NUMERO : 443

DATA : 18/01/2013

A P P U N T I

STUDENTE : Piccoli

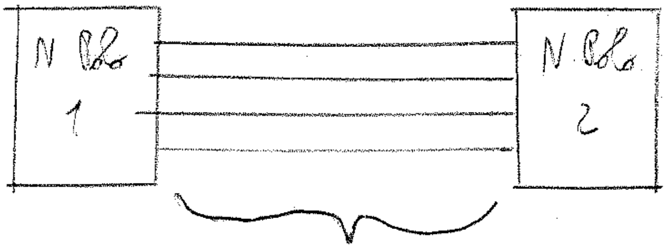
MATERIA : Elettromagnetismo Applicato teoria
Prof. Tartaglia

1° Elettromagnetismo applicato

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 320

Linee elettriche

È un insieme di conduttori che collegano due multipoli



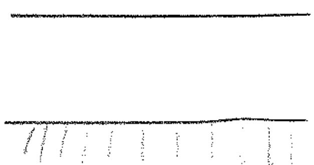
linea
elettrica

Vorremmo delle linee che non influiscono sul comportamento del siste
La linea più semplice è quella a 2 conduttori
I parametri della linea sono uniformi per tutta la sua estensione (parametri distribuiti)

linea a
2 conduttori

$\Downarrow$

1)  Cavo coassiale

2)  conduttore

terreno

Oltre alle linee bifilari abbiamo anche le linee multifilari.

$$v - \left(v + \frac{\partial v}{\partial x} dx\right) = r\, dx\, i + l\, dx \frac{\partial i}{\partial t}$$ Eq maglia

$$i - \left(i + \frac{\partial i}{\partial x} dx\right) = g\, dx \left(v + \frac{\partial v}{\partial x} dx\right) + c\, dx \frac{\partial}{\partial t}\left(v + \frac{\partial v}{\partial x} dx\right)$$ Eq nodi

Si ricava che:

$$-\frac{\partial v}{\partial x} = r i + l \frac{\partial i}{\partial t}$$

Mentre per l'eq nodi trascurando $\frac{\partial v}{\partial x} dx \left(\simeq 0\right)$ si ha che:

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = g v + c \frac{\partial v}{\partial t}$$

Si ha che:

$v(x,t)$
$i(x,t)$ dipendono da x e t

mentre:

r, g, c, l sono costanti sulla linea

Si ottiene:

$$\boxed{\begin{cases} -\dfrac{\partial v}{\partial x} = r i + l \dfrac{\partial i}{\partial t} & 5) \\[2ex] -\dfrac{\partial i}{\partial x} = g v + c \dfrac{\partial v}{\partial t} & 6) \end{cases}}$$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = \underbrace{rg}_{\left[\frac{1}{m^2}\right]}\, i + (rc + lg)\frac{\partial i}{\partial t} + lc\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}$$

La famiglia di problemi che possiamo individuare sono:

- linee in condizioni transitorie:
  - linea qualsiasi
  - senza perdite
  - linea non distorcente

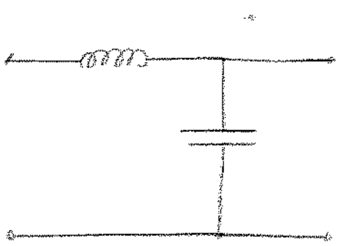
- linee in condizioni periodiche: sinusoidali

La linea che analizzeremo è la linea senza perdite

Linea senza perdite

Sono linee con: $r = 0$

$g = 0$



Le equazioni sono:

$F(x-at) \Rightarrow at = \left[\frac{m}{s}\cdot s\right]$

$\downarrow$

$[m]$

Allora:

$a = \left[\frac{m}{s}\right]$

Quindi:

$\boxed{a = \pm \frac{1}{\sqrt{lc}}}$ velocità di propagazione

Consideriamo ora il caso analogo con la corrente:

$i = G(x - a't)$

Posso ricavare che:

$a' = a$

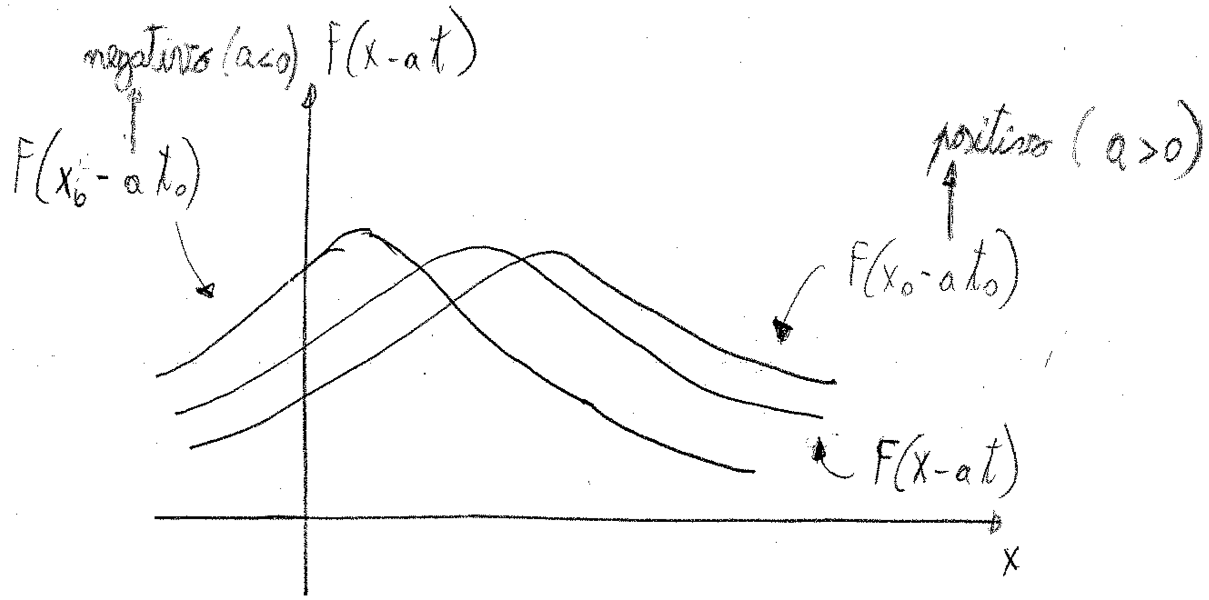
Considerando 5) o 6) con $R=0$ e $g=0$ si ha che:

$-\frac{\partial i}{\partial x} = c\,\frac{\partial v}{\partial t}$

Allora si ha che:

$-G' = c(-a)F'$

Da cui:



Per rappresentare $F(x-at)$ in funzione di x devo analizzare vari istanti t, cioè:

$F(x,t)$

$F(x_0,t_0)$

con:

$$\begin{cases} x_0 = x + \Delta x \\ t_0 = t + \Delta t \end{cases}$$

Da cui:

$F(x+\Delta x - a(t+\Delta t))$

Allora:

$F(x - at + \Delta x - a\Delta t)$

Essendo:

Linee non distorcenti

Sono linee con perdite che presentano un andamento lineare ma con attenuaz. Sono linee che presentano un andamento di tensione e corrente del seguente tipo:

$$\begin{cases} v = e^{-\beta x} F(x-at) \\ i = e^{-\beta_1 x} G(x-a_1 t) \end{cases}$$

Lungo la linea (al variare di x) c'è un "degrado" della linea, c'è una attenuazione lungo la linea dei valori di tensioni e corrente

Si ha che:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = rgv + (rc+lg)\frac{\partial v}{\partial t} + lc\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -a\, e^{-\beta x} F'(x-at)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 e^{-\beta x} F''$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\beta e^{-\beta x} F + e^{-\beta x} F'$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\beta e^{-\beta x} F + e^{-\beta x} F'$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \beta^2 e^{-\beta x} F - \beta e^{-\beta x} F' - \beta e^{-\beta x} F' + e^{-\beta x} F''$$

Da cui:

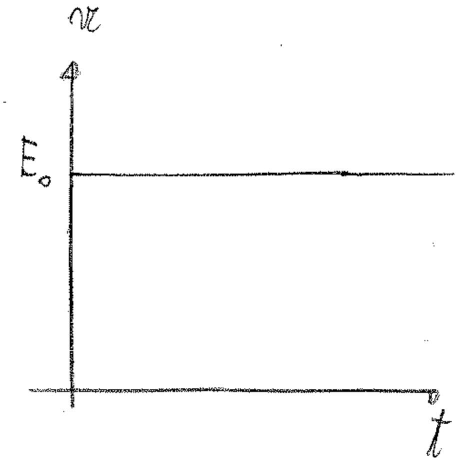
$$(rc - lg)^2 = 0 \Rightarrow rc = lg$$

Se riesco ad analizzare una linea distorcente con questa ipotesi otterrei una linea senza perdite con una certa attenuazione man mano che ci si allontana dal punto di partenza

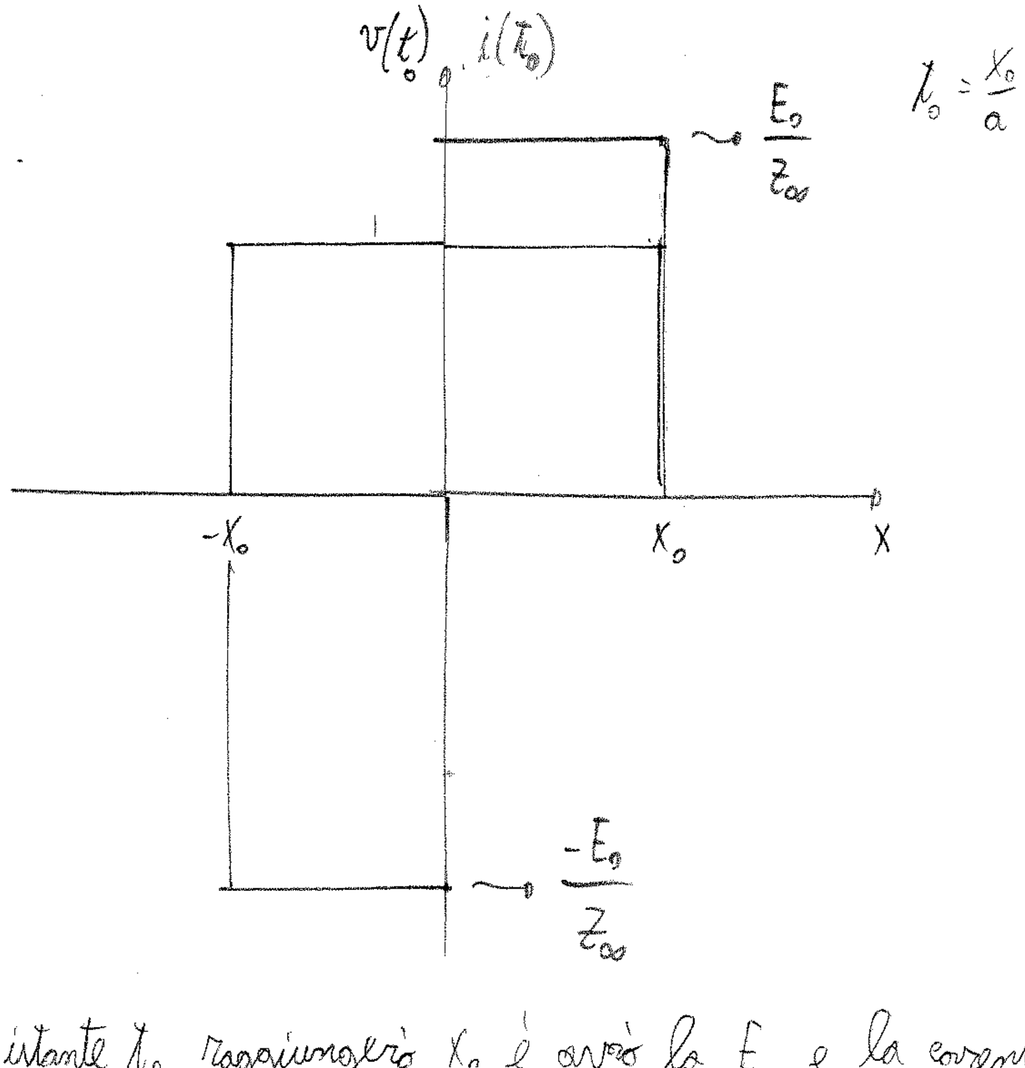
Linea qualsiasi

Anche in questo caso:

$$a = \frac{1}{\sqrt{lc}}$$



Cosa accade quando chiudo l'interruttore? Accade che la tensione non compare istantaneamente su tutta la linea ma si propaga con la velocità di propagazione.



