appunti
www.centroappunti.it
Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari
Tesi di laurea
Cartoleria e cancelleria
Stampa file e fotocopie
Print on demand
Rilegature

NUMERO : 442

DATA : 10/11/2013

A P P U N T I

STUDENTE : Rubinetto

MATERIA : Geometria + esercizi
Prof. Massaza

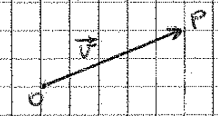
Il presente lavoro nasce dall'impegno dell’autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.
Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTI E NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 252

06/03/2012

I VETTORI



- Un VETTORE è un SEGMENTO ORIENTATO che ha come primo punto estremo O. si indica con

$\vec{OP}$

- il VETTORE NULLO: $\vec{OO}$, ove $P \equiv O$

la DESCRIZIONE di un VETTORE:

1) DIREZIONE: è la retta del fascio passante per O sulla quale giace $\vec{v}$
2) MODULO: è il numero Reale NON NEGATIVO che indica la "lunghezza". si indica con $|\vec{v}|$
3) VERSO

il VETTORE NULLO: non ha DIREZIONE né VERSO, inoltre ha MODULO NULLO.

chiamo con V l'insieme di tutti i VETTORI APPLICATI in un punto, chiamo con S lo spazio Euclideo: esiste una CORRISPONDENZA BIUNIVOCA fra V ed S

$V \rightarrow S$

$\vec{v} = \vec{OP} \rightarrow P$

quindi, data questa corrispondenza biunivoca, i matematici confondono il PUNTO P con il vettore OP.

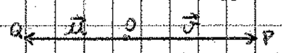
OPERAZIONI con i VETTORI

A) Somma di Vettori

caso 1: Stessa direzione, stesso verso

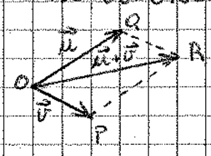
$\vec{u} + \vec{v}$
- stessa DIREZIONE di $\vec{u}$ e $\vec{v}$
- stesso VERSO di $\vec{u}$ e $\vec{v}$
- MODULO $|\vec{u}| + |\vec{v}|$

caso 2: Stessa direzione, verso OPPOSTO



$\vec{u} + \vec{v}$
- stessa DIREZIONE
- verso del vettore con modulo maggiore
- Modulo: differenza dei moduli.

CASO GENERICO



si usa la REGOLA del PARALLELOGRAMMO.

Si può quindi dire che la somma di vettori è una FUNZIONE: ad ogni coppia corrisponde uno e uno solo Risultato

$$V \times V \xrightarrow{+} V$$

$$(\vec{u}, \vec{v}) \longrightarrow (\vec{u} + \vec{v})$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 252

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 5 di 252

07/03/2012

SPAZI VETTORIALI: ALCUNI ESEMPI

COME DEFINIRE UNO SPAZIO VETTORIALE
1) Considero il campo $(\mathbb{R}, \mathbb{C})$
2) Chiarisco chi è $\mathbb{V}$ $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4, ecc..)$
3) Definisco le operazioni e quali proprietà valgono.

esempio 1: Vettori in uno spazio euclideo tridimensionale

1) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
2) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3 = \{a_1, a_2, a_3\} \quad a \in \mathbb{R}$
3) $(\mathbb{V}, +, \cdot)$

I) il $+$: (⚠ NON È LA SOMMA CLASSICA, è una nuova operazione che devo DEFINIRE IO)

$$(a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) \overset{def}{=} (a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)$$

Dimostro che per la SOMMA così definita, valgono effettivamente le 4 proprietà:

a) ASSOCIATIVA

$$(a_1, a_2, a_3) + [(b_1, b_2, b_3) + (c_1, c_2, c_3)] = [(a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3)] + (c_1, c_2, c_3).$$

Vale la proprietà perché, per come ho definito la somma, è semplicemente una addizione di numeri reali

b) ELEMENTO NEUTRO

$\vec{0} = (0,0,0)$ è un elemento neutro infatti $(a_1, a_2, a_3) + (0,0,0) = (a_1+0, a_2+0, a_3+0)$
$= (a_1, a_2, a_3).$

c) ELEMENTO OPPOSTO

so che $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$; il suo opposto è $-\vec{a} = (-a_1, -a_2, -a_3)$, poiché sommandoli viene: $\vec{a} + (-\vec{a}) = (a_1, a_2, a_3) + (-a_1, -a_2, -a_3) = (0,0,0) = \vec{0}$

d) COMMUTATIVA: scrivere $(a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3)$ è come scrivere $(b_1, b_2, b_3) + (a_1, a_2, a_3)$.

II) Definisco il prodotto con un numero reale.

$$r(a_1, a_2, a_3) = (ra_1, ra_2, ra_3)$$

in modo analogo a sopra si possono dimostrare le 4 proprietà:

a) 1 come ELEMENTO NEUTRO $\quad 1 \cdot (a_1, a_2, a_3) = (a_1, a_2, a_3)$
b) PROPRIETÀ ASSOCIATIVA $\quad r \cdot [s \cdot (a_1, a_2, a_3)] = (r \cdot s) \cdot (a_1, a_2, a_3)$
c) PROPRIETÀ SOMMA dei REALI $\quad (r+s)(a_1, a_2, a_3) = r(a_1, a_2, a_3) + s(a_1, a_2, a_3)$
d) PROPRIETÀ SOMMA VETTORI $\quad r[(a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3)] = r(a_1, a_2, a_3) + r(b_1, b_2, b_3).$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 5 di 252

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 7 di 252

07/03/2012

la NOTAZIONE MATEMATICA di una MATRICE: (di m righe ed n colonne)

$$\mathbb{K}^{m,n}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ ma è MATEMATICAMENTE + CORRETTO anche per sintesi, indicare la matrice così $\Rightarrow A = a_{ih}$ $\quad i = 1, 2, \ldots, m$; $h = 1, 2, \ldots, n$

LO SPAZIO VETTORIALE di UNA MATRICE:

prendo ad esempio una matrice $\mathbb{R}^{2,3}$

definito lo spazio vettoriale

$(\mathbb{R}^{2,3}, +, \cdot)$

definisco la somma: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} \overset{def}{=} \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{pmatrix}$

Si può dimostrare che valgono tutte e 4 le proprietà della somma.

e definisco il prodotto $r \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra_{11} & ra_{12} & ra_{13} \\ ra_{21} & ra_{22} & ra_{23} \end{pmatrix}$

anche qui si dimostra che valgono le 4 proprietà del prodotto.

quindi $\mathbb{R}^{2,3}$ è uno SPAZIO VETTORIALE (valgono le 8 p.tà).

con la scrittura matematicamente corretta,

$A = (a_{ih})$ $\quad i = 1,2 \quad h = 1,2,3$ $\qquad B = (b_{ih})$ $\quad i = 1,2 \quad h = 1,2,3$

SOMMA

$A + B = (c_{ih})$ $\quad i = 1,2 \quad h = 1,2,3$ $\qquad c_{ih} \overset{def}{=} a_{ih} + b_{ih}$

PRODOTTO

$r \cdot A \overset{def}{=} (d_{ih})$ $\quad i = 1,2 \quad h = 1,2,3$ $\qquad d_{ih} \overset{def}{=} r a_{ih}$

Si può notare che una matrice $\mathbb{R}^{2,3}$ è assimilabile ad una sestupla di numeri $\mathbb{R}^6$

UNICITÀ DELL'ELEMENTO NEUTRO $(\vec{0})$

parto dal presupposto che esistono 2 elementi neutri, $\vec{0}$ e $\vec{0}'$, rispetto alla somma

dimostro che $\vec{0} = \vec{0}'$

$\Rightarrow \vec{0} + \vec{0}'$ $\begin{cases} = \vec{0} \text{ (perché } \vec{0}' \text{ è un elemento neutro)} \\ = \vec{0}' \text{ (perché } \vec{0} \text{ è un elemento neutro)} \end{cases}$

quindi $\vec{0} = \vec{0}'$, c.v.d.

UNICITÀ DELL'OPPOSTO

suppongo che esistano 2 opposti di $\vec{v}$, che sono $\vec{v}'$ e $\vec{v}''$ dimostro che $\vec{v}' = \vec{v}''$

$\vec{v} + \vec{v}' = \vec{v}' + \vec{v} = \vec{0}$
$\vec{v} + \vec{v}'' = \vec{v}'' + \vec{v} = \vec{0}$

$$\vec{v}' + \vec{v} + \vec{v}''$$

$$(\vec{v}' + \vec{v}) + \vec{v}'' \qquad \vec{v}' + (\vec{v} + \vec{v}'')$$

$$\vec{0} + \vec{v}'' = \vec{v}' + \vec{0}$$

quindi $\vec{v}' = \vec{v}''$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 7 di 252

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 9 di 252

07/03/2012

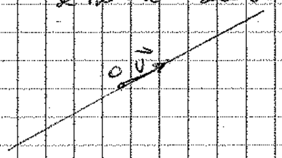
I più piccoli sottospazi disponibili:

Se ho il VETTORE NULLO:

$\vec{0}$

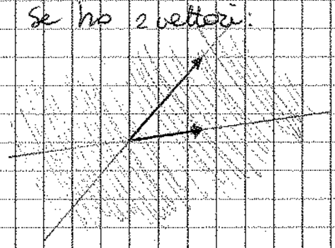
il suo sottospazio minimo è SE STESSO (valgono le Cns 1, 2, 3)

se ho un solo vettore:



il più piccolo sottospazio è la RETTA su cui giace, così da far valere anche la (Cns 2).

Se ho 2 vettori:



oltre alle rette su cui giacciono (× far valere la Cns 2) ci

TUTTO il piano è compreso nel sottospazio, in modo da accettare tutte le combinazioni di SOMME e PRODOTTI.

13/03/2012

Alcuni esempi di SOTTOSPAZI:

$$S = \{(x,y) : 2x - 5y\}$$

E' un SOTTOSPAZIO?

1) $(0,0) \in S$

2) $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in S \overset{?}{\Rightarrow} (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in S$

So che $\begin{cases} 2x_1 + 5y_1 = 0 \\ 2x_2 + 5y_2 = 0 \end{cases}$

$\Downarrow$

$2(x_1 + x_2) + 5(y_1 + y_2) \overset{?}{=} 0$

$\Updownarrow$

$\underbrace{2x_1 + 5y_1}_{=0} + \underbrace{2x_2 - 5y_2}_{=0} \overset{?}{=} 0 \quad \Rightarrow$ Somma $\in S$

3) $(x_1, y_1) \in S, \ a \in \mathbb{R} \Rightarrow a(x_1, y_1) \overset{?}{\in} S$

$a(x_1, y_1) = (ax_1, ay_1)$

So che $2x_1 - 5y_1 = 0 \Rightarrow 2ax_1 + 5ay_1 = a(2x_1 - 5y_1) = 0 \Rightarrow$ prodotto $\in S$

Più in generale, posso dire che vale per qualunque campo ($\mathbb{K}$ che sia $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), e con qualunque coefficiente:

$$\boxed{\begin{array}{l} V = \mathbb{K}^n \\ S = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = 0\} \ \text{[IPERPIANO]} \\ \text{E' UN SOTTOSPAZIO} \end{array}}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 9 di 252

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 11 di 252

13/03/2012

RICHIAMI alla TEORIA degli INSIEMI

I

Sottoinsiemi $\to \mathcal{P}(I)$

$A \cup B$: MINIMO sottoinsieme di I che contiene i due sottoinsiemi uniti

$A \cap B$: MASSIMO sottoinsieme contenuto sia in A che in B.

considero l'insieme V

V

e considero il sottoinsieme $\mathcal{S}$ = insieme dei SOTTOSPAZI di V

i 3 sottoinsiemi principali: $\vec{O}$, rette passanti per O, piani passanti per O

VERIFICO che $S_1 \cap S_2$ è ancora un SOTTOSPAZIO

① $\vec{O} \in S_1 \cap S_2$

② $\vec{x}_1 \in S_1 \cap S_2$, $\vec{y}_1 \in S_1 \cap S_2 \overset{?}{\Rightarrow} \vec{x}_1 + \vec{y}_1 \in S_1 + S_2$

So che $(\vec{x}_1 \in S_1) \wedge (\vec{x}_1 \in S_2) \wedge (\vec{y}_1 \in S_1) \wedge (\vec{y}_1 \in S_2)$

$\Rightarrow \underbrace{(x_1 + y_1 \in S_1)}_{\text{Vero perché } S_1 \text{ è un Sottospazio}} \wedge \underbrace{(x_1 + y_1 \in S_2)}_{\text{Vero perché } S_2 \text{ è un Sottospazio}}$

③ $\vec{x} \in S_1 \cap S_2$, $\lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow \lambda \vec{x} \in S_1 \cap S_2$

$(\lambda x \in S_1)$: vero perché S_1 è un Sottospazio

$(\lambda x \in S_2)$: vero perché S_2 è un Sottospazio

$\Downarrow$

$(\lambda x \in S_1 \cap S_2)$

⚠ L'UNIONE di due SOTTOSPAZI non è un Sottospazio: la SOMMA non è contenuta.

