a_3\ a_5$

(sottosuccessioni)

vale $\lim_{n \to \infty} a_n = \ell \iff \lim_{n\to\infty} b_n = \ell = \lim_{n\to\infty} c_n = \ell$

es)

$a_n = (-1)^n \Longrightarrow b_n = a_{2n} = 1$

$b_n \longrightarrow 1 \quad \forall n$ SUCCESSIONE COSTANTE

$\Longrightarrow c_n = a_{2n+1} = -1$

$c_n \longrightarrow -1 \quad \forall n$

es)

$a_n = 3^n$

$a_n = -5^n$

$a_n = (-\pi)^n$

NON CONVERGONO perché non limitate

$a_n = 3^n$ fissato $K > 0$ (grande) $\exists \bar{n} : n > \bar{n} \Longrightarrow a_n > K$

infatti $3^n > K \Longrightarrow n > \log_3 K \Longrightarrow \bar{n} = [\log_3 K]$

(allora vale la DISEQUAZIONE)

- Se a_n ha lim FINITO o INFINITO si dice REGOLARE, altrimenti (se non ha lim) si dice NON REGOLARE (oscillante o indeterminato)

TEOREMI SUI LIMITI

Condizioni che garantiscono la convergenza di una successione a_n senza fare riferimento al limite stesso

a_n si dice una successione di CAUCHY (cosci)

se

$$\text{fissato } \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \forall n, m > \bar{n}$$
$$|a_n - a_m| < \varepsilon$$

se $a_n \longrightarrow \ell \in \mathbb{R} \Longrightarrow a_n$ è di CAUCHY

Infatti $\forall \varepsilon \ \exists \bar{n} : n > \bar{n} \Longrightarrow |a_n - \ell| < \varepsilon$

allora se $n, m > \bar{n}$ $\quad |a_n - a_m| = |a_n - \ell + \ell - a_m|$

N.B. ε arbitrario quindi lo è pure 2ε

$$\leq |a_n - \ell| + |\ell - a_m| < 2\varepsilon$$

TEOREMA: se a_n è di CAUCHY $\Longrightarrow a_n$ è CONVERGENTE ad un valore $\ell \in \mathbb{R}$

(equivale alla completezza di $\mathbb{R}$
non vale per $\mathbb{Q}$)

a_n si dice:

- crescente se $\forall n_1 < n_2 \Longrightarrow a_{n_1} \leq a_{n_2}$
$$\Longleftrightarrow a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n$$

- strett. crescente $\quad a_n < a_{n+1} \quad \forall n$
- decrescente $\quad a_n \geq a_{n+1} \quad \forall n$
- strett. decr $\quad a_n > a_{n+1} \quad \forall n$

In questi quattro casi a_n è MONOTÒNA

es) $\cdot\ a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2;\ \frac{9}{4};\ \frac{64}{27};\ \frac{625}{256}; \dots$

$2;\ 2{,}25;\ 2{,}37;\ 2{,}441$

Dim che: • a_n è ① crescente

• a_n è: $\overset{②}{2} \le a_n < \overset{③}{3}\quad \forall n$

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{n^k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}\,\frac{1}{n^k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \frac{\overbrace{n(n-1)\dots(n-k+1)}^{k \text{ volte}}}{\underbrace{n \cdot n \dots \cdot n}_{k \text{ volte}}} = ⊛$$

$$⊛\ \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{(n-1)}{n} \cdot \dots \cdot \frac{(n-k+1)}{n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot 1 \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k}{n}\right.$$

• se sostituisco n con $n+1$ ogni termine della somma aumenta (in ogni fattore sottraggo da 1 un numero più piccolo $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ $\quad 1-\frac{1}{n+1} < 1-\frac{1}{n}$)

il numero degli addendi, inoltre, aumenta di uno

$\Rightarrow a_n < a_{n+1} \quad \forall n$

① a_n È CRESCENTE

② $a_1 = 2 \quad a_n \ge 2 \quad \forall n$

③ $a_n < 3 \qquad \sum_{k=0}^{n} = \frac{1}{k!} \cdot 1 \cdot \underset{<1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)} \cdot \underset{<1}{\left(1-\frac{2}{n}\right)} \underset{<1}{\dots} \cdot \underset{<1}{\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

$$= 1 + 1 + \underset{\le \frac{1}{2}}{\frac{1}{2!}} + \underset{\le \frac{1}{2^2}}{\frac{1}{3!}} + \dots + \underset{\le \frac{1}{2^{n-1}}}{\frac{1}{n!}}$$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$$