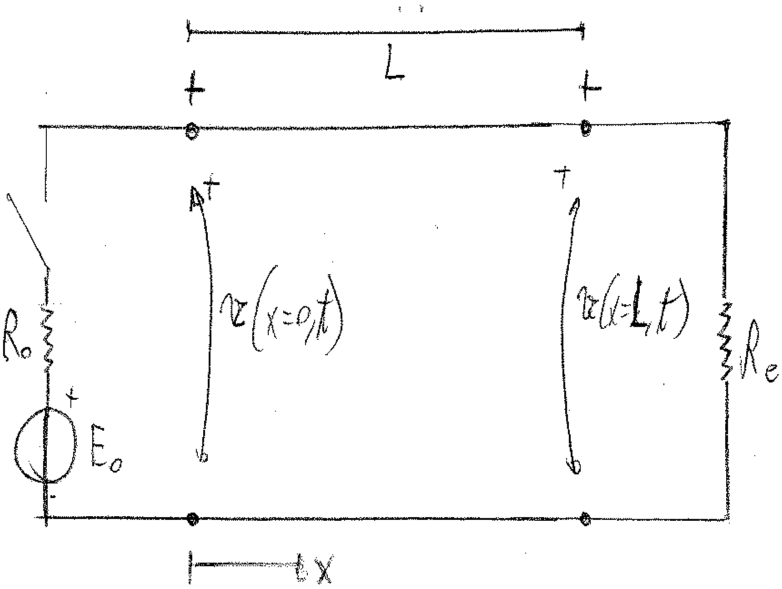
Cioè nell'istante t_0 raggiungerò X_0 e avrò la E_0 e la corrente sarà pari a:

$\frac{E_0}{Z_\infty}$ per $X>0$ $\qquad$ $-\frac{E_0}{Z_\infty}$ per $X<0$

Per $x<0$ non esiste la linea.

Consideriamo ora linea finita:

Se condizioni al contorno iniziali sono E_0 e R_0
" " " " finali sono R_c



Vogliamo calcolare tensioni e correnti al variare di x e del tempo
La tensione all'inizio linea è stabilita dalle condiz. al contorno iniz.
" " alla fine " " " " " " " finali.

Si ha che:

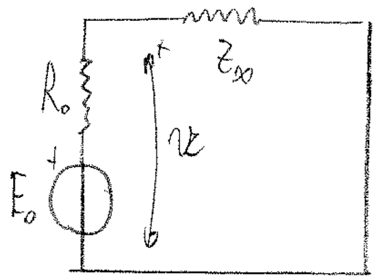
- $x=0$: $\quad v(0,t) = E_0 - R_0\, i(0,t)$

- $x=L$: $\quad v(L,t) = R_c\, i(L,t)$

Si osserva che le forme d'onda di v e i sono α tra loro tramite Z_∞. Non sono α tra loro in un punto.

$$\boxed{v = E_0 \frac{Z_\infty}{R_0 + Z_\infty}}$$

È come se avessi un partitore di tensione:



Si ha che:

$$\boxed{i = \frac{E_0}{R_0 + Z_\infty}}$$

La corrente nella linea non dipende dal carico finale perché non è stato ancora raggiunto dalla tensione (quindi non entra in gioco), ma dipende solo dalle condizioni al contorno iniziali (non vedo ancora R_e). La linea impone ancora il vincolo di v e i con Z_∞. Questo dura finché il tempo non arriva a $\frac{L}{a}$.

$$v_1^-\left(1+\frac{R_e}{Z_\infty}\right) = v_1^+\left(\frac{R_e}{Z_\infty}-1\right)$$

Da cui:

$$\boxed{v_1^-} = \frac{R_e - Z_\infty}{R_e + Z_\infty}\, v_1^+ = \boxed{\frac{\frac{R_e}{Z_\infty}-1}{\frac{R_e}{Z_\infty}+1}\, v_1^+}$$ Ampiezza dell'onda riflessa

Cioè:

$$v_1^- = \boxed{\frac{\frac{R_e}{Z_\infty}-1}{\frac{R_e}{Z_\infty}+1}}\, v_1^+$$

↓

coefficiente di riflessione

Se $R_e = Z_\infty \Rightarrow$ l'onda riflessa è nulla, c'è solo l'onda incidente

La corrente è pari a:

$$\boxed{i_1^-} = -\frac{v_1^-}{Z_\infty} = -\frac{R_e - Z_\infty}{R_e + Z_\infty}\,\frac{v_1^+}{Z_\infty} = \boxed{-\frac{R_e - Z_\infty}{R_e + Z_\infty}\, i_1^+}$$ Ampiezza dell'onda riflessa

Se $R_e = Z_\infty$ allora non ci sono onde regressive perché l'onda che arriva al carico è sia quella che soddisfa il vincolo della linea che quello del carico $\Rightarrow$ ho solo onde progressive.

Se $R_e \neq Z_\infty$ ho anche onde riflesse perché l'onda che arriva al carico non

Quando l'onda riflessa torna indietro si ha che:

$$v = v^+ + v^- + v'^+$$

cioè si genera una nuova onda v'^+ che è dovuta all'onda riflessa che ritorna all'inizio della rete:

fase 3:

$$v = v^+ + v^- + v'^+ = E_0$$

$$E_0 + E_0 \frac{R_c - Z_\infty}{R_c + Z_\infty} + v'^+ = E_0$$

$$\frac{2L}{a} \le t \le \frac{3L}{a}$$

Da questa formula si ricava che:

$$\cancel{E_0} + E_0 \frac{R_c - Z_\infty}{R_c + Z_\infty} + v'^+ = \cancel{E_0}$$

cioè:

$$v'^+ = -E_0 \frac{R_c - Z_\infty}{R_c + Z_\infty} = -v^-$$

il fattore di riflessione vale -1

Cioè se abbiamo una resistenza $R=0$ allora si ha che il fattore di riflessione è pari a -1. $\forall$ qual volta arrivando ad inizio o a fine linea ho una $R=0$ allora il fattore di riflessione è pari a 0, cioè:

$R_c = 0 \Rightarrow \Gamma = -1$

$R_c = Z_\infty \Rightarrow \Gamma = 0$

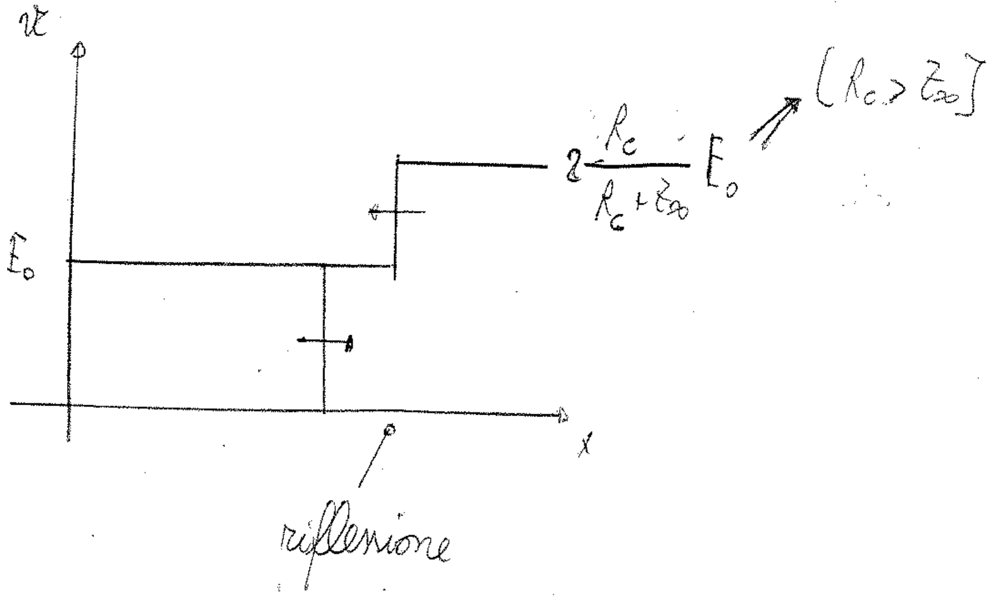
$R_c > Z_\infty \Rightarrow 0 < \Gamma < 1$ positivo

$$i = \frac{E_0}{Z_\infty} \frac{2Z_\infty}{R_c+Z_\infty}$$

Si osserva che la riflessione ha un'effetto di innalzamento della tensione se $R_c > Z_\infty$, mentre se $R_c < Z_\infty$ allora si ha un'effetto di abbassamento della tensione:

$R_c > Z_\infty \Rightarrow$ innalzamento tensione (onda riflessa positiva) ($\Gamma < 1$)

$R_c < Z_\infty \Rightarrow$ abbassamento tensione (onda riflessa negativa) ($\Gamma < 0$)



I casi estremi della riflessione sono i circuiti aperti e i corto circuiti:

circuiti aperti $\Rightarrow R_c \rightarrow \infty \Rightarrow \Gamma = 1$

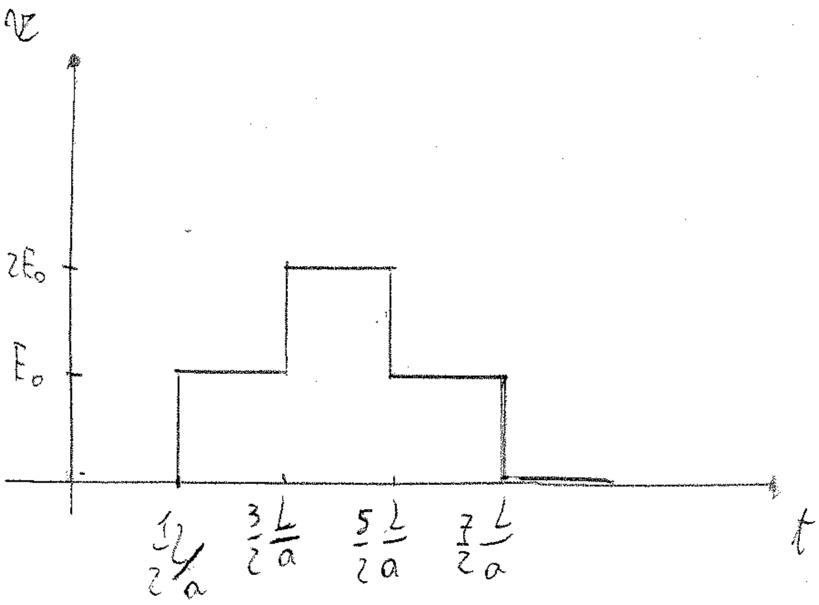
corto circuiti $\Rightarrow R_c = 0 \Rightarrow \Gamma = -1$

