NUMERO : 445

DATA : 18/01/2013

A P P U N T I

STUDENTE : Miglietta

MATERIA : Fisica I appunti + riassunto
Prof. Gliozzi

FISICA I

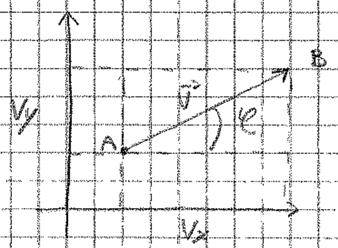
6/03/2012

GRANDEZZE SCALARI: caratterizzate solo dal valore numerico.
es) lunghezza, area, Temperatura...

GRANDEZZE VETTORIALI: caratterizzate da
- MODULO
- DIREZIONE
- VERSO

VETTORI NEL PIANO

$\vec{V}(V_x, V_y)$

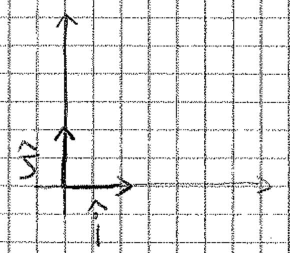


$$|\vec{V}| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$$

$$V_y = |\vec{V}| \cdot \operatorname{sen}\varphi \qquad V_x = |\vec{V}| \cdot \cos\varphi$$

$$\frac{V_y}{V_x} = \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\cos\varphi} = \operatorname{tg}\varphi \Rightarrow \varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{V_y}{V_x}\right)$$

VERSORI: vettori di modulo unitario



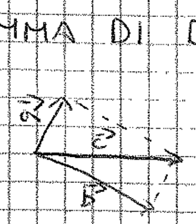
$i = (1,0)$ versore asse x
$j = (0,1)$ " " y

$$\vec{V} = V_x \cdot \hat{i} + V_y \hat{j} \qquad |\hat{i}| = |\hat{j}| = 1$$

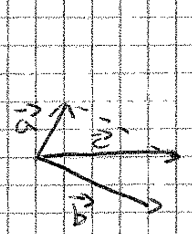
PRODOTTO DI UN VETTORE PER UNO SCALARE:
Dato un vettore $\vec{v}$ ed una grandezza scalare c

$c \cdot \vec{v}$ è un vettore $\vec{z}$ con:
- stessa direzione di $\vec{v}$
- modulo: $|\vec{z}| = c \cdot |\vec{v}|$
- segno uguale o opposto a $\vec{v}$ a seconda del segno di c.

SOMMA DI DUE VETTORI



$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

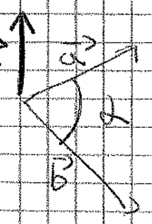


metodo del PARALLELOGRAMMA

PUNTO CODA

PRODOTTO VETTORIALE: $\vec{a}$ esterno $\vec{b}$ = $\vec{a}$ vettoriale $\vec{b}$

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

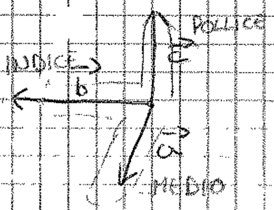


• DIREZIONE di $\vec{c}$

$\perp$ al piano individuato da $\vec{a}$ e $\vec{b}$

• MODULO = $a \cdot b \cdot \text{sen}\,\alpha \quad (0 \leq \alpha < \pi)$

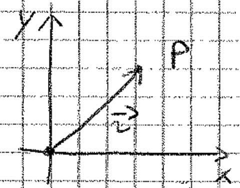
• VERSO regola della mano DX



PROPRIETÀ

- il modulo è pari all'area del parallelogramma
- è nullo se i vettori sono //
- gode della proprietà ANTI commutativa $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$

POSIZIONE DI UN PUNTO NELLO SPAZIO:



posizione di P data dal raggio vettore $\vec{r}$

$P(x,y) \qquad \vec{r} = x \cdot \hat{i} + y \cdot \hat{j}$

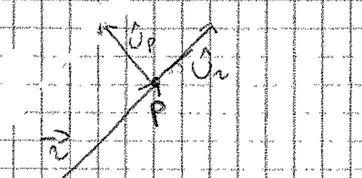
COORDINATE POLARI

La posizione di P è sempre data dal vettore posizione $\vec{r}$.

Il vettore posizione $\vec{r}$ è espresso in termini di versori:

$\hat{U}_r$ = versore nella direzione radiale

$\vec{U}_p$ = " $\perp$



$$\vec{r} = |\vec{r}| \cdot \hat{U}_r$$

MECCANICA (Studio del moto di un corpo)

- CINEMATICA DEL PUNTO MATERIALE: branca della meccanica che studia il movimento di un corpo senza domandarsi quali siano le cause del moto.

  - Diversi tipi di moto:
    - TRASLAZIONE
    - ROTAZIONE
    - VIBRAZIONE

  - TRAIETTORIA:
    - infinità di posizioni che un punto assume muovendosi.
    - luogo dei punti occupati dal punto materiale istante per istante

- MOTO UNIDIMENSIONALE

x_0

istanti t_0, t_1, t_2 corrispondenti a x_0, x_1, x_2

legge oraria $x = x(t)$ $\begin{cases} y(t) \ \text{cost} \\ z(t) \ \text{cost} \end{cases}$

- VELOCITÀ

non tiene conto del "percorso"

$$V_m = \Delta V = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t+t_0) - x(t)}{(t+t_0) - t} \quad \text{(Velocità media)}$$

Velocità istantanea: $V = \frac{dx}{dt} \longrightarrow V\,dt = dx \longrightarrow x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} V(t)\,dt$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t+t_0) - x(t)}{(t+t_0) - t} = \frac{dx}{dt} = V$$

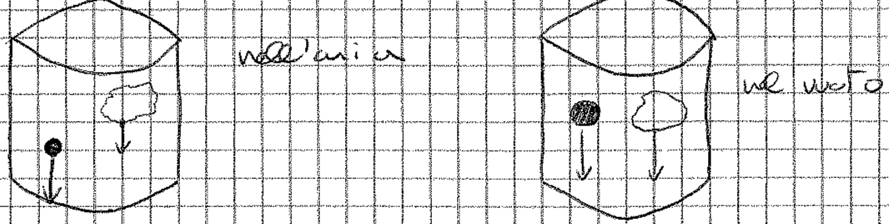
$$\Rightarrow V(t) = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \int_0^t V(t)\,dt = \int_0^t dx \Rightarrow x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} V(t)\,dt$$

ACCELERAZIONE

$$a_m = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{V_2 - V_1}{t_2 - t_1} \qquad a_i = \frac{dV}{dt} \Rightarrow V(t) = V_0 + \int_0^t a(t)\,dt$$

derivo ⇓ POSIZIONE / VELOCITÀ / ACCELERAZIONE ⇑ integro

MOTO DI UN CORPO IN CADUTA LIBERA



MOTO PERIODICO: è un esempio del moto "vario"

• Il moto di una particella si dice periodico quando ad intervalli di tempi regolari la particella torna a passare nella stessa posizione con la stessa velocità

MOTO ARMONICO SEMPLICE

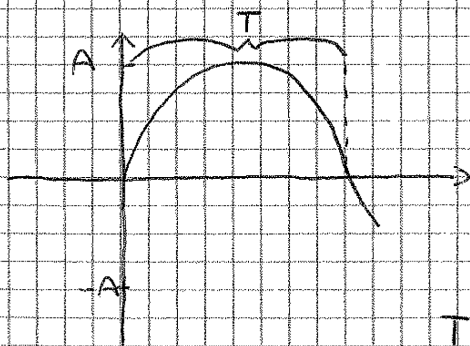
Si ha un moto armonico semplice lungo l'asse rettilineo quando la sua legge oraria è del tipo

$$x(t) = A \cdot sen(\omega t + \varphi)$$

• A è l'ampiezza

• ω è la frequenza angolare o pulsazione (la sua dimensione è $[T^{-1}]$)

• ϕ è l'argomento del seno al tempo $t=0$ (quindi cambiare la fase è equivalente a ridefinire l'origine dei tempi)



$$x(t) = A\, sen(\underbrace{\omega t + \phi}_{\theta})$$

$$\theta' \to \theta - \theta' = \quad (n = 1, 2, 3 \ldots$$

$$T = t' - t \qquad \omega t + \cancel{\varphi} = \omega t' + \cancel{\varphi} + 2\pi$$

$$\omega(t - t') = 2\pi \qquad \omega T = 2\pi$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\text{frequenza} = \frac{1}{T} \quad [s^{-1}]$$

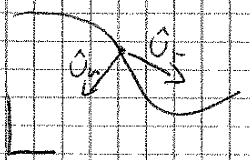
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 9 di 146

→ la velocità vettoriale è sempre tangente alla traiettoria
→ questa proprietà è INTRINSECA cioè non dipende dal sistema di riferimento

$\vec{v} = v\hat{u}_t$ (la direzione cambia punto per punto)
(vel INTRINSECA)

COORDINATE INTRINSECHE [POLARI / CARTESIANE

$s(t)$ coordinata curvilinea



$d\vec{r} = ds\,\hat{u}_t$

$\vec{v} = \frac{ds}{dt}\hat{u}_t = v\hat{u}_t$

velocità
COORDINATE CARTESIANE

POSIZIONE $\vec{r} = \vec{OP} = x(t)\hat{u}_x + y(t)\hat{u}_y$

$$v = \frac{dr}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{u}_x + \frac{dy}{dt}\hat{u}_y$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\hat{u}_x + \frac{dy(t)}{dt}\hat{u}_y = v_x\hat{u}_x + v_y\hat{u}_y$$

velocità
COORDINATE POLARI

POSIZIONE $\vec{r} = \vec{OP} = r(t)\hat{u}_r$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{u}_r + r\underbrace{\frac{d\hat{u}_r}{dt}}_{\text{DERIVATA DEL VERSORE}} = \underbrace{\frac{dr}{dt}}_{\text{VEL RADIALE}}\hat{u}_r + r\underbrace{\frac{d\theta}{dt}}_{\text{VEL TRASVERSA}}v_\theta = v_r + v_\theta$$

$$\frac{d\hat{u}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\hat{u}_N$$

COORDINATE POLARI

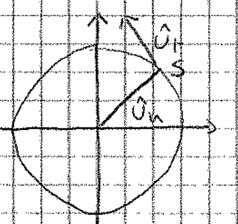
$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\hat{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\hat{u}_\theta\right)$$

ricordando che: $\frac{d\hat{u}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\hat{u}_\theta$ $\qquad \frac{d\hat{u}_\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\hat{u}_r$

$$a = \underbrace{\left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\hat{u}_r}_{\text{acc. radiale}} + \underbrace{\left(2\cdot\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)\hat{u}_\theta}_{\text{acc. trasversa}}$$

	COORDINATE		
		INTRINSECHE	CARTESIANE
POSIZIONE	dr	$ds\,\hat{u}_t$	$dx\,\hat{u}_x + dy\,\hat{u}_y$
VELOCITÀ	$V = \frac{dr}{dt}$	$\frac{ds}{dt}\hat{u}_t = V\hat{u}_t$	$\frac{dx}{dt}\hat{u}_x + \frac{dy}{dt}\hat{u}_y$
ACCELERAZIONE	$a = \frac{dv}{dt}$	$\frac{dv}{dt}\hat{u}_t + \frac{V^2}{R}\hat{u}_n$	$\frac{d^2x}{dt^2}\hat{u}_x + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{u}_y$

MOTO CIRCOLARE



- La traiettoria è una circonferenza
- coordinate cartesiane $x(t)$ e $y(t)$
- coordinate polari R (costante) e $\theta(t)$
- moto periodico con periodo $T = \frac{2\pi R}{V} = \frac{2\pi}{\omega}$

- La traiettoria è una circonferenza:

$s(t) = R\cdot\theta(t)$ $\qquad ds = R\,d\theta$

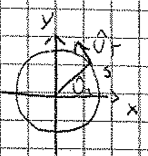
$\frac{ds}{dt} = V = R\cdot\frac{d\theta}{dt} = \omega R \longrightarrow$ se divido per R $\longrightarrow \omega = \frac{d\theta}{dt}$

