NUMERO : 441

DATA : 10/11/2013

A P P U N T I

STUDENTE : Rubinetto

MATERIA : Fisica I + esercizi
Prof. Adrianopoli

INTRODUZIONE

06/03/2012

La fisica studia la materia e le sue interazioni

- è una scienza SPERIMENTALE, e si basa sul metodo scientifico
- inizialmente i vari fenomeni (ottica, acustica, elettricità, Meccanica ...) venivano trattati in maniera indipendente, ma nell'800 venne scoperta una CORREL AZIONE fra i fenomeni (es. $\vec{E}$, $\vec{B}$ e ... sono l'aspetto delle stesse leggi).

I LIMITI della fisica classica coincidono con la fisica moderna.

- MECCANICA QUANTISTICA (Scala Atomica $\lesssim 10^{-10}$ m)
- RELATIVITÀ SPECIALE (Velocità simili a C)
- RELATIVITÀ GENERALE (masse simili ai pianeti (almeno))

per il resto ci si accontenta della fisica classica.

Le COMPONENTI della materia:

elettrone: e^- $m \simeq 10^{-30}$ kg $\quad q = -e$

protone: p^+ $m \sim 1834\, m_e$ $\quad q = +e$

neutrone N^0 $m \sim m_p$ $\quad q = 0$

Gli stati della materia. SOLIDO, LIQUIDO, GASSOSO.

Nei CORPI MACROSCOPICI, la materia viene considerata in modo statistico (quindi è una DISTRIBUZIONE CONTINUA di Atomi).

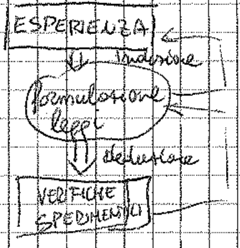
Contatti: i corpi non vengono MAI A CONTATTO, le interazioni sono solo a distanza

4 tipi di interazioni nella materia

A CORTO RAGGIO:
- INTERAZIONI NUCLEARI FORTI $\lesssim 10^{-15}$ m
- INTERAZIONI NUCLEARI DEBOLI — $p^+ \to n^0$ decadimento radioattivo.

A LUNGO RAGGIO:
- INTERAZIONI ELETTROMAGNETICHE (causate da cariche elettriche)
- INTERAZIONI GRAVITAZIONALI (causate dalle masse).

IL METODO SCIENTIFICO



① Schematizzazione del fenomeno

② Formulazione di ipotesi (modelli)

③ Verifica SPERIMENTALE delle previsioni, in condizioni < CONTROLLATE (senza disturbi esterni) / RIPRODUCIBILI

④ Grandezze quantitative: NUMERI ↔ rispetto ad un CAMPIONE STANDARD.

1

06/03/2012

FORMULA 2: Deviazione Standard

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - x_N)^2}$$

$(x_i - x_N)$ è al quadrato xché il numero non sia negativo.

non si usa $\frac{1}{N}$, ma $\frac{1}{N-1}$, per sottostimare l'errore.

$x_i \pm \sigma_x$. vuol dire che la misura ha il 68% di probabilità di stare nell'intervallo $(x-\sigma_x, x+\sigma_x)$

FORMULA 3: Deviazione Standard sul VALORE MEDIO (ovvero l'errore nel determinare il valore medio)

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot \sigma_x$$

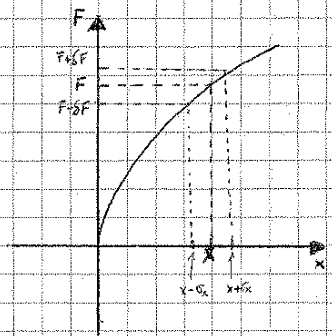
FORMULE 4: Aumento delle Misurazioni:

$\bar{X}_{N\to\infty} \to X_0$

$\sigma_{x_{N\to\infty}} \to \sigma$ COSTANTE

$\sigma_{\bar{x}_{N\to\infty}} \to 0$

LA PROPAGAZIONE degli ERRORI



DIMOSTRAZIONE 1: propagazione degli ERRORI

ho una misura x, ed un'altra in funzione di x, chiamata $F(x)$

Effettuo una serie di N misure: x_i $i: 1 \to N$

calcolo il valore di $\bar{x}$ ed l'errore del valore medio $\delta\bar{x}$.

so che $\bar{F} = F(\bar{x})$

e che $\delta\bar{x} = \sigma_{\bar{x}}$

so anche che $\bar{F} + \delta\bar{F} = F(\bar{x} + \delta\bar{x})$

considero gli errori molto piccoli, quindi confondo $F(\bar{x}+\delta\bar{x})$ con $F(\bar{x})$

SVILUPPO al 1° ORDINE: $F(\bar{x}) + \left|\delta\bar{x} \cdot \frac{dF}{d\bar{x}}\Big|_{\delta\bar{x}=0}\right| + o(x^2)$

quindi $|\delta\bar{F}| = |F(\bar{x}+\delta\bar{x}) - F(\bar{x})| = \delta\bar{x}\left|\frac{dF}{dx}\right|_{\bar{x}}$

Si ottiene la stessa cosa facendo il rapporto incrementale $\frac{\delta F}{\delta x}$ 08/03/2012

3

08/03/2012

GRANDEZZE SCALARI e VETTORIALI

. Scalari: NUMERO $\in R$ (es: M, T, S)

. Vettoriali: $\begin{cases} \text{modulo} \\ \text{direzione} \\ \text{verso} \end{cases} \rightarrow \vec{V}$

i VETTORI LIBERI: non hanno un punto di Applicazione.

→ questi rappresentano TUTTI lo stesso VETTORE LIBERO.

VERSORE: $\vec{u}$: vettore di MODULO UNITARIO

si usa anche per identificare gli assi:

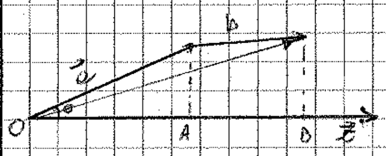
$\vec{u}_x = \vec{i}$
$\vec{u}_y = \vec{j}$
$u_z = \vec{k}$

$\vec{u} = \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|}$ $\quad |\vec{u}| = \frac{1}{|\vec{V}|} \cdot |\vec{V}| = 1$ $\quad \vec{V} = |\vec{V}| \cdot \vec{u}$

CARNOT e la SOMMA DI VETTORI — 09/03/2012

$$|\vec{V}+\vec{W}| = \sqrt{|\vec{W}|^2 + |\vec{V}|^2 + 2|\vec{V}||\vec{W}|\cos\theta}$$

DIMOSTRAZIONE 2: p.tà Distributiva della somma



$(\vec{a}+\vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{b}$

$\downarrow$

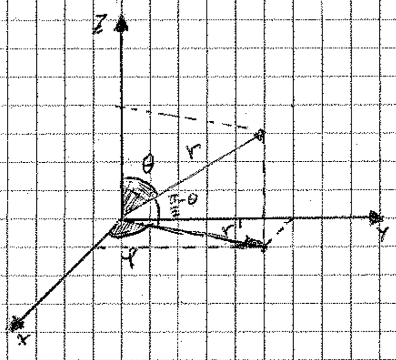
$|\vec{OB}| \cdot \vec{c}$

$\vec{a} \cdot \vec{c} = |\vec{OA}||\vec{c}|$ $\quad \vec{b} \cdot \vec{c} = |\vec{AB}||\vec{c}|$

$|\vec{OB}| = |\vec{OA}| + |\vec{AB}|$

$|\vec{OB}| \cdot |\vec{c}| = (|\vec{OA}| + |\vec{AB}|) \cdot \vec{c}$

ANGOLI di UN VETTORE in 3 DIMENSIONI



$r = |\vec{r}| > 0$

$z = r\cos\theta$
$x = r\,\text{sen}\theta\cos\varphi$
$y = r\,\text{sen}\theta\,\text{sen}\varphi$

$r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}$

$\varphi = \text{arctg}\left(\frac{r_y}{r_x}\right)$

$\theta = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}}\right)$

13/03/2012

ALCUNE PARTICOLARITÀ del PRODOTTO VETTORIALE

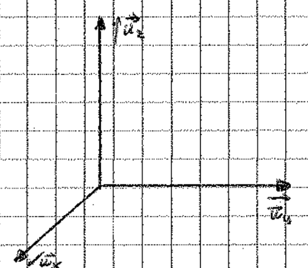
$(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_1 = 0$ ($\vec{v}_1$ sarà sicuramente $\perp$ alla risultante)

- $\vec{v}_1 \times (a \cdot \vec{v}_2) = a (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) = (a \vec{v}_1) \times \vec{v}_2$
- $(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \times \vec{v}_3 = \vec{v}_1 \times \vec{v}_3 + \vec{v}_2 \times \vec{v}_3$

e se v_1, v_2, v_3 Appartengono al piano Oxy:

$$(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \times \vec{v}_3 = (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3) \cdot \vec{v}_2 - (\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3) \cdot \vec{v}_1$$

in 3 DIMENSIONI

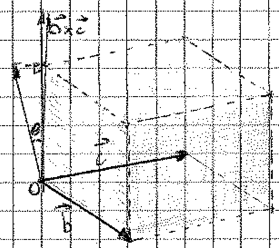


$$\begin{cases} \vec{u}_x \times \vec{u}_y = \vec{u}_z \\ \vec{u}_y \times \vec{u}_z = \vec{u}_x \\ \vec{u}_z \times \vec{u}_x = \vec{u}_y \end{cases}$$

PRODOTTO VETTORIALE in COMPONENTI

$$\vec{v} = v_x \cdot \vec{u}_x + v_y \cdot \vec{u}_y + v_z \vec{u}_z$$
$$\vec{w} = w_x \vec{u}_x + w_y \vec{u}_y + w_z \vec{u}_z$$

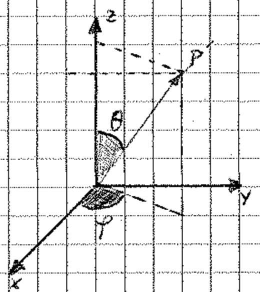
$\vec{v} \cdot \vec{w}$ = DETERMINANTE della matrice $\begin{bmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{bmatrix}$



$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ è il VOLUME del solido generato da $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$

i SISTEMI di COORDINATE:

LE COORDINATE POLARI SFERICHE



in coordinate CARTESIANE il punto è così descritto:

$$P \to \vec{r}(x,y,z) = v_x \vec{u}_x + v_y \vec{u}_y + v_z \vec{u}_z$$

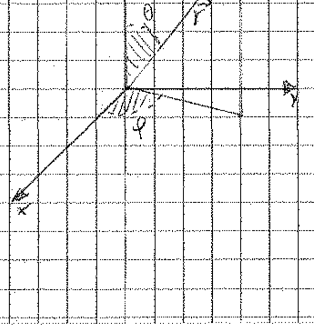
LIMITAZIONI degli ANGOLI

$0 \le \varphi \le 2\pi$

$0 \le \theta \le \pi$

Da COORDINATE Angolari a Cartesiane (→ vedi pag. 5)

DEFINISCO 3 nuovi VERSORI:



$\vec{u}_r$: stessa Dir e stesso Ver di $\vec{r}$

$\vec{u}_\theta$: direzione orientata su ARCO MERIDIANO

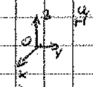
u_φ direzione orientata su ARCO PARALLELO

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 9 di 231

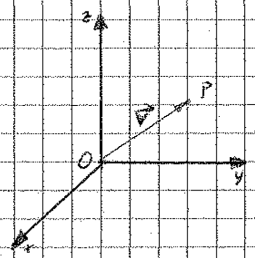
MECCANICA 13/03/2012

- CINEMATICA: Studia il moto INDIPENDENTEMENTE dalle cause.
- DINAMICA: Studia il moto IN RELAZIONE alle cause.

Cosa ci serve per studiare un MOTO:

- SISTEMA di RIFERIMENTO nello Spazio 
- Strumento per misurare le DISTANZE in una certa UDM (metro)
- Strumento per misurare il TEMPO (orologio)

PUNTO MATERIALE: Oggetto di DIMENSIONI TRASCURABILI rispetto ad altre lunghezze coinvolte.



$\vec{OP} = \vec{r}(t)$ (il vettore cambia col passare del tempo)

$\vec{r}(t) = x(t)\,\vec{u}_x + y(t)\,\vec{u}_y + z(t)\,\vec{u}_z = (x(t), y(t), z(t))$

NB: 1

le notazioni $x(t)$, $y(t)$ $z(t)$ indicano le funzioni che correlano le coordinate x, y, z, in funzione del tempo.

NB: 2

x, y, z: CONTINUE nel tempo in un intervallo.

NB 3:

$O' \neq O$ due OSSERVATORI diversi descriveranno il moto in MODO DIVERSO.

$\Downarrow$

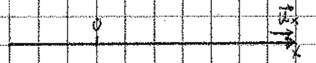
$\vec{r}'(t') \neq \vec{r}(t)$

VETTORE SPOSTAMENTO

t_1 $\vec{r}_1(t_1) \to t_2$ $\vec{r}_2(t_2)$ il vettore spostamento: $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)$

TRAIETTORIA: la CURVA nello SPAZIO descritta da un punto materiale durante il suo moto, al variare di t.

MOTO UNIDIMENSIONALE



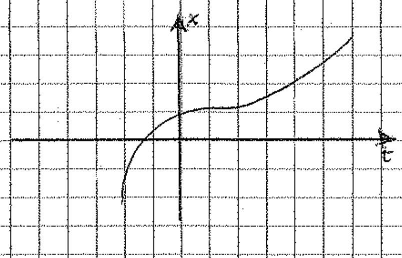
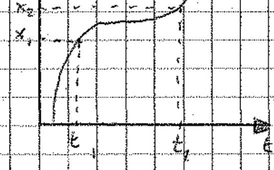


grafico di una LEGGE ORARIA ($x(t)$)

VELOCITÀ 16/02/2012

Quando ho una legge ORARIA, posso calcolare la velocità:



Spostamento: $\Delta x = \vec{x}(t_2) - \vec{x}(t_1)$

$\Delta t = t_2 - t_1$

VELOCITÀ MEDIA: $v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}$

Rappresenta la retta passante per i due punti, il suo COEFF ANGOLARE è la Velocità media.