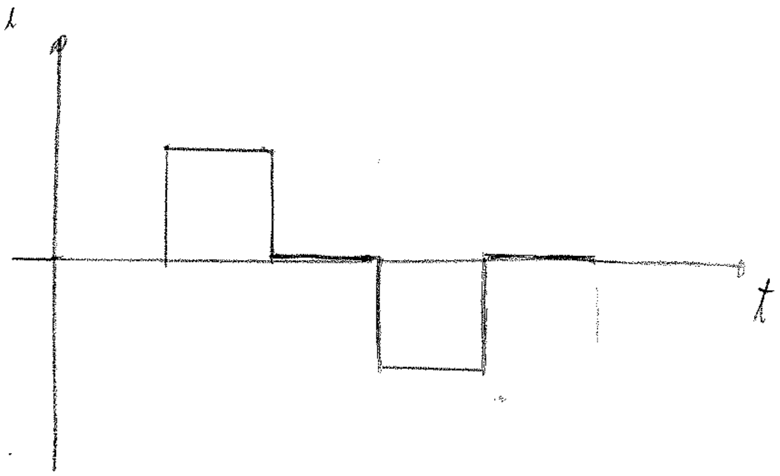
In generale:

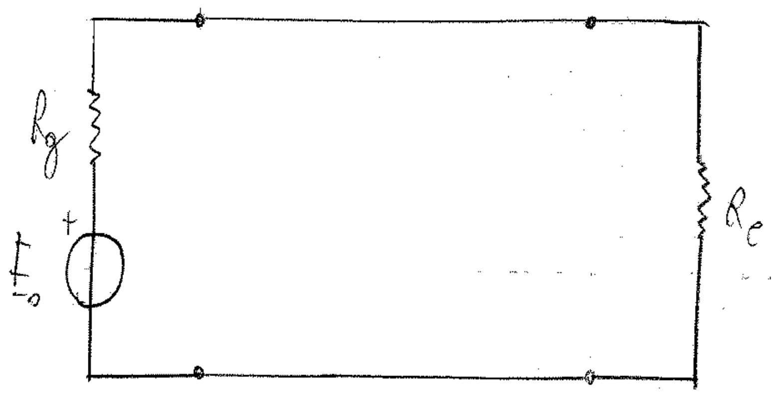
$$-1 \leq \Gamma \leq 1 \qquad \text{Riflessione}$$

L'onda arriva a fine linea ed essendo $\Gamma_e = 1$ allora si ha che la tensione che torna indietro è pari a $2E_0$, mentre la corrente si annulla progressivamente (somma di 2 correnti uguali ma di segno opposto)

Osserviamo l'andamento di v col tempo nel centro della linea







Q regime si ha che:

$$v_\infty = E_o \frac{R_e}{R_e + R_g}$$

$$i_\infty = \frac{v_\infty}{R_e} = \frac{E_o}{R_e + R_g}$$

Osserviamo che:

$$v_\infty = v_1^+ + v_2^- + v_3^+ + v_4^- \dots$$

$$v_\infty = \frac{E_o Z_\infty}{R_g + Z_\infty} \left[1 + \Gamma_e + \Gamma_e \Gamma_g + (\Gamma_e \Gamma_g)\Gamma_e + \Gamma_e^2 \Gamma_g \Gamma_g + \dots \right]$$

vado avanti fino all'∞

Q regime la linea è come un corto circuito, infatti:

Nel caso di riflessioni multiple si vogliono calcolare i valori delle tensioni v_c e v_g, ovvero $v_{c\infty}$ e $v_{g\infty}$, inoltre si è interessati a calcolare il valore della corrente i_c a regime, ovvero la $i_{c\infty}$

N.B: a regime la linea si comporta come un corto circuito, quindi le capacità sono dei circuiti aperti, induttanze dei cortocircuiti e di conseguenza:

$$v_{c\infty} = v_{g\infty} = v_\infty$$

$$v_\infty = v_1^+ + v_1^- + v_2^+ + v_2^- + v_3^+ + v_3^- + \dots$$

$$i_\infty = i_1^+ + i_1^- + i_2^+ + i_2^- + i_3^+ + i_3^- + \dots$$

si può anche vedere le cose come una successione di transitori in cui ad ogni riflessione cambia lo stato iniziale.

$$v_\infty = \frac{E_0 Z_\infty}{R_g + Z_\infty}\left[1 + \Gamma_c + \Gamma_c\Gamma_g + \Gamma_c^2\Gamma_g + \Gamma_c^2\Gamma_g^2 + \Gamma_c^3\Gamma_g^2 + \Gamma_c^3\Gamma_g^3 + \dots\right]$$

se considero i termini con Γ_c e Γ_g elevati alla stessa potenza li posso scrivere come una sommatoria

$$v_\infty = \frac{E_0 Z_\infty}{R_g + Z_\infty}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(\Gamma_c\Gamma_g)^n + \Gamma_c\underbrace{(1 + \Gamma_c\Gamma_g + \Gamma_c^2\Gamma_g^2 + \dots)}\right]$$

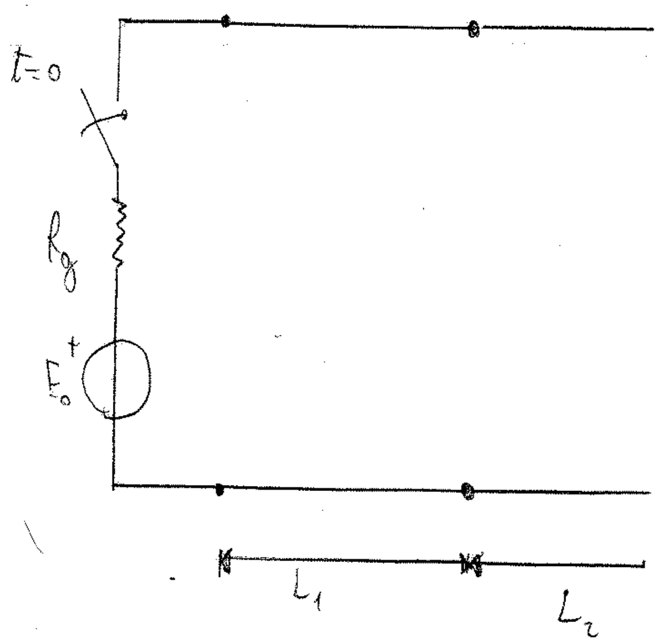
è la stessa sommatoria di prima: $\sum_{n=0}^{\infty}(\Gamma_c\Gamma_g)^n$

allora:

$$v_\infty = \frac{E_0 Z_\infty}{R_g + Z_\infty}\left[(1 + \Gamma_c)\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}(\Gamma_c\Gamma_g)^n}_{\text{serie geometrica di ragione } r = \Gamma_c\Gamma_g}\right]$$

si ragiona allo stesso modo, ovvero si raggruppa $\sum_{n=0}^{\infty}(\Gamma_e \Gamma_g)^n$ poi si mette in evidenza - si trova di nuovo la sommatoria, ecc.

Altro caso: linea in cascata



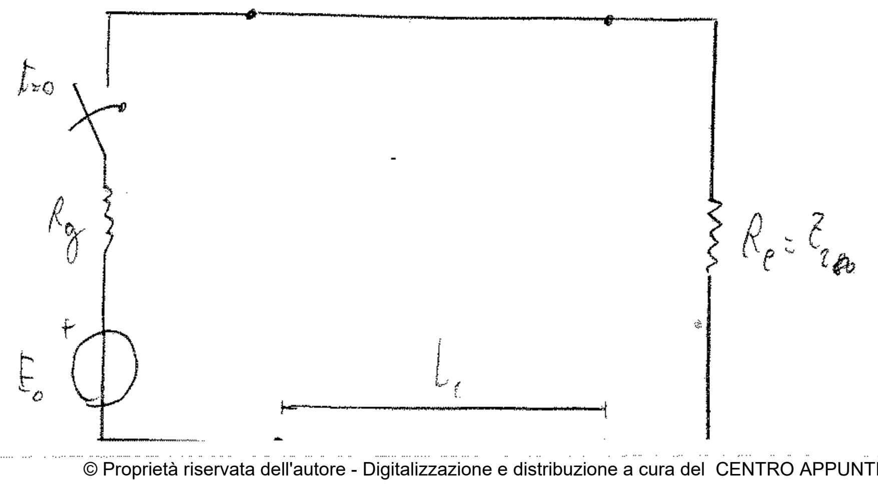
$Z_{1\infty} \neq Z_{2\infty}$ altrimenti non ci sarebbe la discontinuità di linee in cascata che vogliamo analizzare

La linea L_2 ha una lunghezza infinita, oppure è una linea adattata:

$L_2 = \infty$ linea di lunghezza infinita
$R_{e_2} = Z_{2\infty}$ linea adattata

} vuol dire che non ci sono riflessioni

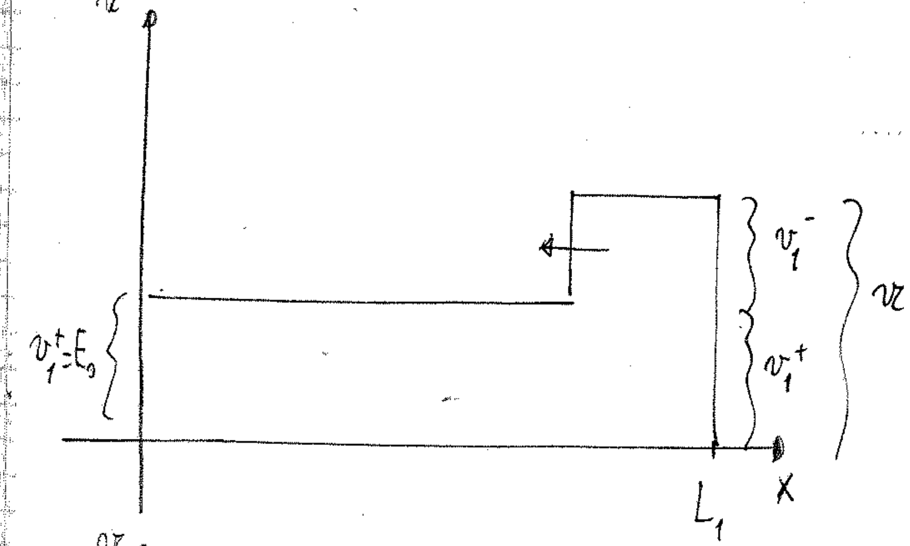
Di fatto la linea 2 non dà fenomeni di riflessione, l'onda progressiva, di velocità costante, non raggiunge mai l'estremità.
Il circuito sopra rappresentato equivale al caso visto prima, ovvero:



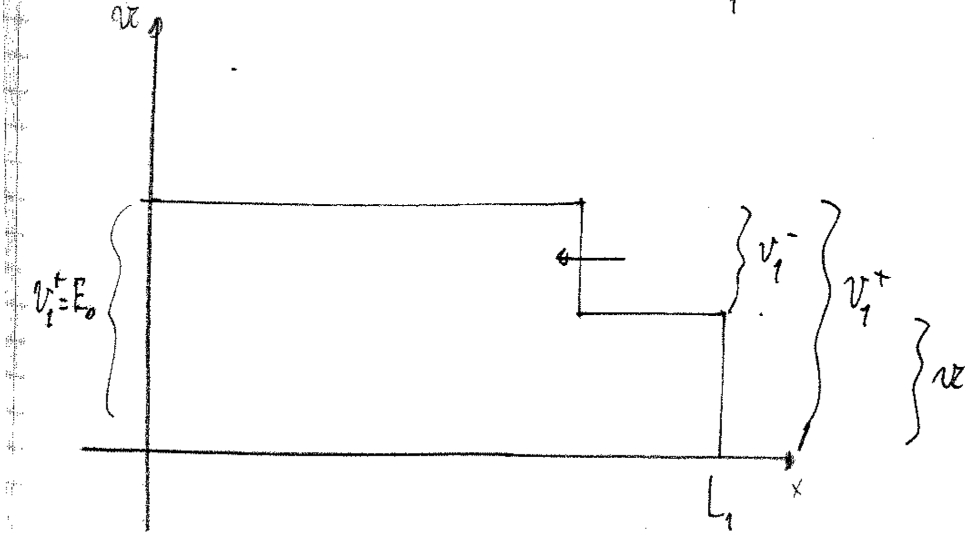
per $R_c < Z_{1\infty}$ si ha che:

$$|v| = |v_1^+ + v_1^-| < |v_1^+| \Rightarrow \Gamma_c < 0$$

Graficamente:



per $R_c > Z_{1\infty}$



per $R_c < Z_{1\infty}$

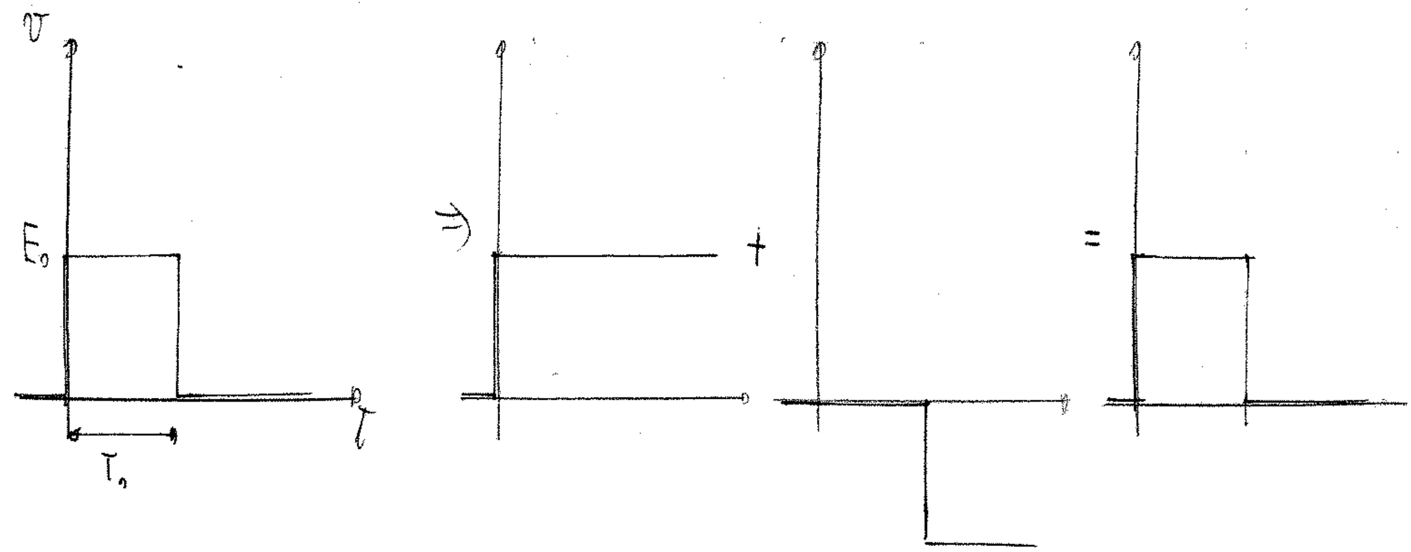
Se ho 2 linee in cascata cosa succede? Ho due velocità diverse di propagazione: a_1, a_2. Basta sostituire a R_c la $Z_{2\infty}$, otterrò:

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 39 di 320

- Prima c'è la linea aerea e poi in cavo ⇒ grafico (1)
- " " " " in cavo e poi aerea ⇒ " (2)

Una tecnica per trovare i guasti consiste nell'inviare un'onda di sovratensione lungo la linea e misurare il tempo di riflessione dell'onda.
Se il tempo misurato è inferiore a quello stimato in progetto vuol dire che c'è una discontinuità ⇒ Guasto
Si usa soprattutto per determinare i guasti sulle linee in cavo (perchè sono quasi tutte interrate).

Se la tensione fornita dal generatore non fosse una tensione a gradino cosa accadrebbe?
Caso elementare: onda quadra



rappresento quest'onda come una sequenza di gradini centrati in punti diversi

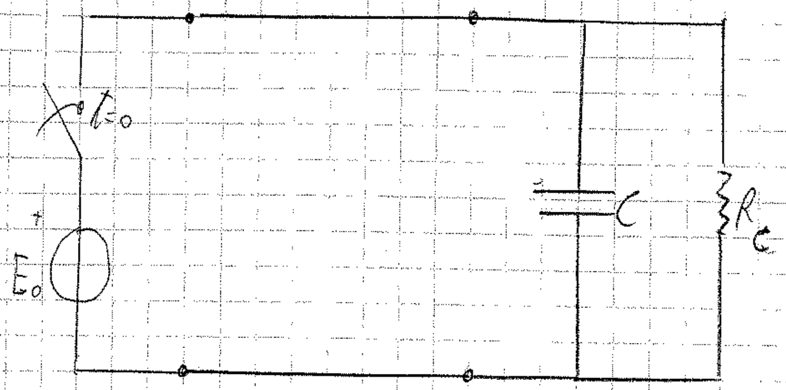
$$v(t) = E_0 [u(t) - u(t - T_0)]$$

quando $v(t)$ è troppo complicata iniziano a sorgere i problemi. Una volta scomposta l'onda in sequenza di gradini si applica il metodo di sovrapposizione degli effetti.
Siccome spesso i calcoli diventano complicati è stato inventato il seguente diagramma:

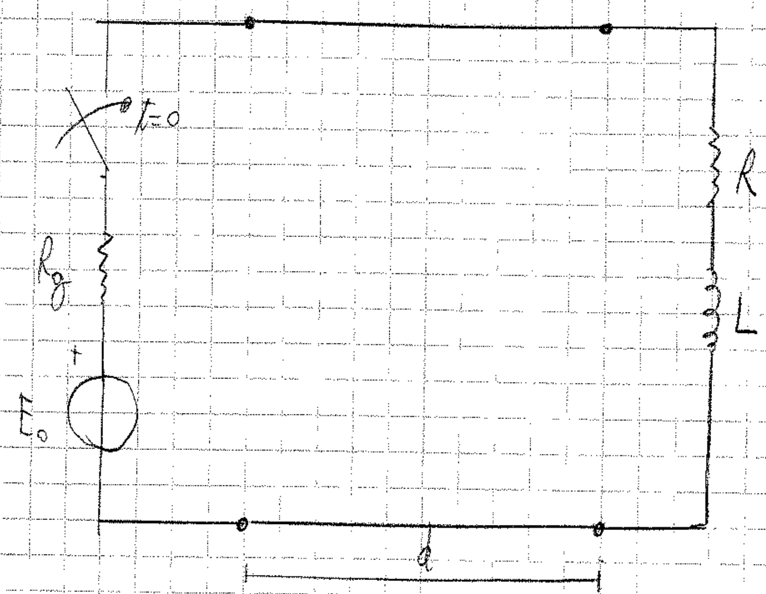
Diagramma Lattice

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 41 di 320

x Carico RC (carico capacitivo)



Carico induttivo RL



Fase 1: $0 < t < \frac{d}{a}$

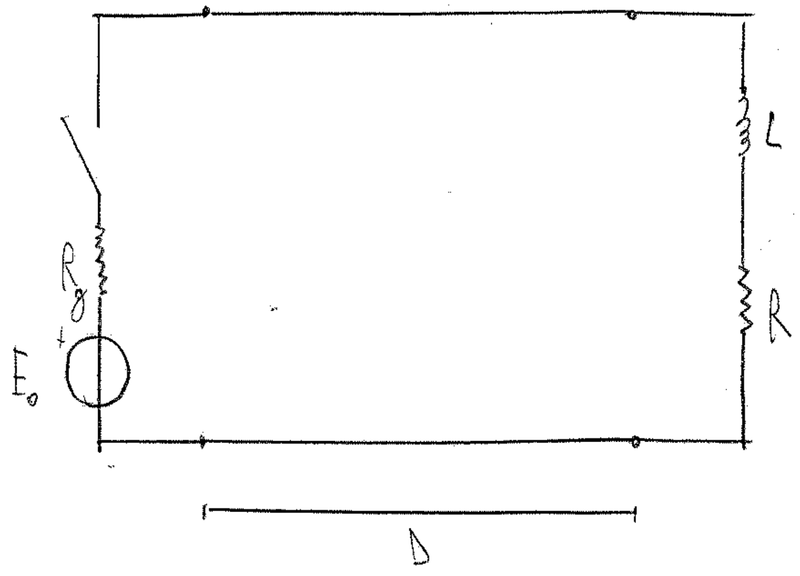
per $t=0 \Rightarrow \begin{cases} v(x,0)=0 \\ i(x,0)=0 \end{cases} \quad \forall x$ Condizioni iniziali

la linea è inizialmente scarica

$$v = v^+ = \frac{E_0}{R_g + Z_\infty} Z_\infty$$

$$i = i^+ = \frac{E_0}{R_g + Z_\infty}$$

Abbiamo visto:



$$t_0 = \frac{D}{a}$$

$$v = v^+ = \frac{E_0 Z_\infty}{Z_\infty + R_g} \qquad 0 \le t \le \frac{D}{a}$$

$$\begin{cases} v = v^+ + v^- \\ i = i^+ + i^- = \dfrac{v^+}{Z_\infty} - \dfrac{v^-}{Z_\infty} \end{cases}$$

Con:

$$v = R\overset{i^+ + i^-}{i} + L\frac{di}{dt} \qquad v^+ = Z_\infty i^+ \qquad v^- = -Z_\infty i^-$$

Allora:

$$v^+ - Z_\infty i^- = Ri^+ + Ri^- + L\frac{di^-}{dt}$$

Che riscritta in modo diverso diventa:

$$-Z_\infty i^- = R i^- + L \frac{di^-}{dt}$$

$$L \frac{di^-}{dt} = -(R+Z_\infty) i^-$$

$$\frac{di^-_{om}}{i^-_{om}} = -\frac{R+Z_\infty}{L} dt \Rightarrow \int_{i_0^-}^{i^-} \frac{di^-}{i^-_{om}} = \ln \frac{i^-}{i_0^-}$$

ponendo:

$$\tau = \frac{L}{R+Z_\infty}$$

si ha che:

$$\ln \frac{i^-}{i_0^-} = -\int_{t_0}^{t} \frac{dt}{\tau} = -\frac{t'}{\tau} \qquad \text{con } t' = t - t_0$$

si osserva che:

$$i^-_{om} = i_0^- \cdot e^{-\frac{t'}{\tau}}$$

↳ da determinare

Allora:

$$i^- = i^-_\infty + i_0^- \, e^{-\frac{t'}{\tau}} = \frac{v^+ - R i^+}{R+Z_\infty} + i_0^- \, e^{-\frac{t'}{\tau}}$$

$$i = i^+ + i^- = \frac{v^+}{Z_\infty} + \frac{v^+}{Z_\infty} \cdot \frac{Z_\infty - R}{Z_\infty + R} - \frac{2v^+}{R+Z_\infty} e^{-t'/\tau}$$