DIM $a_n < 3\ \forall n$ $\longrightarrow$ $1 + \dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} < \cancel{1+\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}}}\ 3$

Tra tutte le $n!$ permutazioni di A_n quante sono quelle che non hanno punti fissi?

risposta $\left[\left[\frac{n!}{e}\right]\right]$ dove $[[x]]$ intero più vicino a x

2,5 3,5 non possono capitare

es) 1) $A_3 = \left[\left[\frac{3!}{e}\right]\right] = [[2,207]] = 2$

$(1,2,3) \longrightarrow (1,\cancel{2,3})\ (2,3,1)\ (3,1,2)\ (\cancel{1,3,2})\ (\cancel{2,1,3})\ (\cancel{3,2,1})$

hanno NON punti fissi

2) $A_4 = \left[\left[\frac{4!}{e}\right]\right] = [[8,829]] = 9$ $\qquad 4! = 24$

$(1,2,3,4) \longrightarrow$
$(1,\cancel{2,3},4)\ (1,\cancel{2,4},3)\ (1,\cancel{3,2},4)\ (1,\cancel{3,4},2)\ (1,\cancel{4,2},3)\ (\cancel{1,4},3,2)$
$(2,\cancel{1,3},4)\ \bullet(2,1,4,3)\ \bullet(2,\cancel{3,1},4)\ \bullet(2,3,4,1)\ \bullet(2,4,1,3)\ (\cancel{2,4},3,1)$
$(3,\cancel{1,2},4)\ \bullet(3,1,4,2)\ (3,\cancel{2,1},4)\ (3,\cancel{2,4},1)\ \bullet(3,4,1,2)\ (3,4,2,1)$
$\bullet(4,1,2,3)\ (4,\cancel{1,3},2)\ (\cancel{4,2},1,3)\ (4,\cancel{2,3},1)\ \bullet(4,3,1,2)\ (4,3,2,1)$

9

Applicazione di e (BAGAGLI SMARRITI ALL'AEROPORTO)

n passeggeri $\qquad n$ bagagli

probabilità che almeno un passeggero riceva il bagaglio giusto?

$$q_{(1-p)} = \frac{\text{n° permutazioni con almeno un punto fisso}}{\text{n° permutazioni totali } (n!)}$$

p = probabilità che nessuno riceva il proprio bagaglio

$$p = \frac{\left[\left[\frac{n!}{e}\right]\right]}{n!} = \frac{\frac{n!}{e} + r}{n!} \quad \text{dove } r: -\frac{1}{2} < r < \frac{1}{2}$$

$\rightarrow$ n° più vicino all'intero

$$p = \frac{1}{e} + \underbrace{\frac{r}{n!}}_{\cong 0} \qquad \text{quindi } p \cong \frac{1}{e}$$

$$\Longrightarrow q = 1 - \frac{1}{e} = 0,63 \qquad 63\%$$

$A_2 = 50\%$ $\quad A_3 = 66,6\%$ $\quad A_4 = 62,5\%$ $\quad A_5 = 63,33\%$ $\quad A_6 = 63,19\%$

ORME DETERMINATE

Teorema: regole di aritmetizzazione parziale dei simboli $+\infty$ e $-\infty$ (sia $a \in \mathbb{R}$)

) $a + \infty = +\infty$; $a - \infty = -\infty$

) $+\infty + \infty = +\infty$; $-\infty - \infty = -\infty$

) $a \neq 0 \implies$

$$\begin{cases} a \cdot (+\infty) = +\infty & \text{se } a>0 \\ a \cdot (+\infty) = -\infty & \text{se } a<0 \\ a \cdot (-\infty) = -\infty & \text{se } a>0 \\ a \cdot (-\infty) = +\infty & \text{se } a<0 \end{cases}$$

regola dei SEGNI

) $+\infty(+\infty) = +\infty$ $\quad -\infty(-\infty) = +\infty$

$+\infty(-\infty) = -\infty$ $\quad -\infty(+\infty) = +\infty$

) $\dfrac{a}{+\infty} = 0 = \dfrac{a}{-\infty}$ $\quad 0^+$ o 0^- dipende da SEGNI $\quad$ N.B. incluso $a = 0$