(9)

17/03/2012

quindi:

$$\begin{cases} v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(t)\,dt \\ x(t) = x_0(t) + \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt \end{cases}$$

$dv = a(t)\,dt$
$dx = v(t)\,dt$

- Se so $a(x)$, ma voglio trovare $x(t)$, $v(t)$ ed $a(t)$

$$\begin{cases} dv = a(x(t))\,dt \\ v = \frac{dx}{dt} \end{cases} \longrightarrow dt = \frac{dx}{v} \quad (\text{"cambio di variabile"}) \longrightarrow dv = a(x(t))\,dt = a(x)\frac{dx}{v}$$

non dipende + da t, x è il contatore

$$\Downarrow$$

$$v\,dv = a(x)\,dx$$

$$\int_{v_0}^{v} v\,dv = \frac{1}{2}(v^2 - v_0^2) = \int_{t_0}^{t} \frac{dx}{dt}\, a(x(t))\, dt$$

"rimuovo" ⇒ cambio var.

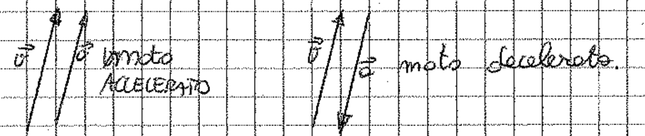
cambio variabile

$x(t) = x$

$\frac{d(x)}{d(t)}\,dt = dx$ $\qquad t \to x$, $\quad t_0 \to x_0 = x(t_0)$

quindi

$$\frac{1}{2}(v^2 - v_0^2) = \int_{x_0}^{x} a(x)\,dx \quad \Rightarrow \quad v^2 - v_0^2 = 2\int_{x_0}^{x} a(x)\,dx$$



Quando si divide in componenti, lo si fa come al solito.

GRAVITÀ: $\vec{a} = -g\,\vec{u}_z$ $\qquad g = 9{,}8\ \frac{m}{s^2}$

CASI PARTICOLARI

- MRU: $a = 0$ $\quad v =$ costante

$$x(t) = x(t_0) + v_0(t - t_0)$$

- MRUA: $a(t) =$ costante

$$v(t) = v_0 + a(t - t_0)$$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} [v_0 + a(t - t_0)]\,dt = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$$

$$v^2 - v_0^2 = 2a\int_{x_0}^{x} dx \Rightarrow v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0).$$

a cost. ⇒ fuori dall'S

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 13 di 231

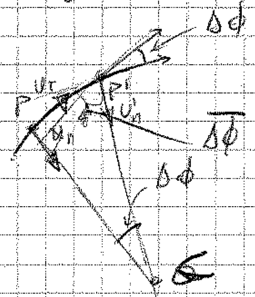
$$a_n = v\left|\frac{d\vec{u}_T}{dt}\right| = v\left|\frac{d\vec{u}_T}{d\phi}\right|\dot{\phi} = a_n\,\vec{u}_n = v\,\frac{d\phi}{dt}\,\vec{u}_r$$

Accelerazione CENTRIPETA

$$\vec{a}_T = a_T\,\vec{u}_T$$

$$a_T = \frac{dv}{dt}$$

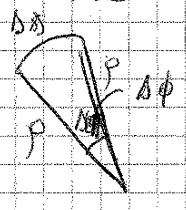
SU FOCARDI!



$|PC| = \rho$

$\widehat{PP'} = \Delta s$

Approssimo ad una circonferenza $|PC| = |P'C|$



$$ds = \rho\, d\phi$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = \frac{1}{\rho}\,v$$

$\frac{1}{\rho}$

tiene al variare della traiettoria

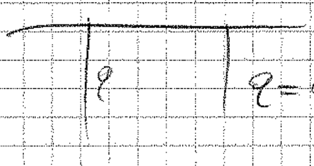
velocità v

$$a_n = v\cdot\frac{d\phi}{dt} = \frac{v^2}{\rho}$$ ← accelerazione centripeta.

Moto rettilineo

$$\frac{d\vec{u}_T}{dt} = 0$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{v^2}{\rho=\infty} = 0$$



Moto Curvilineo UNIFORME $|\vec{v}| = cost$

$v = cost.$

$$a_T = \frac{dv}{dt} = 0 \qquad a_n \neq 0$$

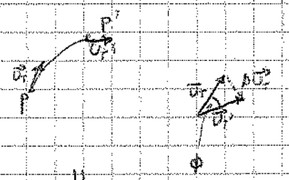
$\vec{a} = a_T \vec{u}_T + a_N \vec{u}_N$

a_T: responsabile delle variazioni scalari

a_N: responsabile dei cambi di direzione.

questa formula deriva da

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(v \cdot \vec{u}_T) = \underbrace{\frac{dv}{dt}}_{\text{questa è l'acceleraz. scalare}} \vec{u}_T + v \underbrace{\frac{d\vec{u}_T}{dt}}_{\text{come derivo } \vec{u}_T?}$$



$\Delta \vec{u}_T$: dipende da ϕ, che dipende da t

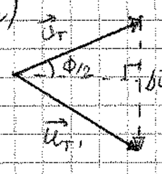
$\Downarrow$ $\Downarrow$

$$\frac{\Delta \vec{u}_T}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{u}_T}{\Delta \phi} \cdot \frac{\Delta \phi}{\Delta t}$$

Così, facendo il limite del rapporto incrementale ottengo:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{u}_T}{\Delta t} = \underbrace{\lim_{\Delta\phi \to 0} \frac{\Delta \vec{u}_T}{\Delta \phi}}_{a)} \cdot \underbrace{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \phi}{\Delta t}}_{b)}$$

a)



So che $\Delta \vec{u}_T = |\vec{u}_T| \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \cdot 2$

$= 2 \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)$

e quindi $\lim_{\Delta\phi \to 0} \frac{\Delta \vec{u}_T}{\phi} = \lim_{\Delta\phi \to 0} \frac{2 \sin\frac{\phi}{2}}{\phi} = 1$

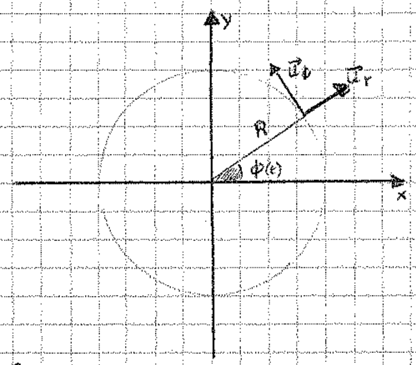
b) $\frac{d\phi}{dt}$ è definito come VELOCITÀ ANGOLARE ω.

QUINDI

$$\vec{a} = d\frac{(v \cdot \vec{u}_T)}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_T + v \cdot \frac{d\vec{u}_T}{dt} = a_T \vec{u}_T + a_N \vec{u}_N$$

MOTO CIRCOLARE

Traiettoria: circonferenza.

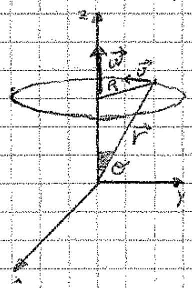


- $|\vec{r}(t)| = R$
- $\vec{v} = \vec{u}_T v = \vec{u}_\phi v$
- $\vec{r}(t) = R \vec{u}_r$
- $s(t) = R\phi(t)$
- $v = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\phi}{dt} = R \cdot \omega$

$\boxed{\text{DEF: } \omega = \frac{d\phi}{dt}}$

VETTORE VELOCITÀ ANGOLARE: $\vec{\omega}$

$\perp$ alla circonferenza, direzione: MANO DESTRA



$R = |\vec{r}| \sin\theta$

$|\vec{v}| = \omega R = \omega r \sin\theta$

$\boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}}$

MOTO CIRCOLARE UNIFORME

ω = costante

$\Downarrow$

$v = \omega R$ = costante.

T: periodo $[T] = s$

ν: frequenza $[\nu] = Hz = s^{-1}$

so che

R, ω = costanti

$$\begin{cases} x(t) = R\cos(\omega t) \\ y(t) = R\sin(\omega t) \end{cases}$$

TRAIETTORIA

$x^2(t) + y^2(t) = R^2$

VELOCITÀ:

$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = -\omega R \sin(\omega t) = R\omega \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$

$v_y(t) = \frac{dy}{dt} = \omega R \cos(\omega t) = R\omega \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$

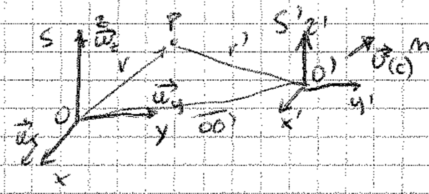
$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{R^2\omega^2 \underbrace{\sin^2(\omega t) + R^2\omega^2\cos^2(\omega t)}_{1}} = \sqrt{R^2\omega^2} = R\omega = v$

$\vec{v} = R\omega\left[-\sin(\omega t)\vec{u}_x + \cos(\omega t)\vec{u}_y\right]$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 17 di 231

S , S'

1° caso: S': TRASLATORIO rispetto a noi, è sempre // a se stesso



moto puramente traslatorio

$\vec{V}(t)$: velocità dipende dal tempo,

$x' // x'$, $y' // y'$

$\vec{u}'_x$, $\vec{u}'_y$, $\vec{u}'_z$ rimangono sempre gli stessi
(VERSORI LIBERI → COSTANTI)
(non importa dove li applico)

x semplificarli: $\vec{u}_x = \vec{u}'_x$
$\vec{u}_y = \vec{u}'_y$
$\bar{u}_z = \bar{u}'_z$

punto P:

S lo descrive con $\vec{P}(t)$

S' lo descrive con $\vec{r}'(t)$

IPOTESI:
Spazio e Tempo ASSOLUTI

↓ lunghezze identiche

↓ durate identiche

t scorre nello stesso modo nei due S.R.

$t = t'$

$\overline{OO'}(t)$ vettore

si vede che: $r(t) = r'(t) + \overline{OO'}$

$\vec{r}(t) = x(t)\bar{u}_x + y(t)\,\bar{u}_y + z(t)\bar{u}_z$

$r'(t') = x'(t)\bar{u}'_x + y'(t)\,\bar{u}'_y + z'(t)\bar{u}'_z$

$\bar{u}_x$, $\bar{u}_y$, $\bar{u}_z$, $\bar{u}'_x$, $\bar{u}'_y$, $\bar{u}'_z$: NON DIPENDONO da t, x il moto traslazionale.

$\frac{d\,OO'(t)}{dt} = \vec{V}(t)$ di O' rispetto a noi.

$$\bar{v}' = \frac{d\bar{r}'}{dt} = \frac{dx'}{dt}\bar{u}'_x + \frac{dy'}{dt}\bar{u}'_y + \frac{dz'}{dt}\bar{u}'_z$$

la velocità del corpo, percepita da O'

velocità del corpo vista da O

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\bar{u}_x + \frac{dy}{dt}\bar{u}_y + \frac{dz}{dt}\bar{u}_z$$

ora derivo $r(t) = r'(t) + OO'$

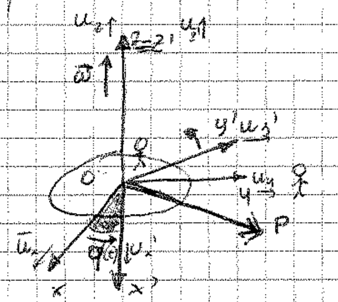
$$\vec{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{v}' + \underbrace{\bar{V}}_{\text{vel. di O' rispetto a O}} = \frac{d\bar{r}'}{dt} + \frac{d\overline{OO'}}{dt}$$

LEGGE di ADDIZIONE delle velocità.

Accelerazioni:

in S': $\vec{a} = \frac{d\bar{v}'}{dt} = \frac{dv'_x}{dt}\bar{u}'_x + \frac{dv_y}{dt}\bar{u}'_y + \frac{dv_z}{dt}\bar{u}'_z$

(caso 2) MOTO di PURA ROTAZIONE



moto di rotazione relativo descritto da $\varphi(t)$

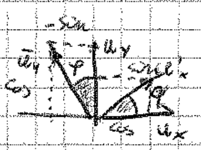
$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\vec{\omega} = \omega \vec{u}_z$$

le origini coincidono, ma non le percezioni del punto

$\vec{u}_x'$ e u_y' CAMBIANO nel tempo.

$\varphi(t)$ Angolo $x\,o\,x'$



$$\begin{cases} \vec{u}_x' = \cos(\varphi(t))\,\vec{u}_x + \sin(\varphi(t))\,\vec{u}_y \\ \vec{u}_y' = -\sin(\varphi(t))\,\vec{u}_x + \cos(\varphi(t))\,\vec{u}_y \end{cases}$$

$$\vec{u}_z' = \vec{u}_z$$

ORA DERIVO u_x Ricordo che $\boxed{\frac{d\varphi(t)}{dt} = \omega(t)}$

$$\frac{du_x'}{dt} = -\omega \sin(\varphi(t))\,\vec{u}_x + \omega \cos(\varphi(t))\,\vec{u}_y$$

$= !!$

ricordo che $\boxed{\vec{\omega} = \omega \vec{u}_z}$

calcolo $(\vec{\omega} \times \vec{u}_x') = \omega \vec{u}_z \times (\cos(\varphi(t))\,\vec{u}_x + \sin(\varphi(t))\,\vec{u}_y) \Rightarrow$ proprietà DISTRIBUTIVA del prodotto vettoriale.

$$= \omega \cos(\varphi(t))\,(\vec{u}_z \times \vec{u}_x) + \omega \sin(\varphi(t))\,\vec{u}_z \times \vec{u}_y$$

$$= \omega \cos(\varphi(t))\,\vec{u}_y - \omega \sin(\varphi(t))\,\vec{u}_x$$

so che
$\vec{u}_z \times \vec{u}_x = \vec{u}_y$
$\vec{u}_z \times \vec{u}_y = -\vec{u}_x$

ho trovato che

$$\boxed{\frac{du_x'}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{u}_x'}$$

Analogamente

$$\frac{d\vec{u}_y'}{dt} = -\omega \cos(\varphi(t))\,\vec{u}_x - \omega \sin(\varphi(t))\,\vec{u}_y$$

$= !!$

Analogo verifico

$$\vec{\omega} \times \vec{u}_y' = \omega \vec{u}_z \times (-\sin\varphi(t)\,\vec{u}_x + \cos(\varphi(t))\,\vec{u}_y) = -\omega \sin\varphi(t)\,(\vec{u}_z \times \vec{u}_x) + \omega \cos(\varphi(t))\,\vec{u}_z \times \vec{u}_y$$

$$= -\omega \sin(\varphi(t))\,\vec{u}_y - \omega \cos(\varphi(t))\,\vec{u}_x$$

quindi $\boxed{\frac{d\vec{u}_y'}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{u}_y'}$

in realtà anche se $\frac{d\vec{u}_z'}{dt}$ è 0 (xché è costante) so che $\frac{d\vec{u}_z'}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{u}_z$

sapendo che

S] $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}$

faccio la derivata di AMBO i membri RISPETTO ad S

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \underbrace{\frac{d\vec{v}'}{dt}}_{\text{la prima l'ho calcolata adesso}} + \underbrace{\frac{d(\vec{\omega} \times \vec{r})}{dt}}_{\text{la DERIVATA del PRODOTTO VETTORIALE si calcola come quella di un prodotto normale}} = \vec{a}' + \vec{\omega} \times \vec{v}' + \underbrace{\frac{d\vec{\omega}}{dt}}_{\vec{\alpha}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$\vec{\omega} \times \vec{v} \rightarrow \vec{\omega} \times (\vec{v}' + \vec{\omega} \times r)$

ORA METTO TUTTO ciò che è relativo a 1° membro a SX, e tutto ciò che è relativo al secondo a DX.

$$= \vec{a}' + \vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r})$$

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{a}' + \vec{a}_c + \vec{a}_r}$$

ac. di Coriolis — accelerazione di trascinamento

$\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \times \vec{v}'$

dipende sia dalla ROTAZIONE del S', ma anche dal moto della particella.