S_1 S_2

Se DEFINISCO la somma di SOTTOSPAZI così

$$S_1 + S_2 \overset{\text{def}}{=} \{\vec{s}_1 + \vec{s}_2\} \quad \begin{matrix} \vec{s}_1 \in S_1 \\ \vec{s}_2 \in S_2 \end{matrix}$$

NB: $S_1 \subseteq S_1 + S_2$, perché $\vec{s}_1 = \vec{s}_1 + \vec{O}^{\,\in S_2}$

È TROPPO GRANDE per essere un SOTTOSPAZIO? No: è chiuso rispetto alla somma (ovvero contiene tutte le somme possibili)

è ancora un SOTTOSPAZIO?

① contiene $\vec{O}$

② $(\vec{s}_1 + \vec{s}_2) + (\vec{s}_1' + \vec{s}_2') = \underbrace{(\vec{s}_1 + \vec{s}_1')}_{\in S_1} + \underbrace{(\vec{s}_2 + \vec{s}_2')}_{\in S_2}$

③ $\lambda \vec{s}_1 \in S_1$ (xché è un sottospazio)

$\lambda \vec{s}_2 \in S_2$ (xché è un Sottospazio)

$\Downarrow$

$\lambda(\vec{s}_1 + \vec{s}_2) = \underbrace{\lambda \vec{s}_1}_{\in S_1} + \underbrace{\lambda \vec{s}_2}_{\in S_2}$.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 11 di 252

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 13 di 252

14/03/2012

IL MINIMO SOTTOSPAZIO che contiene n vettori.

prendo uno spazio $(V, +, \circ)$ in un campo $\mathbb{K}$

prendo anche un numero FINITO di vettori (n vettori)

$\vec{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$

quel'è il più piccolo sottospazio che contiene tutti questi vettori?

si indica così:

$\mathcal{L}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n)$

si può dire che $\mathcal{L}\{a v_1\}$ $a \in \mathbb{K}$, è la RETTA generata da v_1

ma $\mathcal{L}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n)$ posso pensarlo come il MINIMO SOTTOSPAZIO che contiene $\mathcal{L}(v_1), \mathcal{L}(v_2), \dots, \mathcal{L}(v_n)$ ovvero le rette generate dai nostri vettori

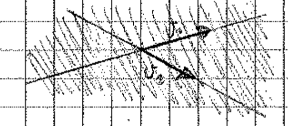
QUINDI

$$\mathcal{L}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n) = \mathcal{L}(\bar{v}_1) \oplus \mathcal{L}(\bar{v}_2) \oplus \dots \oplus \mathcal{L}(\bar{v}_n) = \underbrace{\{a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + \dots + a_n\bar{v}_n\}}_{\boxed{\text{Combinazione lineare di } \bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n \text{ mediante i coefficienti } a_1, \dots, a_n}} \quad a \in \mathbb{K}$$

$\bar{v} = a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + \dots + a_n\bar{v}_n$

$\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ sistema di GENERATORI del sottospazio $\mathcal{L}(v_1, v_2, \dots, v_n)$

prendo un esempio:

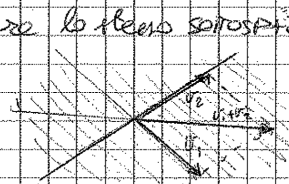


i due vettori generano un SOTTOSPAZIO ma non solo: questo è soggetto alla SOMMA DIRETTA

$\mathcal{L}(\bar{v}_1, \bar{v}_2) = \mathcal{L}(v_1) \oplus \mathcal{L}(v_2)$

ma questi non sono gli unici generatori del sottospazio

se io considero i vettori $v_1, v_2, v_1 + v_2$: viene generato sempre lo stesso SOTTOSPAZIO ma questo è sovrabbondante, c'è un vettore di troppo, non necessario per determinare lo sottospazio



$\mathcal{L}(v_1) + \mathcal{L}(v_2) + \mathcal{L}(v_1 + v_2)$: NON È una somma DIRETTA

Quindi

v_1, v_2 LINEARMENTE INDIPENDENTI (=essenziali x determinare lo sottospazio) $\Rightarrow$ SOMMA DIRETTA.

$v_1, v_2, v_1 + v_2$ LINEARMENTE DIPENDENTI (= posso toglierne 1) $\Rightarrow$ SOMMA INDIRETTA.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 13 di 252

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 15 di 252

14/03/2012 (II)

CASO PARTICOLARE: le MATRICI DIAGONALI

le MATRICI DIAGONALI: quelle con tutti 0, tranne gli elementi sulla diagonale principale.

es. $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$

il prodotto è molto semplice: ogni elemento della diagonale del prodotto è frutto della moltiplicazione degli elementi di A e B nella stessa posizione.

es. $A\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = C = \begin{pmatrix} 30 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

considerata la facilità del prodotto, si cerca di DIAGONALIZZARE le matrici, ovvero di trovare delle matrici diagonali che corrispondano a quelle normali.

CASO PARTICOLARE: MATRICI QUADRATE

$\mathbb{K}^{n,n}$

+ NON VALE la PROPRIETÀ COMMUTATIVA

+ VALE la PROPRIETÀ ASSOCIATIVA $\forall A,B,C: A(B\cdot C) = (A\cdot B)\cdot C$

+ ESISTE UN ELEMENTO NEUTRO sinistro e DESTRO

si chiama MATRICE IDENTITÀ, ed è fatta così: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

+ MATRICE INVERTIBILE

A è INVERTIBILE se $\exists (A^{-1})$ tale che risulti

$A^{-1}\cdot A = A\cdot A^{-1} = I$

Legge di ANNULLAMENTO del PRODOTTO se A è invertibile:

$A\cdot B = 0$ A è invertibile

$A\cdot A^{-1}\cdot B = A^{-1}\cdot 0 = 0$

$\Updownarrow$

$(A\cdot A^{-1})\cdot B = 0$

$\Updownarrow$

$I\cdot B = 0$

$\Updownarrow$

$B = 0$

TEOREMA: Invertibile a DESTRA e A SINISTRA:

Se A è invertibile a DESTRA, allora lo è anche a SINISTRA

$\exists x \mid x\cdot A = I \Leftrightarrow \exists y \mid A\cdot y = I$

inoltre x ed y sono uguali.

$xA = I,\ Ay = I \Rightarrow x = y$

$$\begin{array}{ccc} & xAy & \\ & \| \quad \| & \\ (xA)y & & x(Ay) \\ \| & & \| \\ Iy & & xI \\ \| & & \| \\ y & & x \end{array}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 15 di 252

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 17 di 252

20/03/2012

DIMOSTRAZIONE

1° Parte

$\boxed{\text{Ipotesi}}$: $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ insieme LIBERO $\Rightarrow$ $\boxed{\text{Tesi}}$ $\left.\begin{matrix}1)\\2)\end{matrix}\right\}$

1) Un INSIEME di VETTORI che CONTENGA il VETTORE NULLO, NON PUÒ ESSERE LIBERO

$\vec{0}, v_2, \dots, \vec{v}_n$ $\qquad \vec{0} = 1 \cdot \vec{v}_1 + 0\,\vec{v}_2 + \dots + 0\,\vec{v}_n$

Un VETTORE NULLO è ottenuto dalla comb. lin. di vettori i cui coefficienti DIFFERISCONO da 0, quindi non vale la somma diretta.

2) Per Assurdo.

sia $\vec{v}_i = a_1\vec{v}_1 + \dots + a_{i-1}\vec{v}_{i-1}$

sfruttando le 8 proprietà, posso portare tutto da un lato.

$\vec{v}_i - a_1\vec{v}_1 - \dots - a_{i-1}\vec{v}_{i-1} = \vec{0}$

non so niente di queste a_1, a_2, a_{i-1}, ma so che $\vec{v}_i$ ha come coefficiente 1: $\vec{0}$ è ottenuto da coefficienti diversi da $0 \Rightarrow$ no somma diretta

2° Parte

$\boxed{\text{IPOTESI}}$: $\left.\begin{matrix}1)\\2)\end{matrix}\right\}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\text{TESI}}$ insieme libero.

$a_1\vec{v}_1 + \dots + a_n\vec{v}_n = \vec{0} \overset{?}{\Rightarrow} a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$

opero così: faccio vedere che a_n è 0, poi torno indietro fino ad a_1

VEDO che DEVE ESSERE $a_n = 0$

SE NON FOSSE così, posso fare questo calcolo:

$a_n\vec{v}_n = -a_1\vec{v}_1 - a_2\vec{v}_2 - \dots - a_{n-1}\vec{v}_{n-1}$

e dato che a_n etc ed è $\neq 0$, posso fare l'inverso:

$\vec{v}_n = -\dfrac{a_1}{a_n}\vec{v}_1 - \dfrac{a_2}{a_n}\vec{v}_2 - \dots - \dfrac{a_{n-1}}{a_n}\vec{v}_{n-1}$ $\Rightarrow$ vuol dire che $\vec{v}_n$ è frutto della comb. lin. degli altri vettori $\Rightarrow$ CONTRO la 2

analogamente dimostro che $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_2$ sono uguali a zero.

Rimane:

$a_1\vec{v}_1 = 0 \Rightarrow a_1 = 0$: questo per la IPOTESI 1 (che $\vec{v}_1 \neq 0$) e per la LEGGE di ANNULLAMENTO del PRODOTTO.

Come fare a capire se ho un insieme libero? verifico le 2 proprietà

es. $\vec{i}, \vec{i}+\vec{j}, 2\vec{i}-\vec{j}, \vec{j}+\vec{k}$

① è vero (non ho $\vec{0}$)

② $\vec{i}, \vec{i}+\vec{j}$ ok

$2\vec{i}-\vec{j} = x\vec{i} + y(\vec{i}+\vec{j}) = (x+y)\vec{i} + y\vec{j}$

$\begin{cases} 2 = x+y \\ 1 = y \end{cases}$: $\exists\, x, y$ t.c. INSIEME NON LIBERO.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 17 di 252

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 19 di 252

21/03/2012

Come ESTRARRE una base, dati i vettori che generano lo spazio?

$V = \mathcal{L}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$

una volta messi i vettori in ordine:

$\vec{v}_1 \quad \vec{v}_2 \quad \vec{v}_3 \quad \dots, \vec{v}_n$

inizio a vedere i vettori:

$\vec{v}_1$: è NULLO? → sì ⇒ lo tolgo; → No ⇒ lo tengo

$\vec{v}_2$: è MULTIPLO di $\vec{v}_1$? → sì: lo tolgo; → No: lo tengo

⋮

$\vec{v}_i$ è C.L. dei vettori precedenti? → sì: lo tolgo; → No: lo tengo.

L'inconveniente di questo sistema: ogni volta che devo decidere se è c.l. dei vettori precedenti, devo fare un SISTEMA.

Un piccolo discorso sul NUMERO di BASI!

prendo $\mathbb{R}^3$ 3 vettori linearmente indipendenti possono formare una BASE. Ma ciò significa che per $\mathbb{R}^3$ ho INFINITE BASI.

l'unica cosa che hanno in comune è di essere 3.

TEOREMA

Due BASI DIVERSE di uno spazio vettoriale hanno lo STESSO NUMERO di ELEMENTI

DIMOSTRAZIONE

LEMMA di STEINZ:

Supponiamo che $V = \mathcal{L}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$

Consideriamo un SOTTOINSIEME LIBERO di V, e supponiamo che contenga k elementi. Allora $k \leq n$

Siano $B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots \vec{b}_n)$ e $C = (\vec{c}_1, \vec{c}_2, \dots, \vec{c}_m)$ due BASI di V

voglio provare che $m = n$

in realtà, se dimostro che $n \leq m$, mi basta.