) $a \neq 0 \implies \dfrac{+\infty}{a} = \begin{cases} +\infty & \text{se } a>0 \\ -\infty & \text{se } a<0 \end{cases}$

$$\frac{-\infty}{a} = \begin{cases} -\infty & \text{se } a>0 \\ +\infty & \text{se } a<0 \end{cases}$$

7) Si scrive $a_n \longrightarrow 0^+$ se $\begin{cases} a_n \longrightarrow 0 \\ a_n > 0 \ \forall n \end{cases}$ (per eccesso da DX)

$a_n \longrightarrow 0^-$ se $\begin{cases} a_n \longrightarrow 0 \\ a_n < 0 \ \forall n \end{cases}$ (per difetto da SX)

Vale allora $\dfrac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0^+$ $\quad \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n \to -\infty]{} 0^-$

$\dfrac{+\infty}{0^+} = +\infty$; $\dfrac{+\infty}{0^-} = -\infty$; $\dfrac{-\infty}{0^+} = -\infty$; $\dfrac{-\infty}{0^-} = +\infty$

8) se $a \neq 0 \implies \dfrac{a}{0^+} = \begin{cases} +\infty & \text{se } a>0 \\ -\infty & \text{se } a<0 \end{cases}$

$$\frac{a}{0^-} = \begin{cases} +\infty & \text{se } a<0 \\ -\infty & \text{se } a>0 \end{cases}$$

) 1) $a \in \mathbb{R} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } a>1 \\ 1 & \text{se } a=1 \\ 0 & \text{se } |a|<1 \quad -1<a<1,\ a\neq 0 \\ \nexists & a\leq -1 \end{cases}$

Infatti

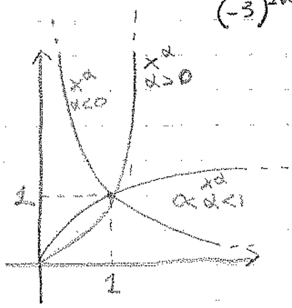
- $a>1$ già visto
- $a=1 \Longrightarrow 1^n=1 \ \forall n,\ a^n\to 1$ SUCCESSIONE COSTANTE
- $a=0 \Longrightarrow 0^n=0 \ \forall n \to 0$ "
- $|a|<1,\ a\neq 0 \Longrightarrow |a|^n = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{|a|}\right)^n} \longrightarrow \dfrac{1}{+\infty} = 0^+$
- $a=-1 \Longrightarrow (-1)^n$ è oscillante

$(-1)^{2n}=1 \ \forall n \to 1$
$(-1)^{2n+1}=-1 \ \forall n \to -1$

- $a<-1$ è oscillante es $(-3)^n$: $(-3)^{2n}\to+\infty$, $(-3)^{2n+1}\to-\infty$

)

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha = \begin{cases} +\infty & \alpha>0 \\ 1 & \alpha=0 \\ 0 & \alpha<0 \end{cases}$$



es $\lim_{n\to\infty} n^2 = \lim_{n\to\infty} n\cdot n = +\infty$

$\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^3} = \lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right)^3 = 0^3 = 0$

) $\lim_{n\to\infty}\left(n^2 - n^{3/2}\right) = +\infty - \infty$

$= \lim_{n\to\infty} n^2\left(1-\dfrac{n^{3/2}}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} n^2\left(1-\underbrace{\dfrac{1}{n^{1/2}}}_{0}\right) = \infty$

) $\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) = +\infty-\infty$

$= \lim_{n\to\infty} \underbrace{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}_{(a-b)}\cdot\dfrac{\overbrace{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}^{(a+b)}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} \quad = a^2-b^2$

$= \lim_{n\to\infty}\dfrac{\cancel{n}+1-\cancel{n}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} = \dfrac{1}{+\infty} = 0^+$

Lim e forme indeterminate con esponenziali e log

$a_n^{b_n} \to a^b$

TEOREMA: Valgono le seguenti regole ($a>0$, $b\in\mathbb{R}$)

1)
$$a^{+\infty} = \begin{cases} +\infty & \text{se } a>1 \\ 0 & 0<a<1 \end{cases} \qquad a^{-\infty} = \begin{cases} 0 & a>1 \\ +\infty & 0<a<1 \end{cases}$$

2)
$$(+\infty)^b = \begin{cases} +\infty & \text{se } b>0 \\ 0 & \text{se } b<0 \end{cases}$$