$\vec{a}_r = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$

è legato alla posizione di P, ed alla rotazione del sistema di riferimento

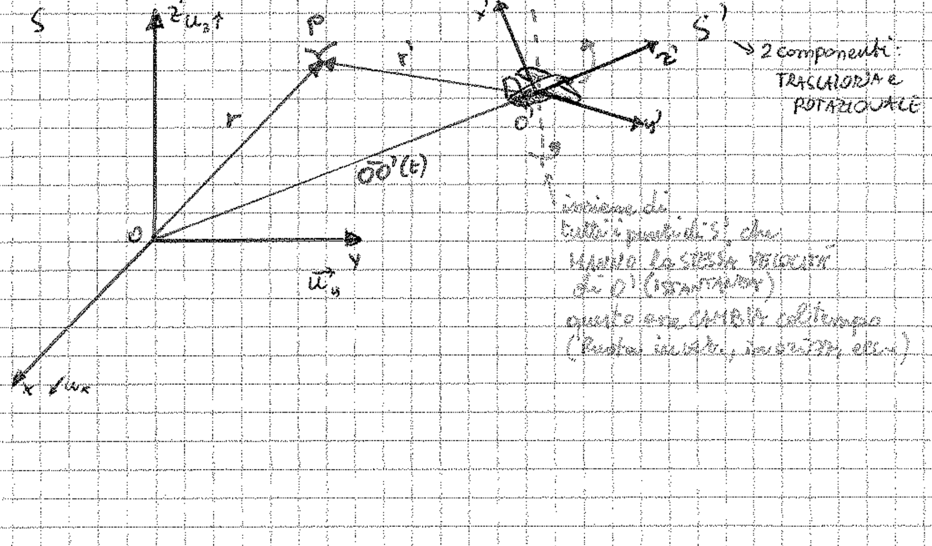
in questo caso, α è anch'esso diretto verso $\vec{u}_z$

$\vec{\omega} = \omega \vec{u}_z$

$\hookrightarrow \alpha = \frac{d(\omega)\vec{u}_z}{dt} = \alpha \vec{u}_z$

CASO + GENERICO.

Componente traslatoria + Componente Rotazionale.



ACCELERAZIONE

S' come percepisce l'accelerazione dell'uccello il pilota dell'aereo.

$$\vec{a}' = \left(\frac{d\bar{v}'}{dt}\right)_{S'} = \frac{dv_x'}{dt}\bar{u}_x' + \frac{dv_y'}{dt}\bar{u}_y' + \frac{dv_z'}{dt}\bar{u}_z'$$

S: derivo la stessa cosa, rispetto a TERRA (quindi anche $\bar{u}_x, \bar{u}_y, \bar{u}_z$ cambiano)

$$\frac{d\bar{v}'}{dt} = \frac{d}{dt}\left(v_x'\bar{u}_x' + \bar{v}_y\bar{u}_y' + \bar{v}_z\bar{u}_z\right) = \underbrace{\frac{dv_x'}{dt}\bar{u}_x' + \frac{dv_y'}{dt}\bar{u}_y' + \frac{dv_z'}{dt}\bar{u}_z'}_{\vec{a}'} + v_x'(\bar{\omega}\times\bar{u}_x') + v_y'(\bar{\omega}\times\bar{u}_y') + v_z'(\bar{\omega}\times\bar{u}_z')$$

e ω fuori

$$= a' + \bar{\omega}\times\bar{v}'$$

ricordo che $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega}\times\vec{r}' + \vec{V}$

e derivo ambo i membri

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \underbrace{\left(\frac{d\bar{v}'}{dt}\right)}_{a' + \bar{\omega}\times\bar{v}'} + \underbrace{\left(\frac{d\bar{\omega}}{dt}\right)}_{\alpha}\times\bar{r}' + \bar{\omega}\times\underbrace{\left(\frac{d\bar{r}'}{dt}\right)}_{\boxed{(\bar{v}' + \bar{\omega}\times\bar{r}')}} + \underbrace{\left(\frac{d\bar{V}}{dt}\right)}_{\text{acc di } O'} =$$

$\Downarrow$

$$\vec{a} = \vec{a}' + \underbrace{\bar{\omega}\times\bar{v}' + \alpha\times\bar{r}' + \bar{\omega}\times(\bar{v}'}_{a_c} + \bar{\omega}\times\bar{r}') + \bar{a}_{o'}$$

$$= a' + a_c + a_T$$

$$a_c = 2\bar{\omega}\times\bar{v}'$$

$$a_T = a_O' + \underbrace{\bar{\alpha}\times\bar{r}' + \omega\times(\bar{\omega}\times\bar{r}')}$$

moto di traslazione on O'

è l'acc di un punto in un sistema con moto rotatorio puro O' intorno ad un asse che passa per O'

SINTESI:

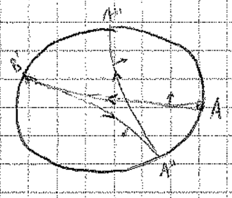
$$\begin{cases} \bar{r} = \bar{r}' + \overline{OO'} \\ \bar{v} = \bar{v}' + \underbrace{\bar{\omega}\times\bar{r}'}_{\text{circolare}} + \underbrace{\bar{V}}_{\text{traslatorio}} \\ \bar{a} = \bar{a}' + \underbrace{2\bar{\omega}\times\bar{v}'}_{\text{coriolis}} + \underbrace{\bar{a}_{o'}}_{\text{acc. trascinamento / acc. } O'} + \alpha\times\bar{r}' + \underbrace{\bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r}')}_{\text{acc. di rotazione}} \end{cases}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 25 di 231

MOTO di un PENDOLO:

senza Rotazione: Sempre nello stesso piano

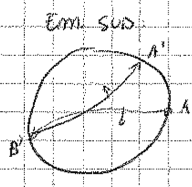
EMISFERO NORD.



il peddolo VA VERSO DX

il piano del peddolo.
RUOTA in SENSO ORARIO

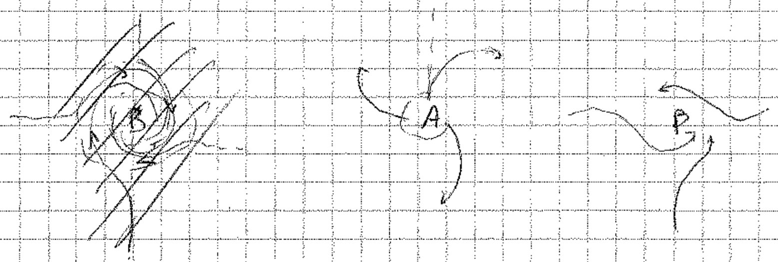
Em. SUD.



devia a SINISTRA
il piano Ruota in
senso ANTIORARIO

ATMOSFERA.

Ricordo che BASSA PRESSIONE: l'aria si muove verso il centro, ANDRO. devia a DESTRA



25

es. il libro non è un corpo libero, è sottoposto all'attrito del tavolo.

quindi il rallentamento è dovuto non alla mancanza di spinta, ma dalla presenza di attrito.

Galileo, dunque, cerca di cancellare l'attrito, x studiare meglio i moti. (usa sfere anziché cubi, superfici lisce, ecc..)

Confutando sperimentalmente la vecchia ipotesi, applica il metodo scientifico.

$\boxed{\Rightarrow \text{FORZE NON RESPONSABILI del MOTO, ma della VARIAZIONE del MOTO} \Rightarrow \text{Accelerazioni. } (\vec{a})}$

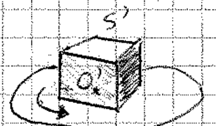
in conclusione: $\vec{a}$ dovuta a $\vec{F}$, non dipende da $\vec{v_0}$

→ PRINCIPIO DI INERZIA (o PRIMA LEGGE di Newton)

Ogni corpo persiste nel suo stato di quiete o di MRU a meno che non intervenga una FORZA ESTERNA a modificare tale stato.

⇔ ogni CORPO LIBERO si muove a $\vec{v}$ = cost.

⚠ Questo principio VALE solo per i sistemi di riferimento INERZIALI (o S.R. LIBERI)



es. c'è un laboratorio su una piattaforma girevole ⇒ gli oggetti appaiono accelerati, ma non vedo interazioni.

S

invece per S, che è fuori dalla piattaforma, vede le cause della non validità del 1° Principio.

S.R. INERZIALI: $\vec{a} = \vec{a}'$

E noi, che siamo sulla terra? Gran parte dei fenomeni possono essere semplificati.

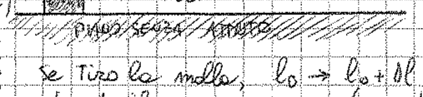
Altre cose come Accelerazione di Coriolis per un corpo in caduta libera, sono a nostra discrezione: $a_c = 10^{-2}\, m/s^2$
$g = 9{,}8\, m/s^2$

è trascurabile.

DEFINIZIONE OPERATIVA:

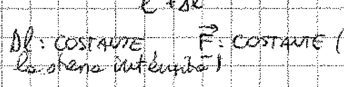
1) la forza è VETTORIALE $\vec{F}$
2) MOLLA IDEALE: PERFETTAMENTE ELASTICA. (torna sempre alla pos. di riposo l_0)

a)



se Tiro la molla, $l_0 \to l_0 + \Delta l$ (la molla si allunga) ed anche il corpo si muove (non c'è attrito).

b)



Δl: COSTANTE $\vec{F}$: COSTANTE (tiro sempre con la stessa intensità)

⇒ anche $\vec{a}$ è costante.

$|\vec{a}| \propto \Delta l$

28

$$\boxed{\vec{F}(x,y,z) = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}}$$ equazione del moto

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

es forza PESO

$$\vec{F}_g = m\vec{g} \qquad \vec{g} = -9{,}8\,\vec{u}_z \ m/s^2$$

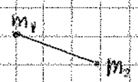
$$\vec{F}_p = m\vec{a} \Rightarrow \begin{cases} ma_x = 0 \\ ma_y = 0 \\ ma_z = -mg \end{cases}$$

es. Forza Elastica

$$\vec{F}_e = -k\Delta\vec{\ell} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

es. Forza di Gravitazione universale

$$\vec{F}_G = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{u}_r$$



la 2° legge della dinamica, contiene TUTTE le CAUSE del moto.

D'ora in poi, pensiamo alla forza come VETTORE APPLICATO.

finché il corpo è un punto materiale, è facile,

ma in corpi estesi, il punto in cui si applica: CENTRO di massa del corpo.

⚠ posso sommare le FORZE solo se sono applicate nello STESSO PUNTO.

esiste una definizione ancor più generale.

Def: QUANTITÀ di MOTO

$$\vec{p} = m\vec{v} \qquad [p] = [mLt^{-1}]$$

Contiene informazioni sull'inerzia di un corpo. (un camion vuoto è più facile da spostare)

INTRINSECA: contiene informazioni su velocità ed inerzia.

la Massa di un corpo è considerata costante ⇒

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = ma$$

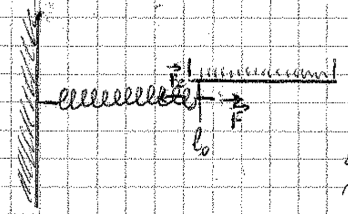
$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}}$$ 2° legge, modo alternativo.

+ VALIDA: se CAMBIA MASSA $\vec{F} = m\cdot\vec{a}$ non vale +.

30

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 31 di 231

DINAMOMETRO



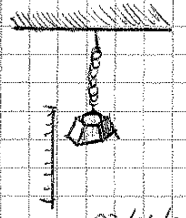
$|\vec{F}| = k\,\Delta l$

↑ costante elastica (N/cm)

quindi, quando io tiro la molla, lei mi tira con la stessa forza, x riportarla in equilibrio

All'equilibrio $\vec{F} + \vec{F}_e = 0$ $\quad \boxed{|\vec{F}_e| = -k\,\Delta l}$

es. CALCOLO della MASSA:



03/04/2012 SCOMPOSIZIONE IN COMPONENTI

$$\vec{F}\left(\vec{r}(t), \vec{v}(t), t\right) = m\,\vec{a}$$

$$F_x\left(x(t), y(t), z(t), v_x(t), v_y(t), v_z(t), t\right) = m\frac{d^2x}{dt^2}$$
$$F_y\left(x(t), y(t), z(t), v_x(t), v_y(t), v_z(t), t\right) = m\frac{d^2y}{dt^2}$$
$$F_z\left(\qquad\qquad\right) = m\frac{d^2z}{dt^2}$$

E' un sistema di equazioni differenziali del 2° ordine

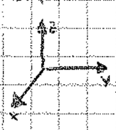
$$f\left(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}, t\right)$$

la Soluzione di queste equazioni, sarà $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$

noi non le risolveremo attraverso le equazioni.

CASO SEMPLICE: FORZE COSTANTI

es. $\vec{F}_g = -mg\,\vec{u}_z$



2° legge di newton, ci dice che $\vec{F}_g = m\vec{a}$

$\vec{a}$ vettore $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ $\qquad$ ricordate $\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$

in componenti quindi

$$\begin{cases} \vec{u}_x & 0 = m\ddot{x} \rightarrow x(t) = x_0 + v_{0x}(t - t_0) \quad \text{MRU} \\ \vec{u}_y & 0 = m\ddot{y} \rightarrow y(t) = y_0 + v_{0y}(t - t_0) \quad \text{MRU} \\ \vec{u}_z & -mg = m\ddot{z} \rightarrow z(t) = z_0 + v_{0z}(t - t_0) + \left(-\frac{1}{2}g\right)(t - t_0)^2 \end{cases}$$

in pratica faccio una DOPPIA INTEGRAZIONE

mi servono 2 dati iniziali per ∀ coordinata

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 33 di 231

c). $F=0$

quindi $m g \operatorname{sen}\alpha = -m \frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow a = -g \operatorname{sen}\alpha$

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_{0x}(t-t_0) \mp \frac{1}{2} g \operatorname{sen}\alpha (t-t_0)^2 \\ y(t) = y_0 \end{cases}$$

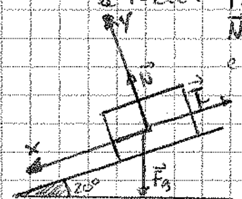
Ora suppongo una situazione leggermente diversa.