Considero C come insieme di generatori e B come insieme libero, ed applico il lemma.

DEFINIZIONE: Si chiama DIMENSIONE dello spazio V il numero di elementi di una sua BASE qualunque.

⚠ Attenzione che se ho $\mathbb{R}^3$ ed ho 3 vettori, non è detto che siano una base di $\mathbb{R}^3$ (possono essere complanari)

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 19 di 252

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 21 di 252

21/03/2012

Si può notare questa cosa

$\text{Dim } S_1 + S_2 \leq \text{Dim } S_1 + \text{Dim } S_2$

ad esempio la somma di 2 rette.

$\text{Dim } S_1 \oplus \text{Dim } S_2 = \text{Dim } S_1 + \text{Dim } S_2$

DIMOSTRAZIONE

Se la somma $S_1 + S_2$ è DIRETTA, allora $B_1 \cup B_2$ non è solo un sistema di generatori, ma proprio una base

Controllo che ogni vettore della $\oplus$ si scrive in modo unico con una c.l. delle $\bar{b}_i$ e $\bar{c}_j$

$\bar{s}_i \in S_1 \oplus S_2$

dato che c'è $\oplus$

$\exists!\ \bar{s}_1, \bar{s}_2$ per cui $\bar{s} = \bar{s}_1 + \bar{s}_2$

$\Downarrow$

$\bar{s}_1$ si scrive come c.l. delle $\bar{b}_i$

$\bar{s}_2$ si scrive come c.l. delle $\bar{c}_j$

$\Downarrow$

$\bar{s}$ si scrive in <u>modo unico</u> come c.l. delle b_i e delle c_j

PROBLEMA: dato V ed un SISTEMA di GENERATORI come mi fabbrico una BASE? qual è la sua DIMENSIONE?

$(V, +, \cdot)$ $\quad \mathbb{K}^n$

$B = (\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n)$

$\mathcal{L}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_h)$

innanzitutto trasferisco il problema in $\mathbb{K}^n$

$V \to \mathbb{K}^n$

$\bar{v} = x_1\bar{b}_1 + x_2\bar{b}_2 + \dots + x_n\bar{b}_n \to (x_1, \dots, x_n)$

i vari vettori che generano il campo, saranno trasformati così:

$v_1 = x_{11}\bar{b}_1 + \dots + x_{1n}\bar{b}_n \to (x_{11}, \dots, x_{1n})$

$\vdots$

$v_h = x_{h1}\bar{b}_1 + \dots + x_{hn}\bar{b}_n \to (x_{h1}, \dots, x_{hn})$

→ questi numeri possono essere trasferiti in una matrice

es.

$\bar{v}_1 = (1, 1, 2, 3)$ $\quad \mathcal{L}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4)$

$\bar{v}_2 = (0, 1, -1, 5)$

$\bar{v}_3 = (1, 2, 1, 8)$ $\quad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 8 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

$\bar{v}_4 = (1, 0, 3, -2)$

Si studia quindi la matrice in base alle righe (o alle colonne)

es. $\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & c_3 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \end{array} \end{array}$ $\quad$ Spazio delle righe: R_1 ed $R_2 \in \mathbb{R}^3$

$\text{Dim}(R_1, R_2) = 2$

Spazio delle colonne: $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}^2$

$\text{Dim}(c_1, c_2, c_3) = 2$ (sono rette sullo stesso piano)

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 21 di 252

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 23 di 252

21/03/2012

RIDUZIONE delle MATRICI

io ho uno Spazio V generato da $\mathcal{L}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots \bar{v}_n)$

posso dunque operare 2 TIPI di cambiamento

1) Posso moltiplicare uno dei generatori per $a \neq 0$

$\mathcal{L}(a\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n) \quad a \neq 0$

2) Al posto di uno dei vettori metto la somma di lui con un altro.

$\mathcal{L}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n) = \mathcal{L}(\underbrace{\bar{v}_1 + \bar{v}_2}_{\bar{v}_1'}, \bar{v}_2, \dots, v_n)$

$V_1 \qquad\qquad V_2$

Verifico che $V_2 \subseteq V_1$

Basta dimostrare che gli elementi del SISTEMA di GENERATORI di V_2 sono contenuti in V_1

$\bar{v}_1' = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 \Rightarrow \bar{v}_1 = \bar{v}_1' - \bar{v}_2$

le operazioni 1 e 2, sono chiamate OPERAZIONI ELEMENTARI

Dunque, con un vettore posso fare questo.

$\bar{v}_i \to \bar{v}_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j \bar{v}_j$

ciò vuol dire, nella Matrice

$R_i \to a\, R_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j R_j \qquad a \neq 0$

il motivo per cui $i \neq j$, è che non voglio perdere la riga originale

esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}$$

mi chiedono di calcolarne il rango → trovo una base per lo spazio delle righe:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}$$ mi concentro sull'1, e faccio in modo che sotto siano tutti 0.

$$\begin{cases} R_2 \to R_2 - 5R \\ R_3 \to R_3 - 6R \end{cases} \hookrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \end{pmatrix}$$

ora posso rendere una riga nulla:

$R_3 \to R_3 - R_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

CONSIGLIO: una volta ottimizzata una riga, x non vanificare il lavoro fatto è meglio NON TOCCARLA e non usarla.

Scopro così che il rango della matrice è 2.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 23 di 252

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 25 di 252

27/03/2012

$$\begin{array}{c} \text{non nulla} \\ \begin{pmatrix} \circ & \circ & \times \\ \times & \circ & 0 \\ 0 & \times & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

riga nulla

RIDOTTA x RIGHE $\Rightarrow$ almeno una riga nulla.

Qui non uso il concetto di DIMENSIONE.

DIMOSTRAZIONE del LEMMA di STEINZ.

LEMMA: sia $B=(\bar b_1, \dots, \bar b_n)$ una base di V e sia $\{\bar v_1, \dots, \bar v_k\}$ un insieme libero.

allora $k \leq n$

$$\bar b_1 \in V \longrightarrow (1, 0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{K}^n$$

$$\bar b_2 \in V \longrightarrow (0, 1, 0, \dots, 0)$$

$$\vdots$$

$$\bar b_n \in V \longrightarrow (0, 0, 0, \dots, 1)$$

BASE CANONICA di $\mathbb{K}^n$

$$\bar v_1 = a_{11} \bar b_1 + a_{12} \bar b_2 + \dots + a_{1n} \bar b_n \rightarrow (a_{11} \dots a_{1n})$$

$$\vdots$$

$$\bar v_k = a_{k1} \bar b_1 + a_{k2} \bar b_2 + \dots + a_{kn} \bar b_n \rightarrow (a_{k1} \dots a_{kn})$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_k \end{matrix}$$

$R_1, \dots, R_k$ sono linearmente indipendenti.

$\downarrow$ riduco per righe

$$A' = \overbrace{\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}}^{n} \Big] k$$

RIDOTTA.
RIGHE linearmente indipendenti e quindi NON NULLE.

$\Downarrow$

$$\boxed{k \leq n}$$

La riduzione di una matrice può anche essere scritta così per righe:

$$A = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix} \longrightarrow A' = \begin{pmatrix} R_1 + R_2 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix}$$

Considero solo tre righe, per semplificare la prossima dimostrazione.

$$A = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} R_1 + R_2 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 25 di 252

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 27 di 252

27/03/2012

sarebbe una cosa furba, ogni volta che faccio una riduzione, scrivo le operazioni con le matrici.

$A \rightarrow A'$ ridotta

$$A' = P_t(\cdots(P_2(P_1(A)))) = \underbrace{(P_t \cdot \ldots \cdot P_2 \cdot P_1)}_{P} \cdot A$$

P = prodotto di matrici invertibili. è anch'esso è invertibile (ogni operazione fatta x arrivarci è invertibile!)

P, Q, invertibili $\Rightarrow P \cdot Q$ è invertibile

$$P^{-1} \cdot P = P \cdot P^{-1} = I$$

$$Q^{-1} \cdot Q = Q \cdot Q^{-1} = I$$

$$(P \cdot Q)(P^{-1} \cdot Q^{-1})$$

NON vale la COMMUTATIVA! non posso portare P^{-1} vicino a P

~~Posso scrivere anche così, x fare valere l'associativa~~

$$P \cdot \underbrace{(Q \cdot Q^{-1})}_{I} P^{-1} = P \cdot I \cdot P^{-1} = P \cdot P^{-1} = I$$

l'inversa è il prodotto degli inversi in ordine scambiato.

In realtà si può anche ridurre x colonne.

1) Se una Matrix è anche ridotta x righe non lo è x forza x colonne
2) Se ridotta delle colonne, avrò un diverso spazio delle colonne
conservo soltanto sua dimensione

LE DIMENSIONI non cambiano.

Può succedere che alcune Matrici abbiano dei parametri, e non di numeri.

$$A_h = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2h & h^2 \\ h+1 & -h & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad h \in \mathbb{R}$$

incontrollato di h

questa NON è una matrice, ma famiglie di Matrix al variare di h

⚠ "matrice con parametri: SI CHIAMA FAMIGLIA di MATRICI

25

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 27 di 252

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 29 di 252

27/03/2012

nei numeri se $a=0$,

$0x=b$ $\nearrow b\neq 0$ non risolubile
$\searrow b=0$ infinite soluzioni.

idem con le matrici: A non invertibili.

o nessuna soluzione, o infinite.

$a_1x_1+a_2x_2=b$

$ax+by=c$ ← rappresenta una retta, $(a,b)\neq(0,0)$

$0x+0y=c$ se $c=0$: ∞ soluzioni: tutti i punti del piano
$c\neq 0$ soluzioni: nessuna.

28/03/2012

sistema a 2 incognite.

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

trovare (x,y) che rendono le eguaglianze.
(Punti comuni alle 2 rette)
Generalmente 1 soluzione, può succedere che non si incontrino o che siano coincidenti.

Casi problematici

① $\begin{cases} 2x+y=1 \\ 6x+3y=3 \end{cases}$ infinite soluzioni

② $\begin{cases} 2x+y=1 \\ 6x+3y=2 \end{cases}$ nessuna soluzione

③ $\begin{cases} 2x+y=1 \\ x-y=3 \end{cases}$ una soluzione.

Come capisco se 2 rette sono parallele:
prendo una retta passante × l'origine, //.

$2x+y=0$

lo leggo come Prodotto scalare di 2 vettori:

$(2,1)\cdot(x,y)=0$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 29 di 252

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 31 di 252

caso 1b) $\rho(A)$ è più basso di quel che ci aspettiamo ed anche $\rho(A,B)$ è + basso → ∞ soluzioni

caso 2: $\rho(A) \neq \rho(A,B)$: non è risolubile

caso 3: $\rho(A) = \rho(A,B)$, è grande come ci aspettiamo. 1 soluzione

se $\rho(A) = \rho(A,B)$: 1 soluzione o ∞

se $\rho(A) \neq \rho(A,B)$: nessuna soluzione.