- V è un vettore sempre tangente alla circonferenza

$\vec{v} = \omega R\cdot\hat{u}_t$

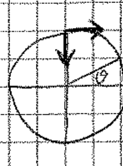
N.B. Questa relazione vale anche nel caso di un moto circolare NON UNIFORME

$V(t) = \omega(t)R$



$s(t) = s_0 + Vt$

$\theta(t) = \theta_0 + \omega t$



$\vec{v} = \omega R\hat{u}_t$

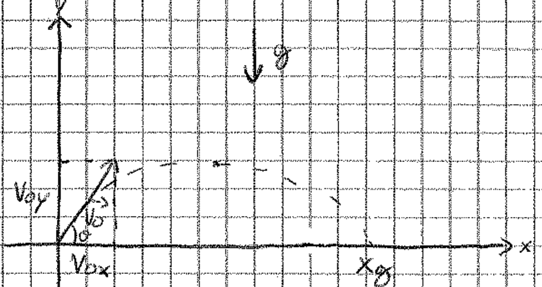
$|\vec{v}| = \omega R$

$\vec{a} = \frac{V^2}{R}\hat{u}_n = \omega^2 R\cdot\hat{u}_n$

MCU ha accelerazione normale alla traiettoria

$a = R\cdot\frac{d\omega}{dt}\hat{u}_t + \frac{V^2}{R}\hat{u}_n = a_n$ (è nulla se ω = cost)

MOTO PARABOLICO



CONDIZIONI INIZIALI: al tempo $t=0$ s ho: - accelerazione in modulo pari a g

- velocità iniziale v_0
- posizione iniziale $(0,0)$

[SCOPO: trovare legge oraria
[METODO: scompone le componenti dei vettori

$$\begin{cases} V_{ox} = V_0 \cos\theta \\ V_{oy} = V_0 \operatorname{sen}\theta \end{cases} \quad t=0 \longrightarrow \quad \begin{array}{l} x(t) = x_0 + V_0(t) \\ y(t) = y_0 + V_0(t) - \frac{1}{2} g t^2 \end{array}$$

equazione della traiettoria

$$\begin{cases} x(t) = V_0 \cos\theta\, t \\ y(t) = V_0 \operatorname{sen}\theta\, t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

MOTO DI TIPO PARABOLICO

$$\begin{cases} t = \frac{x}{V_0 \cos\theta} \\ y = V_0 \boxed{\operatorname{sen}\theta} \frac{x}{V_0 \cos\theta} - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{V_0 \cos\theta}\right)^2 = x \cdot \boxed{tg\,\theta} - \frac{g}{2V_0^2 \cos^2\theta} \cdot x^2 \end{cases}$$

$$y = ax - bx^2 \quad \text{(parabola passante per l'origine)}$$

- Calcolo di gittata e massima quota raggiunta dall'oggetto

$$y = x \cdot tg\,\theta - \frac{g}{2V_0^2 \cos^2\theta} x^2$$

/ per il calcolo della gittata ora impongo $y=0$ e ottengo

$$x_G = \frac{2V_0^2 \cos^2\theta\, tg\,\theta}{g} = \frac{2V_0^2 \cos\theta \operatorname{sen}\theta}{g} = 2x_M$$

/ Notiamo che il massimo viene raggiunto per il valore

$$\begin{cases} x_M = \frac{V_0^2 \cos\theta \operatorname{sen}\theta}{g} \\ y_M = \frac{V_0^2 \operatorname{sen}^2\theta}{2g} = \left(\frac{V_{oy}^2}{2g}\right) \end{cases}$$

$$y = \left(\frac{V_0^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta}{g}\right)\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} - \frac{g}{2V_0^2\cos^2\theta} \cdots = \frac{V_0^2 \cdot \operatorname{sen}^2\theta}{g} - \frac{V_0^2 \cdot \operatorname{sen}^2\theta}{2g} = \frac{V_0^2 \operatorname{sen}^2\theta}{2g}$$

$$\vec{F} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

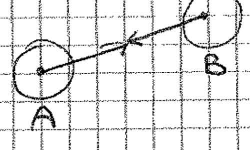
Oltre la forza si possono ricavare le caratteristiche del moto (e dunque la legge oraria)

È la forza che causa il moto.

- È una relazione vettoriale (equivalente alle 3 eq. fra le componenti)
- Vale nei sistemi di riferimento inerziali (IN CUI VALE LA II^a LEGGE DI NEWTON)
  → in quelli non inerziali occorre aggiungere termini aggiuntivi
- Vale solo fino a che la velocità del corpo è molto minore di c
- Quando su un punto agiscono più forze, esso si muove come se agisse una sola forza, la RISULTANTE $\vec{R}$.
- L'accelerazione del punto è pari alla somma vettoriale delle accelerazioni dovute ad ogni singola forza
- $\vec{R} = 0 \Rightarrow$ equilibrio statico

III^a Legge di Newton

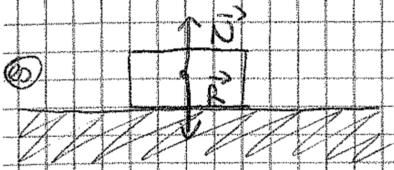
Se su un corpo A viene esercitata una forza da un corpo B $\Rightarrow$ A esercita su B una forza uguale e contraria (stesse direzione e modulo ma verso opposto)



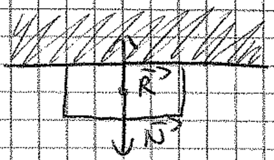
$$F_{A,B} = -F_{B,A}$$ (stessa retta d'azione)

REAZIONI VINCOLARI

Se un corpo sottoposto a forze rimane in equilibrio esso deve essere soggetto a una forza di reazione provocata dall'ambiente circostante



$\vec{R} + \vec{N} = 0$



CLASSIFICAZIONE FORZE

- INTERAZIONE GRAVITAZIONALE 10^{-38}
- " ELETTROMAGNETICA 10^{-2}
- " NUCLEARE DEBOLE 10^{-7}
- " NUCLEARE FORTE 1

- si pone = a 1 l'interazione fra due protoni a contatto superficiale
- le altre forze vengono rapportate a questa

FORZA PESO

Evidenza sperimentale: un corpo che cade qualunque sia la sua massa inerziale subisce un'accelerazione detta di gravità

$g = 9,81 \ m/s^2$

utilizzando la II^ legge di Newton:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \implies \vec{P} = m \cdot \vec{g}$$

(1 Kg peso = forza peso di una massa di 1 Kg)

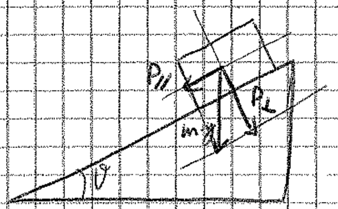
$\cong$

9,81 N $\Rightarrow$ 1 N $\cong$ 1 kg peso

$\boxed{\text{OSS}}$ Il raggio della Terra è talmente grande che la forza peso è // per tutti i corpi e $\vec{g}$ si può considerare costante in prossimità della superficie terrestre.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 19 di 146

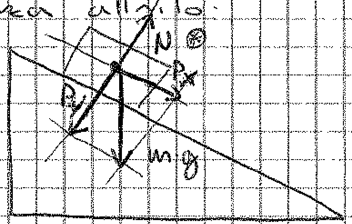
PIANO INCLINATO



$$P_\perp = m \cdot g \cdot \cos\theta \, \hat{u}_N = -\vec{N} \circledast$$

$$P_{//} = m \cdot g \cdot \text{sen}\theta \, \hat{u}_P$$

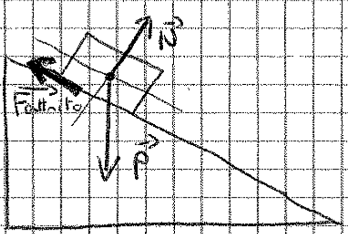
• senza attrito:



$$P + N = m \cdot a$$

$$\begin{cases} m \cdot g \cdot \cos\theta - N = 0 \\ m \cdot g \cdot \text{sen}\theta = m \cdot a \end{cases} \qquad \begin{cases} N = m \cdot g \cdot \cos\theta \\ a = g \cdot \text{sen}\theta \end{cases}$$

• attrito radente statico



$$P + N + F_{attrito} = 0 \quad \leftarrow \text{FERMO}$$

$$P = m \cdot g \qquad P_x = m \cdot g \cdot \text{sen}\theta$$

$$P_y = m \cdot g \cdot \cos\theta$$

$$\begin{cases} P_x - F_{attrito} = 0 \\ N - P_y = 0 \end{cases} \qquad \left.\begin{array}{l} F_{attrito} = P_x \\ N = P_y \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} \vec{F}_a = -\vec{P}_x \\ \vec{N} = -\vec{P}_y \end{array}$$

FORZA DI ATTRITO STATICO
$$\begin{cases} m \cdot g \cdot \cos\theta = N \\ m \cdot g \cdot \text{sen}\theta - F_s = 0 \end{cases} \qquad F_s = m \cdot g \cdot \text{sen}\theta$$

Condizioni

$$F_s \leq \mu_s N \Rightarrow F_s \leq \mu_s \, m \cdot g \cdot \cos\theta$$

$$\Rightarrow \cancel{m \cdot g} \, \text{sen}\theta \leq \mu_s \cdot \cancel{m \cdot g} \cdot \cos\theta$$

$$\mu_s \geq tg\theta$$

MOVIMENTO SE:

$$P_x > F_s \qquad m \cdot g \cdot \text{sen}\theta > \mu_s N$$

$$\cancel{m \cdot g} \cdot \text{sen}\theta > \mu_s \cdot \cancel{m \cdot g} \cdot \cos\theta$$

$$\frac{\text{sen}\theta}{\cos\theta} > \mu_s$$

$$tg\theta > \mu_s \qquad (0 < \theta < \pi/2)$$

FORZE CENTRIPETE

20/03/2012

- Supponiamo che la risultante delle forze agenti su un punto materiale presenti una componente normale alla traiettoria, questa componente causa l'ACCELERAZIONE CENTRIPETA DELL'OGGETTO

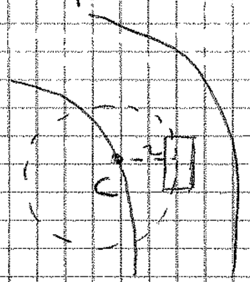
$$F_N = m \cdot a_N = m \cdot \frac{V^2}{R}$$

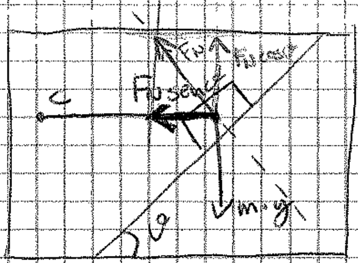
dove R, raggio di curvatura della traiettoria

- In generale forze centripete sono prodotte da rotaie, pneumatici, fili, ecc...
  ossia vincoli che consentono di incurvare la traiettoria, oppure da forze gravitazionali

---

(es) curve sopraelevate





$$F_C = F_N \sin\theta = m \cdot \frac{V^2}{r} \qquad F_N \cos\theta = m \cdot g$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}\theta = \frac{V^2}{r \cdot g}$$

(es) curve piane: in questo caso, la forza di attrito statica è responsabile della forza centripeta.