Raccogliendo e semplificando:

$$i = 2\frac{\cancel{Z_\infty}}{\cancel{Z_\infty}} \cdot \frac{v^+}{Z_\infty + R} - \frac{2v^+}{R+Z_\infty} e^{-t'/\tau}$$

Da cui:

$$i = \frac{2v^+}{R+Z_\infty}\left(1 - e^{-t'/\tau}\right)$$

Essendo:

$$v = Ri + L\frac{di}{dt} = \frac{2v^+}{R+Z_\infty}\left(1 - e^{-t'/\tau}\right)R + \cancel{L}\frac{2v^+}{\cancel{R+Z_\infty}} \frac{1}{\tau} e^{-t'/\tau}$$

$$\tau = \frac{\cancel{L}}{\cancel{R+Z_\infty}}$$

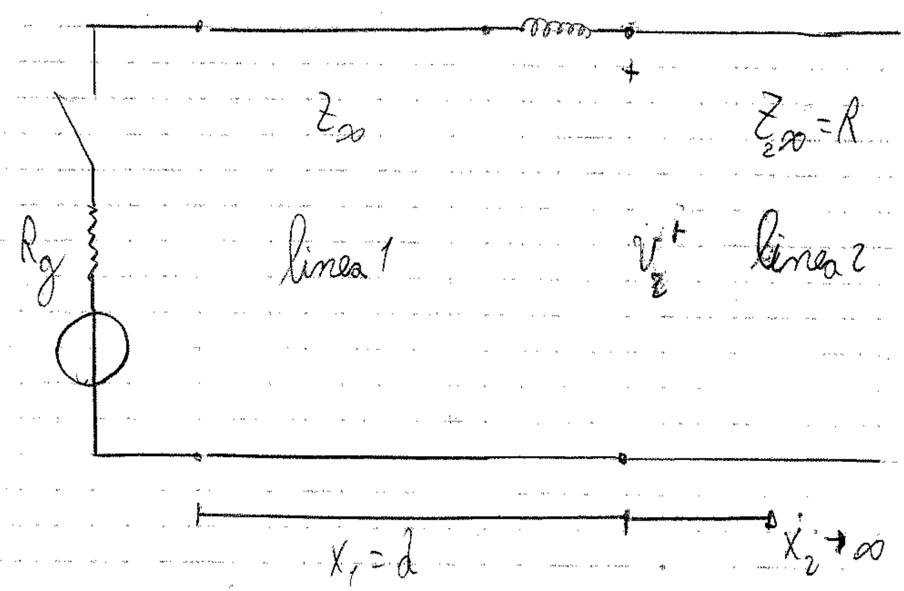
Allora:

$$v = 2v^+ \frac{R}{R+Z_\infty}\left(1 - e^{-t'/\tau}\right) + 2v^+ e^{-t'/\tau}$$

Se t' potesse andare all'∞ avrei la corrente e la tensione di regime

Vediamo l'andamento della corrente nello spazio.

$$v = R\frac{2v_0}{Z_\infty + R} + 2v_0 e^{-\frac{Z_\infty + R}{L}x}\left(-\frac{R}{Z_\infty + R} + 1\right)$$



Immagino che $R = Z_{2\infty}$

Voglio conoscere la tensione sulla linea 2

Allora v_2^+ è quella che prima era $R \cdot i$ ossia $Z_\infty' \cdot i$

La corrente è un esponenziale che però ora si propaga nel verso delle x crescenti.

Osservo che la corrente non subisce discontinuità entrando nella linea 2, invece la tensione che entra nella linea 2 (v_2^+) è ridotta, c'è un salto che provoca una riduzione della tensione e questo salto è pari a $L \frac{di}{dt}$

Eq bipolo: $i = i_c + i_R = C \frac{dv}{dt} + \frac{v}{R}$

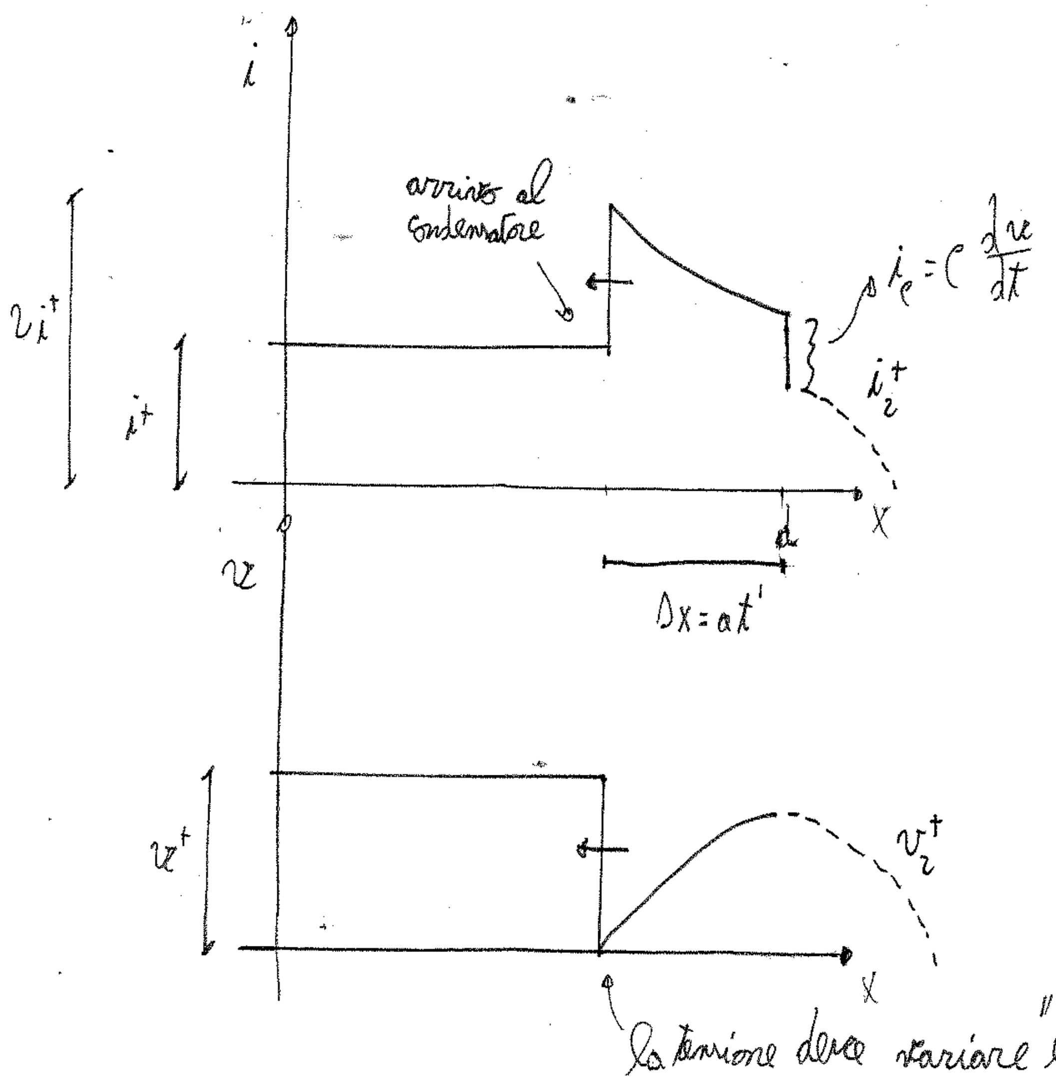
Eq linea: $v = v^+ + v^-$

$i = i^+ + i^-$

$\quad\; \| $

$\quad \frac{v^+}{Z_\infty}$

Il risultato finale è pari a:

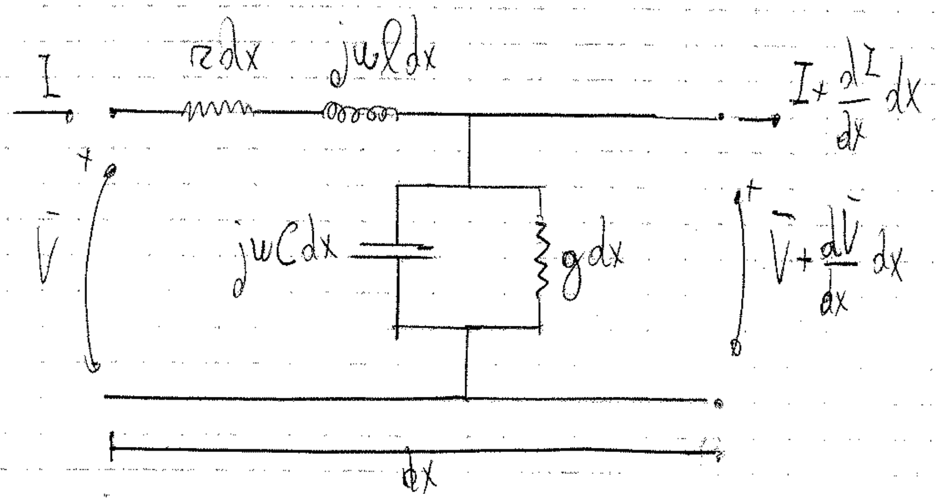


la tensione deve variare "lentamente" perchè ho il condensatore

Quindi il condensatore se vede una sovratensione la limita nel senso che C tende a limitare la tensione

Linee a regime periodico (sinusoidale)

Abbiamo



Introduciamo i fasori per analizzare le linee a regime sinusoidale

Ora ho derivate totali perché il tempo scompare ⇒ ho solo una incognita introducendo i fasori

$$\begin{cases} -\dfrac{d\bar{V}}{dx} = \underbrace{(r+j\omega l)}_{\text{impedenza}}\bar{I} & (1) \\[2ex] -\dfrac{d\bar{I}}{dx} = \underbrace{(g+j\omega c)}_{\text{ammettenza}}\bar{V} & (2) \end{cases}$$

Ho un sistema continuo ⇒ parametri distribuiti

Devo trovare la soluzione di questo sistema

Derivo e ottengo (1° eq):

$$-\frac{d^2\bar{V}}{dx^2} = (r+j\omega l)\frac{d\bar{I}}{dx} =$$

$$-\frac{d^2\bar{V}}{dx^2} = -(r+j\omega l)(g+j\omega c)\bar{V}$$

$$\begin{cases} m^2 = \alpha^4 + \beta^4 - 2\alpha^2\beta^2 \\ n^2 = 4\alpha^2\beta^2 \end{cases}$$

$$m^2 + n^2 = \alpha^4 + \beta^4 + 2\alpha^2\beta^2 = \left(\alpha^2 + \beta^2\right)^2$$

Allora:

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = m \\ \alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{m^2 + n^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = \sqrt{\dfrac{\sqrt{m^2+n^2} + m}{2}} & \text{è sempre } > 0 \\ \beta = \sqrt{\dfrac{\sqrt{m^2+n^2} - m}{2}} & \text{può essere } > 0 \text{ o } < 0 \end{cases}$$