3)
$$(+\infty)^{+\infty} = +\infty \qquad (+\infty)^{-\infty} = 0$$

4)
$$0^{+\infty} = 0 \qquad 0^{-\infty} = +\infty$$

SONO INDETERMINATE le forme:

$1^{\pm\infty}$; 0^0 ; $(+\infty)^0$

$$a_n^{b_n} = e^{b_n \cdot \log a_n}$$

perché $a_n^{b_n}$ esponente che elevo ad e per ottenere $e^{\log a_n^{b_n}}$ quindi $e^{b_n \cdot \log a_n}$

$$\lim_{n\to+\infty} b_n \cdot \log a_n$$

$$\lim_{n\to\infty} \log n = +\infty$$ ~~$\log n$~~ = perché $e>1$

se $a_n \to +\infty \implies \lim_{n\to\infty} \log a_n = +\infty$ $\qquad \log(+\infty) = +\infty$

$$\lim_{n\to\infty} \log \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \log n^{-1} = -\lim_{n\to\infty} \log n = -\infty$$

se $a_n \to 0^+ \implies \lim_{n\to\infty} \log a_n = -\infty$ $\qquad \log(0^+) = -\infty$

se $a_n \to a > 0 \implies \lim_{n\to\infty} \log a_n = \log a$ $\qquad \log a_n \to \log a$

) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right]^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

) IN GENERALE $\forall x \in \mathbb{R}$ vale

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$ infatti se $x \neq 0$

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \left[\left(\left(1+\frac{1}{n/x}\right)^{\frac{n}{x}}\right)^x \to e^x\right]$$

se $x=0$ $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1^n = 1 \quad \forall n \to 1 \quad (e^0)$

) $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n}\right)^n = \left[\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right]^{-\frac{1}{2}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$

IMITE E ORDINAMENTO

EOREMA della permanenza del segno

- Se $a_n \longrightarrow \ell > 0 \implies a_n > 0$ (almeno definitivamente da un certo $\bar{n}$ in poi)
- se $a_n \longrightarrow \ell < 0 \implies a_n < 0$ (" " " " " ")

- Se $a_n > 0$ (o anche $\geq$) e $a_n \to \ell \implies \ell > 0$ (o $\geq$)
- Se $a_n < 0$ (o $\leq$) e $a_n \to \ell \implies \ell < 0$ (o $\leq$)

assando al limite in una disuguaglianza questa diventa debole (sia che prima fosse forte, sia che fosse debole)

) $\lim_{n \to \infty} \left(n + n^n \cdot \text{sen}^2 n\right) = +\infty$ per il teo. del confronto

$$a_n = n + \underbrace{(n^n \cdot \text{sen}^2 n)}_{\geq 0} \geq \underbrace{n}_{\downarrow +\infty} + 0$$

TEOREMA del doppio confronto (o dei due carabinieri)

se $a_n \leq b_n \leq c_n$ $\forall n$ (o definitivamente)

e se $a_n \to \ell$ e $c_n \to \ell$

$\Longrightarrow b_n \to \ell$

Dim dalla definizione di limite

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n}_1 : n > \bar{n}_1 \Longrightarrow |a_n - \ell| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n}_2 : n > \bar{n}_2 \Longrightarrow |a_n - \ell| < \varepsilon$$

posto $\bar{n} = \max(\bar{n}_1, \bar{n}_2)$

$$\forall n > \bar{n} \quad \ell - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < \ell + \varepsilon$$

applicazione N.B.

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

non risolvibile con
- $n^{\frac{1}{n}} \to (+\infty)^0$ INDET
- $n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\log n}{n}} \to e^{\frac{\infty}{\infty}}$ INDET.

Dim sia $n > 1 \Longrightarrow \sqrt[n]{n} > 1$ definiamo

$\sqrt[n]{n} = 1 + b_n$ con $b_n > 0$ si dimostri

che $b_n \to 0$ $\quad n = (1 + b_n)^n =$

$$= 1 + n \cdot b_n + \frac{n(n-1)}{2} \cdot b_n^2 + \ldots > 0$$

$$\Longrightarrow n > \frac{n(n-1)}{2} \cdot b_n^2 \qquad 0 < b_n^2 < \frac{2}{n-1}$$

$$0 < b_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}}$$

4) $\lim_{n \to +\infty} \frac{\log n}{n^\alpha} = 0 \quad \forall \alpha > 0$

infatti $\frac{\log n}{n^\alpha} = e^{\log(\log n) - \alpha \log n}$

$= e^{\log n \left(-\alpha + \frac{\log(\log n)}{\log n}\right)}$ ($\frac{\log(\log n)}{\log n} \to 0$)