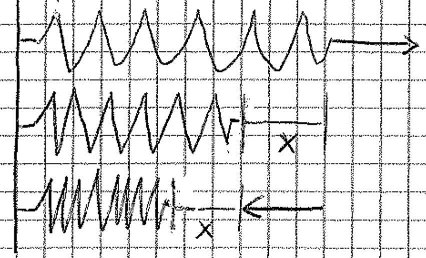
$$F_N \hat{U}_r = \mu_s N \cdot \hat{U}_r = \mu_s \cdot m \cdot g \cdot \hat{U}_r = \frac{m \cdot V^2_{max}}{R} \cdot \hat{U}_r$$

$$V_{max} = \sqrt{\mu_s \cdot g \cdot R}$$

$$f_s \leq f_s^{MAX} = \mu_s N$$

MOLLA

$F_x^{applicata} = K \cdot x$ K costante elastica $[N/m]$



FORZA DI RICHIAMO ELASTICA

- Originata dalle MOLLE
- Lunghezza a riposo: x_0
- Deformazione della molla $\Delta x = (x - x_0)$
- Costante elastica della molla: $K\ [N/m]$

LEGGE di HOOKE: $F = -K \Delta x$

- equazione del moto: $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$

$$F = m \cdot a = -Kx = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} \Longrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{K}{m}x = -\omega^2 x$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

$$x(t) = A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$$

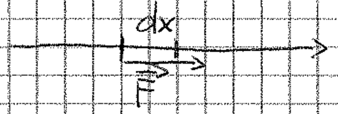
$$v(t) = A\omega \cos(\omega t + \varphi)$$

(e inoltre non hanno la stessa fase per $\pi/2$)

LAVORO

- Studiando cosa succede integrando la forza nel tempo si è arrivati alla definizione di della QUANTITÀ DI MOTO

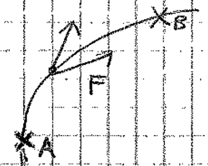
- Cosa succede studiando il caso in cui la forza F è funzione della posizione?



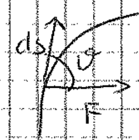
si definisce lavoro infinitesimo della forza F il prodotto:

$$dL = F dx$$

- Ma se il moto non è unidimensionale o la forza non è concorde con lo spostamento?

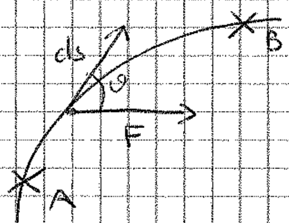


in un caso più generale il lavoro è dato da:



$$dL = F ds = F \cos\vartheta \, ds$$

Nel caso in cui lo spazio percorso non sia infinitesimo, ma il tratto di una curva da A a B si ha:



$$L_{A \to B} = \int_A^B F ds = \int_A^B F \cos\vartheta \, ds = \int_A^B F_T \, ds$$

INTEGRALE DI LINEA

$$[LAVORO] = [Joule] = [F][L] = [M][L][T]^{-2}[L]$$

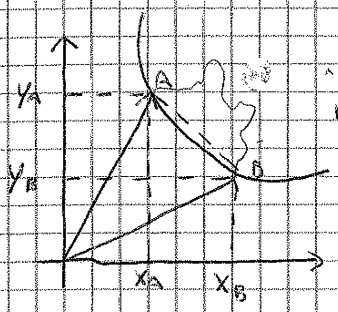
$$L_{A \to B} = \int_A^B F ds = \int_A^B F \cos\vartheta \, ds = \int_A^B F_T \, ds$$

- L positivo se $\vartheta < \frac{\pi}{2}$ (forza concorde allo spostamento)

- L negativo se $\vartheta > \frac{\pi}{2}$ (forza in verso opposto allo spostament

- L nullo se $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ (se la forza e lo spostamento sono ortogonali tra loro)

LAVORO DELLA FORZA PESO



$$L_{A\to B} = \int_A^B F\cdot ds = F\cdot \int_A^B ds$$

$$= F\cdot \left[r_B - r_A \right] = m\cdot g\cdot r_{AB}$$

l'unica componente non nulla della forza peso è lungo l'asse y dove la componente del vettore è data da:

$$y_B - y_A$$

per cui:

$$L_{A\to B} = -m\cdot g\,(y_B - y_A) = -(m\cdot g\, y_B - m\cdot g\, y_A)$$

Il lavoro della forza peso è indipendente dal percorso (DIPENDE DAGLI ESTREMI A B)

$$L_{A\to B} = -(m\cdot g\, y_B - m\cdot g\, y_A)$$

$$L_{A\to B} = -(E_{p,B} - E_{p,A}) = -\Delta E_p$$

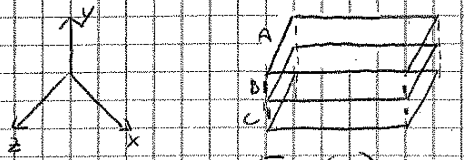
$E_p = m\cdot g\cdot y$ Energia potenziale della forza peso

L'energia potenziale è una funzione della coordinata y.

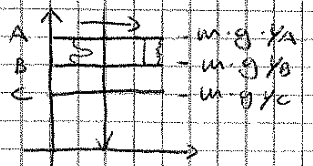
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 29 di 146

- Il gradiente di V è un vettore diretto lungo la direzione di massima variazione (*) (per unità di spostamento) della funzione $V(r)$;
- Il suo modulo è uguale al valore della derivata direzionale di $V(r)$ lungo tale direzione, e verso è quello di direzione dei valori crescenti di V.

(es) SUPERFICI EQUIPOTENZIALI DELLA FORZA PESO



$$\vec{\nabla} E_p = -m \cdot g$$



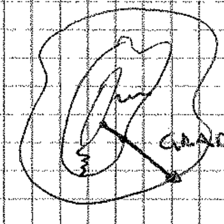
$$E_p(z) = m \cdot g \cdot z = \text{costante}$$

il GRADIENTE ha la stessa direzione della forza peso.

(*) percorso di massima pendenza tra LINEE EQUIPOTENZIALI

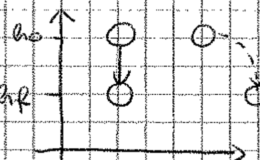
(es) metereologia

(figure ISOBARE VISTA DALL'ALTO)



- L'energia potenziale è una funzione della coordinata y.
- Il lavoro è pari all'opposto della variazione di questa funzione da A a B.
- Il lavoro NON dipende dalla particolare traiettoria tra A e B

$$L_{PESO} = -(m \cdot g\, y_{finale} - m \cdot g\, y_{iniziale}) = m \cdot g\,(h_o - h_f)$$



L non dipende dal percorso

- Il lavoro è nullo se il punto iniziale e finale coincidono.

$$h_o = h_f \Rightarrow m \cdot g\,(h_o - h_f) \Rightarrow L = 0$$

FORZE CONSERVATIVE

- Forza peso $\begin{cases} L_{A\to B} = -(m \cdot g\, y_B - m \cdot g\, y_A) \\ L_{A\to B} = -(E_{P,B} - E_{P,A}) = -\Delta E_P \end{cases}$

- Forza elastica $\begin{cases} L_{A\to B} = -\left(\frac{1}{2} Kx_B^2 - \frac{1}{2} Kx_A^2\right) \\ L_{A\to B} = -(E_{P,B} - E_{P,A}) = -\Delta E_P \end{cases}$

$E_P = m \cdot g \cdot y$ ENERGIA POTENZIALE DELLA F_{peso}

$E_P = \frac{1}{2} Kx^2$ ENERGIA POTENZIALE ELASTICA

- $F_{attrito}$: $L_{A\to B} = -\mu_D \int_A^B N\, ds$

FORZE NON CONSERVATIVE

- Tutte le forze che NON soddisfano le condizioni viste fin ora sono: NON CONSERVATIVE

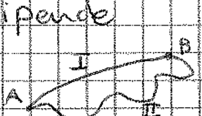
Vale comunque il TEO dell'EN. CINETICA

$$L_{A\to B} = \int_A^B m \cdot V\, dV = \frac{1}{2} m \cdot V_B^2 - \frac{1}{2} m \cdot V_A^2 =$$

$$= E_{K,B} - E_{K,A} = \Delta E_K$$

F. CONSERVATIVE

- Si può definire E_P
- Vale TEO dell'EN. CINETICA
- Lavoro NON dipende dal percorso.

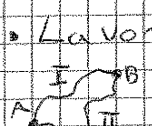


$L_{I_{AB}} = L_{II_{AB}}$

- $\int_A^B F\, ds = -\int_B^A F\, ds \Rightarrow L_{AB} = -L_{BA}$

F. NON CONSERVATIVE

- Vale SOLO: TEO dell'EN CINETICA
- Lavoro: dipende dal percorso



$L_{I_{AB}} \neq L_{II_{AB}}$

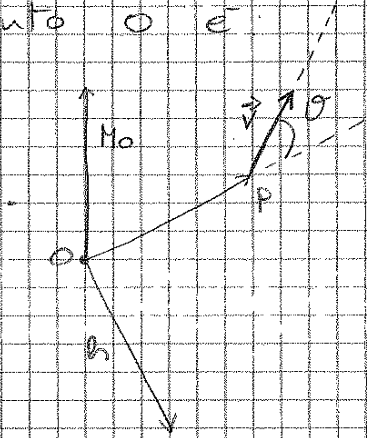
PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE dell'ENERGIA

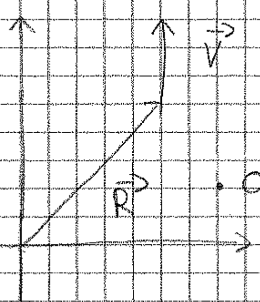
L'energia NON si crea e NON si distrugge, ma può essere CONVERTITA da una forma ad un'altra.

DINAMICA DEL PUNTO

Il momento di un vettore $\vec{V}$ applicato nel punto P rispetto ad un punto O è:

$$M_O = \overline{OP} \times \vec{V}$$



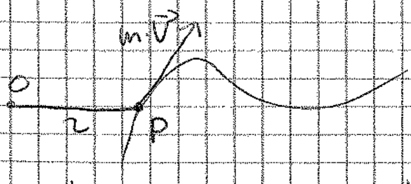


$$\vec{M} = \vec{R} \wedge \vec{V}$$

$$\vec{OP} = \vec{OO'} + \vec{O'P} \qquad \vec{M}_{OO'} = \vec{M}_O + \vec{OO'} \times \vec{V}$$

MOMENTO ANGOLARE: si definisce momento angolare il momento del vettore quantità di moto:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m \cdot \vec{V} \qquad L = r \cdot p \cdot \operatorname{sen}\vartheta$$



r = distanza fra polo e punto di applicazione P

Nel piano: $L = r \times m \cdot V = r \times m (V_r + V_\vartheta) = r \times m\, V_\vartheta$

componente // a r

In generale $|L| = r^2 \cdot m \cdot \frac{d\vartheta}{dt}$

nel moto CIRCOLARE (con riferimento al centro della circonferenza) $|L| = r^2 m \cdot \omega$

TEOREMA DEL MOMENTO ANGOLARE PER FORZE IMPULSIVE

Si parte dal TEO appena dimostrato

$$\frac{dL}{dt} = \vec{M} \Longrightarrow d\vec{L} = \vec{M}\, dt$$

$$\Delta L = \int_{t_0}^{t} \vec{M}\, dt = \int_{t_0}^{t} (\vec{r} \wedge \vec{F})\, dt$$

$$= \vec{r} \wedge \int_{t_0}^{t} F\, dt = \vec{r} \wedge \underbrace{\vec{J}}_{\text{(impulso)}}$$

FORZE CENTRALI (congiungono i centri) (forze conservative)

- Si definisce FORZA CENTRALE una $\vec{F}$ agente in una certa regione dello spazio con le seguenti proprietà:
  - per qualunque posizione del punto materiale P che subisce la forza
  - La direzione della forza agente su P passa sempre per un punto fisso dello spazio detto CENTRO della forza centrale.
  - il suo modulo è funzione soltanto della distanza del punto materiale P dal centro stesso.

[La presenza di una forza centrale genera una variazione dello spazio detta: CAMPO DI FORZE]

es
- Forza gravitazionale universale

$$\vec{F} = -G\frac{m \cdot M}{r^2}\vec{u}_r = -G\frac{m \cdot M}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}$$

- Forza di Coulomb

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}\vec{u}_r$$

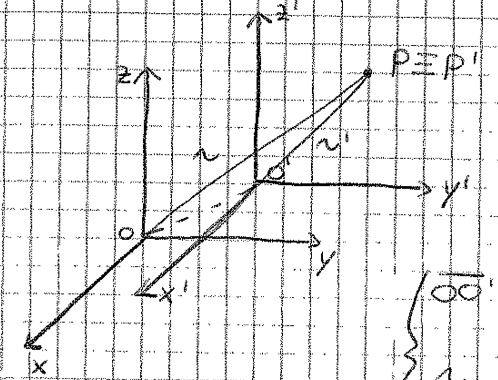
- Forza elastica. $\vec{F} = -Kx\hat{i}$

... punto che si muove in un campo di forze centrali giace in un piano fisso passante per il centro ed è percorsa in modo tale che la velocità areale rimanga costante.