Provo a scrivere il problema per un altro modo.

fisso ora l'attenzione nelle colonne.

$$\begin{array}{ccc} A_1 & A_2 & \\ \left(\begin{matrix} a_1 \\ a_2 \end{matrix}\right. & \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \end{matrix} & \left|\begin{matrix} c_1 \\ c_2 \end{matrix}\right) \\ A & & B \end{array}$$

posso scrivere i coefficienti con le matrici colonna

$$A_1 x + A_2 y = B$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}}$$

i coefficienti e i termini noti sono VETTORI

lavoro con coppie di numeri ⇒ $\mathbb{R}^2$

ho i vettori A_1, A_2 e B. riesco a scrivere B come C.L. di A_1 e A_2?

i vettori sono le colonne delle matrici:

la 3° colonna posso scriverla come C.L. delle prime 2?

$$B \in \mathcal{L}(A_1, A_2)?$$

Se B appartiene il sistema è risolubile, altrimenti no.

confronto i 2 spazi

$$\mathcal{L}(A_1, A_2) \subseteq \mathcal{L}(A_1, A_2, B)$$

28/03/2012

3 modi x affrontare uno sistema:

1) modo tradizionale: $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$

2) matrice globale: $\left(\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} c_1 \\ c_2 \end{matrix}\right)$

3) matrici colonne: $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$

$$A_1 x + A_2 y = B$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 31 di 252

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 33 di 252

in sintesi:

$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i \qquad i: 1-m$

1 in sistem

A) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \qquad i = 1 \dots n$

devo trovare le nuple di numeriche rendono l'equazione vera

Una soluzione non è un numero, ma una nupla (es. (x, y)).

b) Risolvo il problema in altre forme equivalenti

$$(A, B) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_n \end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow \underbrace{AX}_{(m,1)} = \underbrace{B}_{(m,1)}$

c) Altrimenti: fisso l'attenzione sulle colonne della matrice.

$$A, B \quad \left(\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}\right)$$

$A_1 \qquad A_n \qquad B$

$$\boxed{A_1x_1 + A_2x_2 + \dots + A_nx_n = B}$$

x capire se è risolubile, uso (c)

TEOREMA di ROUCHÉ-CAPELLI

(1) Il sistema è RISOLUBILE se e solo se $\rho(A) = \rho(A, B)$

(2) Se $\rho(A) = \rho(A, B) = p$

la SOLUZIONE del sistema dipende da $n-p$ parametri

31

28/03/2012

in generale i modi di scrivere un sistema:

A) $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$

$\hookrightarrow a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i \qquad i = (1, m)$

$\hookrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \qquad i(1, m)$

B) $(A, B) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$

$\hookrightarrow AX = B$

C) $A_1x_1 + A_2x_2 + \dots + A_nx_n = B_m$

Rango: numero di equazioni che non posso buttar via, che mi VINCOLA il n° di parametri che resta è n° incognite − n° di p.

p: n° delle equazioni indipendenti.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 33 di 252

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 35 di 252

Come risolvo questo sistema?

METODO di GAUSS.

Caso PARTICOLARE: A RIDOTTA per righe.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ x \\ x \\ x \end{pmatrix}}_{B}$$

è necessario che anche sia 0. se non lo è Non è RISOLUBILE.

se applico Rouché-Capelli: $\rho(A) \overset{?}{=} \rho(A|B)$ = n° di righe

$$\begin{pmatrix} \cdot & \boxed{\cdot} & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & \cdot & \boxed{\cdot} \\ \boxed{\cdot} & 0 & \boxed{0} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix}$$ ~~$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4$~~

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1$ so che $a_{12} \neq 0$

~~so che $a_{12} \neq 0$~~

$a_{21}x_1 + \dots + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2$ so che $a_{24} \neq 0$

$a_{31}x_1 + \quad + a_{33}x_3 + \quad = b_3$ so che $a_{31} \neq 0$

Si risolve il sistema a PARTIRE dal FONDO.

ricavo x_1, che è in funzione di x_3 (se $a_{33} \neq 0$, altrimenti cost.)

$x_1 = x_1(x_3)$

salgo alla funzione successiva:

$x_4 = x_4(x_1\{x_3\}) = x_4(x_3)$

ancora su:

$x_2 = x_2(x_4, x_1, x_3) = x_2(x_3)$

esempio numerico:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 + x_3 = 1 \end{cases}$$

3° riga $x_1 = -1 - x_3$

2° riga $x_4 = x_1 + 2x_3 = -1 - x_3 + 2x_3 = -1 + x_3$

1° riga $x_2 = 1 - x_1 - x_3 - x_4 = 1 + 1 + \cancel{x_3} + 1 \mp x_3 - x_3 : 3 - x_3$

$S = (-1 - x_3,\ 1 - x_3,\ x_3,\ 1 + x_3)$

33

28/03/2012

IN SINTESI:

x risolvere un SISTEMA, RIDUCO la Matrice Associata per righe e parto dal fondo.

mano a mano che scendo perdo una variabile.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 35 di 252

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 37 di 252

$E_1 \rightarrow a E_1 \quad a \neq 0$

$$(A, B) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

con le operazioni elementari mi permettono di arrivare ad una matrice ridotta.

(non mi serve la matrice B, basta la A)

facendo così posso vedere se c'è (0000|x)

2) arrivare a un sistema + risolubile ridotto per righe.

03/04/2012

osservazione sul metodo di riduzione

$AX = B$

$$(A, B) = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\quad\quad}_{A} & \underbrace{}_{B} \end{array}\right)$$

$\downarrow$ matrix ridotta

$\boxed{A' x = B'}$

Se io penso alla riduzione come prodotto di matrici

$PA = A'$ P invertibile

$PB = B'$

quindi posso leggerlo così

$(PA)X = PB$

$\downarrow$

ora dimostro che è buono così scritto

$\downarrow$

$\boxed{P(AX) = PB}$

- prendo una SOLUZIONE del Primo.

X_0 soluzione di $AX = B$ significa che $AX_0 = B$ è Vero.

se moltiplico tutto per P

$\Rightarrow P(AX_0) = PB$

quindi X_0 è sol anche del secondo sistema.

dimostro $\Leftarrow$:

Passo dal 2° sistema al primo nello stesso modo con cui passo dal 1° al secondo, sostituendo P con P^{-1}

$(P^{-1} \cdot P)(AX_0) \overset{(P^{-1})}{=} PB \Rightarrow AX_0 = B$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 37 di 252

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 39 di 252

Trovo questa Base: so che Rouché-Capelli II, $n-p=h$ parametri liberi. Immagino che la base abbia h elementi.

TEOREMA:
la dimensione dello spazio delle soluzioni di $AX=0$ è $n-p$

n° incognite — rango di A

Esempio:

4 incognite e Rango 2 : ∞^2 sol, 2 parametri

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

A

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ x_2-x_3+x_4=0 \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} x_1=-x_2-x_3-x_4=-x_3+\cancel{x_4}-x_3-\cancel{x_4}=-2x_3 \\ x_2=x_3-x_4 \end{cases}$$

la sol del sistema è $S=(-2x_3,\ x_3-x_4,\ x_3,\ x_4)$

Voglio trovare una base di questa base:
DEVO TROVARE 2 VALORI LINEARMENTE INDIPENDENTI

$S_3\ (-2,\ 1,\ 1,\ 0)$

do a $x_3=1$ $x_4=0$

ora do a $x_3=0$ $x_4=1$

$S_4=(0,\ -1,\ 0,\ 1)$

SARANNO LINEARMENTE indipendenti: se vedo la MATRICE (c'è un -2 con 0 sotto)

CONTROLLO, ora; che sia un SISTEMA di GENERATORI?

$s=(-2x_3,\ x_3-x_4,\ x_3,\ x_4)$

$s_3=(-2,\ 1,\ 1,\ 0)$

$s_4=(0,\ -1,\ 0,\ 1)$

$\hookrightarrow s=x_3s_3+x_4s_4=(\ldots,\ \ldots,\ x_3,\ x_4)$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 39 di 252

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 41 di 252

$AX=B$, $AX=0$

- SOLUZIONE PARTICOLARE di $AX=B \rightarrow Y_0$

$AY_0=B$ è vero. • Soluzione generale di $AX=0$: S

↳ $AS=0$ vero (S è funzione di $n-p$ parametri)

⇓ TEOREMA

$S+Y_0$ è la SOLUZIONE GENERALE di $AX=B$

DIMOSTRAZIONE

(1) verifico che $S+Y_0$ è soluzione di $AX=B$

$$A(S+Y_0) = \underbrace{AS}_{\substack{0 \\ \text{l'ho supposto} \\ AS=0}} + \underbrace{AY_0}_{\substack{B \\ \text{l'altro supposto}}} = B$$

(2) TUTTE le soluzioni di $AX=B$ si ottengono così.

Sia T una soluzione di $AX=B$

cioè $\boxed{AT=B \text{ è vero}}$

voglio provedere che ~~...~~
esiste una soluzione S_0 di $AX=0$
per cui $T=S_0+Y_0$

cioè che $T-Y_0$ è soluzione di $AX=0$

$A(T-Y_0)=AT-AY_0=B-B=0$

QUINDI:

Ker Sol dell'omogeneo che è un sottospazio,

C.L. di alcune soluzioni → ci sommo un vettore.

$ex=b$ $\qquad \underset{(m,n)}{A}\underset{(n,h)}{X}=\underset{(m,h)}{B}$

$$X=\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_h \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_m \end{pmatrix}$$

$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{1n}x_n=B_1$ ~~...~~

$\vdots$

$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n=B_m$

Vettori incognite: le righe del sistema

SOLUZIONE PARTICOLARE: quella che mi scelgo io

39

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 41 di 252

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 43 di 252

1) CONDIZIONE di RISOLUBILITÀ:

$\rho(A) = \rho(A, B)$

2) n° di parametri VETTORIALI : $n - \rho(A)$

le incognite sono vettori ad h componenti.

→ x passare a parametri numerici, ne avrò $n \cdot h$

Questo ci serve per calcolare l' INVERSA di una MATRICE.

Si cerca SOLO l'INVERSA DESTRA:

$$A_{m,n} \, X_{n,m} = I_{m,m}$$

$$(A, I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & & 0 & 1 \cdots & 0 \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & 0 & 0 \cdots & 1 \end{array}\right) \quad m \leq n$$

Cond. Risolubilità: $\rho(A) = \underset{\overset{\|}{m}}{\rho(A, I)}$

NON CI SONO PROBLEMI: I: è già ridotta per righe, ed avrà rango m

QUINDI: x che sia INVERTIBILE $\rho(A)$ è uguale al n° di righe.
(ovvero A è ridotta per righe)

Una matrice come questa, $A_{4,3}$, NON è INVERTIBILE a DX (ha + righe che colonne)

INVERSA SINISTRA

$$Y_{n,m} \, A_{m,n} = I_{n,n}$$

Si crea un problema con i ranghi: uso le TRASPOSTE

$${}^t(Y_{n,m} \cdot A_{mn}) = {}^t(I_{n,n})$$

↓

$$\underbrace{{}^tA_{mn}}_{A'_{nm}} \cdot \underbrace{{}^tY_{nm}}_{X_{mn}} = I_{nn} \qquad \text{deve accadere } n \leq m$$

Le uniche matrici che hanno un inversa dx e sx, sono le MATRICI QUADRATE.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 43 di 252

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 45 di 252

SISTEMA 3×3

Tre piani nello spazio si incontrano in 1 e 1 solo punto?

Come nasce sto determinante

Esempio geometrico

$\overline{v}_1 = a_{11}\overline{i} + a_{12}\overline{j}$
$\overline{v}_2 = a_{21}\overline{i} + a_{22}\overline{j}$

Voglio l'area del parallelogramma

$A = |\overline{v}_1 \times \overline{v}_2| = (a_{11}\overline{i} + a_{12}\overline{j}) \times (a_{21}\overline{i} + a_{22}\overline{j})$

$= |a_{11}a_{21}\underbrace{(\overline{i}\times\overline{i})}_{0} + a_{11}a_{22}(i\times j) + a_{12}a_{21}\underbrace{(j\times i)}_{-k} + a_{12}a_{22}\underbrace{(j\times j)}_{0}|$

$= a_{11}a_{22}\vec{k} - a_{12}a_{21}\vec{k}$

$= \underbrace{|a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}|}_{\text{determinante}}$

ALTRO sig. di DETERMINANTE: è l'area inclusa fra i due vettori.

Per le 3×3: Volume del tetraedro generato dai 3 vettori.

PROPRIETÀ del DETERMINANTE

① det di $I = 1$ $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

② se $A = \begin{pmatrix}R_1\\R_2\end{pmatrix}$ e $A' = \begin{pmatrix}R_2\\R_1\end{pmatrix}$

qual è il rapporto fra determinanti

$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

dove c'è 1 metto 2, dove c'è 2 metto 1

$\det A' = a_{21}a_{12} - a_{22}a_{11} = -\det A$

$\boxed{\det A' = -\det A}$

⇒ CONSEGUENZA

se $R_1 = R_2$, allora $\det A = 0$

$A = \begin{pmatrix}R_1\\R_1\end{pmatrix}$ $A' = \begin{pmatrix}R_1\\R_1\end{pmatrix}$ $\Rightarrow \underbrace{\det(A)}_{x} = -\det(A') = \underbrace{-\det(A)}_{-x}$

$2x = 0 \Rightarrow x = 0$

43

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 45 di 252

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 47 di 252

$(x-1)\det A = 0$

- $\det : \mathbb{R}^{2,2} \to \mathbb{R}$

funzione che soddisfa le condizioni ①②③(a,b,c)

ORA CONSIDERO una qualunque f ~~[illegible]~~

$f\ \mathbb{R}^{2,2} \to \mathbb{R}$

che soddisfi queste proprietà (1,2,3)

NON NE ESISTONO! solo il determinante gode delle proprietà.