Un omino tira con un filo ideale il carrello

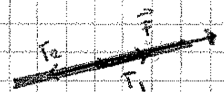
FILO IDEALE:
1) inestensibile
2) massa trascurabile.

– il filo inestensibile

le FORZE: $\vec{F_g}$, $\vec{N}$ e $\vec{T}$, anziché $\vec{F}$. TENSIONE della fune



Come FUNZIONA il FILO:



T_2: il carrello tira
T_1: l'uomo tira

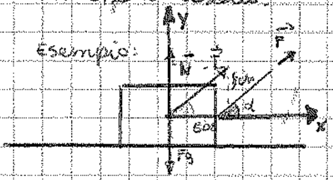
$\vec{T_1} + \vec{T_2} = 0$ dato che è inestensibile.

$\vec{T} = \vec{F}$

$\forall$ punto del filo ho la stessa tensione $\vec{T} = \vec{F}$

Carrello + Filo: UNICO OGGETTO di massa uguale alla massa del carrello

Esempio:



corpo di massa $= m$, trainato da un filo ideale. Non c'è attrito

quindi $\vec{T} = \vec{F}$

$\vec{F_g} + \vec{N} + \vec{T} = m \cdot \vec{a}$

$$\begin{cases} \vec{T} = T\cos\alpha\, \vec{u}_x + T\operatorname{sen}\alpha\, \vec{u}_y \\ \vec{N} = N \vec{u}_y \\ \vec{F_g} = -mg\vec{u}_y \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \vec{u}_x \\ \vec{u}_y \end{array} \begin{cases} T\cos\alpha = m \frac{d^2x}{dt^2} \\ N - mg + \cancel{\frac{d^2y}{dt^2}}\, T\operatorname{sen}\alpha = m\frac{d^2x}{dt^2} \end{cases}$$

prevedo che: se la forza è debole, scorre a terra, con forze intense si solleva.

u_x: $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{T}{m}\cos\alpha = \frac{F}{m}\cos\alpha \qquad x(t) = x_0 + v_{0x}(t-t_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{F}{m}\cos\alpha\right)(t-t_0)^2$

u_y: 1) $F \mid \frac{d^2y}{dt^2} = 0$: $\boxed{\vec{N} = mg - \vec{F}\operatorname{sen}\alpha}$

$F \leq F_{soglia}$

34

$F_{tg} = m_i g(-\vec{u})$ $i = 1, 2$

1) $\{ -m_1 g + T = -m_1 a$

2) $\{ -m_2 g + T = +m_2 a$

come sono collegate le masse.

isolo "a"

$a = g - \frac{T}{m_1} = -g + \frac{T}{m_2}$

$T\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) = 2g$

$T \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} = 2g$

$T = \frac{2 m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}$

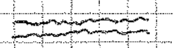
$a = g - \frac{2 m_2 g}{m_1 + m_2} = \frac{g(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}$

caso mai $m_1 = m_2 \Rightarrow a = 0$

ATTRITO: resistenza opposta al moto.

- Attrito RADENTE

su un PIANO SCABRO: A livello microscopico, anche un piano liscio è scabro



i corpi: NON SOLO A CONTATTO, le molecole agiscono con forze elettrostatiche.

il "Contatto" effettivo è circa 10^{-4} volte la superficie effettiva

CONTATTO INTERMOLECOLARE

Durante il moto si formano e distruggono in continuazione questi legami.

L'ATTRITO radente è una Somma (statistica) di tutti questi legami.

$\vec{F}_{AR} = -F_{AR}\,\vec{u}_v$ direzione di $\vec{v}$, in senso opposto.

$\boxed{F_{ar} = \mu N}$

dipende dalle superfici

ci sono, per OGNI COPPIA di superfici, ci sono 2 tipi di attriti:

μ_s STATICO (+ forte, i legami si formano facilmente)

μ_d DINAMICO (+ debole, i legami si rompono in continuazione)

$[\mu]$: Adimensionale.

Forza di Attrito Statico:

$\vec{F}_s = \mu_s N$: la MINIMA FORZA necessaria per metterlo in movimento.

quindi se $F < F_s$: il corpo resta fermo.

$F \geq F_s = \mu_s N$: il corpo si mette in moto.

$\boxed{S.I. \quad \frac{N \cdot s}{m^2} = Pa \cdot s}$

che succede ad un corpo in caduta libera in un fluido viscoso?

Per un corpo soggetto a $\vec{F}$ costante immerso in un fluido viscoso.

$$\vec{F} + \vec{F}_{av} = m\vec{a} \qquad \vec{F} = F\vec{u}$$

$$\vec{u}: \; F - k\eta v = ma$$

$$\boxed{F - k\eta \frac{dx}{dt} - m\frac{d^2x}{dt^2} = 0}$$

si può risolvere, ma non in questo corso.

Osservazione fisica:

il corpo inizia a cadere → v aumenta → ma anche $+F_{av}$ → succede che si arriva ad una VELOCITÀ LIMITE, alla quale $a = 0$

$$\rightarrow v_L: \; a = 0 \Rightarrow F = k\eta v_L$$

$$v_L = \frac{F}{k\eta} \qquad F = mg$$

$$\hookrightarrow v_L = \frac{mg}{k\eta}$$

Ma forza di Archimede, o pressione idrostatica

Tenendo conto della Forza di Archimede

$$\vec{F}_A = -m_f\vec{g}$$

↳ la vera relazione:

$$\vec{F}_A + \vec{F}_p + \vec{F}_{av} = m\vec{a}$$

Velocità limite vera:

$$\boxed{\vec{V}_L = \frac{m - m_f}{k\eta}\vec{g}} \qquad \begin{aligned} m &= \rho V \\ m_f &= \rho_f V \end{aligned}$$

es. Goccia di pioggia

$$d = \frac{1}{2}\,mm \qquad \frac{\rho_{aria}}{\rho_{acqua}} = 1{,}3 \times 10^{-3}$$

$$\rho_{acqua} = 10^3 \frac{kg}{m^3}$$

$$\eta_{aria} = 1{,}81 \cdot 10^{-5} \frac{Ns}{m^2}$$

$k = 6\pi R$ a priori. (la goccia è sferica)

$$\vec{V}_L \simeq 7{,}5\ m/s$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{x} = -\omega_0^2 x^2}$$ ω_0 PULSAZIONE del MOTO ARMONICO

$x \to \theta$
$\omega_0^2 \to \frac{g}{l}$

$\to \theta(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$

$\theta_0 = \theta(t) = A\cos\varphi_0$ ← COND. INIZIALE 1 $(t=0)$

$\omega(t) = \dot{\theta} = -A\omega_0 \,\mathrm{sen}(\omega_0 t + \varphi_0)$ (era x di prima)

↳ ω a $t=0 \to 0$.

$\omega(t_0) = -A\omega_0 \,\mathrm{sen}\,\varphi_0 = 0$

$A \neq 0$, $\omega_0 \neq 0$ $\Rightarrow$ $\varphi_0 = 0$.

$$\begin{cases} \theta_0 = A\cos\varphi_0 \\ \mathrm{sen}\,\varphi_0 = 0 \to \varphi_0 = 0 \end{cases} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c} \theta_0 = A \\ \varphi_0 = 0 \end{array}}$$

↑ FASE del moto

$\boxed{\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t)}$ moto Armonico del pendolo.

Vedo quest'equazione:
$-1 < \cos < 1$
$\Downarrow$
$-\theta_0 < \theta < \theta_0$

$t = 0 \Rightarrow \theta(0) = \theta_0$, $\omega(0) = 0$

ed il periodo?
so che da θ_0 a $-\theta_0 \Rightarrow \frac{T}{2}$

$\theta\left(\frac{T}{2}\right) = -\theta_0$

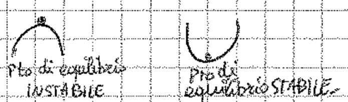
$\theta_0 \cos\left(\omega_0 \frac{T}{2}\right) = -\theta_0$

$\cos\left(\omega_0 \frac{T}{2}\right) = -1 \Rightarrow \frac{\omega_0 T}{2} = \pi$

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$$

Non dipende da θ_0, né dalle masse.
↳ OSCILLAZIONE ISOCRONA (non dip. da θ_0)
!! ma SOLO x angoli piccoli.

se $\theta = 0 \Rightarrow$ pto di equilibrio stabile



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 41 di 231

PULSAZIONE

$$[\omega_0] = \left[\sqrt{\frac{k}{m}}\right] = [\cancel{m} \cdot t^{-2} \cdot \cancel{m^{-1}}] = \frac{1}{s^2}$$

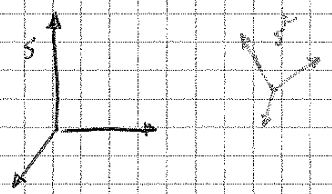
$$[k] = \frac{N}{m} = m \cdot \cancel{\ell} \cdot t^{-2} \cdot \cancel{\ell^{-1}}$$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ con quale frequenza una particella passerà nello stesso punto in un Δt regolare

Confronto coi MOTI RELATIVI

SR inerziale: $\vec F = m\vec a$

COSA SUCCEDE nei SR NON INERZIALI



$\vec v = \vec v' + \vec v_T$

$\vec a = \vec a' + \vec a_T$

NON INERZIALE

$\vec a_T \neq 0$ rispetto alle stelle fisse.

× S' in ROTAZIONE con $O = O'$

$$\vec a_T = \vec a_{cp} + \vec a_{coriolis}$$
$$= 2\vec\omega \times \vec v' + \vec\omega \times (\vec\omega \times \vec r)$$

S: (che è inerziale) esperimento su una certa massa:

VALE 2° NEWTON

$\vec F = m\vec a$

S': $\vec a' = \vec a - \vec a_T$

$\vec F' = m\vec a' = m\vec a - m\vec a_T$ la forza misurata è influenzata da $\vec a_T$

$= \vec F + \vec F_{in}$

Forza inerziale (o FITTIZIA, o APPARENTE)

$\boxed{\vec F_{in} = -m\vec a_T}$

la 2° legge di newton vale solo così:

$$\vec F + \vec F_{in} = m\vec a'$$

esempio

Considero un treno in moto con $\vec v$ cost.

$\vec v = \vec v_{w}$

S: fermo FUORI dal Treno

S': fermo A BORDO del Treno

Nello scompartimento c'è una valigia appoggiata sul tavolo (no ATTRITI)

S: $\vec v_{valigia} = \vec v_{Treno}$ $\quad \vec a_{valigia} = \vec a_{treno} = \vec 0$

S': $\vec v'_{valigia} = 0$ $\quad \vec a' = 0$.

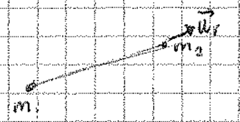
per $t = t_0$, il treno inizia a fermarsi:

$\vec a_T < 0$

42

INTERAZIONI GRAVITAZIONALI

Dati due corpi di massa m_1 e m_2 posti a distanza r



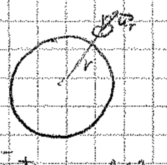
$$\vec{F}_{G12} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{u}_r$$

ricordo che $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

$$G = 6,673\cdot 10^{-11}\ \frac{N m^2}{kg^2}$$

$$[G] = \frac{[F]}{\cancel{[M]}\cancel{[M]}}\,[\ell\cdot m^{-2}] = [M\ell t^{-2} L^{2} M^{-2}] = [M^{-1}\ell^{3} t^{-2}]$$

Sistema TERRA-mela



$r_T = 6,37\times 10^{6}$ m

$M_T = 5,98\times 10^{24}$ kg

$$\vec{F}_G = -\vec{u}_r\left[G\frac{M_T m}{(r_T+h)^2}\right]$$ se che h è trascurabile

$$|\vec{F}_g| = \left(\frac{5,98\cdot 10^{24}\,kg\cdot 6,67\cdot 10^{-11}\ \frac{Nm^2}{kg^2}}{(6,673\cdot 10^{6})^2\, m^2}\right) m$$

$$= \underbrace{9,8\ \frac{N}{kg}}_{g}\cdot m$$

le MASSA m_1 ed m_2 sono le SORGENTI dell'interaz. gravitazionale.

↳ e + è grande, + è forte la forza.

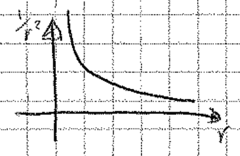
$$F_g = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{u}_r$$

sorgente della forza → sperimentalmente corrisponde con la MASSA INERZIALE

$m_g = m_I$ → sarà la base della relatività: infatti m_I CAMBIA al variare di V.

m: sempre + e F_g è SEMPRE attrattiva

$\frac{1}{r^2}$: + sono lontani, + è debole l'interazione.



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 45 di 231

Su m_1 agisce una forza $\vec{F}_{21}$ dovuta a m_2
Su m_2 agisce una forza $\vec{F}_{12}$ dovuta a m_1

$m_1\ \vec{F}_{12} \longrightarrow \quad \longleftarrow \vec{F}_{21}\ m_2 \qquad \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

$$\begin{cases} \vec{F}_{21} = \dfrac{d\vec{p}_1}{dt} & \text{su } m_1 \\ \vec{F}_{12} = \dfrac{d\vec{p}_2}{dt} & \text{su } m_2 \end{cases}$$

$$\underbrace{\vec{F}_{21} + \vec{F}_{12}}_{0} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \frac{d(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)}{dt} = \vec{0}$$

$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$ qtà di moto totale $\Rightarrow \dfrac{d\vec{P}}{dt} = 0 \rightarrow P$ costante

t, t'

$\vec{p}_1(t) = \vec{p}_1 \quad , \quad \vec{p}_2(t) = \vec{p}_2$
$\vec{p}_1(t') = \vec{p}_1' \quad , \quad \vec{p}_2(t') = \vec{p}_2'$

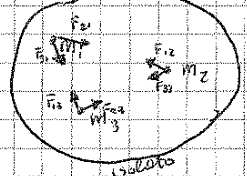
$\vec{P}(t) = \vec{P}(t') \Rightarrow \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2'$

$\Delta\vec{p}_1 = -\Delta\vec{p}_2$

FORZE INTERNE: interazioni fra costituenti di un sistema.