- Nel caso di forze centrali, poiché il modulo del momento della quantità di moto è costante allora la velocità areale è costante.

MOTI RELATIVI

(relatività: studio di uno stesso elemento visto da sistemi di riferimento fissi)



- Supponendo di avere a disposizione due sistemi di riferimento cartesiani $Oxyz$ e $O'x'y'z'$ vediamo come descrivere posizione, velocità e accelerazione di un punto materiale P

$$\begin{cases} \overline{OO'} & \text{posizione di } O' \text{ rispetto al sistema } Oxy \\ r & \text{posizione di } P \text{ rispetto al sistema } Ox \\ r' & \text{" di } P' \end{cases}$$

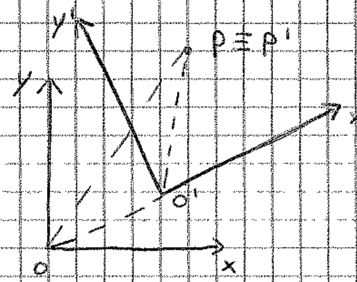
$$\boxed{r = \overline{OO'} + r'}$$

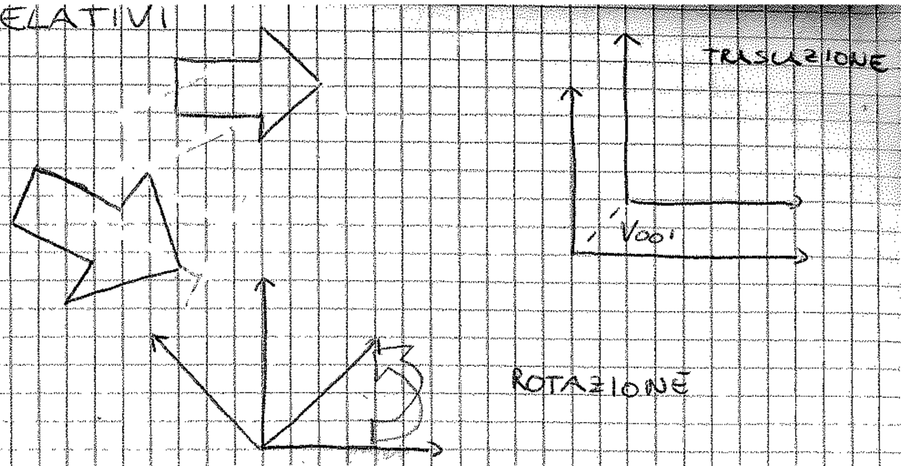
- Sistema di riferimento O' in moto di pura traslazione i versori U'_x, U'_y, U'_z NON variano nel tempo

derivo

$$\begin{cases} r = \overline{OO'} + r' \\ V = \dfrac{dr}{dt} = \dfrac{d\overline{OO'}}{dt} + \dfrac{dr'}{dt} = \underset{\text{vel di } O' \text{ rispetto a } O}{V_{O'}} + V' \\ a = \dfrac{dV}{dt} = \dfrac{dV_{O'}}{dt} + \dfrac{dV'}{dt} = a_{O'} + a' \end{cases}$$

CENNI SUI MOTI RELATIVI





Se i versori variano nel tempo

$$V = V_{O'} + V' + \omega \times r'$$
$$V_t = V - V' = V_{O'} + \omega \times r$$

$$\begin{cases} \text{se } \omega = 0 \Rightarrow V_t = V_{O'} \\ \text{se } V_{O'} = 0 \Rightarrow V_t = \omega \times r' \end{cases}$$

$$\vec{r} = \overline{OO'} + \vec{r}'$$

$$\vec{V} = \frac{dr}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{u}_x + \frac{dy}{dt}\hat{u}_y + \frac{dz}{dt}\hat{u}_z$$

$$\vec{V}' = \frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{dx'}{dt}\hat{u}'_x + \frac{dy'}{dt}\hat{u}'_y + \frac{dz}{dt}\hat{u}'_z$$

$$V_{O'} = \frac{dx_{O'}}{dt}\hat{u}_x + \frac{dy_{O'}}{dt}\hat{u}_y + \frac{dz_{O'}}{dt}\cdot\hat{u}_z$$

derivata

$$\frac{dr'}{dt} = \frac{dx'}{dt}\hat{u}'_x + \frac{dy'}{dt}\hat{u}_y + \frac{dz'}{dt}\hat{u}_{z'} +$$

$$+ x'\frac{d\hat{u}'_x}{dt} + y'\frac{d\hat{u}'_y}{dt} + z'\frac{d\hat{u}'_z}{dt}$$

sostituz. vedi pag 92

$$= \boxed{\vec{V}'} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V}_O + \vec{V}' = \overbrace{\frac{dx_{O'}}{dt}\hat{u}_x + \frac{dy_{O'}}{dt}\hat{u}_y + \frac{dz_{O'}}{dt}\hat{u}_z}^{\frac{dOO'}{dt}} +$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow \left[+ \frac{dx'}{dt}\hat{u}'_x + \frac{dy'}{dt}\hat{u}'_y + \frac{dz'}{dt}\hat{u}'_z \right]$$

$$+ x'\frac{d\hat{u}'_x}{dt} + y'\frac{d\hat{u}'_y}{dt} + z'\frac{d\hat{u}_z}{dt}$$

e inoltre $\vec{\omega} \wedge \frac{dr'}{dt} = \vec{\omega} \wedge (\vec{v}' + \vec{\omega} \wedge \vec{r})$

$= \vec{\omega} \wedge \vec{v}' + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}')$

sostituisco in (*)

(*) $\Longrightarrow \vec{a} = \vec{a}_{O'} + \vec{a}' + \underbrace{2\vec{\omega} \wedge \vec{v}'}_{\text{ACC. CORIOLIS}} + \cancel{\frac{d\omega}{dt} \wedge \vec{r}'} + \underbrace{\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}')}_{\text{ACC. CENTRIFUG}}$

(*) se $\omega = 0$ sistema solamente TRASCATO

$\vec{a} = \vec{a}_{O'} + \vec{a}'$

inoltre

(*) $a = a' + \overbrace{\boxed{a_{O'} + \omega \wedge (\omega \wedge r') + \frac{d\omega}{dt} \wedge r}}^{a_{TRASCINAMENTO}} + \overbrace{\boxed{2\omega \wedge V'}}^{a_{CORIOLIS}}$

$a = a' + a_{TRASCINAMENTO} + a_{CORIOLIS}$

$F = m \cdot a \Longrightarrow F - m a_T - m a_C = m \cdot a$

CENNI SUI MOTI RELATIVI SULLA TERRA

$g_0 = g + \omega \wedge (\omega \wedge R') + 2\omega \wedge V'$

acc di gravità per un sistema inerziale

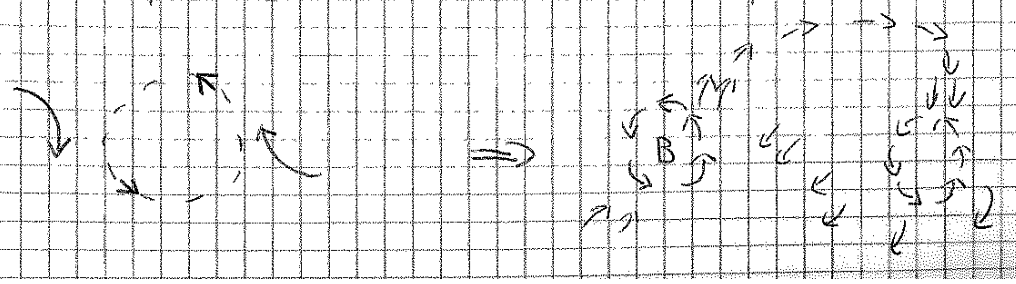
acc di gravità rispetto ad un sistema terrestre

velocità di un oggetto rispetto il sistema terrestre

$g = g_0 - \underbrace{\omega \wedge (\omega \wedge R')}_{F_{CENTRIFUGA}} - \underbrace{2\omega \wedge V'}_{F_{CORIOLIS}}$

es CICLONI

zone ad alta pressione verso zone a bassa pressione



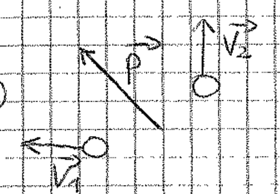
PER UNA SINGOLA PARTICELLA

POSIZIONE	VELOCITÀ	ACCELERAZIONE
r_i	v_i	a_i
QUANTITÀ DI MOTO	MOMENTO ANGOLARE	EN. CINETICA
$p_i = m_i v_i$	$L_i = r_i \times m_i v_i$	$E_{cin,i} = \frac{1}{2} m_i v_i^2$

PER UN SISTEMA DI N PARTICELLE

QUANTITÀ DI MOTO TOTALE	MOMENTO ANGOLARE TOTALE	EN. CINETICA TOTALE
$\sum_i m_i v_i = P_{tot} = \sum_i p_i$	$\sum_i r_i \times m_i v_i = \sum L_i = L_{TOT}$	$\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = E_{cin}$

es



$$\vec{P} = m_1 \vec{v_1} + m_2 \vec{v_2}$$

CENTRO DI MASSA: Si definisce centro di massa di un sistema di punti materiali il punto geometrico la cui posizione è individuata dal seguente vettore:

$$r_{cm} = \frac{\sum_i m_i r_i}{\sum_i m_i}$$

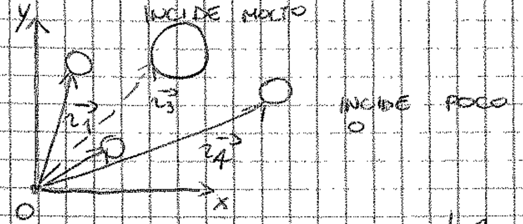
$$x_{cm} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} = \frac{1}{M} \sum_i m_i x_i$$

$$y_{cm} = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i} = \frac{1}{M} \sum_i m_i y_i$$

MEDIA PESATA

$$z_{cm} = \frac{\sum_i m_i z_i}{\sum_i m_i} = \frac{1}{M} \sum_i m_i z_i$$

es



• immaginando N particelle con m uguali:

$$r_{cm} = \frac{m_1 \vec{r_1} + m_2 \vec{r_2} + \dots + m_N \vec{r_N}}{m_1 + m_2 + \dots + m_N} = \Rightarrow$$

$$\vec{m_1} = m_2 = \dots = m_N \Rightarrow = \frac{m(\vec{r_1} + \dots + \vec{r_N})}{\dots}$$

$$\Rightarrow r_{cm} = \frac{1}{N} \sum_i r_i$$

POSIZIONE DEL CENTRO DI MASSA	$r_{CM} = \dfrac{\sum_i m_i r_i}{\sum_i m_i}$	
Velocità	$\dfrac{dr_{CM}}{dt} = V_{CM}$	$p = M_{TOT} \cdot V_{CM}$
Accelerazione	$\dfrac{dV_{CM}}{dt} = a_{CM}$	$R^{(e)} = M_{TOT} \cdot a_{CM}$

CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO

$$R^{(e)} = \left(\sum_i m_i\right) a_{CM} = \sum_i m_i \frac{dV_{CM}}{dt} = \frac{dp}{dt}$$

quando $R^{(e)} = 0$

$$\Rightarrow \frac{dp}{dt} = 0 \Rightarrow p = cost$$

N.B. La quantità di moto p dei singoli punti varia, è la SOMMA che rimane costante!

es. 1) caso particolare di due punti in un sistema isolato
  a) scoppio
  b) misura dinamica della massa

2) palline da biliardo su un piano senza attrito con URTI ELASTICI

3) pattinatori che si spingono fra loro

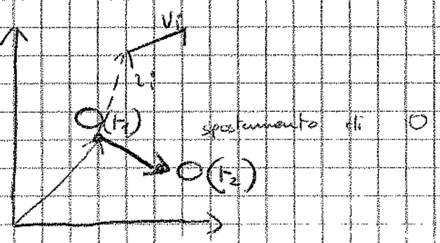
4) in fisica delle particelle: moto usato per i decadimenti