Anche se io me la creo, non ci sono altre possibilità che queste.

$f:\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

1° caso: se ha una riga nulla:
dalle proprietà:
$f = 0$

dalle condizioni $f(A) = 0 \Rightarrow = \det A$

2° caso: sia $R_1 \neq (0,0)$: per esempio $a_{11} \neq 0$

$\Rightarrow$ si riduce

$$A' \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 - \frac{R_1}{a_{11}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} - \frac{a_{12}a_{22}}{a_{11}} \end{pmatrix}$$

$f(A) = f(A')$ per le proprietà.

$$= \frac{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}}{a_{11}} f\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$R_1 \longrightarrow R_1 - a_{12}R_2$

$$\frac{\det A}{a_{11}} f\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{\det A}{a_{11}} \cdot a_{11} \underbrace{f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{1}$$

$= \det A$. LO È PER FORZA.

CASO GENERALE

$f =$ con Determinante vale anche per Matrici generiche

$\det : \mathbb{K}^{n,n} \to \mathbb{K}$

TEOREMA Può esistere una sola funzione

$f\ \mathbb{K}^{n,n} \to \mathbb{K}$ che soddisfa le

condizioni ①,②③

⚠ SE SCAMBIO RIGHE con COLONNE, il determinante non cambia

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 47 di 252

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 49 di 252

prendo una 3x3

I MINORI DI ORDINE n-1

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = +a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$= \det A$

vale lo stesso, se partissi dalla 2° riga, cambio ~~la regola~~ SOLO IL SEGNO

(però guardare la somma degli indici riga-colonna)

MINORE: $|\ \ |$ di una matrice quadrata.

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$: minore di ordine 1.

~~COMPL~~ $\quad a_{11}\underbrace{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}_{\text{COMPLEMENTO ALGEBRICO di } A_1}$

$\bar{A}_{ij}$ = determinante ottenuto cancellando la riga iesima e la colonna jesima.

$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \bar{A}_{ij}$ = Complemento ALGEBRICO di posto i, j

MINORE: no segno.

IN GENERALE.

3x3

$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} =$ ← 1° riga

$= a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}$ ← 2° riga

$\det A = \sum_{i=1}^{3} a_{1i}A_{1i}$

uso la riga jesima: $\det A = \sum_{i=1}^{3} a_{ji}A_{ji} \quad \forall j$

In ASSOLUTO (se non 3x3, ma nxn)

$$\boxed{\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}A_{ji} \qquad \forall j \ (j = 1, \dots, n)}$$

Regola di Laplace.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 49 di 252

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 51 di 252

Inverso di una matrice quadrata:

$AX = I$

TEOREMA A è invertibile se e solo se $\det \neq 0$

① Dim: A è invertibile $\Rightarrow \det A \neq 0$

Uso il teorema di Binet.

$\exists A^{-1} \mid A(A^{-1}) = I$

$\det A(A^{-1}) = \det I$ [stessa matrice, stesso det.]

$\det A \cdot \det A^{-1} = 1$

quindi lo 0 non è accettabile, non posso moltiplicare qualcosa per 0 ed ottenere 1

inoltre si scopre che $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$

② $\det A \neq 0 \Rightarrow A$ è invertibile

uso una 3×3

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

me lo creo io

I regola Laplace — Complementi Algebrici Righe ↔ Colonne

ora faccio $A \cdot B = \begin{pmatrix} \det A & 0 & 0 \\ 0 & \det A & 0 \\ 0 & 0 & \det A \end{pmatrix}$ ← II th Laplace

$= \det A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (\det A) \cdot I$

posso dividere per $\det A$ (dato che $\neq 0$)

$\dfrac{AB}{\det A} = I \Rightarrow A\left(\dfrac{B}{\det A}\right) = I$

↑ è l'inverso!!

RIASSUNTO SULLE MATRICI INVERTIBILI

Sono fatti equivalenti $A \in K^{n,n}$

se vale 1, VALGONO TUTTI!!

① $\rho(A) < n$

② le righe di A sono linearmente dipendenti

③ le colonne di A sono linearmente dipendenti

④ $AX = O$ ha soluzioni non nulle

⑤ A non è invertibile

⑥ $\det A \neq 0$.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 51 di 252

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 53 di 252

2° e 3°: det = 0
1° e 4° det ≠ 0
4° e 5° det = 0

alcuni det sono 0, altri no.

Alcuni non lo sono. Almeno una sottomatrice ha det ≠ 0.

prendo B:

2° e 4° colonna: det = 0: ma questo vale per qualunque coppia di colonne scelgo.

per A:

∃ un minore di ordine 2 non nullo

per B:

Tutti i minori di ordine 2 sono nulli.

per ora solo freccia ⇒ $\varrho(B) = 1$ ⇒

per fare ⇐, ∃ un MINORE di ordine 1 non nullo.

TEOREMA.

Sono fatti equivalenti $A \in \mathbb{K}^{mn}$

SONO FATTI EQUIVALENTI = se vale 1, valgono tutti

① $\varrho(A) = p$

② ∃ un minore di ordine p non nullo e tutti i minori di ordine > p sono nulli

③ ∃ un minore di ordine p non nullo e tutti i minori di ordine p+1 che lo contengono sono nulli.

però sembrare strano che ③ ⇒ ②.

Funzioni di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$:

- continue (se prendo punti vicini, trovo f(x) vicine)
- derivabili
- integrabili

proprietà TOPOLOGICHE di $\mathbb{R}$.

$V \xrightarrow{f} W$ $\mathbb{K}$

cerco funzioni che soddisfino le proprietà del campo vettoriale.

f è LINEARE se ha un buon comportamento

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 53 di 252

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 55 di 252

$C^\infty(\mathbb{R})$: ho dimensioni infinite
ma noi studiamo quelli finiti.

es. 2

$V = C(\mathbb{R}) \qquad W = \mathbb{R}$

$$f \in V \xrightarrow{I} \int_a^b f(x)\,dx \in \mathbb{R}$$

$$g \in V \longrightarrow \int_a^b g(x)\,dx \in \mathbb{R}$$

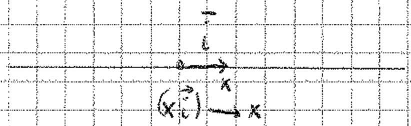
$$(f+g) \longmapsto \int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

quindi anche I è LINEARE.

ESEMPIO IMPORTANTE

$V = W = \mathbb{R}$

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$



$f(x)$

come deve essere fatta x essere lineare?

$$f(x) = f(x \cdot 1) = x \cdot \boxed{f(1)}$$

Base $\vec{i}$ dello spazio.

se so come opera su 1, (ovvero $\vec{i}$) posso capire come opera su tutti

es. $f(1) = 3$

$f(x) = 3x$

$f(1) = a \qquad \boxed{f(x) = ax}$

UNICHE funzioni LINEARI di $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

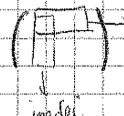
bisogna verificare, però che verifichi ① e ②

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 55 di 252

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 57 di 252

l'Im: è fatto da un polinomio o più (dipende R^n), SEMPRE di PRIMO GRADO.

QUESTE FUNZIONI sono associate alle Matrici,



RIGHE: coefficienti dei polinomi che compongono la funzione,

COLONNE: indici vettori della Base

$$\underbrace{x=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\text{sorgente}} \qquad \underbrace{f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \end{pmatrix}}_{\text{immagine } X'}$$

Posso fare così:

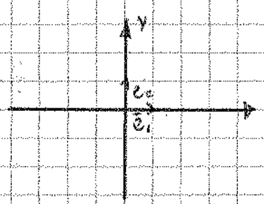
$$X' = AX$$

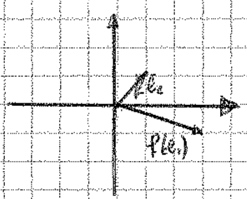
- Ora, caso generale: che capita?
- che succede se prendo un'altra base?

Esempio:

$f\,e_1 = (3,-1)$
$f\,e_2 = (1,1)$

R^2 (Partenza) R^2 (Arrivo)



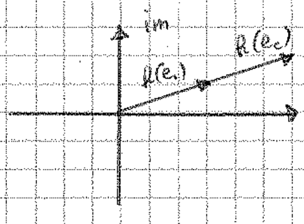


se devo fare $f(3,4)$: moltiplico

è SURIETTIVA, perché descrive tutto il piano di Arrivo. Succede perché $f(e_1)$ e $f(e_2)$ sono LIN INDIPENDENTI

esempio 2:

$f(e_1) = (3,-1)$
$f(e_2) = (6,-2)$



$x f(\bar{e}_1) + y(f(\bar{e}_2))$ → NON si riesce ad uscire da questa retta.

1° esempio:

$A\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \rho(A) = 2$

2° esempio

$A\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \rho(A) = 1$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 57 di 252

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 59 di 252

!! DEFINISCO

$$(f+g)(\bar{v}) \overset{def}{=} f(\bar{v}) + g(\bar{v})$$

Il risultato di questa somma è ancora una Funzione LINEARE

TEOREMA

f, g lineari $\Rightarrow$ $f+g$ lineare.

IPOTESI:

f e g conservano la somma

TESI

$f+g$ conserva la somma.

DIM.

$$\underbrace{(f+g)}_{h}(\bar{u}+\bar{v}) \overset{?}{=} (f+g)(\bar{u}) + (f+g)(\bar{v})$$

è una funzione la chiamo h

applico la DEF di somma

sono in W vale la proprietà associativa

(1° m) $f(\bar{u}+\bar{v}) + g(\bar{u}+\bar{v}) = f(\bar{u}) + f(\bar{v}) + g(\bar{u}) + g(\bar{v})$

APPLICO DEF. somma

(2° m) $f(\bar{u}) + g(\bar{u}) + f(\bar{v}) + g(\bar{v})$

(1° m) e (2° m) sono uguali: W è spazio vettoriale e vale la commutativa

---

3) Prodotto di funzioni

$a \in \mathbb{K}$

$$(af)(\bar{v}) \overset{def}{=} a\, f(\bar{v})$$

af è lineare

$(\mathcal{L}(V,W), +, \cdot)$

QUESTO INSIEME È UNO SPAZIO VETTORIALE verifica le 8 proprietà

1) $\bar{0}$ rispetto alla somma

esempio

$R^2 \to R^2$

$\mathcal{L}(R^2, R^2) \longleftrightarrow R^{2,2}$ (ad ogni funzione associo una matrice)

Spazi di dimensione finita $\to$ insieme di Matrici (con le loro proprietà)

CASO PARTICOLARE (lo vedremo in altri anni)

$\mathcal{L}(V, \mathbb{K})$, $\mathbb{K}$: campo di V.

funzione di V, che porta al suo campo.

teoremi con "Verificare che capita questo" non sono difficili.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 59 di 252

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 61 di 252

(b) la SOMMA appartiene all'Im f?

$\bar{w}_1, \bar{w}_2 \in Im f \Rightarrow \bar{w}_1 + \bar{w}_2 \in Im f$

$\exists(v_1)\ \bar{w}_1 = f(\bar{v}_1)$

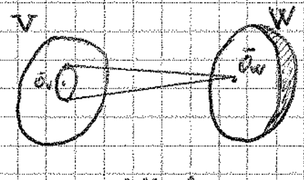
$\exists(v_2)\ \bar{w}_2 = f(v_2)$

$\Rightarrow \bar{w}_1 + \bar{w}_2 = f(\bar{v}_1) + f(\bar{v}_2) = f(\bar{v}_1 + \bar{v}_2)$ Dato che è lineare.