FORZE ESTERNE agiscono ~~dal~~ dall'esterno sul sistema.

quindi in un sistema isolato, agiscono SOLO forze interne



$$\begin{cases} m_1 \rightarrow \vec{F}_1 = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} = \dfrac{d\vec{p}_1}{dt} \\ m_2 \rightarrow \vec{F}_2 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{32} = \dfrac{d\vec{p}_2}{dt} \\ m_3 \rightarrow \vec{F}_3 = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23} = \dfrac{d\vec{p}_3}{dt} \end{cases}$$

$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3$

$\dfrac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = F_{21} + F_{31} + F_{12} + F_{13} + F_{23} + F_{32} = 0$

so che $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$

~~esempio~~: solo 2 CORPI considerati ci sono Forze esterne.

$\vec{P}_t = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$

$\dfrac{d\vec{P}}{dt} = \dfrac{d\vec{p}_1}{dt} + \dfrac{d\vec{p}_2}{dt} = \cancel{\vec{F}_{12}} + \vec{F}_{31} + \cancel{\vec{F}_{21}} + \vec{F}_{32} = \sum F_{\text{esterne sistema}}$

questa conservazione della qtà di moto, è una di quelle leggi mai STATE VIOLATE.

Viene anche sfruttata x l'interazione fra particelle elementari.

$\langle v \rangle = \frac{d}{\Delta t}$

velocità media

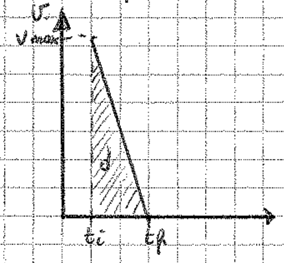
fatto x bene

$v(t) = -At + B$

$v(t_i) = v_{max}$

$v(t_f) = 0$

immagino che la velocità abbia un andamento lineare.



$$d = \int_{t_i}^{t_f} v(t)\,dt$$

$$d = \frac{1}{2}\Delta t \cdot v_{max} \quad \text{(è il triangolo)}$$

$$\Delta t = \frac{2d}{v_{max}} = \frac{0,05\,m}{10\,m/s} = 5 \cdot 10^{-3}\,s$$

$$\langle F \rangle = \frac{|P_f - P_i|}{\Delta t} = \frac{m\,v_{max}}{\Delta t} = \frac{5 \cdot 10}{5 \cdot 10^{-3}} = 10^4\,N$$

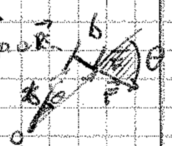
MOMENTO di una FORZA

CORPO ESTESO.

corpo bloccato in O ed applico una forza in A: $\vec F$

quanto è efficace questa forza per far ruotare il corpo?

FORZA + efficace se:
- FORZA + INTENSA
- FORZA + DISTANTE dal centro (BRACCIO della FORZA $\overline{OB}$, rispetto ad O).
- FORZA ad un ANGOLO + a 90° rispetto a $\vec r$.



braccio: $b = r \sin\theta$

τ: Momento della forza:

$$\tau = F r \sin\theta$$

$$\vec\tau = \vec r \times \vec F$$

perpendicolare sia ad $\vec r$, che ad $\vec F$

$$[\tau] = [l][F] = [m \cdot l^2 \cdot t^{-2}]$$

$$S.I. = N \cdot m$$

in componenti, ad esempio

$$\vec r = x\vec u_x + y\vec u_y$$

$$\vec F = F_x \vec u_x + F_y \vec u_y$$

$$\tau = (xF_y - yF_x)\,\vec u_z \quad \text{modulo}$$

Se O non è il centro del corpo, ma un punto generico.

Momento di una forza che agisce su particella in A, rispetto ad O:

$\vec\tau = \vec r \times \vec F$ $\quad \vec r = \overrightarrow{OA}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 49 di 231

② $\vec{F}$ applicato in $\vec{O}$: $(\vec{r}=0)$

$\Rightarrow \boxed{\vec{L}=\vec{O}}$

③ Caso + importante

$\vec{r} \parallel \vec{F} \Rightarrow \vec{L}$ è costante

$\vec{F}$ in direzione radiale

$\vec{F} = F\vec{u}_r$ FORZE CENTRALI
(ad esempio la forza centripeta)

$\Rightarrow \vec{F} = m \cdot \vec{a}_{cp}$

Ma vale anche il contrario:

$$\boxed{\begin{matrix}\vec{L} = cost \neq 0 \\ \vec{r}, \vec{F} \neq 0\end{matrix} \Longleftrightarrow \vec{F} \text{ centrale}}$$

N.B.: $\vec{L} \perp$ piano $(\vec{r}, \vec{v})$

$\vec{L}$ cost $\Rightarrow$ Moto nello stesso piano

Es.: M.C.U.

inoltre

$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v}$

$\frac{d\vec{L}}{dt} = m\vec{r} \times \vec{a}_{cp} = 0$

$a_{cp} = -|a_{cp}|\vec{u}_r$

$\vec{\omega}_{cost} \rightarrow a_{cp} = -\omega^2 R \vec{u}_r$

M.C.U.

circonf. di raggio R

$\vec{L}$ (risp. al centro della circonferenza)

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v} = m\vec{R} \times \underbrace{(\vec{\omega} \times \vec{R})}_{\text{direz. tangenziale}} = mR^2\vec{\omega}$$

direz. di $\vec{\omega}$.

inoltre:

$|\vec{L}| = mR^2\omega$ (i vettori sono tutti $\perp$)

applicazione al MOTO GRAVITAZIONALE

$\vec{F}_g = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{u}_r$

$\vec{F}_r$: forza centrale, anche se non costante

ω varia ma

$\vec{L} = \underline{cost}$. ($\vec{F}_r$ punta sempre verso il centro O) es 2. Atomo di idrogeno.

$$\begin{cases} m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \, kg \\ R_{en} = 5,29 \cdot 10^{-11} \, m \\ \omega \simeq 4,13 \times 10^{16} \, sec \end{cases}$$

$$|\vec{L}_e| = 1,05 \times 10^{-34} \, kg \, m^2/s = \hbar = \frac{h}{2\pi} \leftarrow \text{cost Planck}$$

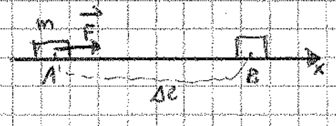
LAVORO ed ENERGIA.

nella dinamica $\vec{v}(t)$

LAVORO compiuto da una forza su di un corpo per produrre uno spostamento.

Caso FACILE:

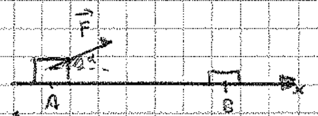
$\vec{F}$ = costante



$$\begin{cases} \vec{F} = F \vec{u}_x \\ \Delta\vec{l} = \Delta l \vec{u}_x \end{cases}$$

$$W_{A,B} = F \Delta l$$

CASO COMPLESSO



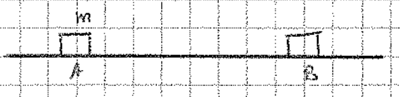
$$\boxed{W_{A,B} = \vec{F} \cdot \Delta\vec{l} = F \cdot \Delta l \cdot \cos\alpha_{\hat{F\Delta l}}}$$

① W: è SCALARE (non vettoriale)

② W dipende da F, Δl, ma anche dall'orientazione fra $\vec{F}$ e $\Delta\vec{l}$

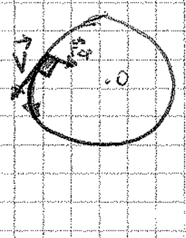
$$\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \vec{F} \perp \Delta\vec{l} \Rightarrow W = 0$$

esempio



$\vec{F}_P$ compie un LAVORO NULLO per Δl ORIZZONTALE

Forze CENTRIPETE: Moto Circolare



$$\Delta\vec{l} = \vec{v} \, dt$$

$$\vec{v} = v \vec{u}_\theta$$

$$\vec{F}_{cp} = |\vec{F}_{cp}| \vec{u}_r$$

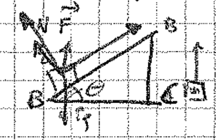
ma $\vec{u}_r \cdot \vec{u}_\theta = 0$ quindi il lavoro è nullo

infatti:

$$W = \vec{F}_{cp} \cdot \Delta\vec{l} = \vec{F}_{cp} \cdot \vec{v} \, dt = 0$$

52

se FACCIO agire la forza così:



F' verticale, con $\vec{v} = cost.$

$W_{C,B}$

$F' = mg \quad F' \parallel \Delta l'$

$W = F' \Delta l \cos 0 = mg \Delta l' = 294 J$

!!! è uguale,
perché $\Delta l' = |BC| = |AB| \sin\theta$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 55 di 231

$$W_{(x_1,x_2)} = \int_{x_1}^{x_2} -k(x-l_0)\,dx = \int_{x_1}^{x_2} (-kx+kl_0)\,dx =$$

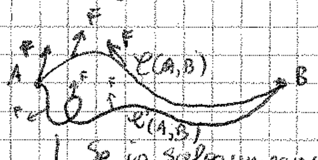
$$\cancel{\left(-\frac{kx^2}{2}+klx\right)\Big|_{x_1}^{x_2}} = \cancel{\frac{k(x_2^2-x_1^2)}{2}+kl(x_2-x_1)}$$

$$-\frac{1}{2}k(x-l_0)^2\Big|_{x_1}^{x_2} =$$

$$\frac{1}{2}k(x_1-l_0)^2-\frac{1}{2}k(x_2-l_0)^2$$

CASO GENERALE

forze variabili sia in intensità che in direzione.

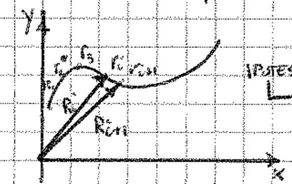


non è neanche detto che la forza sia tangente alla curva.

Se io scelgo un cammino diverso, avrò un lavoro diverso

$W_{\ell(A,B)}$

DECOMPONGO il cammino in INFINITESIMI tratti dritti con forza costante

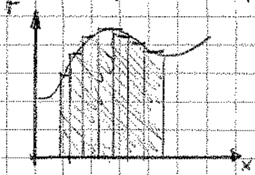


IPOTESI $\begin{cases} d\vec{r}_i = (\vec{r}_{i+1}-\vec{r}_i) \\ \vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}(\vec{r}_i) \text{ in } d\vec{r}_i \end{cases}$

W è definito così: $W = \int \vec{F}\cdot d\vec{\ell}$

$\vec{F}(\vec{r})$: CAMPO VETTORIALE punto diverso in ogni punto dello spazio.

Analogamente a prima:



In modo unidimensionale

$$\int_{x_A}^{x_B} F(x)\,dx$$

~~PIÙ IN GENERALE~~

$$\cancel{\int_A^B \vec{F}(r)\,d\vec{r}}$$

$$\cancel{d\vec{r} = dx\,\vec{u}_x + dy\,\vec{u}_y + dz\,\vec{u}_z}$$

$$\cancel{\vec{F} = F\vec{u}_x}$$

Istante per istante, vedo la componente della forza lungo lo spostamento poi le sommo.

56

~~Esempio~~

Sul piano

$$\vec{F} = \underbrace{F_x(x,y)\vec{u}_x} + F_y(x,y)\vec{u}_y$$

VETTORE COSTANTE $\vec{F} = (2\vec{u}_x + 3\vec{u}_y)N$

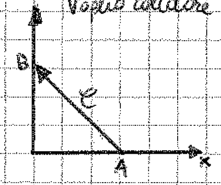
Ma questo vettore è DIVERSO in ogni punto dello SPAZIO;

Esempio:

$$\vec{F} = -ky\vec{u}_x + kx\vec{u}_y$$

$$\begin{cases} F_x(x,y) = -ky \\ F_y(x,y) = kx \end{cases}$$

Voglio calcolare il lavoro compiuto dalla forza,



$A(\ell,0)$ $B(0,\ell)$

DEVO PARAMETRIZZARE la CURVA.

$$y = -x + \ell$$

$$\begin{cases} x(s) = \ell - s \\ y(s) = s \end{cases} \qquad 0 < s < \ell$$

$$dx = -ds$$
$$dy = ds$$

$$F_x(x(s), y(s)) = -ks$$

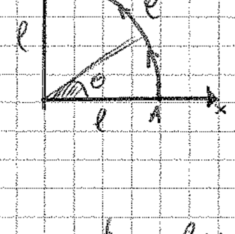
$$F_y(x(s), y(s)) = k(\ell - s)$$

$$W_{\ell(A,B)} = \int_{\ell(A,B)} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\ell(A,B)} [F_x^{(s)} dx + F_y^{(s)} dy]$$

$$= \int_0^\ell [-ks(-ds) + k(\ell - s)(ds)]$$

$$= k\int_0^\ell (\cancel{sds} + \ell ds - \cancel{sds}) = k(\ell \cdot s)\Big|_0^\ell = k\ell^2$$

Ora faccio un altro caso



Parametrizzo in coordinate polari

uso θ come PARAMETRO

$$\ell \begin{cases} x(\theta) = \ell\cos\theta \\ y(\theta) = \ell\sin\theta \end{cases}$$

$$dx = -\ell \operatorname{sen}\theta \, d\theta$$
$$dy = \ell\cos\theta \, d\theta$$

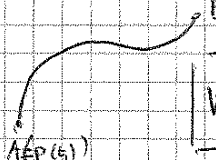
$$F_x = -ky = -k\ell \operatorname{sen}\theta$$
$$F_y = kx = k\ell\cos\theta$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 59 di 231

$\vec{F}(t) = m\,\vec{a} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ usando la legge di Newton.

Conosco le $\vec{F}(t)$

$\boxed{d\vec{r} = \vec{v}\,dt}$ così posso parametrizzare la posizione con il tempo.



$B = P(t_2)$

$A \equiv P(t_1)$

$$\boxed{W_{\mathcal{C}_{A,B}} = \int_{\mathcal{C}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)\,\vec{v}\,dt}$$

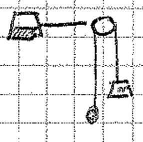
⇒ POTENZA

so $W(t)$; il lavoro in funz. del tempo

DEFINIZIONE

$$\boxed{P = \frac{dW}{dt}}$$

es. carrucola:



qualsiasi t impiego,
W è lo stesso.
MA P: mi dice la RAPIDITÀ con cui
SVOLGO un LAVORO.