- Caso in cui il polo O si muove:

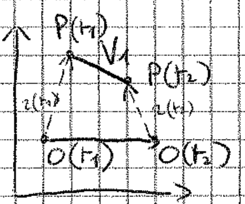
NEI MOTI RELATIVI

$$\frac{dr_i}{dt} = \frac{d\vec{OP}}{dt} = V_i - V_0 \qquad \left(\text{si usa: } V_{CM} = \frac{\sum_i m_i V_i}{\sum_i m_i} \right)$$

$$\frac{dL}{dt} = M^{(e)} - V_0 \wedge \sum_i m_i V_i \longrightarrow \frac{dL}{dt} = M^{(e)} - V_0 \wedge V_{CM} \sum_i m_i$$



- $V_0 \wedge M_{TOT} V_{CM}$ è nullo quando
  - polo O fisso $V_0 = 0$
  - CM in quiete $V_{CM} = 0$
  - il polo coincide con CM
  - V_0 // a V_{CM}



• 1 PUNTO • POLO O FERMO	$\frac{dL}{dt} = M$
• N PUNTI • POLO O FERMO	$\frac{dL}{dt} = \sum_i r_i \wedge F_i^{(e)} = M^{(e)}$
• N PUNTI • POLO O IN MOTO CON V_0	$\frac{dL}{dt} = M^{(e)} - V_0 \wedge V_{CM} \sum_i m_i$

CONSERVAZIONE DEL MOMENTO ANGOLARE

Quando il polo è fisso o coincide con il CM del sistema:

$$\frac{dL}{dt} = M^{(e)} \qquad \text{se } M^{(e)} = 0 \implies \frac{dL}{dt} = 0$$

$\Longrightarrow$

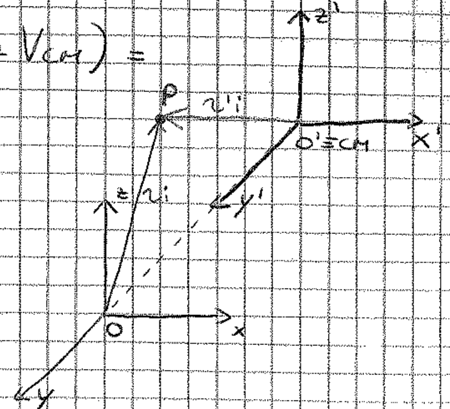
1. SISTEMA ISOLATO
2. Se il momento delle forze esterne è nullo rispetto al polo scelto;

IL MOMENTO ANGOLARE SI CONSERVA

DI RIFERIMENTO DEL CM

$$L = \sum_i (r'_i \wedge m_i V_i) = \sum_i r'_i \wedge m_i (V'_i + V_{CM}) =$$

$$= \underbrace{\sum_i r'_i \wedge m_i V'_i}_{L'} + \sum_i r'_i \wedge m_i V_{CM}$$



$$L = L' + \cancel{\left(\sum_i m_i r'_i\right)} \wedge V_{CM} = L'$$

- Il momento angolare rispetto al CM ha lo stesso valore sia nel sistema inerziale sia nel sistema del CM

- Nel sistema di riferimento del CM:
  - la posizione del CM r'_{CM} è nulla
  - la quantità di moto$_{TOT}$ P' è nulla
  - il momento angolare$_{TOT}$ NON è nullo e la sua derivata temporale vale:

$$\frac{dL'}{dt} = \sum_i \frac{d}{dt} (r'_i \wedge m_i V'_i) = M'^{(e)}$$

- cioè il teorema del momento angolare totale vale anche nel sistema (NON INERZIALE) del CM purché come polo si assuma l'origine, cioè il CM.
  Al calcolo del momento contribuiscono solo le forze esterne (vere).

SISTEMA CM : SISTEMA PRIVILEGIATO

$\Longrightarrow$ $P = 0$

$R^{(e)} = m \cdot a_{CM} \Longrightarrow \sum_i m_i a'_i = 0$

$M = M^{(e)}$ $\qquad$ $L = L'$

$\dfrac{dL'}{dt} = M'^{(e)}$ (vale TEO del MOMENTO ANGOLARE valgono solo forze esterne)

TEOREMA DI KONIG PER ENERGIA CINETICA
(Secondo di Konig)

$$\begin{cases} r_i = r_{CM} + r'_i \\ V_i = V_{CM} + V'_i \end{cases}$$

Consideriamo sempre il caso precedente e vediamo cosa succede per l'energia cinetica.

$$E_{CIN} = \sum_i \frac{1}{2} m_i V_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (V_{CM} + V'_i)^2 =$$

quadrato — quadrato — doppio prodotto

$$= \sum_i \frac{1}{2} m_i V_{CM}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i V_i'^2 + \cancel{2 \cdot \sum \frac{1}{2} m_i V_{CM} \cdot V'_i}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} M_{TOT} \cdot V_{CM}^2}_{E_{CIN_{CM}}} + \underbrace{\sum_i \frac{1}{2} m_i \cdot V_i'^2}_{E'_{CIN}} = E_{CIN_{CM}} + E'_{CIN}$$

quindi: 2° TEOREMA DI KONIG:

$$E_{CIN} = \frac{1}{2} M_{TOT} V_{CM}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i V_i'^2$$

$\Updownarrow$ contributo del moto "medio": moto CM

$\Updownarrow$ contributo del moto "interno" moto del sistema rispetto al CM

• principio: ci si mette nel SISTEMA PRIVILEGIATO e poi ci si sposta all'esterno (DA UN SISTEMA DI RIFERIMENTO A UN ALTRO)

TABELLA RIASSUNTIVA:

Sistema di riferimento INERZIALE	sistema di riferimento CM
$L_O = L_{CM} = L'$	$L' = \sum r' \wedge m_i V_i$
$E_{CIN} = \frac{1}{2} M_{TOT} V_{CM}^2 + E'_{CIN}$	$E'_{CIN} = \sum_i \frac{1}{2} m_i V_i^2$
$P = \sum m_i V_{CM} = M_{TOT} \cdot V_{CM}$	$P = 0$

Asimmetria nelle formule:

MOTO GLOBALE e MOTO MEDIO coincidono solo per la quantità di moto,

mentre per L e E_{CIN} si ha contributo sia del moto "medio" sia da quello "interno".

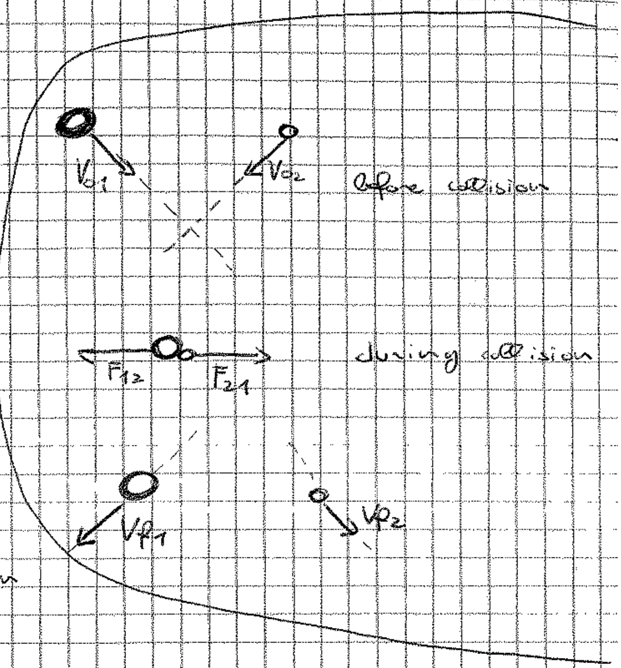
URTI

- Le forze che si manifestano durante l'urto sono FORZE INTERNE per il sistema formato dalle 2 masse.

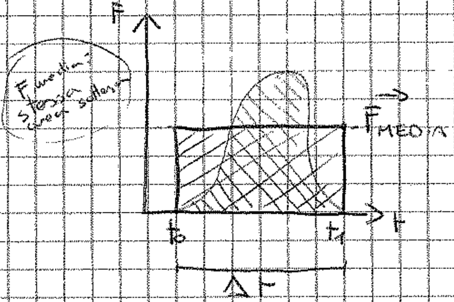
Se la risultante delle forze esterne è nulla allora:

$$0 = \vec{P_f} - \vec{P_0} \implies \vec{P_f} = \vec{P_0}$$

(QUANTITÀ DI MOTO)



Vero finché tempo dell'urto molto LIMITATO



- F non è cost
- F agisce in un intervallo Δt molto piccolo
- durante Δt: $F^{(E)} << F^{(I)}$

VARIAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO IN UN URTO:

$$\text{Se } \boxed{\vec{J} = F\Delta t = 0 \;\Downarrow\; \Delta p = 0}$$

- Quando F è impulsiva in Δt il ragionamento può non essere valido

VARIAZIONE DELL'EN. MECCANICA IN UN URTO

- L'energia potenziale non varia
- NON si può assumere a priori che non vari l' E_K

$\implies$ NON È DETTO CHE LE FORZE SIANO CONSERVATIVE

(es) La quantità di moto totale è conservativa quando due oggetti collidono, a patto che il sistema sia ISOLATO

URTI COMPLETAMENTE ANAELASTICI

13/04/2012

Si consideri un urto completamente anaelastico in cui si conserva la quantità di moto (NON ci sono forze esterne impulsive)

$$\underbrace{m_1 \vec{V_{1in}} + m_2 \vec{V_{2in}}}_{\substack{P \text{ iniziale} \\ \text{(prima dell'urto)}}} = \underbrace{m_1 \vec{V_{1fin}} + m_2 \vec{V_{2fin}}}_{\substack{P \text{ finale} \\ \text{(dopo l'urto)}}}$$

inoltre

$$\vec{V_{1fin}} = \vec{V_{2fin}} = \vec{V_{fin}}$$

$$m_1 \vec{V_{1in}} + m_2 \vec{V_{2in}} = (m_1 + m_2)\vec{V_{fin}}$$

$$\vec{V_f} = \frac{m_1 \vec{V_{1in}} + m_2 \vec{V_{2in}}}{m_1 + m_2} \Longrightarrow \text{Velocità del CM}$$

- $E_{CINETICA}$ prima dell'urto: $E_{K_{in}} = \frac{1}{2} m_1 V_{1in}^2 + \frac{1}{2} m_2 V_{2in}^2 =$

$$= \underbrace{E'_{K_{in}}}_{\text{KONIG}} + \frac{1}{2}(m_1 + m_2) V_{CM}^2$$

- dopo l'urto

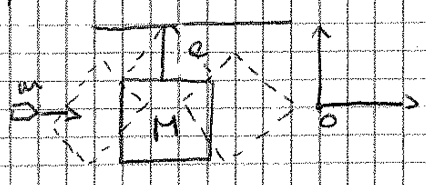
$$E_{K,fin} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) V_{CM}^2 < E_{K,in}$$

ENERGIA CINETICA DELLE PARTICELLE RISPETTO A CM PERSA NELL'URTO

---

es) PENDOLO BALISTICO: veniva usato per misurare la velocità dei proiettili sparati da un'arma da fuoco.

- l'urto è completamente anaelastico.
- dopo di che legno + proiettile oscillano con una certa ampiezza.



- durante l'urto: CONSERV. DELLA QUANTITÀ DI MOTO

$$(m + M) V_{fin} = m V_{o1}$$

- dopo l'urto: CONSERV. DELL'ENERGIA

$$(m + M)\, g\, h_{fin} = \frac{1}{2}(m + M) V_{fin}^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V_{o1} = \dfrac{(m+M) V_{fin}}{m_1} \\ V_{fin} = \sqrt{2\, g\, h_{fin}} \end{array} \right.$$

quindi $\boxed{E_{K_{in}} + E_{P_{in}} = E_{K_{fin}} + E_{P_{fin}}}$

URTI ANAELASTICI

- Sono i più comuni, si conserva la quantità di moto ma NON E_K, che viene assorbita durante l'urto e trasformata in un'altra forma di energia.