$\to e^{-\infty} = 0$

quindi: $\lim_{n \to \infty} \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n}{n^{100}} = +\infty \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{\log n}{n^{100}} = 0$

- $\lim_{n \to \infty} \frac{a^n}{\log n} = +\infty \qquad \frac{a^n}{\log n} = e^{n \cdot \log a - \log(\log n)} = e^{n\left(\log a - \frac{\log(\log n)}{n}\right)}$ ($\frac{\log(\log n)}{n} \to 0$)

5) $\lim_{n \to \infty} \frac{(\log n)^\alpha}{n^\beta} = 0$ $\forall \alpha > 0, \forall \beta > 0$ Dim

$\frac{(\log n)^\alpha}{n^\beta} = e^{\alpha \cdot \log(\log n) - \beta \cdot \log n}$ per Dim precedente

$= e^{\log n \left(-\beta \cdot \frac{\alpha \cdot \log(\log n)}{\log n}\right)} = e^{-\infty} = 0$ ($\frac{\log(\log n)}{\log n} \to 0$)

es $\lim_{n \to \infty} \frac{(\log n)^{100}}{\sqrt{n}} = 0$

6) $\lim_{n \to +\infty} \frac{3^{n^2}}{n^n} = \lim_{n \to \infty} e^{n^2 \cdot \log 3 - n \cdot \log n}$

$= \lim_{n \to \infty} e^{n^2\left(\log 3 - \frac{\log n}{n}\right)} = e^{+\infty} = +\infty$ ($\frac{\log n}{n} \to 0$)

oppure

$\lim_{n \to \infty} \frac{3^{n^2}}{n^n} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{3^n}{n}\right)^n = +\infty$

- 1° caso: a_n è un infinito di ordine inferiore a b_n
- 2° caso: a_n è " " dello stesso ordine.
- 3° caso a_n è " " di ordine superiore a b_n
- 4° caso a_n e b_n non confrontabili

Per misurare l'ordine di infinito fissiamo come ∞ campione la successione $b_n = n$ e diciamo che:

a_n è un ∞ di ordine $\alpha > 0$ rispetto a n (per $n \to \infty$ in una funz. $\lim_{x\to\infty} f(x)$)

se $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^\alpha} = K$, K finito $\neq 0$

e $K \cdot n^\alpha$ è la parte principale di a_n rispetto a n per $n \to \infty$

---

a_n è equivalente a b_n se $a_n \sim b_n \iff \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$

se $a_n \sim b_n$ e se ad es $a_n \to \ell \implies b_n \to \ell$

infatti $b_n = \frac{b_n}{a_n} \cdot a_n \to 1 \cdot \ell = \ell$

quindi se $\frac{a_n}{n^\alpha} \to K \neq 0 \implies a_n \sim K \cdot n^\alpha$

a_n è equivalente alla sua parte principale per $n \to \infty$

CALCOLO DI PARTI PRINCIPALI p.p.

es

1) $a_n = \underbrace{n \cdot \sqrt{n}}_{n^{3/2}} + 7 + 2n + 3n^{2/3} \sim n^{3/2}$

infatti $a_n = n^{3/2}\left(1 + \frac{7}{n^{3/2}} + \frac{2n}{n^{3/2}} + \frac{3n^{2/3}}{n^{3/2}}\right)$

$\sim n^{3/2}(1)$ $n^{3/2} = $ p.p $\alpha = \frac{3}{2}$

Come cresce $n!$? 27/10/2011

si dim $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \quad \forall a>1$

$$\lim_{n\to\infty} \boxed{\frac{a}{1}\cdot\frac{a}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{a}{(n-1)}\cdot\frac{a}{n}} \longrightarrow 0$$

$$\lim \frac{n!}{n^n} = 0 \qquad 0 < \frac{n!}{n^n} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}{n\cdot n\cdot n\cdot\ldots\cdot n} = \frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{n}{n} \le \frac{1}{n}$$

GERARCHIA CRESCENTE DI INFINITI

$\log n \,;\, n^{\alpha} \,;\, a^n \,;\, n! \,;\, n^n$

Dim per induzione che $n! \ge n^n \cdot e^{-n} = \left(\frac{n}{e}\right)^n$

① base induttiva: $n=1 \qquad 1 \ge \frac{1}{e}$ Vero

② ipotesi induttiva: - vera per n
- dimostro per $n+1$

• Sia $f: A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$A = \text{dom} f$ si definisce $\lim_{x \to x_0} f(x)$