P: è scalare

$$[P] : [W t^{-1}] = [M L^2 t^{-3}] = \frac{J}{s}$$

$$S.I.: \quad \frac{J}{s} = W \quad (\text{watt})$$

$1\,W = 1\frac{J}{s}$

KILOWATT ora: lavoro compiuto in un ora da una macchina con P = 1 kWh

$$W_{\mathcal{C}(A(t_0),\,P(t))} = W(t) = \int_{t_0}^{t} \underbrace{\vec{F}(t)\cdot\vec{v}(t)}_{\frac{dW(t)}{dt}}\,dt$$

$$\boxed{P = \vec{F}\cdot\vec{v}}$$

Esempio:

$\vec{F} = F(t)\,\vec{u}_x \qquad F(t) = \alpha t$

su una particella m. inizialmente ferma

m
$v = 0$
$x_0 = 0$

? W compiuto da $\vec{F}$ per spostare m lungo la sua traiettoria tra t_1, t_2

? P di impulso da $\vec{F}$

? // media

60

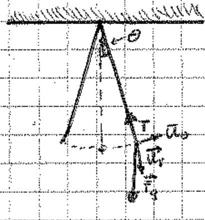
24/04/2012

$W_{\ell(A,B)} = \int_{\ell(A,B)} \vec{F} \cdot d\vec{r}$

$\vec{F}(?)$

2 percorsi diversi danno 2 lavori diversi

PENDOLO



$\vec{F}_g = mg\cos\theta\,\vec{u}_r - mg\,\text{sen}\,\theta\,\vec{u}_\theta$

$\vec{T} = T\,\vec{u}_r$

$T = mg\cos\theta + m\omega^2 l$

$\omega = \frac{d\theta}{dt}$ per piccole oscillaz.

$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t)$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ pulsazione

$s = l\,\theta(t)$

pos. della particella lungo la circonferenza.

$d\vec{r} = \vec{v}\,dt = l\frac{d\theta}{dt}\,dt\,\vec{u}_\theta = l\,d\theta\,\vec{u}_\theta$

$W_{\ell(P_1P_2)} = \int_{\ell(P_1P_2)} \vec{F} \cdot d\vec{r}$

T non compie lavoro (sempre ⊥ al movimento)

$\vec{T} \cdot d\vec{r} = 0$

Consideriamo la componente $\vec{u}_\theta$, l'altra è ⊥

$\vec{F}_p \cdot d\vec{r} = (-mg\,\text{sen}\,\theta\,d\theta\,l)(\underbrace{\vec{u}_\theta \cdot \vec{u}_\theta}_{1})$

$W = \int_{\ell_{P_1P_2}} -mg\,\overbrace{\text{sen}\,\theta}^{\text{COSTANTE}}\,l\,d\theta = -mgl\int_{\theta_1}^{\theta_2} \text{sen}\,\theta\,d\theta$

$= +mgl(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)$

ENERGIA CINETICA

$E_K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$ qtà di moto $\vec{p} = m\vec{v}$

Ricordo che $v^2 = \vec{v}\cdot\vec{v}$ è scalare!

• lavoro ed E_K

$W_{\ell(A,B)} = \int_{\ell(A,B)} \vec{F}\,d\vec{r}$

$$\begin{cases} \vec{F} = m\vec{a} = m\left(\frac{dv}{dr}\vec{u}_r + a_n\vec{u}_n\right) \\ d\vec{r} = \vec{v}\,dt \underset{\text{intrinseche}}{=} v\,\vec{u}_T\,dt \end{cases}$$

$\vec{F}\cdot d\vec{r} = \left(m\frac{dv}{dr}\vec{u}_r + \underbrace{\cancel{m a_n \vec{u}_n}}_{0}\right) v\,\vec{u}_r\,dt$

$= m\,\frac{v\,dv}{dt}\,dt$

$W_{\ell(P_1P_2)} = \int_{\ell(P_1P_2)} m\,v\,\frac{dv}{dt}\,dt = \int_{t_1}^{t_2} m\,v\,\frac{dv}{dt}\,dt$

PENDOLO

$W_{P(A,B)} = mg\ell(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)$

FORZA ELASTICA

$W = \frac{1}{2}k(x_A - \ell_0)^2 - \frac{1}{2}k(x_B - \ell_0)^2$

forze conservative: forze tali che $W_{\ell(A,B)} = W_{\ell'(A,B)} = W_{\ell''(A,B)}$

(Ovvero dipende solo dagli estremi del percorso, non dal percorso stesso)

Inoltre

$W_{\ell''(A,B)} = -W_{\ell(B,A)}$

infine

$W_{\ell(A,B)} + W_{\ell(B,A)} = 0$

per le forze conserv.:

W lungo un cammino chiuso è nullo $(A \to A)$

$\oint_\ell \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ per forze conservative

CIRCUITAZIONE

Es. Forze non conservative: Attrito. Viscoso (dip. da velocità)

forze dissipative: quelle non conservative

$\vec{F}(P, \vec{v})$

PROPRIETÀ delle FORZE CONSERVATIVE.

① $W_{\ell(A,B)} = W_{\ell'(A,B)} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$

② $\oint_\ell \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$

Energia potenziale: esiste solo per forze conservative

$W_{(P_1,P_2)} = E_p(P_1) - E_p(P_2)$

$E_p(\vec{r})$ dipende solo dalla posizione.

es. GRAVITÀ: $E_p = mgy$

es. MOLLA.

③ posso associare l'ENERGIA POTENZIALE.

$E_p'(\vec{r}) = E_p(\vec{r}) + C$

$W_{(r_1,r_2)} = E_p'(r_1) - E_p'(r_2) = E_p(r_1) \cancel{+C} - E_p(r_2) \cancel{-C}$

$= E_p(r_1) - E_p(r_2)$

$\exists\, E_p(\vec{r}) \qquad W_{P(A,B)} = E_p(A) - E_p(B)$

④ $E = E_p(\vec{r}) + E_k(|\vec{v}|) =$ costante

En. meccanica

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 65 di 231

E_k, L, E_p: SCALARI

sintesi:

$\boxed{\forall F}$: $W_{\ell(A,B)} = E_{K,B} - E_{K,A}$

$\boxed{\forall F \text{ conservative}}$: $W_{\ell(A,B)} = E_p(A) - E_p(B)$

↳ Per le forze conservative

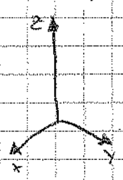
$$E_{KB} - E_{KA} = E_p(A) - E_p(B)$$

CONSERVATIVE.

$$E_{p(A)} + E_{KA} = E_{p(B)} + E_{KB} = E$$

è costante
ENERGIA MECCANICA

$E_p = mgz$



$E_p = mgz$, $E_K = \frac{1}{2}mv^2$

$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgz$

es. voglio calcolare v,

$\begin{cases} t_0 = 0 \\ z_0, v_0 \end{cases}$

$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgz_0 = \frac{1}{2}mv^2(t) + mg\,z(t)$

$v^2(t) = v_0^2 - 2g(z - z_0)$

es. $z_f = 0$ (localizzare

$v = \sqrt{v_0^2 + 2gz_0}$

$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_0 \cos\theta_0 t \\ y(t) = y_0 + v_0 \operatorname{sen}\theta_0 t - \frac{1}{2}g(t)^2 \\ E_p = mgy \end{cases}$

Verifica che E è conservata
cioè $E_k + E_p$ = costante.

FORZA ELASTICA

$x(t) = l_0 + (x_1 - l_0)\cos(\omega_0 t)$ $\quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$v(t) = -\omega_0 (x_1 - l_0)\,\operatorname{sen}(\omega_0 t)$

$E_p(x) = \frac{k}{2}(x - l_0)^2 = \frac{k}{2}(x_1 - l_0)^2\cos^2(\omega_0 t)$

$E_K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\,[\omega_0^2 (x_1 - l_0)^2 \operatorname{sen}^2(\omega_0 t)]$

$= E_p + E_k$

$E = \frac{k}{2}(x_1 - l_0)^2\cos^2(\omega_0 t) + \frac{1}{2}m\left(\omega_0^2 (x_1 - l_0)^2 \operatorname{sen}^2(\omega_0 t)\right)$

$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \rightarrow m\omega_0^2 = k$

$\frac{1}{2}k(x_1 - l_0)^2 \cdot \underbrace{\left(\cos^2(\omega_0 t) + \operatorname{sen}^2(\omega_0 t)\right)}_{1}$

$E = \frac{k}{2}(x_1 - l_0)^2$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 67 di 231

$E_p = Fx$ F: costante

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^{x(t)} \frac{dx}{E - Fx}$$

$z = E - Fx$

$dz = -F dx$

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{1}{F} \int_E^z \frac{-dz}{\sqrt{z}} = -\frac{2}{F}\sqrt{\frac{m}{2}}\left[\sqrt{E-Fx} - \sqrt{E}\right]$$

$F = m \cdot a$

$t = f(x)$

$\downarrow$

$x = f(t)$

$\hookrightarrow \sqrt{E+Fx} = \frac{F}{\sqrt{2m}} t + \sqrt{E}$

$$\cancel{E} + Fx = \frac{F^2}{2m} t^2 + 2F\sqrt{\frac{E}{2m}}\, t + \cancel{E}$$

$$x(t) = \frac{F}{2m} t^2 + 2\sqrt{\frac{E}{2m}} \cdot t$$

$F = ma$

$\frac{F}{m} = a$

$\hookrightarrow x(t) = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t$

$E = \frac{1}{2} m v^2$

$\frac{E}{m} = \frac{1}{2} v^2$

$v_0 t$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 69 di 231

$$= E_p(x, y+dy) + \frac{\partial E_p}{\partial x}dx = \underbrace{x^2}_{f(x)}\overbrace{(y+dy)}^{\text{costante}} + \underbrace{2xy\,dx}_{f'(x)\cdot dx}$$

$$= E_p(x,y) + \frac{\partial E_p}{\partial y}dy + \frac{\partial E_p}{\partial x}dx = \underbrace{x^2y}_{f} + \underbrace{x^2dy}_{\text{der. risp. } y} + \underbrace{2xy\,dx}_{\text{der. risp. } x}$$

DEFINISCO il gradiente

$E_p(x,y,z)$

$$\vec{\nabla}E_p = \left(\frac{\partial E_p}{\partial x}, \frac{\partial E_p}{\partial y}, \frac{\partial E_p}{\partial z}\right) \quad \text{Gradiente}$$

$$\vec{\nabla}E_p = \frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{u}_z$$

FUNZIONE SCALARE, associo un VETTORE $\vec{\nabla}$, che spiega il comportamento nello spazio.

Riprendo prima:

$\vec{F}\cdot d\vec{r} = -dE_p$

$$dE_p = \frac{\partial E_p}{\partial x}dx + \frac{\partial E_p}{\partial y}dy + \frac{\partial E_z}{\partial z}dz = (\vec{\nabla}E_p)\cdot d\vec{r}$$

$d\vec{r} = (dx, dy, dz)$

$\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$

$\vec{F}\,d\vec{r} = F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz$

CONFRONTO le 2 ESPRESSIONI e trovo

$$\boxed{\vec{F} = -\vec{\nabla}E_p}$$

(esempio: FORZE CENTRALI

$\vec{F} = F(r)\,\vec{u}_r$

$\hookrightarrow E_p(r)$

in coordinate sferiche

$$f(r,\theta,\varphi) \Rightarrow df = \frac{\partial f}{\partial r}dr + \frac{\partial f}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial f}{\partial \varphi}d\varphi = \vec{\nabla}f\,d\vec{r}$$

$$dr = dr\,\vec{u}_r + r\,d\theta\,\vec{u}_\theta + r\sin\theta\,d\varphi\,\vec{u}_\varphi$$

i CONFRONTARLE gli $\vec{U}_r$ dello 1° e dello 2°

$\vec{u}_r$: è più ok $\quad$ u_θ: moltiplico sopra e sotto per r e poi esempio u_φ.

$$\vec{\nabla}f = \left(\frac{\partial f}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r\,\text{sen}\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)$$

ora so che $E_p(r) \Leftrightarrow \vec{F} = F(r)\,\vec{u}_r$

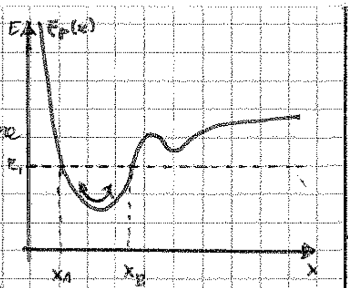
$$\frac{\partial E_p}{\partial r} = -F_r(r)$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial \theta} = 0$$

loscalfo + in alto: • CASO 2

l'energia che ha la particella è sufficiente x farla oscillare



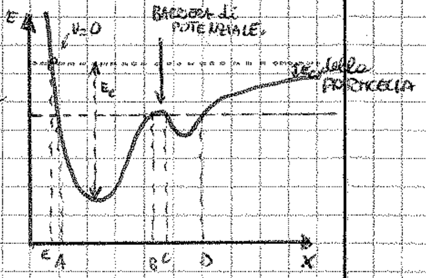
E_1: $E_1 - E_p(x) = +\frac{1}{2} m v^2$

oscilla fra $x_A \leq x \leq x_B$

es. nella Molla: oscilla sempre fra i 2 estremi del movimento

• caso 3:

Sta o fra A e B, o fra C e D.



• caso 4:

$E_4 - E_p(x) = \frac{1}{2} m v^2$

Può andare ad $x \to \infty$,
se arriva al punto E, torna indietro e va a $+\infty$.

Si chiamano CURVE dell'energia potenziale.

Tutto ciò in 1 DIMENSIONE.

Nelle forze centrali: in un PIANO

$E = \frac{1}{2} m v^2 + E_p(r)$ ← 1° COSTANTE.

$L = m r^2 \frac{d\theta}{dt}$ ← 2° costante.