Cerchiamo ora la soluzione di:

$$\frac{d^2 \bar{V}}{dx^2} = \bar{\gamma}^2 \bar{V}$$

che è pari a:

$$\bar{V} = \bar{A} e^{\bar{\gamma} x} + \bar{B} e^{-\bar{\gamma} x}$$

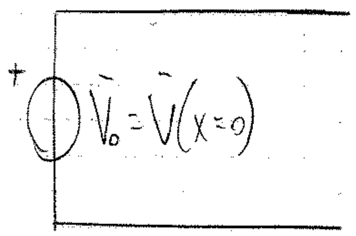
Devo imporre le condizioni al contorno per definire A e B

Per la corrente considero la prima espressione ① e sostituendola nell' espre

$$\bar{A} e^{\gamma x} = A e^{\alpha x} e^{j\beta x}$$

$$\bar{B} e^{-\gamma x} = \bar{B} e^{-\alpha x} e^{-j\beta x}$$

Noto che non posso avere un sistema fisico in cui gli effetti di una sorgente limitata sono illimitati allora:



$\Rightarrow \bar{A} = 0$

Per $x \to +\infty$ la corrente e la tensione devono andare a zero. $\Rightarrow A = 0$

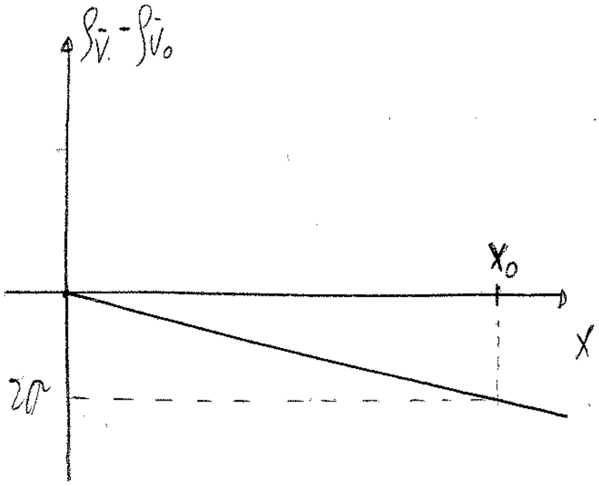
Quando la linea è di lunghezza ∞ vedo che tensione e correnti sono d

Allora:

$$\frac{\bar{V}(x)}{\bar{I}(x)} = \bar{Z}_\infty = \text{cost} \qquad \forall x$$

Analizziamo l'andamento della fase di V_0:

$$\varphi_{\bar{V}} = \varphi_{V_0} - \beta x$$



Esiste una lunghezza per cui la fase cambia di 2π.
Questa lunghezza si chiama lunghezza d'onda.

$$\varphi_{\bar{V}} - \varphi_{\bar{V}_0} = -\beta x_0 = -2\pi \Rightarrow x_0 = \frac{2\pi}{\beta}$$

$$\boxed{x_0 = \frac{2\pi}{\beta}}$$ Lunghezza d'onda

Arrivati a x_0 la fase ritorna allo stato iniziale.

$$\begin{cases} e^{\gamma x} = \cosh \gamma x + \sinh \gamma x \\ e^{-\gamma x} = \cosh \gamma x - \sinh \gamma x \end{cases}$$

Quindi:

$$\bar{V} = A(\cosh \gamma x + \sinh \gamma x) + B(\cosh \gamma x - \sinh \gamma x)$$

$$\bar{V} = (\bar{A} + \bar{B}) \cosh \gamma x + (\bar{A} - \bar{B}) \sinh \gamma x = \bar{P} \cosh \gamma x + \bar{Q} \sinh \gamma x \qquad (*)$$

Calcoliamo $\bar{I}$:

$$\bar{I} = -\frac{1}{Z_\infty}\left(A e^{\gamma x} - B e^{-\gamma x}\right) = -\frac{1}{Z_\infty} A(\cosh \gamma x + \sinh \gamma x) + \frac{1}{Z_\infty} B(\cosh \gamma x - \sinh \gamma x)$$

$$\bar{I} = -\frac{(A-B)\cosh \gamma x}{Z_\infty} - \frac{(A+B)}{Z_\infty} \sinh \gamma x = -\frac{\bar{Q}}{Z_\infty} \cosh \gamma x - \frac{\bar{P}}{Z_\infty} \sinh \gamma x$$

Imponiamo le condizioni al contorno:

- $x = 0: \quad \bar{V} = \bar{V}_0 \Rightarrow \bar{V}_0 = \bar{P}$

Da cui:

$$\begin{cases} \bar{V} = V_0 \cosh \gamma x + Q \sinh \gamma x \\ \bar{I} = -\frac{Q}{Z_\infty} \cosh \gamma x - \frac{V_0}{Z_\infty} \sinh \gamma x \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{\bar{V}_u}{\bar{V}_0} = \frac{Z_c}{Z_c \cosh \gamma d + Z_\infty \sinh \gamma d}}$$

Guadagno di Tensione

Possiamo calcolare l'impedenza di ingresso della linea:

$$Z_0 = \frac{V_0}{I_0}$$

Ricordiamo che:

$$V = P \cosh \gamma x + Q \sinh \gamma x$$

$$I = -\frac{1}{Z_\infty}\left(P \sinh \gamma x + Q \cosh \gamma x\right)$$

$$P = V_0$$

$$Q = V_0 \frac{Z_\infty \cosh \gamma d + Z_c \sinh \gamma d}{Z_c \cosh \gamma d + Z_\infty \sinh \gamma d}$$

Essendo ad inizio linea si ha che:

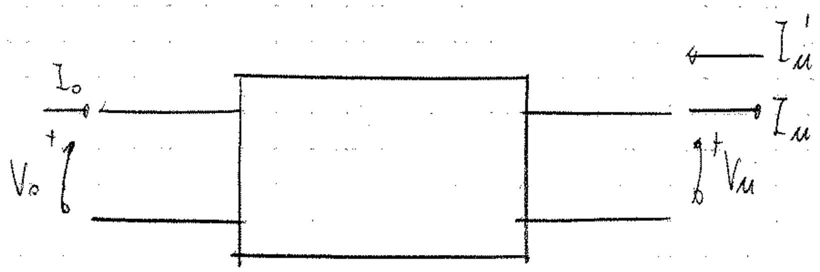
$$x = 0$$

Allora:

$$Z_0 = \frac{V_0}{I_0} = \frac{V_0}{-\frac{Q}{Z_\infty}} = Z_\infty \frac{Z_c \cosh \gamma d + Z_\infty \sinh \gamma d}{Z_\infty \cosh \gamma d + Z_c \sinh \gamma d}$$

Linea come doppio bipolo

Consideriamo una linea come un doppio bipolo



$$I_u' = -I_u$$

Non mi interessa ciò che succede dentro ma come si comporta fuori.
Abbiamo:

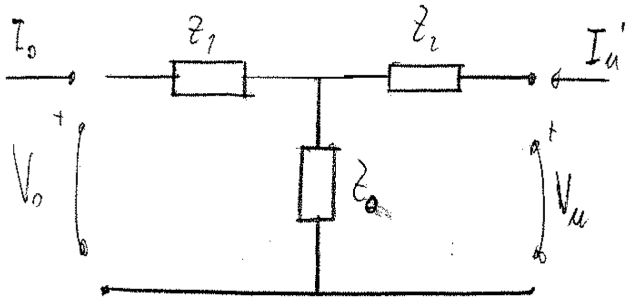
$$\begin{cases} V = P\cosh \gamma x + Q \sinh \gamma x \\ I = -\dfrac{1}{Z_\infty}\left(P \sinh \gamma x + Q \cosh \gamma x\right) \end{cases}$$

con:

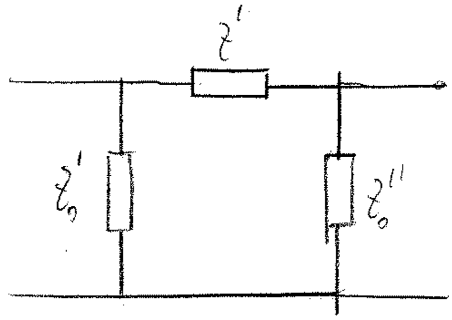
$$\left.\begin{aligned} \bar{V}_o &= P \\ I_o &= -\frac{1}{Z_\infty} Q \end{aligned}\right\} x = 0$$

$$\left.\begin{aligned} V_u &= P\cosh \gamma d + Q \sinh \gamma d \\ I_u &= -\frac{1}{Z_\infty}\left(P \sinh \gamma d + Q \cosh \gamma d\right) \end{aligned}\right\} x = d$$

Un doppio bipolo lo si può rappresentare in vari modi:



Doppio bipolo a T.



Doppio bipolo a Π

Vogliamo definire dai parametri di uscita ed ingresso i parametri interni dei doppi bipoli

Osserviamo che:

$Z_1 = Z_2$

$Z_0' = Z_0''$

Analizziamo il <u>circuito equivalente a T</u>:

Si immagina di tenere i morsetti del secondario a vuoto $\Rightarrow \underline{I_u' = 0}$

Posso allora calcolare il rapporto $\frac{I_0}{V_u}$:

$$V_0\Big|_{I_u'=0} = \cosh\gamma d\, V_u$$

Allora:

$$\frac{V_u}{V_0}\Bigg|_{I_u'=0} = \frac{1}{\cosh\gamma d} = \frac{Z_0}{Z_0+Z_1}$$

Quindi:

$$\frac{Z_0}{Z_0+Z_1} = \frac{1}{\cosh\gamma d}$$

$$Z_0\cosh\gamma d - Z_0 = Z_1$$

$$Z_1 = Z_0(\cosh\gamma d - 1) = Z_\infty\frac{\cosh\gamma d - 1}{\sinh\gamma d} = Z_\infty \tanh\gamma\frac{d}{2}$$

Allora:

$$\boxed{Z_1 = Z_\infty \tanh\gamma\frac{d}{2}}$$

Analizziamo il circuito equivalente a Π:

In questo caso poniamo: $V_u = 0$

Analogamente:

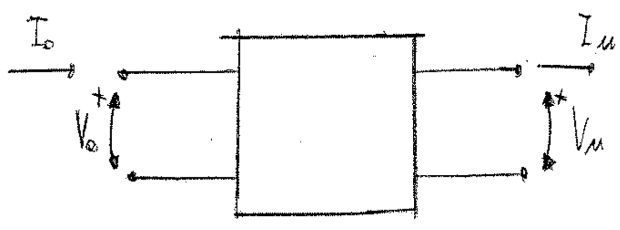
$$-\frac{I_u'}{I_o} = \frac{Z_o'}{Z_o'+Z_1'} = -\frac{1}{\cosh \gamma d}$$

Allora:

$$\frac{Z_o}{Z_o+Z_1} = \frac{1}{\cosh \gamma d}.$$

Il calcolo delle funzioni iperboliche può essere fatto con lo sviluppo in serie. In questo modo posso identificare con approssimazione accettabile cosa rappresentano le impedenze dei circuiti a doppi bipoli.