- Si definisce "coefficiente di restituzione" la quantità: e

$0 \leq e \leq 1$ ($e=1$ urto elastico)

$$e = -\frac{P_{1\,fin}}{P_{1\,in}} = -\frac{V_{1\,fin}}{V_{1\,in}} = -\frac{P_{2\,fin}}{P_{2\,in}} = -\frac{V_{2\,fin}}{V_{2\,in}}$$

- E_K DOPO L'URTO:

$$E_{K\,fin} = \frac{1}{2} m_1 V'^2_{1\,fin} + \frac{1}{2} m_2 V'^2_{2\,fin} = e^2 \left(\frac{1}{2} m_1 V'^2_{1\,in} + \frac{1}{2} m_2 V'^2_{2\,in} \right)$$

$$E_{K\,fin} = \quad '' \quad\quad '' \quad = e^2 E'_{K\,in}$$

- per ricavare le relazioni fin e velocità nel S.I

$$V'_{1\,fin} = V_{1\,fin} - V_{CM} = -e V'_{1\,in} = -e (V_{1\,in} - V_{CM})$$

$$V'_{2\,fin} = V_{2\,fin} - V_{CM} = -e V'_{2\,in} = -e (V_{2\,in} - V_{CM})$$

da cui

$$V_{1\,fin} = \frac{(m_1 - m_2) V_{1\,in} + m_2 (1+e) V_{2\,in}}{m_1 + m_2}$$

$$V_{2\,fin} = \frac{m_1 (1+e) V_{1\,in} + (m_2 - e\, m_1) V_{2\,in}}{m_1 + m_2}$$

La F esercitata dal sole sulla terra può essere scritta:

$$F_{ST} = m_T \frac{4\pi^2}{K_T r^2}$$

La F esercitata dalla Terra sul sole può essere scritta

$$F_{TS} = m_S \frac{4\pi^2}{K_S r^2}$$

per la III legge della dinamica (AZIONE - REAZIONE) in modulo le due forze devono essere uguali, cioè:

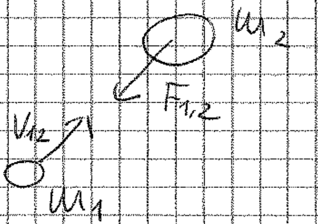
$$\frac{m_S}{K_S} = \frac{m_T}{K_T} \qquad m_S K_T = m_T K_S = \frac{4\pi^2}{\gamma}$$

$$F = \gamma \frac{m_S m_T}{r^2}$$

LEGGE DI GRAVITAZIONE UNIVERSALE

Partendo dalle 3 leggi di Keplero siamo giunti a dimostrare la legge di gravitazione universale dovuta a Newton, che in forma vettoriale si scrive

$$\vec{F}_{12} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_{12}$$



- È una forza centrale, attrattiva ed è valida qualsiasi siano le masse in gioco, cioè è una legge universale.
- È stata ricavata per orbite circolari, ma vale in generale per orbite ellittiche

CONCETTO DI CAMPO GRAVITAZIONALE

$\boxed{\text{Massa 1}} \Longleftrightarrow \text{CAMPO} \Longleftrightarrow \boxed{\text{Massa 2}}$

L'interazione tra gli oggetti si esplica attraverso una "perturbazione" delle proprietà fisiche dello spazio, che chiamiamo campo.

Per esempio la massa 1 risente del campo generato dalla massa 2 e viceversa. Una terza massa risentirebbe del campo generato dalle masse 1 e 2, cioè da tutte le masse presenti nello spazio.

---

es) CAMPO SCALARE ≠ CAMPO VETTORIALE
Temperatura e Pressione — Vento (direzione e verso)

Il campo: un "condizionamento" dello spazio rilevabile tramite "sonda" di prova opportuna

$$\vec{G} = \frac{\vec{F}}{\text{"sonda"}}$$

$\vec{G}$ = CAMPO

$\vec{F}$ = FORZA

"sonda": massa (puntiforme e non) molto piccola

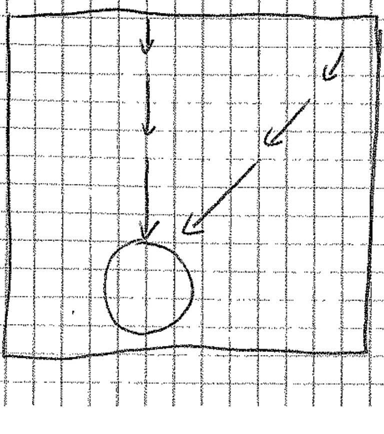
CAMPO GRAVITAZIONALE:

la forza agente su una "massa di prova"

$$\vec{G} = \frac{\vec{F}}{m_0} = -\gamma \frac{M}{r^2}\vec{u}_r \qquad \left(\text{in prossimità della Terra } \vec{G} = \vec{g}\right)$$

- m_0 = massa di prova estremamente piccola rispetto a M (per NON perturbarne il campo)
- M = massa che genera il campo
- r = distanza dalla massa M (dal centro) a cui calcolo il campo

LINEE DI FORZA PER IL CAMPO GRAVITAZIONALE TERRESTRE



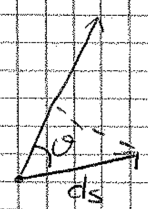
- Una linea di forza di un campo vettoriale, anche detta linea di forza, è una curva ideale che ha come tangente in ogni punto la direzione del vettore del campo stesso.
- Per ogni punto passa una sola linea di forza che si dice: UNIVOCAMENTE DEFINITA

ENERGIA POTENZIALE GRAVITAZIONALE

In quanto forza centrale, la forza gravitazionale è conservativa per cui si può definire un'energia potenziale relativa a tale forza

lavoro infinitesimo

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = -\gamma \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} u_1 \, dr$$



$\bar{u}_1 \, d\vec{s}$ è la proiezione di ds su $\bar{u}_1$

$$\bar{u}_1 \, ds = |\vec{u}_1| \, |ds| \cos\vartheta$$

$$|\vec{u}_1| = 1$$

$$W = \int_A^B dW = \int_{r_A}^{r_B} -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \, dr = -\gamma m_1 m_2 \cdot \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_A}^{r_B} =$$

$$\left(-\frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_A} \right)$$

$$= -\gamma \frac{m_1 m_2}{r_A} - \left(-\gamma \frac{m_1 m_2}{r_B} \right) = E_{P,A} - E_{P,B}$$

$$E_p = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r} \Rightarrow$$ • L'$E_{potenziale}$ vale 0 all'infinito ($r \to \infty$)

• Quando m_2 si avvicina a m_1 la F_g compie un lavoro positivo e m_2 acquista E_K

APPLICAZIONE: Velocità di fuga

La velocità di fuga è quella minima iniziale a cui un oggetto SENZA PROPULSIONE deve muoversi per potersi allontanare indefinitivamente da una sorgente di campo gravitazionale

• $E_{MECCANICA}$ del corpo sulla superficie terrestre:

$$E_{in} = \frac{1}{2} m V^2 - \gamma \frac{m \, m_T}{r_T}$$

• E_{MEC} del corpo all'infinito: $E_{fin} = \frac{1}{2} m V_0^2$

La VELOCITÀ DI FUGA è quella minima che l'oggetto deve avere a Terra, per cui all'infinito la velocità è nulla, da cui per conserv. dell'E_{MECC} $E_{in} = E_{fin}$

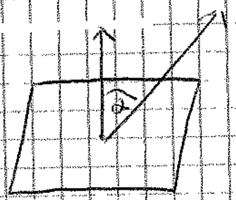
$$\frac{1}{2} m V^2 - \gamma \frac{m \, m_T}{r_T} = \cancel{\frac{1}{2} m V_0^2} \Rightarrow \frac{1}{2} \cancel{m} V^2 = \gamma \frac{\cancel{m} \, m_T}{r_T}$$

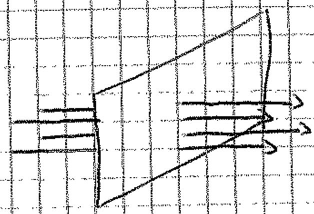
$$V_{fuga} = \sqrt{\gamma \frac{2 m_T}{r_T}}$$

FLUSSO DI UN CAMPO GRAVITAZIONALE UNIFORME

Si dice flusso di un campo vettoriale A uniforme attraverso una superficie piana S il prodotto scalare:

$$\Phi(A) = \vec{a} \cdot \vec{S} = a \cdot S \cdot \cos\alpha$$



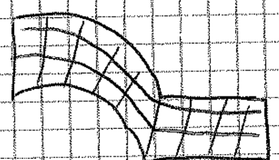


flusso proporzionale a:
- Superficie
- $\vec{a}$
- α

FLUSSO DI UN CAMPO VETTORIALE NON UNIFORME

Se il campo NON è uniforme (in generale varia da punto a punto) e la superficie NON è piana (il vettore superficiale NON è definito in modo unico)

- DIVIDO LA SUPERFICIE in elementi INFINITESIMI dS

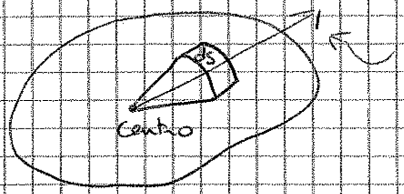


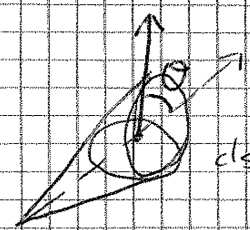
- faccio l'integrale.

$$\Phi_s(E) = \Phi_1 + \Phi_2 + \dots + \Phi_n = \sum_{i=1}^{n} \Phi_i \quad \text{FLUSSO}$$

$$\Phi_s(E) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \Phi_i \Longrightarrow \Phi(\vec{a}) = \oint_S d\Phi = \oint \vec{a} \, \vec{u}_n \, dS$$

$\Rightarrow$ Come si definisce l'angolo solido per un elemento di superficie dS che non giace su una sfera?





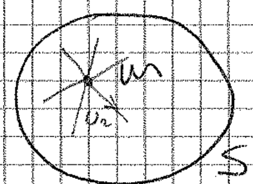
dS' NON è // al raggio

- proietto su una sfera centrata in O e con raggio r che sottende l'area $dS' = dS \cos\theta$

- l'elemento di angolo solido è per definizione (in STERADIANTI)

$$d\Omega = \frac{dS'}{r^2} = \frac{dS}{r^2}\cos\theta$$

Dim DEL TEOREMA DI GAUSS



Considero il flusso attraverso una qualsiasi superficie generata da una massa posta all'interno

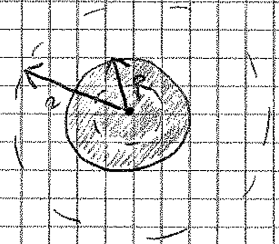
$$\Phi_S(\vec{a}) = \oint_S d\Phi = \oint_S \vec{a}\,\vec{u}_N\, dS = \oint_S a\cos\theta\, dS$$

$$\oint_S \gamma\frac{m}{r^2}\cos\theta\, dS = \gamma m \oint_S \frac{\cos\theta}{r^2}\, dS = \gamma m \oint d\Omega$$

$$= \gamma m 4\pi$$

- Nota che un campo generato da una massa all'esterno genera un flusso attraverso la superficie che è uguale in entrata e in uscita dalla superficie, per cui al netto...