$\Downarrow$

$\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{m r^2}$

$\vec{v} = \frac{dr}{dt} \vec{u}_r + r \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta$

$v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{m^2 r^{\cancel{4}\,2}}$

$\hookrightarrow v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{m^2 r^2}$

$\hookrightarrow E = \frac{1}{2} m \underbrace{\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{m^2 r^2}\right]}_{v^2} + E_p(r) = \frac{1}{2} m \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \overset{L \text{ cost.}}{\frac{L^2}{2 m r^2}} + E_p(r)$

DIPENDE SOLO DA r

~~DIP~~

$\frac{1}{2} m \left(\frac{dr}{dt}\right) = E - \underbrace{\left(E_p(r) + \frac{L^2}{2 m r^2}\right)}_{E_p \text{ efficace}}$ ← Em CENTRIFUGA

E_p efficace sta in funzione di (r)

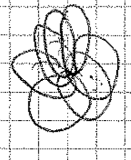
$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{E - E_p^{eff}(r)}$

$\int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - E_p^{eff}(r))}} = \int_0^t dt \Rightarrow t(r) \Rightarrow r(t)$

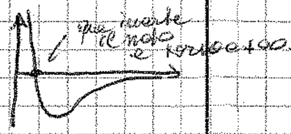
Ricordo che $\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{m r^2(t)}$ $\Rightarrow \begin{cases} r(t) \\ \theta(t) \Rightarrow t \end{cases}$

integro

+ in dettaglio l'orbita ruota così:

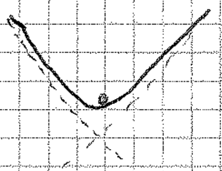


• Se $E = 0 \Rightarrow$ PARABOLA



Se $E > 0$

moto IPERBOLICO



NOTA E_p: Posso conoscere molto sul moto.

in E_0: NON è fermo, si muove

$\times$ E assoluta $\dfrac{L^2}{2mr^2} \rightarrow \frac{1}{2} m r^2 \omega^2$

FORZE NON CONSERVATIVE.

Attriti in particolare.

$$\vec{F}_{risultante} = \sum_i \boxed{\text{Forze conservative}} + \sum_j \boxed{\text{Forze Non conservative}}$$

$$W_{\ell(A,B)} = \int_{\ell(A,B)} \vec{F}_{risultante} \cdot d\vec{r} = \sum_i \int_{\ell_{A,B}} \vec{F}_{cons} \cdot d\vec{r} + \sum_j \int_{\ell_{A,B}} \vec{F}_{nc} \cdot d\vec{r}$$

$E_p = \sum_i E_p^i$

$\vec{\nabla} E_{p,i} = -\vec{F}_{cons}$

$$= E_p(A) - E_p(B) + W(F_{non\ conservative})$$

$$= E_{K,B} - E_{K,A}$$

Ho OTTENUTO:

$$\boxed{E_{K,B} - E_{K,A} = E_p(A) - E_p(B) + W(f_{non\ cons.})}$$

$$W(f_{non\ cons.}) = E_{K,B} + E_{p,B} - \left[E_{K,A} + E_p(A)\right]$$

$= E_B - E_A$

Var di En Meccanica.

$\Rightarrow$ E non è + conservata.

(Ma quella Meccanica:
Qualche parte si dissipa in lavoro) $\Rightarrow$ CALORE.

TUTTE le 4 forze SONO CONSERVATIVE
- Gravità
- E_m
- Nuc forte
- Nuc debole

Quelle non conservative, lo sono a livello MACROSCOPICO, a livello microscopico sono tutte conservative.

76

Inoltre DENSITÀ PUNTIFORME.

$$\rho(\vec{r}) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} \Rightarrow \rho(\vec{r}) = \frac{dm}{dV}$$ PER CORPI non OMOGENEI

$\Delta V = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$

$dV = dx \cdot dy \cdot dz$

$$M = \sum m_i \rightarrow M = \int_{corpo} dm = \int \rho(\vec{r})\, dV$$

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M} \rightarrow = \frac{1}{M} \int_V \vec{r}\, dm =$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M} \int_V \vec{r} \cdot \rho(\vec{r})\, dV}$$

Relazione fra i MOTI:

$(m_i, \vec{r}_i)$

$$\boxed{\vec{V}_{CM}} = \frac{d\vec{r}_{cm}}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{m_i \vec{v}_i}_{\text{quantità di moto}} = \boxed{\frac{1}{M} \sum_i \vec{P}_i}$$

$$\vec{V}_{cm} = \frac{1}{M} \sum \vec{P}_i$$

$$\hookrightarrow \boxed{\vec{P} = M \cdot \vec{V}_{CM}}$$

→ fino ad ora parlavamo della Velocità del C.M.

RICORDO che nei SISTEMI ISOLATI:

$\vec{P}$ = costante.

Quindi in un <u>S.R. INERZIALE</u>

$\Rightarrow$ <u>$\vec{U}_{cm}$ è COSTANTE</u>

* definisco un S.R. Solidale con C.M.:

S.r. centro di masse, con $\vec{r}_{C.M.} = 0$

→ Qui, in un Sist. isolato, $\vec{P} = 0$

$\vec{F}_{int}$, $\vec{F}_{ext}$

↑

Interazione fra le COSTITUENTI del sistema.

$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$ per la III legge di Newton.

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\sum_i \vec{F}_i^{int} = 0}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{ext}} \rightarrow \boxed{= M \cdot \vec{a}_{CM}}$$

↑ il C.M. è come una PARTICELLA PUNTIFORME!!

78

se scelgo un S.R con p^+ nell'origine, con protone fermo ($\vec{v}_p = 0$)

$e^- \to \vec{r}_e$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_e \vec{r}_e + m_p \vec{r}_p}{M} = \frac{m_e}{M}\vec{r}_e \simeq \vec{0}$$

molto "attenuato"

CASO di + CORPI : voglio vedere un S.R visto dal C.M.

$\vec{r}_i$, m_i

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M}\sum m_i \vec{r}_i$$

RIF. GENERICO — POS. C.M.

$$\vec{r}_i' = \vec{r}_i - \vec{r}_{CM} = \vec{r}_i - \frac{1}{M}(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2)$$

RIF. C.M

$$\vec{r}_1' = \frac{(m_1+m_2)\vec{r}_1 - m_1\vec{r}_1 - m_2\vec{r}_2}{M}$$

$$= \frac{m_2}{M}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

$$\vec{r}_2' = \frac{(m_1+m_2)\vec{r}_2 - m_1\vec{r}_1 - m_2\vec{r}_2}{M}$$

$$= -\frac{m_1}{M}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

POSIZIONE RELATIVA
$$\begin{cases} \vec{r}_2' = -\frac{m_1}{M}\vec{r}_{12} \\ \vec{r}_1' = +\frac{m_2}{M}\vec{r}_{12} \end{cases} \qquad \boxed{\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2}$$

VELOCITÀ RELATIVA
$$\begin{cases} \vec{v}_1' = \vec{v}_1 - \vec{v}_{CM} = +\frac{m_2}{M}\vec{v}_{12} \\ \vec{v}_2' = \vec{v}_2 - \vec{v}_{cm} = -\frac{m_1}{M}\vec{v}_{12} \end{cases}$$

QTÀ DI MOTO RELATIVA
$$\begin{cases} \vec{P}_1' = m_1\vec{v}_1' = \frac{m_1 m_2}{M}\vec{v}_{12} = \mu\vec{v}_{12} \\ \vec{P}_2' = m_2\vec{v}_2' = -\frac{m_1 m_2}{M}\vec{v}_{12} = -\mu\vec{v}_{12} \end{cases}$$

qtà di moto uguali ed opposte.

→ RELATIVAMENTE a $\boxed{C.M.\ \vec{P}_1' = -\vec{P}_2'}$

ENERGIA CINETICA

$$E_k^{int} = \frac{1}{2}m_1(\vec{v}_1')^2 + \frac{1}{2}m_2(\vec{v}_2')^2 = \frac{P_1'^2}{2m_1} + \frac{P_2'^2}{2m_2}$$

$$= \frac{P^2}{2}\underbrace{\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)}_{\frac{1}{\mu}}$$

$\boxed{|P_1'| = |P_2'| = P}$

⇓

$$E_k^{int} = \frac{P^2}{2\mu} = \frac{P_1'^2}{2\mu}$$

En. cinetica totale: $E_k = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2$

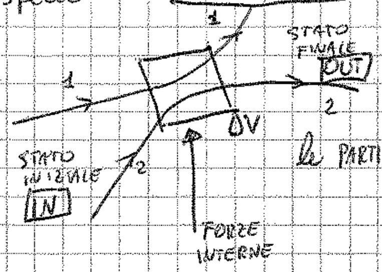
$\vec{v}_1 = \vec{v}_1' + \vec{v}_{CM} \to v_1^2 = (v_1')^2 + v_{CM}^2 + 2\vec{v}_1' \cdot \vec{v}_{CM}$

$v_2^2 = (v_2')^2 + v_{cm}^2 + 2 v_2' v_{cm}$

80

URTI

Specie in SISTEMI ISOLATI.



le PARTICELLE sono libere.

$\boxed{IN}$: $\vec{P}_i^{in}$, $\vec{E}_k^{in}$ libere

$\vec{P}^{in}_{costante}$

$\boxed{OUT}$ $\vec{P}_\alpha^{in}$, $\vec{E}_k^{out}$ libere

Non so cosa succede certamente nel DV,
Al CERN, ci stanno pensando.

NOI STUDIAMO il Prima ed il dopo:

Ma le particelle, cambiano NATURA, NUMERO,
quindi questo studio può variare molto.

So solo che RIMANGONO LIBERE.

sistemi isolati, quindi: $\vec{P}_{in} = \vec{P}_{out}$

$$\vec{E}_k^{in} = \sum_i E_{k,i}^{in} = \sum_i \frac{(\vec{P}_i^{in})^2}{2m_i}$$

$$\vec{E}_k^{out} = \sum_\alpha E_{k,\alpha}^{out} = \sum_\alpha \frac{(P_\alpha^{out})^2}{2m_\alpha}$$

DISSIPAZIONE di Ek / CALORE $\rightarrow Q = E_k^{out} - E_k^{in}$

- URTO ELASTICO $Q=0 \rightarrow$ è conservata
  $\Rightarrow E_k^{in} = E_k^{out}$
- URTO ANELASTICO
  $Q \neq 0$ Urto ANELASTICO
  - $Q>0 \rightarrow E_k$ AUMENTA $\rightarrow$ Esotermico
  - $Q<0 \rightarrow E_k$ DIMINUISCE $\rightarrow$ Endotermico.

⚠ $\vec{P}$ è SEMPRE CONSERVATA!!

è E_k che può cambiare, calcolare

82

conservazione di P

$$m_1 v_1^{in} + m_2 v_2^{in} = m_1 v_1^{out} + m_2 v_2^{out}$$

cons. di E_K (dato che è elastico)

$$\frac{1}{2} m_1 (v_1^{in})^2 + \frac{1}{2} m_2 (v_2^{in})^2 = \frac{1}{2} m_1 (v_1^{out})^2 + \frac{1}{2} m_2 (v_2^{out})^2$$

2 equazioni, e 2 incognite (v_1^{out}, v_2^{out})

↳ Sistema completamente determinato.

Risolvo il sistema:

$$\begin{cases} m_1 (v_1^{in} - v_1^{out}) = m_2 (v_2^{out} - v_2^{in}) \\ \frac{1}{2} m_1 (v_1^{in\,2} - v_1^{out\,2}) = \frac{1}{2} m_2 (v_2^{out\,2} - v_2^{in\,2}) \end{cases}$$

$$\hookrightarrow \frac{1}{2} m_1 (v_1^{in} + v_1^{out})(v_1^{in} - v_1^{out}) = \frac{m_2}{2} (v_2^{out} + v_2^{in})(v_2^{out} - v_2^{in})$$

$\Downarrow$

la 2° eq la riscrivo sostituendo

$$\frac{1}{2} m_2 (v_2^{out} - v_2^{in})(v_1^{in} + v_1^{out}) = \frac{1}{2} m_2 (v_2^{out} - v_2^{in})(v_2^{out} + v_2^{in})$$

il sistema risulta

$$\begin{cases} v_1^{in} + v_1^{out} = v_2^{out} + v_2^{in} \\ v_1^{in} - v_1^{out} = \frac{m_2}{m_1} (v_2^{out} - v_2^{in}) \end{cases}$$

Soluz. ↳
$$\begin{cases} v_1^{out} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1^{in} + \frac{2 m_2}{m_1 + m_2} v_2^{in} \\ v_2^{out} = \frac{2 m_1}{m_1 + m_2} v_1^{in} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2^{in} \end{cases}$$

CASI PARTICOLARI

- stessa massa

  $m_1 = m_2 = m$

  le relazioni diventano:

  $$\begin{cases} v_1^{out} = v_2^{in} \\ v_2^{out} = v_1^{in} \end{cases}$$

  quindi SCAMBIO di velocità.

- $m_1 \gg m_2$

  la relaz. diventa

  $$\begin{cases} v_1^{out} \simeq v_1^{in} & \leftarrow \text{la 1 sitiene la sua velocità} \\ v_2^{out} \simeq 2 v_1^{in} - v_2^{in} = v_1^{in} + \overbrace{(v_1^{in} - v_2^{in})}^{\text{vel. relativa } v_1^{in}\ v_2^{in}} \end{cases}$$

  la 2 viene spostata via.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 83 di 231

Succede che P è conservata:

$$P_{in} = (M+N\cdot m)\vec{v}_0$$

$$P_{out} = \cancel{0} - N m V_{rel}$$

$$\boxed{V_{rel} = -\frac{M+Nm}{Nm} v_0}$$

Mi chiedo se sia elastico o anelastico.

è ANELASTICO, perché muovendosi le persone si "staccano" dalla posizione iniziale
(come un urto "al contrario")

quanta energia è Dissipata?:

$$Q = \frac{1}{2} N m v_{rel}^2 - \frac{1}{2}(M+Nm)v_0^2$$

$$= \frac{1}{2}\left[Nm \cdot \frac{(M+Nm)^2}{(Nm)^2} \cdot v_0^2 - (M+Nm) v_0^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}(M+Nm)v_0^2\left[\frac{M+Nm}{Nm} - \cancel{1}\right]$$

$$= \frac{M}{2}\frac{(M+Nm)}{Nm} v_0^2 > 0.$$

Se il treno non si fosse fermato non potevamo risolverlo, ben incognite di troppo.

URTI 2DIMENSIONI

Casi limite

a) urto completamente ANELASTICO.

$$m_1\vec{v}_1^{in} + m_2\vec{v}_2^{in} = (m_1+m_2)\vec{v}_{f}^{out}$$

Sono, in realtà, 2 equazioni:

$$\begin{cases} P_x^{in} = P_x^{out} \\ P_y^{in} = P_y^{out} \end{cases}$$

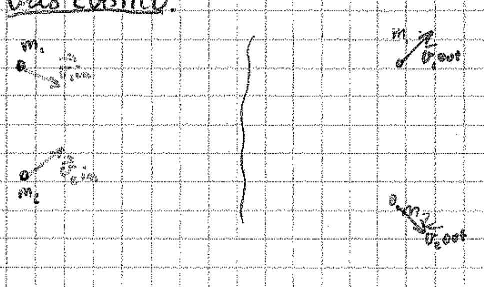
ma anche 2 incognite (P_x^{out}, P_y^{out})

Problema completamente determinato da con $\vec{P}$

$$\vec{v}_{out} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2} = \vec{v}_{CM}$$

Calcolo anche Q.

b) Urto ELASTICO.