Valutazione delle potenze elettriche associata ad una linea



$$\begin{cases} V_o = V_u \cosh \gamma d + Z_\infty \sinh \gamma d \; I_u \\ I_o = \dfrac{V_u}{Z_\infty} \sinh \gamma d + \cosh \gamma d \; I_u \end{cases}$$

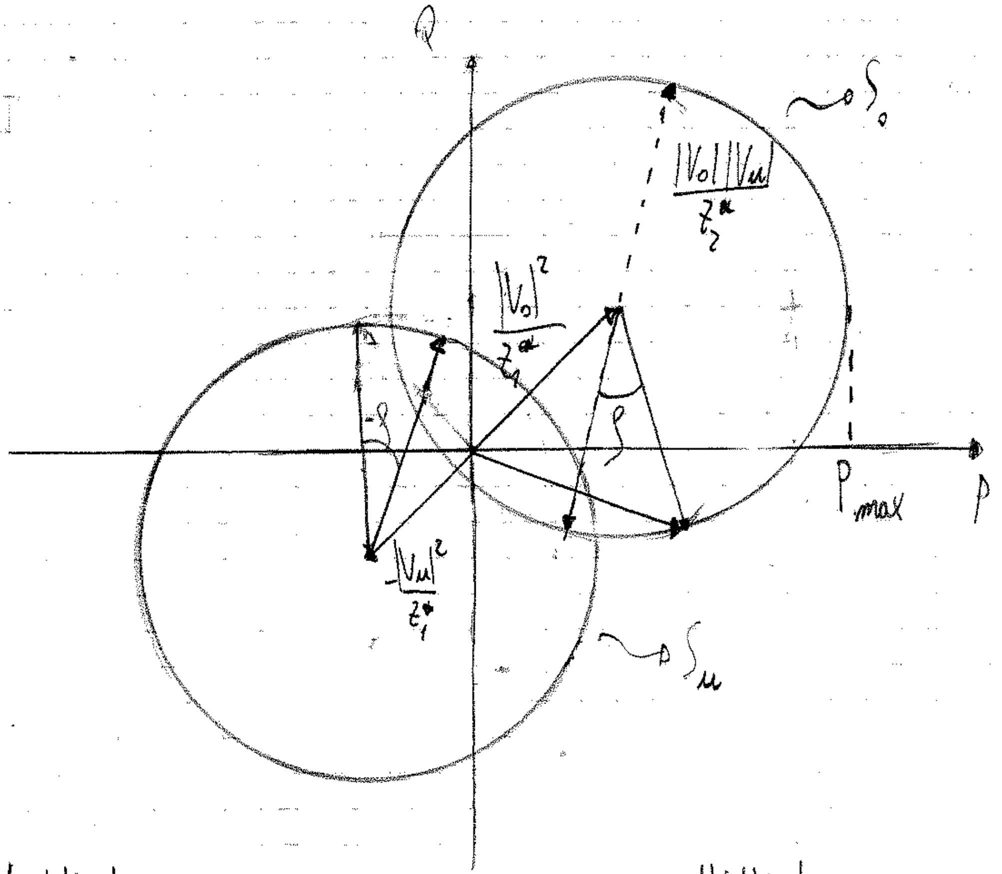
Vogliamo rappresentare tutto solo in funzione delle tensioni eliminando la corrente perché le linee vengono "controllate" in tensione.

$$\boxed{\bar{S}_0 = \bar{V}_0 \bar{I}_0^* = \frac{|V_0|^2}{Z_1^*} - \frac{|V_0||V_u| e^{j\underbrace{(\varphi_{V_0}-\varphi_{V_u})}_{\rho}}}{Z_2^*}}$$ Potenza apparente in ingresso

$$\boxed{\bar{S}_u = \bar{V}_u \bar{I}_u^* = \frac{|V_u||V_0|}{Z_2^*} e^{\underbrace{-j(\varphi_{V_0}-\varphi_{V_u})}_{-\rho}} - \frac{|V_u|^2}{Z_1^*}}$$ " " in uscita

Pongo $\rho = \varphi_{V_0} - \varphi_{V_u}$

Se conosco la V_0 e V_u ed i parametri della linea l'unico parametro che varia nel calcolo della potenza è la differenza di fase $(\varphi_{V_0} - \varphi_{V_u})$



—: $\frac{|V_0||V_u|}{Z_2^*}$ sfasata di ρ —: $\frac{|V_0||V_u|}{Z_2^*}$

—: $\frac{|V_0||V_u|}{Z_2^*}$ modulo —: $\frac{|V_0||V_u|}{Z_2^*}$ sfasata di $-\rho$

—: S_0

Riepilogando:

$$\boxed{\bar{S}_o = \bar{V}_o \bar{I}_o^* = \frac{|V_o|^2}{Z_1^*} - \frac{|V_o||V_u| e^{j(\rho_{V_o} - \rho_{V_u})}}{Z_2^*}}$$ Potenza apparente in ingresso

$$\boxed{\bar{S}_u = \bar{V}_u \bar{I}_u^* = \frac{|V_u||V_o| e^{-j(\rho_{V_o} - \rho_{V_u})}}{Z_2^*} - \frac{|V_u|^2}{Z_1^*}}$$ Potenza apparente in uscita

$$\boxed{P_{max,in} = \frac{|V_o|^2}{|Z_1^*|} \cos\alpha + \frac{|V_o||V_u|}{|Z_2^*|}}$$ Potenza attiva max in ingresso

Con:

$$\rho = \rho_{V_o} - \rho_{V_u} \qquad Z_1 = Z_\infty \frac{\sinh \gamma d}{\cosh \gamma d} \qquad Z_2 = Z_\infty \sinh \gamma d \qquad \alpha = \angle \frac{1}{Z_1^*} = \angle Z_1$$

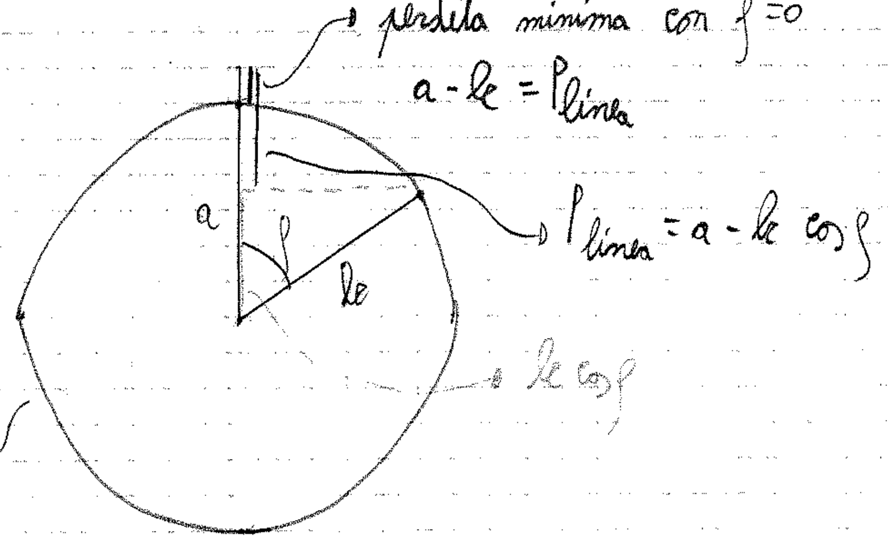
$$\boxed{\bar{S}_{linea} = \bar{S}_o - \bar{S}_u = P_\ell + j Q_\ell}$$ Potenza apparente linea

$$S_{linea} = \frac{|V_o|^2 + |V_u|^2}{Z_1^*} - \frac{|V_o||V_u|}{Z_2^*} 2\cos\rho$$

$$\boxed{P_{min,in} = \frac{|V_o|^2}{|Z_1^*|} \cos\alpha - \frac{|V_o||V_u|}{|Z_2^*|}}$$ Potenza attiva min in ingresso

Allora abbiamo:

$P_{linea} = a - l_e \cos \rho$



Le P_{linea} dipendono dai parametri longitudinali e dalle conduttanze trasversali della linea.
Al variare della ρ cambieranno le perdite P_{linea}, cioè le P_{linea} dipendono dalla ρ.

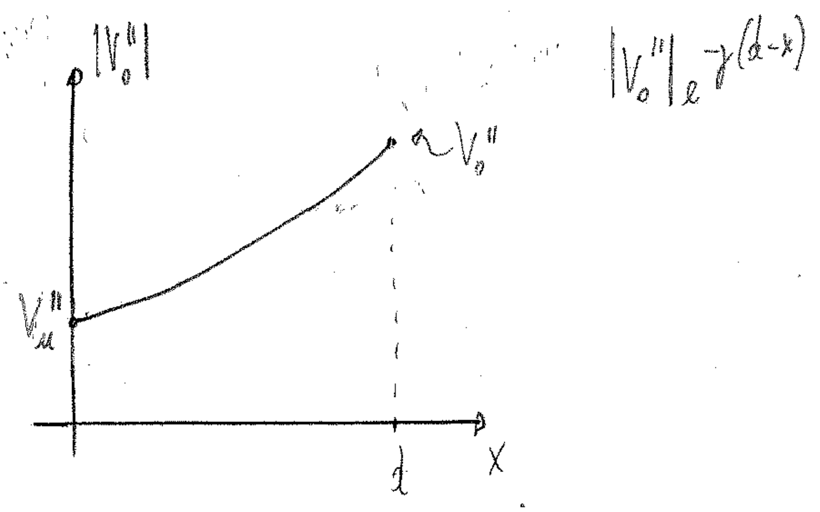
Linee scritte in forma esponenziale

Ricordiamo che:

$$\begin{cases} V = A e^{\gamma x} + B e^{-\gamma x} \\ I = -\frac{1}{Z_\infty}\left(A e^{\gamma x} - B e^{-\gamma x}\right) = -\frac{A}{Z_\infty} e^{\gamma x} + \frac{B}{Z_\infty} e^{-\gamma x} \end{cases}$$

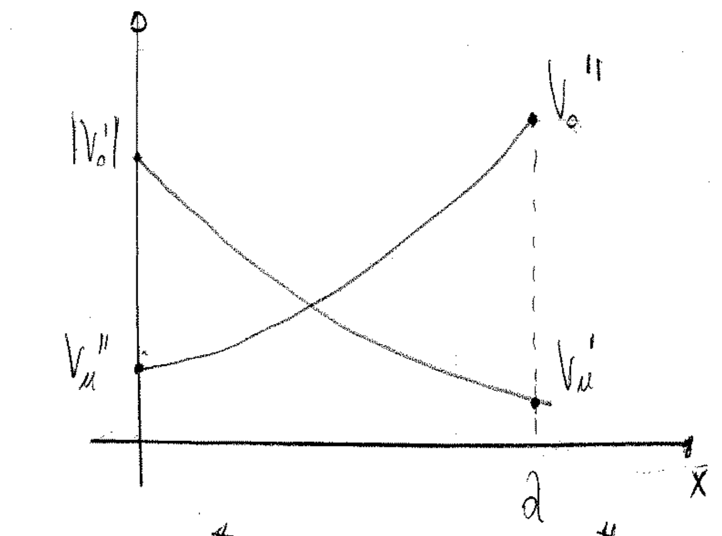
Si osserva che:

$\frac{B}{Z_\infty} e^{-\gamma x}$ decresce all'aumentare di x



È come se avessi 2 onde: una regressiva e una riflessiva

Mettendole insieme:



Le linee in regime transitorio sono caratterizzati da funzioni d'onda.

Qui non ho fenomeni di propagazione $\Rightarrow$ ho tutto stazionario.