• Se m invece di essere distribuita solo sulla superficie fosse distribuita uniformemente in tutto il volume



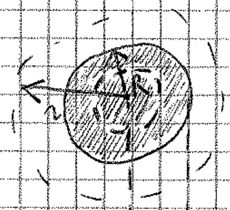
$$G(r) = \gamma \frac{m}{r^2} \qquad \forall r > R$$

NON CAMBIA NULLA all'esterno

Siccome la massa è distribuita uniformemente sul volume il rapporto fra massa e volume deve essere costante per diversi raggi interni

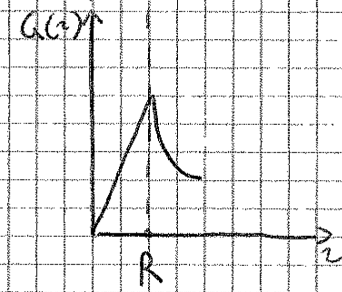
$$\frac{m(r_1)}{\frac{4}{3}\pi r_1^3} = \frac{m(r_2)}{\frac{4}{3}\pi r_2^3} = \dots = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3} \qquad \begin{matrix} r_1 > R \\ r_2 > R \end{matrix} \; ?$$

da cui $m(r) = m \dfrac{r^3}{R^3}$



$\forall\, r < R$

$$\Phi(r) = 4\pi r^2 G(r) = 4\pi\gamma m(r) = 4\pi\gamma m \frac{r^3}{R^3} =$$



$$G(r) = \frac{\cancel{4\pi}\gamma m \cdot r^{\cancel{3}}}{\cancel{4\pi} \cancel{r^2} \quad R^3} = \gamma m \cdot \frac{r}{R^3}$$

$$\vec{F} = -m_p\, G(r)\, \vec{u}_r = -\gamma\, m\, m_p \frac{\vec{r}}{R^3} =$$

FORZA DI TIPO ELASTICO → $= -K\vec{r}$

CONSEGUENZA DELLA LEGGE DI GRAVITAZIONE UNIVERSALE: La traiettoria

Facciamo ora il percorso opposto a quello fatto all'inizio.

$\boxed{\text{LEGGE DI GRAVITAZIONE UNIVERSALE}} \Longrightarrow \boxed{\text{Leggi di Keplero ORBITA ELLITTICA}}$

$$\vec{F}_{12} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_{1,2} \qquad \frac{1}{r} = \frac{1}{e\,d} - \frac{1}{d}\cos\theta$$

- DINAMICA DEL PUNTO 24/04/2012

Il corpo è approssimato con un punto che si muove nello spazio sotto l'azione di forze esterne

- SISTEMA DI PUNTI

- Il corpo è approssimato con un punto che si muove nello spazio, ed interagisce con altri punti interni al sistema tramite le forze interne e con l'esterno (F esterne)
- Il sistema è caratterizzato dal moto del suo CM e dal moto dei singoli punti attorno ad esso

- CORPO RIGIDO

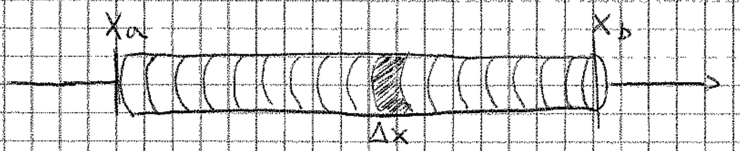
Il corpo è esteso, le particelle che lo compongono sono degli elementi infinitesimi di volume che hanno distanza fissa gli uni rispetto agli altri. Le forze interne sono nulle. Si muove sotto l'azione di F esterne. Il corpo può traslare e ruotare.

CORPO RIGIDO

↳ formato da un insieme continuo di punti materiali

Estendendo ciò che si è visto per un insieme discreto di punti materiali, le singole masse saranno infinitesime:

$$m_i \Longrightarrow dm_i$$



tutte le somme diventano integrali!

Definizione: • Un corpo rigido è un oggetto, o meglio un sistema di punti materiali in cui le distanze relative non cambiano

- Un corpo rigido diventa quindi la definizione di un oggetto reale esteso
- Le forze interne (forze di coesione che mantengono invariate le distanze tra i punti) hanno le seguenti caratteristiche:

$$\begin{cases} \text{non hanno risultante} & R^{(I)} = 0 \\ \text{non hanno momento} & M^{(I)} = 0 \\ \text{non hanno lavoro} & L^{(I)} = 0 \end{cases}$$

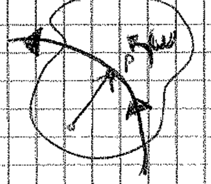
- Forze esterne:

$R^{(e)} = m \cdot a_{CM}$ le forze esterne sono responsabili del moto del CM

$M^{(e)} = \frac{d}{dt}$ i momenti delle forze esterne sono delle rotazioni attorno ad o (punto fisso o CM)

$W_{AB}^{(e)} = E_{kA} - E_{kA}$ il lavoro delle forze esterne varia E_k del sistema

PURA ROTAZIONE



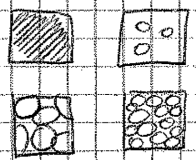
- tutti i punti descrivono un moto circolare, le traiettorie sono archi di circonferenze che giacciono su piani // tra loro, e che hanno il centro sull'asse di rotazione
- tutti punti hanno ω =, che è // all'asse di rotazione

- Velocità $V_i = \omega \times R_i$
- Dinamica: $\vec{M} = \frac{d\vec{J}}{dt}$

ROTO-TRASLAZIONE

Più in generale si può dimostrare che ogni moto rigido può essere visto come la somma di una rotazione legata al cm e da una rotazione dei punti attorno ad esso.

Possiamo dimenticarci della struttura fine (atomi e molecole) e considerare tanti volumetti omogenei e continui così come se fossero un sistema di punti materiali "continui"?



- sì perché i volumetti dV che si considerano siano piccoli rispetto alla scala macro (10^{-6} m) ma grandi rispetto alla scala atomica (10^{-9} m)

- Lavoriamo con sistemi continui di punti, sostituendo quanto studiato finora le sommatorie con gli integrali
  - si può tener conto così di come la massa è distribuita tramite la densità

DENSITÀ:

$$\begin{cases} dm = \rho\, dV \\ \rho = \frac{dm}{dV} \end{cases} \Longrightarrow m = \int_{vol} \rho\, dV = \int dm$$

- Volumica $\rho = \frac{dm}{dV}$ $\quad m = \int_{Vol} \rho\, dV$

- Volumica (corpo omogeneo) $\rho = \frac{m}{V}$ $\quad m = \rho \cdot V$

- superficiale $\rho_S = \frac{dm}{dS}$ $\quad m = \int_{Sup} \rho_S\, dS$

- lineare $\rho_L = \frac{dm}{dL}$ $\quad m = \int_{linea} \rho_L\, dL$

MOMENTO DELLA FORZA PESO

Il momento della forza peso rispetto a un polo fisso (ad es l'origine degli assi delle coordinate) è dato da:

$$M = \int r \times g \, dm = \int r \, dm \times g = m \, r_{cm} \times g = r_{cm} \times mg$$

che conferma il fatto che la forza peso è applicata al CM

• Energia potenziale gravitazionale

$$E_p = \int g \, z \, dm = g \int z \, dm = m \cdot g \cdot z_{CM}$$

Se il corpo è libero ed agisce solo la forza peso la traiettoria del cm è verticale, rettilinea o parabolica a seconda della condizione iniziale

ROTAZIONE RIGIDA ATTORNO AD UN ASSE FISSO in un sistema di riferimento inerziale

$$\vec{L_i} = \vec{r_i} \times m_i \vec{V_i} \qquad |\vec{L_i}| = L_i = r_i m_i V_i = r_i m_i R_i \omega_i$$

proiezione del momento angolare sull'asse di rotazione

$$L_{i,z} = L_i \cos\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta_i\right) = L \, \text{sen}\, \vartheta_i = r_i \, \text{sen}(\vartheta_i) m_i R_i \omega = m_i R_i^2 \omega$$

momento di inerzia del corpo rispetto all'asse z

$$L_z = \sum_i L_{i,z} = \omega \sum_i m_i R_i^2 = I_z \omega$$

$$I = \sum_i m_i R_i^2 \quad \text{momento di inerzia del corpo}$$

MOMENTO DI INERZIA

$$I_z = \sum_i R^2 m_i = \sum_i (x_i^2 + y_i^2) m_i \quad \text{nel caso discreto}$$

$$I_z = \int r^2 \, dm \quad \text{nel caso continuo}$$

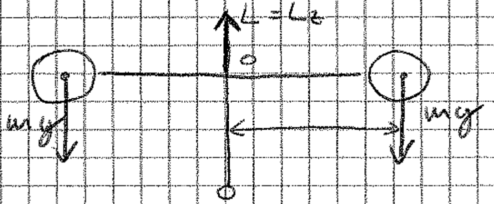
- Il momento di inerzia è legato a come è distribuita la massa attorno all'asse di rotazione, non è una caratteristica che si possa calcolare nota la struttura del corpo ma bisogna anche sapere la distribuzione attorno all'asse
- La componente del momento angolare rispetto all'asse di rotazione dipende solo dal momento angolare e tramite I per la forma del corpo, dalla posizione rispetto all'asse di rotazione.

ROTAZIONE DI UN CORPO RIGIDO

Quali sono le F esterne che generano questo momento delle forze esterne che fa variare la direzione del momento angolare?

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{L}$$

· 2 masse collegate da un'asta di massa trascurabile che ruota attorno ad un asse passante per il CM

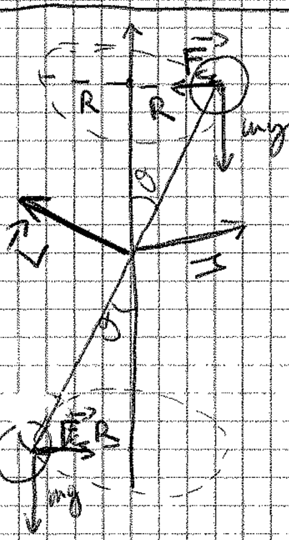


$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{v}$ $V = \omega r$

$|\vec{L}| = 2mrV = 2mr^2\omega = I_z\omega$

$M = 0$

$\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F}$



$L_z = 2m(r \cdot sen\vartheta)^2\omega = 2mR^2\omega$

$L_\perp = 2mrR \cdot cos\vartheta$

$M = L_\perp\,\omega = 2mrR\omega^2 cos\vartheta$

il momento angolare non è più // all'asse di rotazione (e quindi a ω) rimane valida la relazione fra la componente lungo z e ω tramite I_z.

$R = r \cdot sen\vartheta$

· Il momento della forza è generato dalla coppia di forze centripete

· La forza peso non interviene

<u>mantenere</u> fermo il sistema significa annullare $\vec{M}$)

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 79 di 146

EN. CINETICA (pura rotazione)

$$E_K = \sum_i \frac{1}{2} m_i V_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i R_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} I_z \omega^2$$

$\vec{L} /\!/ \vec{\omega}$ $\qquad\qquad$ $\vec{L} \not\!/\!/ \vec{\omega}$

$$E_K = \frac{L^2}{2I_z} \qquad\qquad E_K = \frac{L_z^2}{2I_z}$$

LAVORO

quando un corpo rigido in quiete o in rotazione con velocità angolare ω_{in} viene portato a ruotare con velocità ω_{fin} a seguito dell'applicazione di un momento esterno, l'energia cinetica subisce una variazione e quindi è stato compiuto un lavoro.

$$W = \Delta E_K = \frac{1}{2} I_z \omega_{fin}^2 - \frac{1}{2} I_z \omega_{in}^2$$

in forma infinitesima $\frac{1}{2} I_z \omega (\omega_{fin} - \omega_{in})$

$$dW = dE_K = I_z \omega \, d\omega = I \frac{d\vartheta}{dt} d\omega = I \, d\vartheta \frac{d\omega}{dt}$$

$$dW = dE_K = I_z \omega \, d\omega = I_z \frac{d\vartheta}{dt} \alpha \, dt = \underbrace{I_z \alpha}_{M_z} d\vartheta$$

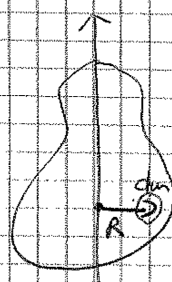
$$W = \int_0^\vartheta M_z \, d\vartheta \implies W = \int_0^s \vec{F} \, ds$$

MOMENTO DI INERZIA

$$I = \int R^2 \, dm = \int R^2 \rho \, dV = \int (x^2+y^2)^2 \rho \, dV$$

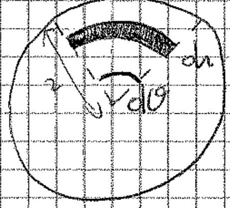
essendo il momento di inerzia una quantità additiva il momento di inerzia totale è pari alla somma dei momenti d'inerzia parziali tutti calcolati rispetto allo stesso asse.