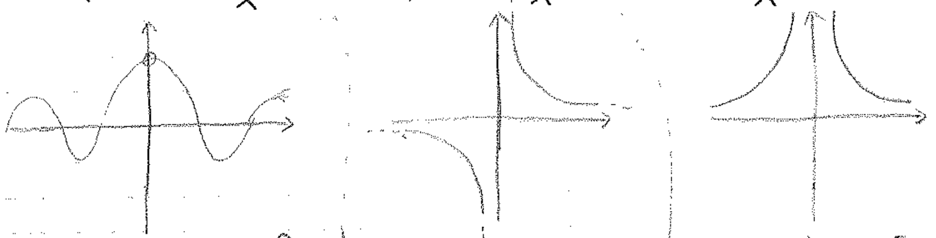
$x_0 \in \mathbb{R}^*$

Si "segue" il grafico di f "arbitrariamente" vicino" a x_0 e si controlla se esso "tende" ad un valore $\ell \in \mathbb{R}^*$

Per seguire il grafico vicino a $x_0 \in \mathbb{R}^*$, $f(x)$ sia definita almeno in un intorno di x_0 escluso al più x_0 stesso

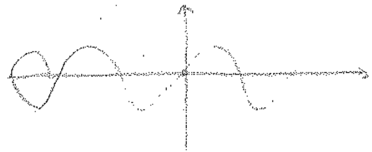
Se $x_0 \in \mathbb{R}$ l'esclusione di x_0 viene posta perché $f(x)$ potrebbe non essere definita in tale punto.

es $f(x) = \dfrac{\text{sen}\, x}{x}$ $\quad f(x) = \dfrac{1}{x}$ $\quad f(x) = \dfrac{1}{x^2}$



- non sono definite per $x = 0$ ma si può considerare il lim per $x \to 0$ anche se $f(x)$ è definita in x_0 il valore $f(x_0)$ non coincide in generale col valore del $\lim_{x \to x_0}$

es $f(x) = |\text{sen}\, x|$



?

Def Sia $x_0 \in \mathbb{R}^*$, $\ell \in \mathbb{R}^*$ e $f(x)$ una funzione definita almeno in un intorno di x_0 escluso al più x_0 stesso. Si dice che $f(x) \to \ell$ per $x \to x_0$ ($f(x)$ ha lim ℓ per $x \to x_0$)

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ oppure $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell$

se $\forall$ intorno U $\exists$ un intorno V di x_0:

$\forall x \in V \cap \text{Dom} f$, $x \neq x_0$, si ha che $f(x) \in U$

• Unificazione 9 casi:

• 1) $x_0 \in \mathbb{R}$, $\ell \in \mathbb{R}$

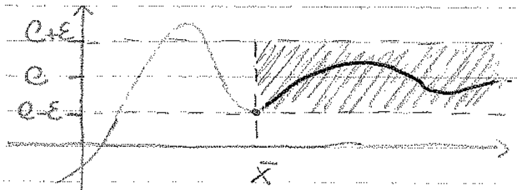
$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0$

$\exists \delta > 0$: $0 < |x - x_0| < \delta$ $\quad |f(x) - \ell| < \varepsilon$

3) • $x_0 = \pm\infty$, $\ell \in \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{x} \in \mathbb{R}$

$x > \bar{x} \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$



fissato $\varepsilon > 0$ trovo $\bar{x} \in \mathbb{R}$, $\forall x > \bar{x}$ il grafico di f cade nel rettangolo $R = \{(x,y),\ x > \bar{x},\ \ell - \varepsilon < y < \ell + \varepsilon\}$

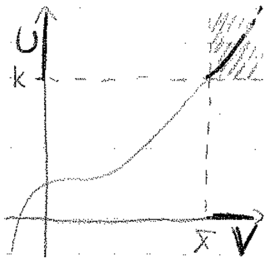
$\bar{x} = \bar{x}(\varepsilon)$ aumenta al diminuire di ε