Ho 4 incognite:

$v_{1x}^{out}, v_{2x}^{out}, v_{1y}^{out}, v_{2y}^{out}$.

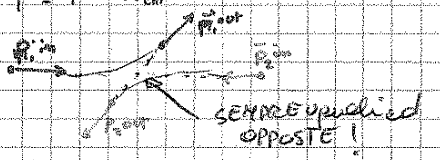
ora valuto il tutto usando come S.R
il centro di massa.

$$\overline{v_{CM}} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_{CM}$$

$$\begin{cases} \vec{P}_1' = \mu \, \vec{v}_{12} \\ \vec{P}_2' = -\vec{P}_1 \end{cases}$$

$$\vec{P}' = \vec{P} - M \vec{v}_{CM}$$



$$\begin{cases} \vec{P}_1'^{\,in} + \vec{P}_2'^{\,in} = 0 \\ \vec{P}_1'^{\,out} + \vec{P}_2'^{\,out} = 0 \end{cases}$$

ora posso trovare $\overline{P_1}$ in funzione di $\overline{P_2}$

Se l'urto è ANELASTICO, le devo Misurare, non riesco a trovarle.

Se l'urto è Elastico.

$$\frac{(P_1'^{\,in})^2}{2m_1} + \frac{(P_2'^{\,in})^2}{2m_1} =$$

ricordando che

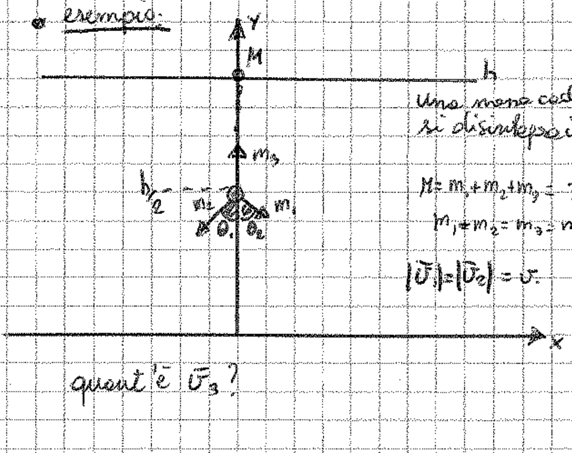
$$E_{K\,int} = \frac{1}{2}\mu v_{12}^2 = \frac{P_1'^2}{2m_1} + \frac{P_2'^2}{2m_2} = \frac{1}{2\mu} P_1'^2$$

arrivo a

$$E_K^{int} = \boxed{\frac{1}{2\mu}(P_1'^{\,in})^2 = \frac{1}{2\mu}(P_1'^{\,out})^2} = E_K^{out}$$

ciò che ancora non so, è l'ANGOLO con il quale si muovono le particelle

• esempio:



Una massa cade e si disintegra in 3 pezzi.

$M = m_1 + m_2 + m_3 = 3m$

$m_1 = m_2 = m_3 = m$

$|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = v$

quant'è $\vec{v}_3$?

88

Se il sistema NON è ISOLATO.

Su m_1: $\vec{F}_1^{ext}$, $\vec{F}_{12}$

Su m_2: $\vec{F}_2^{ext}$, $\vec{F}_{21}$

quindi

$\tau_1 = \vec{r}_1 \times (\vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_{12})$

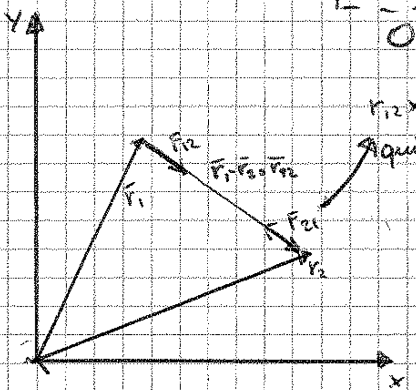
$\tau_2 = \vec{r}_2 \times (\vec{F}_2^{ext} + \underbrace{\vec{F}_{21}}_{= -\vec{F}_{12}})$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r}_1 \times (\vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_{12}) + \vec{r}_2 (\vec{F}_2^{ext} - \vec{F}_{12})$$

$$= \vec{r}_1 \times \vec{F}_1^{ext} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2^{ext} + \underbrace{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_{12}}_{0}$$

$r_{12} \times \vec{F}_{12} = 0$, poiché sono //

quindi



LE FORZE interne NON CONTRIBUISCONO alla var del momento angolare.

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}_1^{ext} + \vec{\tau}_2^{ext} = \vec{\tau}^{ext}$$

ORA NON CALCOLO L rispetto all'ORIGINE, ma rispetto al C.M. del sistema.

$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$, $\quad r_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$

posizioni

$$\begin{cases} \vec{r}_1' = \vec{r}_1 - \vec{r}_{CM} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}_{12} \\ \vec{r}_2' = \vec{r}_2 - \vec{r}_{CM} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}_{12} \end{cases}$$

come visto in prec.

p.

$\vec{P}_1' = m_1 (\vec{v}_1 - \vec{v}_{cm}) = \mu \vec{v}_{12} = -\vec{P}_2'$

Momento angolare rispetto a c.m.

$\vec{L}_c = \vec{r}_1' \times \vec{P}_1' + \vec{r}_2' \times \underset{(-\vec{P}_1')}{\vec{P}_2'}$ ma $\vec{P}_1' = -\vec{P}_2'$

$= (\vec{r}_1' - \vec{r}_2') \times \vec{P}_1'$

$= \vec{r}_{12} \times (\mu \vec{v}_{12}')$

idem — in realtà $\vec{v}_{12}$ questo non serve, v relativa sempre uguale per $\forall$ S.R.

$$\boxed{\vec{L} = \mu \vec{r}_{12} \times \vec{v}_{12}}$$

90

11/05/2012

$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{p}_i$ ← q.tà di moto

$\vec{L}_c = \sum_i \vec{r}_i' \times \vec{p}_i'$

RISP. al CENTRO di MASSA.

$\begin{cases} \vec{r}_i' = \vec{r}_i - \vec{r}_{cm} \\ \vec{p}_i' = \vec{p}_i - m_i \vec{v}_{cm} \end{cases}$

se ho 2 CORPI:

$\vec{L}_c = \mu \cdot \vec{r}_{12} \times \vec{v}_{12}$

RELAZIONE fra PDV in C.M. ed esterno.

$$\begin{cases} \vec{L} = \vec{L}_c + \vec{r}_{cm} \times \vec{P} \leftarrow \text{Verificare.} \\ E_k = E_{ki}^{int} + \frac{1}{2} M v_{cm}^2 \\ \vec{P} = M \vec{v}_{cm} \end{cases}$$

In questo modo riduco un sistema complesso ad un ~~punto~~ MATERIALE (in C.M) connoto a varie energie interne

esempio:

(PALLINA DA TENNIS.)

Momento ANGOLARE

(Moto del CM. pallina + ROTAZIONE su SE STESSA.)

$$\vec{\tau}^{ext} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{L}_c}{dt} + \underbrace{\frac{d\vec{r}_{cm}}{dt} \times \vec{P}}_{0} + \vec{r}_{cm} \times \underbrace{\frac{d\vec{P}}{dt}}_{F_{ext}}$$

quindi

$$\vec{\tau}^{ext} = \frac{d\vec{L}_c}{dt} + \vec{r}_{cm} \times \vec{F}_{ext}$$

ma anche (x 2 corpi)

$$\vec{\tau}^{ext} = \sum_{i=1}^{2} \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{ext}$$

$\vec{r}_i = \vec{r}_i' + \vec{r}_{cm}$

$$\hookrightarrow \vec{\tau}_{ext} = \underbrace{(\vec{r}_1' + \vec{r}_{cm}) \times \vec{F}_1^{ext}}_{\text{forza torcente sul primo punto}} + \underbrace{(\vec{r}_2' + \vec{r}_{cm}) \times \vec{F}_2^{ext}}_{\text{forza torcente sul secondo punto.}}$$

$$= \underbrace{\vec{r}_1' \times \vec{F}_1^{ext} + \vec{r}_2' \times \vec{F}_2^{ext}}_{\text{forza torcente risp. al Ce. M.}} + \vec{r}_{cm} \times (\vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_2^{ext})$$

$$\mu = \frac{m_{sole} \cdot m_{terra}}{m_{sole} + m_{terra}} \simeq m_{terra}$$

$$\vec{r}_S = 0$$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\vec{r}_S M_S + \vec{r}_T M_T}{M_S + M_T} = R_T \frac{M_T}{M_S} \sim \underbrace{3 \times 10^{-6}}_{} r_T ; \quad r_T = 1{,}5 \cdot 10^{11}\, m$$

↳ Terra rispetto sole

Vettore pos. Terra:

$$\vec{R}'_T = \vec{R}_T - \vec{R}_{CM} \simeq \vec{R}_T$$ (è un milionesimo) trascurabile

Vett. pos. SOLE

$$\vec{R}'_S = 0 - \vec{R}_{CM} = -3 \times 10^{-6} \vec{R}_T$$

$$|\vec{R}'_S| = 3 \times 10^{-6} \cdot 1{,}5 \times 10^{11}\, m = 4{,}5 \cdot 10^{5}\, m$$

sembra che sia una grande misura

ma rispetto ai $10^9\, m$ del sole, non è niente!

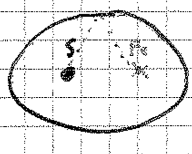
KEPLERO

leggi di Tycho-Brahe

↳ FORMULA la CINEMATICA del MOTO PLANETARIO

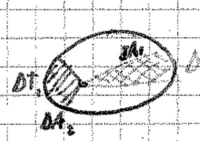
- 1° legge:

I pianeti descrivono ORBITE ELLITTICHE, di cui il Sole occupa uno dei 2 FUOCHI.



- 2° Legge:

La VELOCITÀ AREOLARE è COSTANTE



Il VETTORE POSIZIONE del pianeta rispetto al sole descrive aree uguali in tempi uguali.

$$A(t) \quad \frac{dA}{dt} = cost. \longleftrightarrow \vec{L} = cost.$$

$$\frac{\Delta A_1}{\Delta t} = \frac{\Delta A_2}{\Delta t}$$

- 3° Legge

I quadrati dei ~~raggi medi~~ Periodi di Rivol. delle orbite sono PROPORZIONALI ai CUBI delle SEMIASSI MAGGIORI

$$T^2 = k a^3 \cdots\cdots$$ 

NEWTON
Prende

dalla 1° legge!

↳ Scegliamo un'orbita circolare

dalla 2° legge:

la FORZA deve essere **centripeta**

$\vec{F}_g = m \cdot \vec{a}_{cp}$

$\mu \simeq m$

quindi:

$\cancel{m} \cdot M_S \cdot f(r) = \cancel{m} \frac{v^2}{r}$

so che $\boxed{v = \omega \cdot r = \frac{2\pi}{T} r}$

quindi $M_S \cdot f(r) = \frac{4\pi^2}{T^2} r$

dalla 3° legge:

$T^2 = k r^3$ ← x una CIRCONFERENZA.

$f(r) = \frac{1}{M_S} \frac{4\pi^2}{k r^3} \cdot r = \frac{4\pi^2}{k M_S} \cdot \frac{1}{r^2}$

e **K?** era già noto dalle osservazioni precedenti!

$F(r) = M_S \cdot m \underbrace{\frac{4\pi^2}{k M_S}}_{G M_S m} \cdot \frac{1}{r^2}$

confronto con

$F = -G \frac{Mm}{r^2}$

Trovo che $G = \frac{4\pi^2}{k M_S}$

Il Modo è proprio la FORZA CENTRIPETA.

VERIFICA

ho controllato nel SIST. TERRA LUNA

① $F_{TL} = G \frac{M_T M_L}{r_{TL}^2} = M_L a_{cp}^L$

② $F_{TT} = G \frac{M_T \cdot m}{R_T^2} = mg$

Conoscevo che $R_L = 3{,}84 \times 10^8 M$

$R_T = 6{,}37 \times 10^{?} M$.

$a_{cp}^L = 2{,}72 \times 10^{-3}\ m/s^2$

$g = 9{,}8\ m/s^2$

$\frac{①}{②}$ $\frac{R_T^2}{r_{TL}^2} = \frac{a_{cp}^L}{g} = \frac{1}{3600}$ e così ho verificato

so che $\frac{R_T^2}{R_{TL}^2} \simeq 60$

IMPORTANTE:

$r(\theta) = \frac{\varepsilon d}{1+\varepsilon\cos\theta}$ è una CONICA

quindi 4 tipi (cerchio, ellisse, parabola, iperbole)

ε: POSITIVO x costruzione.

<1 se E è negativa

$=1$ se $E=0$

>1 se $E>0$.

	circonferenza	ellisse	parabola	iperbole
E	<0	<0	$=0$	>0
ε	0	<1	1	>1

$E<0$: ORBITE CHIUSE!

$\varepsilon \cdot d$ è a sua volta costante:

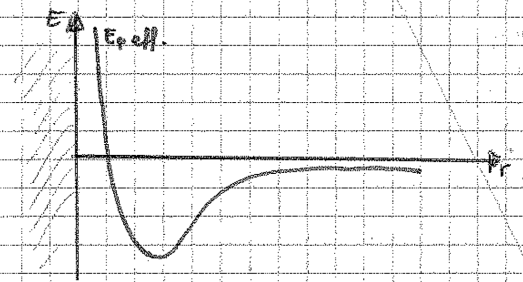
$\varepsilon \cdot d = \frac{L}{m\gamma} = \text{cost} \rightarrow \varepsilon = 0 \Rightarrow r(\theta) = \text{cost}$

ECCENTRICITÀ [illegible] orbita

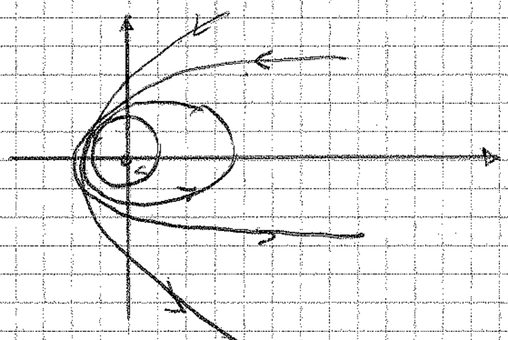
per confronto $\varepsilon_T \doteq 0{,}017$

$\varepsilon_{plutone} \simeq 0{,}2$

Commento se E:



DISEGNO delle ORBITE:



99