(c) $\bar{w} \in Im f \overset{?}{\Rightarrow} a\bar{w} \in Im f$

$\bar{w} = f(\bar{v}) \Rightarrow a\bar{w} = a f(\bar{v}) = f(a\bar{v})$

le fette si assomigliano:



NUCLEO della funzione LINEARE (quella che CONTIENE $\bar{O}_V$)

KERNEL in inglese, o KER f

Se so com'è fatta, descrivo tutte le altre fibre

$f^{-1}(\bar{o}_w) = \ker f$ è un sottospazio di V

1. $\bar{o} \in \ker f$
2. $\bar{v}_1, \bar{v}_2 \in \ker f \overset{?}{\Rightarrow} (v_1 + v_2) \in \ker f$

   ovvero hanno immagine 0?

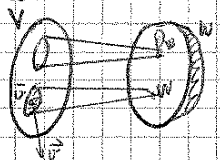
   $f(\bar{v}_1) = \bar{o}_w$, $f(\bar{v}_2) = \bar{o}_w$

   $f(\bar{v}_1 + \bar{v}_2) = f(\bar{v}_1) + f(\bar{v}_2) = \bar{o}_w + \bar{o}_w = \bar{o}_w$
3. $\bar{v}_1 \in \ker f \overset{?}{\Rightarrow} a\bar{v}_1 \in \ker f$

   $f(\bar{v}) = \bar{o}_w$

   $f(a\bar{v}) = a f(\bar{v}) = a\bar{o}_w = \bar{o}_w$

Prendo un altro dentro di W, e vedo la sua FIBRA



$\bar{v} \in f^{-1}(\bar{w})$ $\bar{w} = \bar{o}_w$

$f(\bar{v}) = \bar{w}$

Se a $\bar{v}$ SOMMO TUTTI gli elementi del KER, che succede?

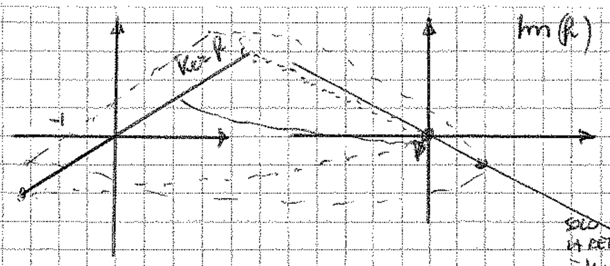
$\bar{k} \in \ker f$ e faccio $f(\bar{v} + \bar{k}) = f(\bar{v}) + f(\bar{k})$
$= \bar{w} + \bar{o}_w = \bar{w}$

Le TROVO TUTTE? Sia $\bar{u}$ un elemento qualunque di $f^{-1}(\bar{w})$

$f(\bar{u}) = \bar{w}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 61 di 252

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 63 di 252



SOLO LA RETTA è Im (vedi prima)

ora cerco tutti i punti che vanno su (3,1)

$f^{-1}(3,1)$

$$\begin{cases} -3x+6y=3 \\ -x+2y=1 \end{cases} \to \text{Retta delle soluzioni } -x+2y=1$$

---

le funzioni BIUNIVOCHE e LINEARI sono chiamate ISOMORFISMI

DEFINIZIONE

f LINEARE, INIETTIVA, SURIETTIVA = ISOMORFISMO

Oss. Si fissa l'attenzione sulle PROPRIETÀ dell'ISOMORFISMO.

Dobbiamo cercare spazi isomorfi. es. R^n è isomorfo quando noi associamo ad ogni VETTORE le sue componenti
BIUNIVOCA (ad ogni gruppo di coordinate un vettore, ad ogni vettore le sue coordinate)

$V \xrightarrow{f} W$

se V è un insieme libero, anche W è libero?

se ho generatori di V, Im è generatore di W?

CONSERVA le sue proprietà?

① $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$ è un INSIEME LIBERO in V

$f(\vec{v}_1), \ldots, f(\vec{v}_n)$ è un insieme libero di W?

- f è lineare.

No, se è solo lineare no (ad es. $V \to \vec{0}_W$)

Mi servono Altre proprietà.

Magari con un Nucleo = PUNTO, cioè se è iniettiva, va bene?

- f LINEARE ed INIETTIVA

$a_1 f(\vec{v}_1) + a_2 f(\vec{v}_2) + \ldots + a_n f(\vec{v}_n) = \vec{0}_W$

$\Rightarrow a_1 = a_2 = a_n = 0$

$f(a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \ldots + a_n\vec{v}_n) = \vec{0}_W$

per l'INIETTIVITÀ, l'unico modo x ottenere

$\vec{0}_W$ è QUESTO: $a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \ldots + a_n\vec{v}_n = \vec{0}$

$\Rightarrow a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$

OCCHIO che parte dalla TESI e raggiunge l'ipotesi

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 63 di 252

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 65 di 252

Identificare una funzione lineare con MATRICI

$f \; V_n \to W_m \quad \mathbb{K}$

fisso 2 basi, una in V ed una in W.

$\bar{B} = (\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n)$ Base di V $\qquad B' = (b'_1, \dots, b'_n)$ Base di W

esempio: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$B = B' = (\underset{(1,0)}{\bar{e}_1}, \underset{(0,1)}{\bar{e}_2})$

Identifico ogni vettore con le sue componenti

$\bar{v} = x_1 \bar{b}_1 + x_2 \bar{b}_2 + \dots + x_n \bar{b}_n \leftrightarrow (x_1, \dots, x_n)$

$V \simeq \mathbb{K}^n$

Dato che la funzione è lineare:

$f(\bar{v}) = f(x_1 \bar{b}_1 + \dots + x_n \bar{b}_n) =$

$x_1 \underbrace{\boxed{f(\bar{b}_1)}}_{\bar{W}_1} + x_2 \underbrace{\boxed{f(\bar{b}_2)}}_{\bar{W}_2} + \dots + x_n \underbrace{\boxed{f(\bar{b}_n)}}_{\bar{W}_n}$

⇒ [MI BASTA SAPERE come funziona per la BASE.]

In $\bar{v}$: com. lin con più termini coeff. della base.

$f \bar{b}_1 = w_1$

$$\boxed{f(\bar{v}) = x_1 \bar{w}_1 + \dots + x_n \bar{w}_n}$$

tutte le funzioni con questa struttura sono LINEARI.

controllo → che siano lineari

Fin qui usato che V ha dimens. finita.

ora W ha dim. finita:

$\cancel{W_1}$ ... $\cancel{W_n}$

$\bar{W}_1 = f(\bar{b}_1) = a_{11} \bar{b}'_1 + a_{21} \bar{b}'_2 + \dots a_{m1} \bar{b}'_m$ $\qquad a_{xy}$ ← lavoro con W_Y; ↑ elemento della base scelta

$\bar{W}_2 = f(\bar{b}_2) = a_{12} \bar{b}'_1 + a_{22} \bar{b}'_2 + \dots + a_{m2} \bar{b}'_m$

$\vdots$

$\bar{W}_i = f(\bar{b}_i) = a_{1i} \bar{b}'_1 + a_{2i} \bar{b}'_2 + \dots a_{ji} \bar{b}'_j \dots a_{mi} \bar{b}_n$

$\vdots$

$\bar{W}_n = f(\bar{b}_n)$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 65 di 252

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 67 di 252

A ciò che ho trovato: serve x APPROSSIMARE le funzioni a PIÙ VARIABILI (con TAYLOR)

$$x'_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ki} x_i$$

come lo interpreto

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_k \\ \vdots \\ x'_m \end{pmatrix}}_{f(\bar v)} = \underset{(m,n)}{A} \cdot \underbrace{\overset{(n,1)}{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}}_{\bar v}$$

ricordo che $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & \vdots \\ \boxed{a_{k1} \cdots a_{kn}} & & \\ \vdots & & \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{pmatrix}$ tutto per $x_1, \dots x_n$

Quindi:

$$\bar v \leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = X \qquad f(\bar v) = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_m \end{pmatrix} = x'$$

$$X = A X'$$

Se svolgo (x capire meglio)

$$f(x_1 \bar b_1 + \dots + x_n \bar b_n) = \boxed{f(x_1, \dots x_n)}$$

$$\Downarrow$$

$$(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n)\bar b'_1 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots a_{2n}x_n)\bar b'_2 + \dots + (a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n)\bar b'_m =$$

$$\overset{\sim}{=} \boxed{(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots a_{1n}x_n,\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n, \dots a_{m1}x_1 + \dots a_{mn}x_n)}$$

$$f: k^n \to k^m$$

~~Ufficio~~ Esercizi ~~Normalmente~~: Studiare una funzione lineare.

- → è LINEARE: che struttura ha?
- → Matrice
- → Trovarne il nucleo
- → Spazio immagine (SURIETTIVA)
- → Fibre (INIETTIVA)

63

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 67 di 252

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 69 di 252

C'è UN FORTE legame fra $\rho(A)$ e dim Ker(f)

- DIMENSIONE dell' IMMAGINE (ovvero è suriettiva?)

dim Im (f) ?

se prendo un insieme di V e ne faccio im V, i vettori in W mi generano lo Spazio Immagine

prendo $e \in V$

Sist. di GENERATORI:

$f(\bar{e}_1), f(\bar{e}_2), f(\bar{e}_3)$ — Non sono una base (già x il fatto che sono troppi)

dim: o è 2, o è 0.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \leftarrow \text{HA RANGO 2}$$

quindi dim Im f $= \rho(A) = 2$

→ è SURIETTIVA

IN GENERALE

$f: V_n \to W_m$ $\quad M_f^{BB'} = A =$

$$\begin{array}{ccc} (B & \to & B') \\ \downarrow & & \downarrow \\ K^n & & K^m \end{array}$$

1: Riconduco alle BASI, e faccio la Matrice

$f: K^n \to K^m$

Ker f = ?

2: Cerco ker f.

$AX = 0$

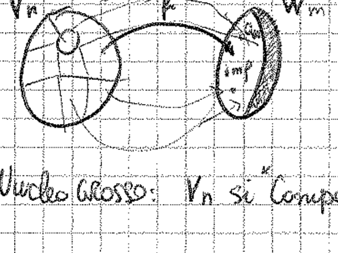
Im f = Spazio delle colonne $C_1, \dots, C_n$

dim Ker f = $n - \rho(A)$

dim Im f = $\rho(A)$

$$\boxed{\dim \ker f = \underbrace{n}_{\text{dimensione spazio di partenza}} - \dim \operatorname{Im} f}$$

Relazione utile!



Nucleo GROSSO: V_n si "Compatta" in W_m

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 69 di 252

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 71 di 252

ma ho troppi vettori nella base: parto da R^2

- o una è cl delle altre
- o è Impossibile.

$f(1,-1)$ ($\bar{b}_1$) $= (1,0,-1)$ → Base di R^2: BASTANO
$f(2,1)$ ($\bar{b}_2$) $= (1,1,1)$
$f(-1,3) = (0,1,0)$ ← poi vedo se questo rispecchia l'immagine che cerco

Posso anche fare così: se scrivo $(-1,3)$ come C.l. dei primi 2, vedo se la sua f è la stessa C.l.

$$(-1,3) = u_1(1,-1) + u_2(2,1)$$

$$\begin{cases} u_1 + 2u_2 = -1 \\ -u_1 + u_2 = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} u_1 = -\frac{7}{3} \\ u_2 = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$// \quad 3u_2 = 2$

quindi $(-1,3) = -\frac{7}{3}(\vec{b}_1) + \frac{2}{3}(\vec{b}_2)$

$$f((-1,3)) = -\frac{7}{3} f\bar{b}_1 + \frac{2}{3} f\bar{b}_2 = -\frac{7}{3}(1,0,-1) + \frac{2}{3}(1,1,1) = \left(-\frac{7}{3}+\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \ldots\right)$$

↑ Non è $(0,1,0)$

Non esiste FUNZIONE LINEARE che soddisfi le condizioni.

(Se fosse stato C.l. è una condizione inutile.

Tolgo la 3° condizione

$f(1,-1) = (1,0,-1)$
$f(2,1) = (1,1,1)$

Descrivo come opera una funzione: (data una coppia (x,y), come opera.