• $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{x} \in \mathbb{R} : x < \bar{x} \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$

la retta $y = \ell$ è un asintoto orizzontale destro per $f(x)$

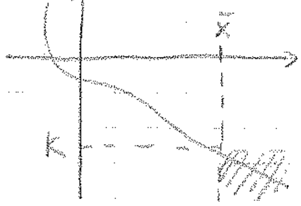
• 4) $x_0 = +\infty$ $\quad \ell = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \iff \forall K > 0 \quad \exists \bar{x} \in \mathbb{R} : x > \bar{x} \implies f(x) > K$



---

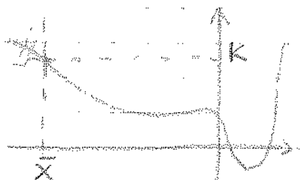
5) • $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$



$\iff$

$\forall K < 0 \quad \exists \bar{x} \in \mathbb{R} : x > \bar{x} \implies f(x) < K$

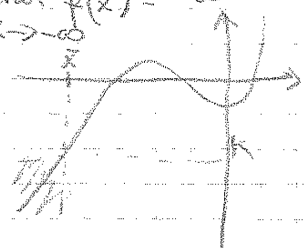
• $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$



$\iff$

$\forall K > 0 \quad \exists \bar{x} \in \mathbb{R} : x < \bar{x} \implies f(x) > K$

• $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

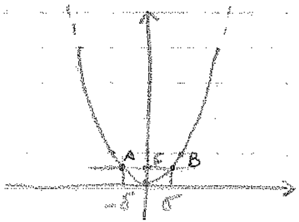


$\iff$

$\forall K < 0 \quad \exists \bar{x} \in \mathbb{R}$:
$x < \bar{x} \implies f(x) < K$

Verifiche di limiti

1) $\lim_{x \to 0} x^2 = 0$



$\varepsilon > 0$

$|x^2 - 0| < \varepsilon$

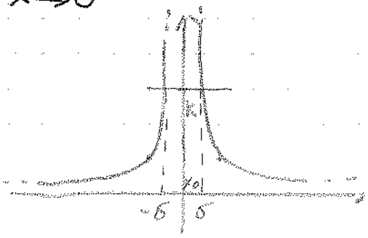
$x^2 < \varepsilon \quad -\sqrt{\varepsilon} < x < \sqrt{\varepsilon}$

$\Rightarrow \delta = \sqrt{\varepsilon}$

$\mathcal{E} = (0, \varepsilon)$

$B(+\delta, \varepsilon) = (+\delta, \delta^2) = (\sqrt{\varepsilon}, \varepsilon)$

2) $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$



$K > 0 \quad \frac{1}{x^2} > K \quad x^2 < \frac{1}{K} \quad -\sqrt{\frac{1}{K}} < x < \sqrt{\frac{1}{K}}$

$\Rightarrow \delta = \sqrt{\frac{1}{K}}$

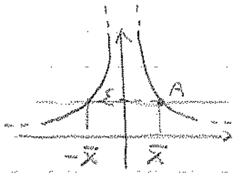
3) $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

$\varepsilon > 0 \quad \left|\frac{1}{x^2} - 0\right| < \varepsilon$

$\frac{1}{x^2} < \varepsilon \quad x^2 > \frac{1}{\varepsilon}$

$x < -\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} \ \vee \ x > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$

$\bar{x} = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$

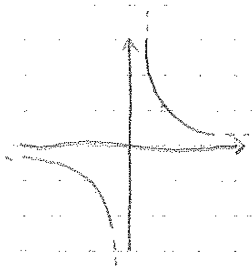


$A = \left(\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}, \varepsilon\right)$ dove $\left(\frac{1}{\left(\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}\right)^2}\right) = \varepsilon$

4) $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

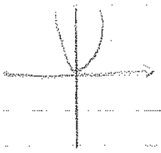
$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

$\nexists \lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$

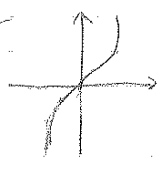


$K > 0 \quad \frac{1}{x} > K \quad x < \frac{1}{K} = \delta$

5) $\lim_{x \to \pm\infty} x^2 = +\infty$

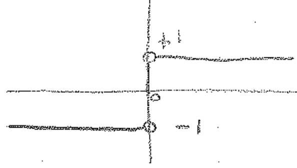


6) $\lim_{x \to \pm\infty} x^3 = \pm\infty$



7) $\lim_{x \to 0^+} \operatorname{segn} x = 1$

$\lim_{x \to 0^-} \operatorname{segn} x = -1$



$\nexists \lim_{x \to 0} \operatorname{segn} x$

8) $\lim_{x \to 0} |\text{segn}\, x| = 1$ $\qquad |f(x) - 1| < \varepsilon$ per $x \neq 0$