N.B. a differenza della massa non ha senso parlare di momento di inerzia associato a un corpo senza specificare rispetto a quale asse di rotazione



$$dI = R^2 dm$$

MOMENTO DI INERZIA DI UN DISCO SOTTILE e OMOGENEO



$$I = \frac{1}{2} m R^2 \quad \text{infatti}$$

$$I = \int r^2 \, dm = \int \rho r^2 \, dS = \int \rho r^2 \, r \, dr \, d\phi$$

$$= \rho \, 2\pi \int_0^R r^3 \, dr = \rho_S \, 2\pi \, \frac{R^4}{4}$$

sapendo che $\Rightarrow \pi R^2 = S \Longrightarrow M = \rho_S S = \rho \pi R^2$

$$\Longrightarrow I = \frac{1}{2} M R^2$$

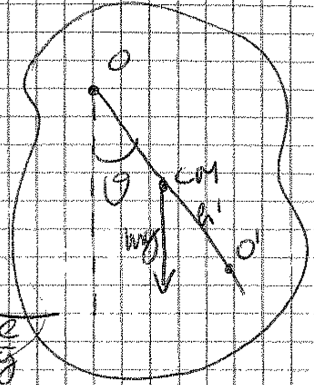
PENDOLO COMPOSTO (pendolo fisico)

→ ogni corpo rigido che possa oscillare per azione del suo peso in un piano verticale attorno ad un asse orizzontale non passante per il suo CM.

$$|M| = |r \times mg| = -h\,m\,g\,\mathrm{sen}\,\vartheta$$

$$\frac{dL_z}{dt} = I_z\,\alpha = I_z\,\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -h\cdot m\cdot g\cdot \mathrm{sen}\,\vartheta$$

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \frac{m\cdot g\cdot h}{I_z}\,\vartheta = 0$$

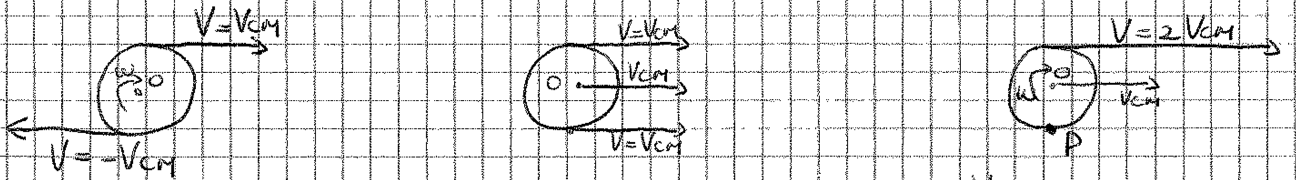


$$\vartheta(t) = \vartheta_0\ \mathrm{sen}(\Omega t + \phi)$$

$$\Omega = \sqrt{\frac{m\cdot g\cdot h}{I_z}} \qquad T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

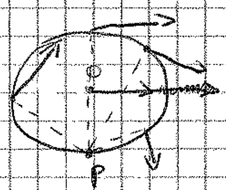
MOTO DI PURO ROTOLAMENTO

ROTAZIONE PURA + TRASLAZIONE PURA = MOTO DI ROTOLAMENTO



$$V_P = -V_{CM} + V_{CM} = 0$$

- il corpo non è trascinato, "ruota attorno" ad un punto P.
- la velocità è in ogni punto ⊥ alla retta passante per P



$$V_T = \omega\,|PT|$$

asse di ROTAZIONE → NON è fisso nel tempo

$$\vec{R} + m\vec{g} = m \cdot \vec{a}_{cm}$$

asse x

$$f = m \cdot a_{cm}$$

asse y

$$N - mg = 0$$

$$\vec{M} + \vec{r} \times \vec{f} = I \vec{\alpha}$$

$$\vec{M} - r\vec{f} = I \frac{a_{cm}}{r}$$

$$a_{cm} = \frac{M}{mr\left(1 + \frac{I}{mr^2}\right)} \qquad f = \frac{M}{r\left(1 + \frac{I}{mr^2}\right)}$$

$$M \leq \mu_s \, m \cdot g \; r\left(1 + \frac{I}{mr^2}\right)$$

- Sotto quali condizioni si produce puro ROTOLAM.?

Nel caso più generale si ha l'azione contemporanea di un momento e di una forza che agiscono.

Non si può decidere a priori il verso della forza di attrito, per cui si considera nel verso delle x positive

asse x

$$F + f = m \cdot a_{cm}$$

asse y

$$N - mg = 0$$

$$M - rf = I \frac{a_{cm}}{r}$$

considerando che $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$, $\vec{M} = I \cdot \vec{\alpha}$

$$\Rightarrow M - rf = I\alpha = I \frac{a_{cm}}{r}$$

$$a_{cm} = \frac{F + \frac{M}{r}}{m\left(1 + \frac{I}{mr^2}\right)}$$

$$f = \frac{\frac{M}{r} - \frac{I}{mr^2} F}{\left(1 + \frac{I}{mr^2}\right)} \leq \mu_s \, m \cdot g$$

MOMENTO ANGOLARE: momento dell'impulso
l'azione di un momento durante un intervallo finito di tempo causa una variazione finita di momento angolare

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{M}\, dt = \vec{L}(t_2) - \vec{L}(t_1) = \Delta\vec{L}$$ IMPULSO ANGOLARE o I. DEL MOMENTO ANG.

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{M}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{r} \times \vec{F}\, dt = \vec{r} \times \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\, dt =$$
$$= \vec{r} \times \vec{J} = \Delta\vec{L} \Rightarrow$$ momento dell'impulso

N.B. NON compaiono le forze di reazione vincolari perché sono applicate nel polo, neppure la forza peso perché NON è una forza impulsiva, quindi è trascurabile

---

CORPO RIGIDO LIBERO

$\vec{R} = m \cdot \vec{a}_{CM}$ moto CM

$\vec{M} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$ moto rispetto al CM

- moto complicato dal fatto che l'asse di rotazione può variare nel tempo, anche rispetto al corpo.
- se rispetto al CM i momenti delle forze sono nulli il momento angolare si conserva.
- si ha ω = cost solo nel caso in di ROTAZIONI ATTORNO AD ASSI CENTRALI D'INERZIA

LEGGI DI CONSERVAZIONE NEL MOTO DI UN CORPO RIGIDO

1 Conservazione quantità di moto
- risultante delle $F^{(e)}$ nulla
- CM si muove di MRU
- moto dei singoli può essere vario (composizione di un moto rotatorio e uno traslatorio)

URTI FRA PUNTI MATERIALI E CORPI RIGIDI

- Energia cinetica si conserva solo negli urti elastici
- Se agiscono solo forze interne o le forze esterne NON sono impulsive o si conserva la quantità di moto
- Se c'è un vincolo non si ha conservazione della quantità di moto
- Se rispetto ad un polo fisso, in un SRI o coincidente con il CM, il momento delle forze esterne (comprese i vincoli) è nullo

allora si conserva il momento angolare, indipendentemente dalla scelta del polo

es PALLINA CHE URTA UNA SBARRA

1) sbarra libera priva di vincoli	pag 235	es 6.27	"MAZZOLDI"
2) sbarra vincolata	" " 236	es 6.28	

STATICA

- In quali condizioni un corpo rigido si trova in condizioni di equilibrio statico?
- Per un punto materiale bastava dire che la $\vec{R}_{is}$ delle forze applicate fosse nulla.

si aggiunge una condizione sui momenti $\Rightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{R} &= 0\\ \vec{M} &= 0\end{aligned}} \Longrightarrow \boxed{\begin{aligned}\vec{V}_{CM} &= 0\\ \vec{\omega} &= 0\end{aligned}}$$

es PROBLEMA DELLA SCALA es 6.34 pag 240-241 "MAZZOLDI"

EQUILIBRIO TERMODINAMICO

- Lo stato termodinamico è in equilibrio quando le variabili termodinamiche sono costanti nel tempo.
- È un risultato di 3 diversi equilibri:
  - EQUILIBRIO MECCANICO: equilibrio delle forze
  - EQUILIBRIO CHIMICO: non avvengano reazioni chimiche
  - EQUILIBRIO TERMICO: la T è la stessa ovunque
- Se uno stato è di equilibrio le condizioni devono valere in ogni parte del sistema e nell'interazione di questo con l'ambiente.

∃ una precisa relazione fra le coordinate (variabili) termodinamiche che si esprime sotto la forma di
EQUAZIONE DI STATO:

FORMA IMPLICITA

$$f(p, V, T) = 0$$

FORMA ESPLICITA

$$p = p(T, V)$$
$$V = V(p, T)$$
$$T = T(p, V)$$

- Dati due diversi stati di equilibrio termodinamico di un certo sistema:

l'EVOLUZIONE DEL SISTEMA (dal primo al secondo stato), spontanea o per effetto dell'interazione con l'ambiente si chiama:

TRASFORMAZIONE TERMODINAMICA

TEMPERATURA

- Concetto fondamentale: grandezza assunta empiricamente a misura della capacità di un corpo o di un ambiente di dare sensazioni di caldo o di freddo.
- grandezza atta a misurare il livello termico del corpo o dell'ambiente.
- quelle proprietà dei corpi che sono dipendenti dalla temperatura possono essere utilizzate per misurarla.

EQUILIBRIO TERMICO: Se un corpo A e un corpo B sono in equilibrio termico con un terzo corpo TERMOMETRO
⟹ A e B sono in eq. term. tra loro (PROPRIETÀ TRANSITIVA)
PRINCIPIO ZERO DELLA TERMODINAMICA

SCALE TERMOMETRICHE:

- ASSOLUTA T (Kelvin)
- CELSIUS $T_C = T - 273,15$
- FAHRENHEIT $T_F = 9/5\, T_C + 32$

ESPERIENZA DI JOULE

Acqua contenuta dentro ad un contenitore adiabatico: un aumento di T in 4 modi:

- mulinello meccanico (spendo lavoro meccanico W)
- resistenza elettrica (spendo lavoro W per far circolare la corrente)
- la compressione di un gas immerso in acqua con contenitore a pareti diatermiche (lavoro W)
- strofinio di blocchi di metallo immersi nell'acqua (lavoro impiegato per forze dissipative)

segue ...

EQUIVALENZA CALORE/LAVORO nell'esp. di Joule:

Si può ottenere lo stesso aumento della temperatura del sistema ponendo un corpo più caldo a contatto dell'acqua (senza svolgere lavoro)

quindi:

$$Q = \Delta U$$

$$Q = -W$$

lavoro speso in condizioni adiabatiche per ottenere ΔT

calore scambiato senza lavoro esterno, per far variare di ΔT la temperatura

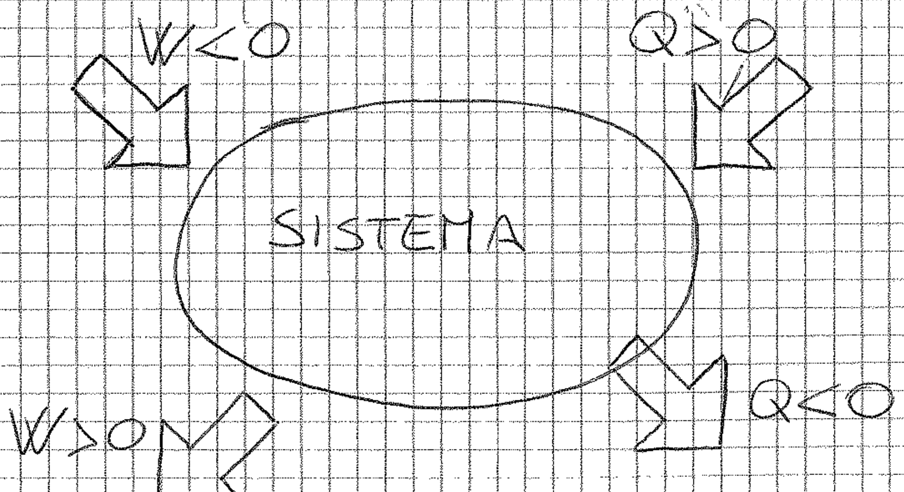
SEGNI DI CALORE E LAVORO

$W > 0$ lavoro compiuto DAL sistema

$W < 0$ " " SUL sistema (dall'ambiente)

$Q > 0$ calore assorbito DAL sistema

$Q < 0$ calore CEDUTO DAL sistema



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 97 di 146