$f(x,y) \stackrel{?}{=}$

x,y: c.l di $(\bar{b}_1)$ e $\bar{b}_2$

$$\begin{cases} u_1 + 2u_2 = x \\ -u_1 + u_2 = y \end{cases} \qquad u_2 = \frac{x+y}{3} \quad u_1 = \frac{x-2y}{3}$$

$$f(x,y) = \frac{x-2y}{3}(f(\bar{b}_1)) + \frac{x+y}{3} f(\bar{b}_2) = \left(\frac{x-2y+x+y}{3}, \frac{x+y}{3}, \frac{-x+2y+x+y}{3}\right)$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 71 di 252

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 73 di 252

$f(\vec{b}_1) \Rightarrow$ la prima colonna della matrice

$(a_{11}, a_{21}, \dots a_{m1})$

$g(\vec{b}_1) \rightarrow (b_{11}, b_{21}, \dots, b_{m1})$

$$M_{(g+f)}^{BB'} \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \\ a_{21}+b_{21} & \text{eccetera} \\ \vdots & \\ a_{m1}+b_{m1} & \end{pmatrix}$$

$$h_{f+g}(\vec{b}_1) \overset{\text{def}}{=} f(\vec{b}_1)+g(\vec{b}_1) = (a_{11}+b_{11}, \dots, a_{m1}+b_{m1})$$

x def.

Quindi la SOMMA di due funzioni lineari è la Somma di Matrici

PRODOTTO →

Altro controllo

$$\overset{n}{V} \xrightarrow{f} \overset{m}{W} \xrightarrow{g} \overset{p}{Z}$$

$B \quad B' \quad B''$, $\underbrace{\qquad}_{g\circ f}$

se f, g lineari $\Rightarrow g\circ f$ LINEARE

$(g\circ f)(\bar{v}) = f(g(\bar{v}))$

$M_f^{BB'} = A_{mn}$

$M_g^{B'B''} = B_{pm}$

$M_{g\circ f}^{BB''} = C_{pn}$

che relazione c'è fra C ed A, B?

$C = BA$ (! occhio all'ordine)

te ne ricordi con n° righe e colonne

DIMOSTRAZIONE

: partire dal prodotto di Matrici è scomodo:

parto da $(g\circ f)$.

la Prima colonna di C, viene fuori proprio dalla composizione di B e A.

$$C \overset{?}{=} B\cdot A = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & & b_{2m} \\ \vdots & & \\ b_{p1} & & b_{pm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} c_{11} \\ \vdots \\ c_{p1} \end{matrix}} & \dots & \begin{matrix} c_{1n} \\ \vdots \\ c_{pn} \end{matrix} \end{pmatrix}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 73 di 252

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 75 di 252

27/04/2012

CAMBIAMENTI di BASE

V_n $\mathbb{K}$

$E = (\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$ ← Base di V_n

$\bar{v} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + \dots + x_n\bar{e}_n \leftrightarrow X\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Ma se devo cambiare base, trovando altri n vettori lin. ind.

$F = (\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n)$ ← Nuova Base di V

$\bar{f}_i \in \mathcal{L}(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$

$f_1 = p_{11}\bar{e}_1 + p_{21}\bar{e}_2 + \dots + p_{n1}\bar{e}_n$

$f_2 = p_{12}\bar{e}_1 + p_{22}\bar{e}_2 + \dots + p_{n2}e_n$

$\vdots$

$f_n = p_{1n}\bar{e}_1 + \dots + p_{nn}\bar{e}_n$

Devono essere lin. indipendenti.

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

$\bar{f}_{(1)}$ $\quad f_2 \quad f_n$

Sono vettori linearmente indipendenti
→ (INVERTIBILE, RANGO max, det ≠ 0)
[Tutti modi equivalenti per dire la stessa cosa]

P: MATRICE del CAMBIO di BASE.

Se io ho un vettore nella base vecchia, voglio trovarlo nella base nuova:

$\bar{v} = y_1\bar{f}_1 + \dots + y_n\bar{f}_n \leftrightarrow Y\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

ESEMPIO

$\mathbb{R}^2$

$E = (\bar{e}_1, \bar{e}_2)$

$\bar{v} = (x_1, x_2) = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2$

nuova base

$F = (\underbrace{(1, -1)}_{f_1}, \underbrace{(2, 1)}_{f_2})$

$P = $

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 75 di 252

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 77 di 252

In GENERALE

$V \longrightarrow V \qquad i(\bar{v}) = \bar{v}$

$F \qquad E$

$$M_i^{FE} = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} i(\bar{f}_1) = \bar{f}_1 = p_{11}\bar{e}_1 + \cdots + p_{n1}\bar{e}_n \\ \vdots \\ i(\bar{f}_n) = \bar{f}_n = p_{1n}\bar{e}_1 + \cdots + p_{nn}\bar{e}_n \end{matrix}$$

ovvero che

$\bar{v} = y_1\bar{f}_1 + \cdots + y_n\bar{f}_n$

e che

$i(\bar{v}) = \cancel{\ldots}$

$i(\bar{v}) = \bar{v} = x_1\bar{e}_1 + \cdots + x_n\bar{e}_n$

la regola dice che

$X = P \cdot Y$

$Y = P^{-1} \cdot X$

● Altra INTERPRETAZIONE:

Matrice di un ISOMORFISMO.

$\varphi \; \underset{E}{V} \longrightarrow \underset{E}{V}$

$$M_\varphi^{EE} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \varphi(\bar{e}_1) = \bar{f}_1 \\ \varphi(\bar{e}_2) = \bar{f}_2 \\ \vdots \\ \varphi(\bar{e}_n) = \bar{f}_n \end{matrix}$$

Matrice che Manda $e_1 \to f_1$ ecc..., usando la STESSA BASE in PARTENZA ed in ARRIVO.

$Y = P^{-1}X$.

Ora considero il caso in cui vado in 2 spazi diversi.

$f \; \underset{E}{V} \longrightarrow \underset{F}{W} \qquad$ conosco $M_f^{EF} = A$

e $E' \qquad F'$ ← se devo cambiare BASE, sia in partenza che in arrivo

Che Relazione c'è?

conosco P e $Q \qquad$ Ottengo $M_f^{E'F'} = A'$

$$P\begin{pmatrix} E & F \\ \downarrow & \\ E' & F' \end{pmatrix}Q$$

P e Q sono le Matrici del cambio di base.

Ci conviene farlo, × rendere + comodi i calcoli. Normalmente cambiamo solo 1 delle 2 BASI.

Mi genero una MATRICE + comoda.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 77 di 252

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 79 di 252

FUNZIONE RIFLESSIVA.

Se A

SIMMETRICA:
Se A simile ad A' . A' è simile ad A

Basta trovare una Q che ne lo faccia valere:

MOLTIPLICO A SX per P e DX a P^{-1}

$$P A' P^{-1} = \cancel{(P P^{-1})} A \cancel{(P P^{-1})}$$

| funzione che VA da UNO SPAZIO a SE STESSO -
| ENDOMORFISMO

Sono funzioni descritte da MATRICI quadrate

$$\underset{E}{V} \xrightarrow{f} \underset{E}{V}$$

STUDIO sugli ENDOMORFISMI

!! Solo BASI UGUALI !!

$$M_f^{E,E} = A.$$

RIESCO A TROVARE una Matrice DIAGONALE?

questo x semplificare i prodotti, e le Potenze.

Non SEMPRE si trova. Dipende dal CAMPO su cui lavoriamo.

$$\underset{E}{V} \xrightarrow{f} \underset{E}{V} \qquad M_f^{EE} = A$$

$$V = \mathbb{R}^n$$

uso un campo reale.

SE io la DIAGONALIZZO, ma estendo ai COMPLESSI, è più facile che si possa diagonalizzare (ma non è detto)

DA QUI in POI: OCCHIO al CAMPO!!

CHe vuol dire che una matrice è Diagonale?

$$V_2 \xrightarrow{f} V_2$$

$$E = (\bar{e}_1, \bar{e}_2)$$

$$M_f^E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

ciò implica che $f(\bar{e}_1) = \bar{e}_1$
$f(\bar{e}_2) = -3\bar{e}_2$

cioè $f(\bar{e}_n)$ è MULTIPLO di $(\bar{e}_n)$.

IN GENERALE

$f\ V_n \to V_n$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 79 di 252

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 81 di 252

02/05/2012

Trovare una matrice diagonale,

1 Im del vettore va in un SUO MULTIPLO

AUTOVALORI ed AUTOVETTORI

$f: V \longrightarrow V$ endomorfismo

Def $\vec{v}$ si dice AUTOVETTORE di f quando
$f(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$

Ogni volta che nasce un Autovettore, nasce anche un numero λ

N.B: $\vec{v} = \vec{0}$ è un AUTOVETTORE per $\forall$ funzione
ed in corrispondenza $\forall \lambda$
(ma non ci serve)

Fisso l'attenzione su questi numeri λ, che mi serve.

Definizione

Diciamo che $\lambda \in \mathbb{K}$ è un AUTOVALORE per f quando:
$\exists\ \vec{v} \neq \vec{0}$ per cui $f(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$

MOLTO MOLTO importante

Errore frequente!!
Se lo dimentico, è come dire che $\forall \lambda$ vada bene!!

- PROPRIETÀ degli AUTOVALORI

TEOREMA
Sia λ un autovalore per f
L'insieme degli AUTOVETTORI associati a λ è uno SPAZIO VETTORIALE, che indichiamo con V_λ

Lo verifico:

a) $\vec{0} \in V_\lambda$ va bene sempre per $\forall \lambda$.

b) Chiuso risp. alla somma:
se $\bar{v}_1 \in V_\lambda$ e $\bar{v}_2 \in V_\lambda \Rightarrow \bar{v}_1 + \bar{v}_2 \in V_\lambda$

$f(\bar{v}_1) = \lambda \bar{v}_1$, $f(\bar{v}_2) = \lambda \bar{v}_2 \Rightarrow f(\bar{v}_1 + \bar{v}_2) =$
$f(\bar{v}_1) + f(\bar{v}_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2 = \lambda(\bar{v}_1 + \bar{v}_2)$

c) Da verificare
se $\bar{v} \in V_\lambda \Rightarrow a \cdot \bar{v} \in V_\lambda$

$f(\bar{v}) = \lambda v$ ~~allora~~ $f(a\bar{v}) = a f(v)$
$= a \cdot \lambda v = \lambda \cdot (a\bar{v})$

Dim V_1 va bene in pervade.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 81 di 252

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 83 di 252

f non iniettiva $\Leftrightarrow \ker f \neq \{0\}$

$\Leftrightarrow \lambda = 0$ è un Autovalore con autospazio
$V_0 = \ker f$

! Altro errore frequente:
"lo zero non può essere un Autovalore"
in realtà lo È SEMPRE $\Leftrightarrow$ funzione NON INIETTIVA

Altro esempio:

$f \; V \to V$

$f(\vec{v}) = \vec{v} \quad \forall \vec{v}.$

$\lambda = 1$ Autovalore

$V_1 = V$ Autospazio di 1.

Esempio + complesso, da Analisi.
(è l'unico esempio di dimensione infinita).

$V = C^{\infty}(\mathbb{R})$

$C^{\infty}(\mathbb{R}) \xrightarrow{D} C^{\infty}(\mathbb{R})$

funzione $f \longrightarrow f'$ è un endomorfismo, sempre nel suo stesso spazio.

la domanda è:

Quali sono i NUMERI REALI λ per i quali esiste una funzione Non identicamente nulla (ovvero non f(x) delle x) soddisfacente la relazione.

$f' = \lambda f \quad ?$

$\hookrightarrow \; f(x) = k e^{\lambda x} \quad \forall k \in \mathbb{R}$

TUTTI i Numeri REALI sono AUTOVALORI (per $\forall \lambda$ funziona!!)

fisso un λ: tutte le funzioni multiple di $e^{\lambda x}$ sono valide:

AUTOSPAZIO di dimensione 1:
$k e^{\lambda x}$

Noi troveremo sempre, a parte in questo caso, FINITI Autovalori.

Altra PROPRIETÀ che vale per spazi finiti ed Infiniti.
Come sono disposti questi Autospazi al variare di λ?
in particolare: Se li Interseco, ho solo $\vec{v} = \vec{0}$, oppure altro? se $\vec{0}$: somma diretta.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 83 di 252

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 85 di 252

$f(\bar{v}_i) = a_1 f(\bar{v}_1) + a_2 f(v_2) + \dots + a_{i-1} f(v_{i-1})$ ← xchè è una funzione lineare.