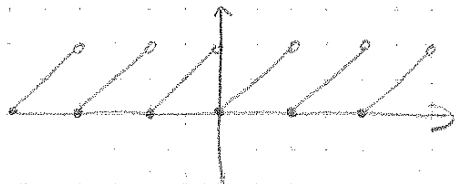
$||1-1| < \varepsilon \quad 0 < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$

$\Rightarrow \delta$ arbitrario

---

9) $\lim_{x \to 0^+} M(x) = 0$

$\nexists \lim_{x \to 0} M(x)$



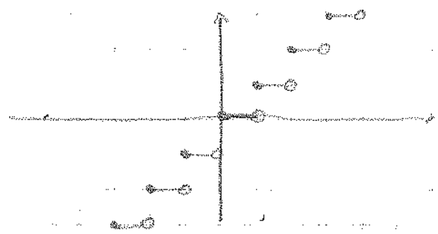
$\lim_{x \to 0^-} M(x) = 1$

$\lim_{x \to n^+} M(x) = 0 \qquad \lim_{x \to n^-} M(x) = 1$

---

10) $\lim_{x \to 0^+} [x] = 0$

$\nexists \lim_{x \to 0} [x]$

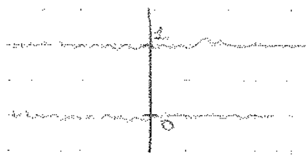


$\lim_{x \to 0^-} [x] = 1$

$\lim_{x \to n^+} [x] = n \qquad \lim_{x \to n^-} [x] = n-1$

FUNZIONE DI DIRICHLET

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$



$\nexists \lim_{x \to x_0} f(x) \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$ $\qquad$ [$\nexists$ un intorno per cui tutti i punti nel rettangolo cadono in quell'intorno]

- $f(x)$ si dice discontinua in x_0 se non è continua in x_0

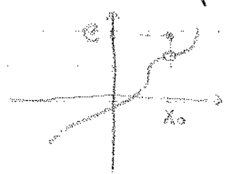
CLASSIFICAZIONE DELLE DISCONTINUITÀ

- f ha una discontinuità eliminabile in x_0 se $\exists$ il $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$

ma $\ell \neq f(x_0)$ es $|\text{segn}\, x|$ in $x=0$ ha una discontinuità eliminabile

si dice eliminabile perché la nuova funzione:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq x_0 \\ \ell & x = x_0 \end{cases}$$

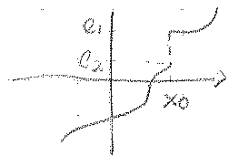


ABUSANDO IL LINGUAGGIO:
- $f(x)$ ha una discontinuità eliminabile in x_0 anche se $f(x)$ non è inizialmente definita in x_0 però $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$

es $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}\, x}{x} = 1$

1) f ha una discontinuità di 1^ specie (tipo SALTO) se $\exists$ finiti limiti laterali per $x \to x_0^{\pm}$ ma sono $\neq$

$\lim_{x \to x_0^+} = \ell_1 \in \mathbb{R}$ $\lim_{x \to 0^-} = \ell_2 \in \mathbb{R}$ $\ell_1 \neq \ell_2$

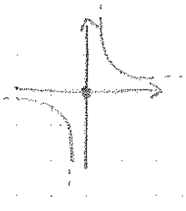


non è possibile eliminare la discontinuità

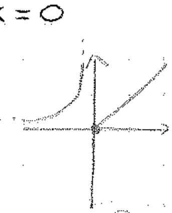
es $M(x)$, $[x]$ disc di 1^ specie

2) tutti gli altri tipi di discontinuità si dicono di 2^ specie

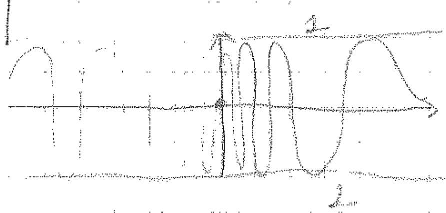
es
- $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$



- $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \\ x & x \geq 0 \end{cases}$



- $f(x) = \begin{cases} \text{sen}\,\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$



oscilla infinite volte in un intorno di 0 $\frac{1}{n\pi} = 0$