Però questo lo posso pensare come:

- tensione: somma di 2 termini uno che decresce all'aumentare di x più un termine che decresce all'aumentare di x però partendo da fine linea (onda regressiva)

Quindi:

$$r = \frac{A e^{\gamma d}}{B e^{-\gamma d}} = \frac{P+Q}{P-Q} e^{2\gamma d}$$

Essendo:

$P = V_0$

$$Q = -V_0 \frac{Z_\infty \cosh \gamma d + Z_c \sinh \gamma d}{Z_c \cosh \gamma d + Z_\infty \sinh \gamma d}$$

Allora:

$$P+Q = V_0 \left[\frac{Z_c \cosh \gamma d + Z_\infty \sinh \gamma d - Z_\infty \cosh \gamma d - Z_c \sinh \gamma d}{Z_c \cosh \gamma d + Z_\infty \sinh \gamma d} \right]$$

$$P-Q = V_0 \left[\frac{Z_c \cosh \gamma d + Z_\infty \sinh \gamma d + Z_\infty \cosh \gamma d + Z_c \sinh \gamma d}{Z_c \cosh \gamma d + Z_\infty \sinh \gamma d} \right]$$

Allora:

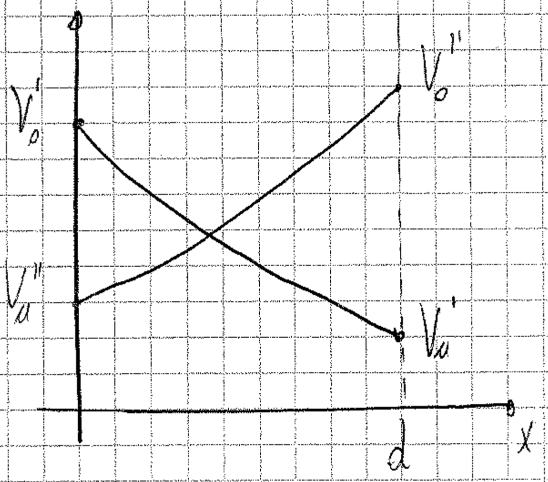
$$r = \frac{Z_c - Z_\infty}{Z_c + Z_\infty} \frac{\cancel{2e^{-\gamma d}}}{\cancel{2e^{\gamma d}}} \frac{\cancel{e^{\gamma d}}}{\cancel{e^{-\gamma d}}} \Rightarrow \boxed{r = \frac{Z_c - Z_\infty}{Z_c + Z_\infty}}$$ Fattore di riflessione

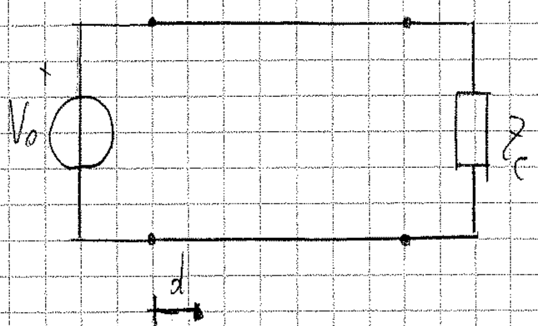
Il fattore di riflessione non dipende dalla lunghezza della linea ma dipende solo da Z_c e Z_∞.
Assegnata la linea (Z_∞) e il fattore di riflessione (r) l'impedenza di carico è univocamente definita.

Abbiamo definito:

$$V = V_0' e^{-\gamma x} + V_0'' e^{-\gamma(d-x)}$$

$$I = I_0' e^{-\gamma x} + I_0'' e^{-\gamma(d-x)} = \frac{V_0'}{Z_\infty} e^{-\gamma x} - \frac{V_0''}{Z_\infty} e^{-\gamma(d-x)}$$





$$r = \frac{V_0''}{V_d'} = \frac{Z_c - Z_\infty}{Z_c + Z_\infty}$$

Si ha che:

$\eta_0 - 1 = r\eta_0 + r$

$\eta_0 (1-r) = 1+r$

Allora:

$$\eta_0 = \frac{1+r}{1-r}$$

Se $Z_c = Z_\infty \Rightarrow r = 0 \Rightarrow \eta_0 = 1 \Rightarrow$ ho solo l'onda progressiva (caso di linea di lunghezza infinita oppure linea su carico adattato)

η_0 è anch'esso un numero complesso, infatti:

$r = z + jw$ (è un numero complesso)

Ipotizzo che $Re(\eta_0) \geq 0$, allora essendo:

$\eta_0 = x + jy$

in generale si ha che:

$|r| \leq 1$

Quindi il luogo dei punti di r al variare della parte $Re(\eta_0)$ giacciono su delle circonferenze

Abbiamo ottenuto:

$$V(x) = \frac{V_0}{1+r_e e^{-2\gamma d}} e^{-\gamma x} + \frac{V_0 r_e e^{-\gamma d}}{1+r_e e^{-2\gamma d}} e^{-\gamma(d-x)}$$

$$I(x) = \frac{V_0}{Z_\infty} \frac{1}{1+r_e e^{-2\gamma d}} e^{-\gamma x} - \frac{V_0}{Z_\infty} \frac{r_e e^{-\gamma d}}{1+r_e e^{-2\gamma d}} e^{-\gamma(d-x)}$$

Ora mi chiedo se per:

$I(x=d) = I_c$ la I_c non dipende da Z_c, ovvero da r

cioè ci chiediamo se la I_c non dipende dal carico Z_c

Ossero che:

$$I(x=d) = I_c = \frac{V_0}{Z_\infty} \frac{e^{-\gamma d}}{1+r_e e^{-2\gamma d}} - \frac{V_0}{Z_\infty} r_e e^{-\gamma d} = \frac{V_0 e^{-\gamma d}}{Z_\infty} \frac{1-r}{1+r_e e^{-2\gamma d}}$$

Dire che I_c non dipende da $Z_c \Rightarrow I_c$ non dipende da r, allora:

$$\frac{dI_c}{dr} = 0$$

Calcoliamo $\frac{dI_c}{dr}$:

$$\frac{dI_c}{dr} = \frac{V_0 e^{-\gamma d}}{Z_\infty} \frac{d}{dr}\left(\frac{1-r}{1+r_e e^{-2\gamma d}}\right)$$

Allora:

$-2\beta d = -(2n+1)\pi$

rappresenta solo il verso di rotazione (orario o antiorario)

Allora si ha che:

$2\beta d = (2n+1)\pi$

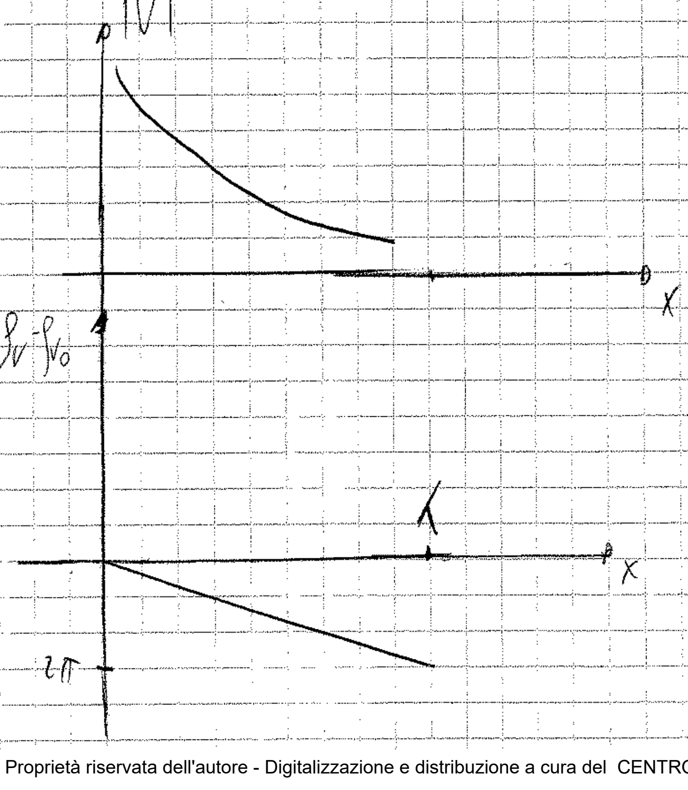
Da cui:

$$d = \frac{(2n+1)\pi}{2\beta}$$

Ricordando il caso di linea di lunghezza infinita avevo:

$\beta \ell$: sfasamento angolare lungo la lunghezza della linea

Ricordiamo:



$$I_e = \frac{V_0}{Z_\infty} e^{-\gamma d} \frac{1-r}{1+r_e^{-\gamma d}}$$

ongo:

$$\frac{dI_e}{dr} = 0$$

al:

$$I_e \Big|_{\frac{dI_e}{dr}=0} \Rightarrow I_e\left(e^{-2\gamma d} = -1\right) = \frac{V_0}{Z_\infty} e^{-\gamma d} \frac{\cancel{1+r}}{\cancel{1+r}} = \frac{V_0}{Z_\infty} e^{-j\beta d} \qquad (\alpha = 0)$$

$$I_e = \frac{V_0}{Z_\infty}\left[e^{-j\frac{\pi}{2}(2n+1)}\right]$$

Ora devo analizzare n:

n pari: $0, 2, 4, 6 \Rightarrow e^{-\beta d} = -j$

n dispari: $1, 3, 5, 7 \Rightarrow e^{-\beta d} = j$

Allora I_e in base al valore di n vale:

$$V_u = \frac{V_0 e^{-\gamma d}}{1+\Gamma e^{-2\gamma d}} + \frac{V_0 \Gamma e^{-\gamma d}}{1+\Gamma e^{-2\gamma d}}$$

Allora:

$$\frac{V_u}{V_0} = \frac{e^{-\gamma d}(1+\Gamma)}{1+\Gamma e^{-2\gamma d}}$$

Consideriamo una linea aperta (che non ci sia il carico):

Linea a vuoto $\Rightarrow Z_c \to \infty$

Si ha che essendo:

$$\Gamma = \frac{Z_c - Z_\infty}{Z_c + Z_\infty}$$

allora

$$\lim_{Z_c \to \infty} \Gamma = 1$$

Quindi:

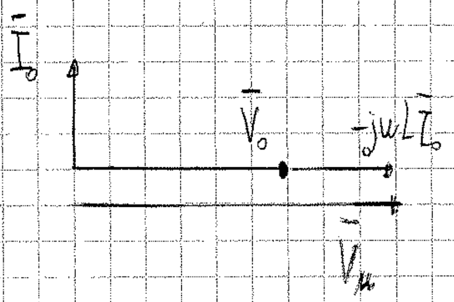
$$\frac{V_u}{V_0} = \frac{2 e^{-\gamma d}}{1+e^{-2\gamma d}} = \frac{2}{e^{\gamma d}+e^{-\gamma d}} = \frac{1}{\cosh \gamma d}$$

Sappiamo che:

Si ha che:

$$\bar{V}_u = \bar{V}_0 - j\omega L \bar{I}_0$$

Allora:



Si suppone che il sistema presenti un comportamento prevalentemente capacitivo

$$Z_{eq} = j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$$

Otteniamo quindi in questo caso una tensione $V_u = \infty \Rightarrow$ guadagno infinito

Voglio ora definire l'impedenza in ingresso:

$$Z_0 = \frac{V_0}{I_0} = \frac{V_0}{\frac{V_0'}{Z_\infty} e^{-\gamma 0} - \frac{V_0''}{Z_\infty} e^{-\gamma(d-0)}} \qquad (\text{con } x = 0)$$

Allora:

$$Z_0 = \frac{V_0 \, Z_\infty}{V_0' - V_0'' e^{-\gamma d}} = \frac{V_0 Z_\infty}{\frac{V_0}{1+\Gamma e^{-2\gamma d}} - \frac{V_0 \Gamma e^{-\gamma d}}{1+\Gamma e^{-2\gamma d}} e^{-\gamma d}}$$