APPLICO gli Autovalori:

$\lambda \bar{v}_i = a_1 \lambda_1 \bar{v}_1 + a_2 \lambda_2 \bar{v}_2 + \dots + \lambda_{i-1} a_{i-1} \bar{v}_{i-1}$

Riprendo

$v_i = a_1 \bar{v}_1 + \dots + a_{i-1} \bar{v}_{i-1}$

e sostituisco v_i

$\lambda_i (a_1 \bar{v}_1 + a_2 \bar{v}_2 + \dots + a_{i-1} \bar{v}_{i-1}) = a_1 \lambda_1 \bar{v}_1 + \dots + \lambda_i a_{i-1} \bar{v}_{i-1}$

Porto tutto a primo membro, e metto in evidenza il vettore:

$a_1 (\lambda_i - \lambda_1) \bar{v}_1 + a_2 (\lambda_i - \lambda_2) \bar{v}_2 + \dots + a_{i-1} (\lambda_i - \lambda_{i-1}) \bar{v}_{i-1} = 0$

SUCCEDE, dato che $\{v_1, \dots v_{i-1}\}$ sono indipendenti, che l'uguaglianza sia vera $\Leftrightarrow$ tutti i coeff. sono zeri.

$a_1 (\lambda_i - \lambda_1) = 0$
$a_2 (\lambda_i - \lambda_2) = 0$
$\vdots$
$a_{i-1} (\lambda_i - \lambda_{i-1}) = 0$

Ma dato che $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_{i-1}$ sono **DISTINTI**, deve essere che le parentesi $\neq 0$.

$\Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_{i-1} = 0$

$\Downarrow$

$\vec{v}_i = 0 \bar{v}_1 + \dots 0_{i-1} \bar{v}_{i-1} = \vec{0}$

Che è ASSURDO.

Ora posso

DIMOSTRARE IL TEOREMA

La somma è diretta se e solo se posso scrivere il VETTORE NULLO in un modo UNICO. (rimando ◀)

$\vec{0} = \underset{\in \vec{V}_{\lambda_1}}{\vec{v}_1} + \dots + \underset{\in \vec{V}_{\lambda_n}}{\vec{v}_n} \Rightarrow \vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \dots = \vec{v}_n = \vec{0}$

uso il Lemma

$\bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \bar{v}_3 = 0$ vuol dire che

$\bar{v}_2 = -\bar{v}_1 - \bar{v}_3$: LINEARMENTE DIPENDENTI (contro il lemma)

$\Rightarrow$ Solo $\bar{v}_1 = \dots = \bar{v}_n = \bar{0}$ può generare il vettore nullo

$\Rightarrow$ SOMMA DIRETTA.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 85 di 252

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 87 di 252

Dimentichiamoci della visualizzazione geometrica, e facciamo i conti.

Prima cosa da cercare: AUTOVALORI

1) Ricerca degli Autovalori.

cerco i λ per cui succede che

$\exists (x_0, y_0) \neq (0,0)$ tale che sia

$f(x_0, y_0) = \lambda (x_0, y_0)$

$\downarrow$ (ometto lo "0")

$(-y, -x) = \lambda (x, y)$

$\hookrightarrow \begin{cases} -y = \lambda x \\ -x = \lambda y \end{cases}$

trovo le soluzioni di questo sistema lineare. (Ma in realtà, x OGNI λ succede qualcosa.

è Un SISTEMA LINEARE OMOGENEO e devo vedere dare λ cosa + di 1 sol.

$\begin{cases} -y - \lambda x = 0 \\ -x - \lambda y = 0 \end{cases}$

NON DEVE AVERE SOLO la SOLUZIONI nulle, ma anche altre.

SUCCEDE quando Det $A = 0$

$$\det \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

solo x controllo

$A - \lambda I$ ottengo le stesse cose.

$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ← è un altro modo x scrivere il sistema.

$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \cdot I \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\hookrightarrow (A - \lambda I) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$

$\hookrightarrow$ è lo stesso sist. $\begin{cases} -y - \lambda x = 0 \\ -x - \lambda y = 0 \end{cases}$

$\hookrightarrow \boxed{\lambda^2 - 1 = 0}$ le radici di questo polinomio di 2° grado, sono gli Autovalori.

R^2: 2 AUTOVALORI Al Massimo

OCCHIO AL CAMPO!!

Ma Attenzione: Bisogna ricordarsi se si lavora su Reali oppure Complessi.

Quindi se avevi Auto

$\lambda^2 + 1 = 0$

e lavoro su $\mathbb{R}$: NO SOLUZIONI

su $\mathbb{C}$: 2 Soluzioni

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 87 di 252

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 89 di 252

$AX = \lambda X$ per $\forall X \neq 0$

$AX = (\lambda I) X$

$\downarrow$

$(A - \lambda I) X = 0$

$\uparrow$

Bisogna fare in modo che questa matrice non abbia rango zero.

$\det(A - \lambda I) = 0$ ← le soluzioni trovo gli autovalori.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}$$

Ottengo (già x la moltiplicaz. delle diagonale principale)

che λ^n è il grado + alto.

$$|A - \lambda I| = (-1)^n \lambda^n + p_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + p_1 \lambda + p_0$$

$P(\lambda)$

Risolvo

$P(\lambda) = 0$

In Campo Complesso

$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n)$

soluzioni di quell'equazione.

$= (\lambda - \lambda_1)^{m_1} (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \cdots (\lambda - \lambda_h)^{m_h}$

$m_1 + m_2 + \dots + m_h = n$

molteplicità delle soluzioni.

es $P(\lambda) = \lambda^4 + \dots$

$= (\lambda - 1)^2 (\lambda - 3)^2$

1 = RADICE DOPPIA

3 = RADICE DOPPIA

esempio in campo complesso

$P(\lambda) = (\lambda + i)(\lambda - i)(\lambda - 1)(\lambda - 4)$

$\lambda^2 + 1$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 89 di 252

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 91 di 252

07/05/2012

Perché la (5) è equivalente alle altre:

(5) l'endomorfismo è semplice:

(1) Tutti gli autovalori stanno in $\mathbb{R}$

(2) Dim $V_\lambda = m(\lambda)$ = molteplicità di λ come radice del polinomio $P(\lambda)$

$\rho(A - \lambda I)$

equivalenza: basta prenderne una, tutte le altre 6 sono equivalenti.

$\Rightarrow$

IPOTESI:

$\exists$ una base di Autovettori, ossia una Matrice diagonale

TESI:

la (5) è vera.

Dimostrazione:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots \\ 0 & \lambda_2 & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots \end{pmatrix}$$

λ_1 compare m_1 volte

λ_2 compare m_2 volte

$\vdots$

λ_h compare m_h volte.

Determ: T = VARIABILE del Polinomio

$$|A - TI| = (\lambda_1 - T)^{m_1} \cdot (\lambda_2 - T)^{m_2} \cdots (\lambda_h - T)^{m_h}$$

Ora ne prendo 1:

V_{λ_1} $\qquad$ $\dim V_{\lambda_1} \overset{?}{=} m_1$?

Scrivo la matrice:

$$(A - \lambda_1 I) = \begin{pmatrix} 0 \; m_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 - \lambda_1 & 0 \\ 0 & & \lambda_h - \lambda_1 \end{pmatrix}$$

è Ridotta per righe:

$\rho(A - \lambda_1 I) = n - m_1$

$\hookrightarrow \dim V_{\lambda_1} = n - (n - m_1) = m_1$

Nucleo degli Autovalori.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 91 di 252

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 93 di 252

ora ne scrivo il polinomio caratteristico

$$A - \lambda \mathbb{I} = \begin{pmatrix} \lambda-T & 0 & \vdots & x \\ 0 & \lambda-T & \vdots & \\ 0 & \vdots & \lambda-T & \\ 0 & 0 & & \ddots \end{pmatrix}$$

det. uso la prima colonna sempre e in la:

$$|A - \lambda T| = (\lambda - T)^d \, Q(T)$$

superiore o detto in la.

Succede che $m_\lambda \geq d$

xchè, metti che in $Q(T)$ trovo altri λ

ORA PARTO da una MATRICE QUADRATA

$A \in \mathbb{K}^{n,n}$ occhio che dipende dal campo.

Diagonalizzazione della matrice.

A matrice di un endomorfismo

$K^n \to K^n$

tale che $M_f^{canonica} = A$

Ora mi chiedo: è un ENDOMORFISMO SEMPLICE?

se f non è semplice, dico che A non è diagonalizzabile

Se f è semplice dico che A è diagonalizzabile

ed una Matrice diagonale di f, (cioè costruita rispetto ad una base di Autovettori) si dice DIAGONALIZZATA di A

SUPPONIAMO che A sia diagonalizzabile. Quali sono le sue diagonalizzate?

Suppongo di aver trovato

$\lambda_1 \to m_1$

$\lambda_2 \to m_2$ $\quad \Sigma m_i = n$

$\lambda_h \to m_h$

BASI ESTRATTE

$b_{11} \quad b_{m_1}$

$b_{21} \quad b$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 93 di 252

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 95 di 252

$$P(T) = \begin{vmatrix} 1-T & 3 \\ 1 & 3-T \end{vmatrix} = T^2 - 4T = T(T-4)$$

$T=0$
$T=4$ ← è Diagonalizzabile, ho 2 Autovalori semplici reali

$D_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad D_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

ma come trovo la P? quella che ha come colonne gli autovettori:

$V_0 = AX = 0 \quad x_1 + 3x_2 = 0$

$x_1 = -3x_2 \rightarrow (-3x_2, x_2) \rightarrow x_2\underbrace{(-3, 1)}_{b_1}$

$V_4 = (A-4I)X = 0 \quad \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$x_1 - x_2 = 0 \rightarrow (x, x) \rightarrow x\underbrace{(1,1)}_{b_2}$

$P = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow P^{-1}AP \stackrel{?}{=} D \xrightarrow{\text{conto}}$

b_1

$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$ Viene uguale.

$b_2 \quad b_1$

Esempio 2:

$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} \leftarrow$ è diagonalizzabile in $\mathbb{R}^2$? se no, lo considero in $\mathbb{C}$

risparmio la Teoria, e scrivo $P(T)$

$$P(T) = \begin{vmatrix} 1-T & -2 \\ 2 & 1-T \end{vmatrix} = T^2 - 2T + 5$$

$\frac{\Delta}{2} = 1 - 5 = -4$: negativo; NO SOL. REALI!!

Non Diagonalizzabile in $\mathbb{R}$!

ma in $\mathbb{C}$, se penso $A \in \mathbb{C}^{2,2}$ è diagonalizzabile in $\mathbb{C}$?

$\lambda_1 = 1+2i$ è diagonalizzabile in $\mathbb{C}$
$\lambda_2 = 1-2i$

$D = \begin{pmatrix} 1+2i & 0 \\ 0 & 1-2i \end{pmatrix}$; P la faccio a casa. $\longrightarrow$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 95 di 252

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 97 di 252

08/05/2012

R^{22} simmetrica

$$A\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}\end{pmatrix}$$

$$\det A = \underbrace{T^2 - (a_{11}+a_{22})T + a_{11}a_{22} - a_{12}^2}_{P(E)} = 0$$

$\Delta \geq 0$

Caso di det. non nullo: i 2 AUTOSPAZI sono RETTE ORTOGONALI?

$$P(T) = (T-\lambda_1)(T-\lambda_2) = T^2 - (\lambda_1+\lambda_2)T + \lambda_1\lambda_2$$

inoltre

$$\boxed{\begin{array}{l}\lambda_1+\lambda_2 = a_{11}+a_{22} \\ \lambda_1\lambda_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2\end{array}}$$

Noi sfruttiamo il fatto di somma e prodotto delle eq. di secondo grado.

$V_{\lambda_1}: |A-\lambda_1 I|x=0$

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda_1 & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda_1\end{vmatrix} x = 0$$

So che la 2ª è multipla della 1ª: ne scelgo UNA SOLA:

$(a_{11}-\lambda_1)x + a_{12}y = 0$

è la RETTA che ho trovato

$V_{\lambda_2}: |A-\lambda_2 I|x = 0$

viene analogo.

$(a_{11}-\lambda_2)x + a_{12}y = 0$

2 Rette sono ORTOGONALI quando?

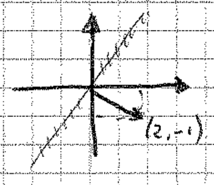
$ax+by=0$

$(a,b)\cdot(x,y)=0$ ← se il prod. scalare è NULLO: $\perp$

esempio:

$2x-y=0$

$(2,-1)\cdot(x,y)=0$



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 97 di 252