NUMERO : 439

DATA : 10/11/2013

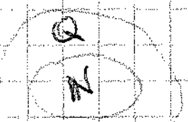
A P P U N T I

STUDENTE : Di Biase

MATERIA : Analisi Matematica I
Prof. Mazzi

INSIEMI

$\mathbb{N}$ → NATURALI
$\mathbb{Z}$ → RELATIVI
$\mathbb{Q}$ → RAZIONALI
$\mathbb{R}$ → REALI



$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$ (ogni elemento di $\mathbb{N}$ appartiene a Q)
ma almeno 1 elemento di Q non è in $\mathbb{N}$.

$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Q}$ (non possono coincidere!)

ϕ = insieme vuoto

X dei num. naturali pari $\{n \in \mathbb{N} : n = 2K,\ K \in \mathbb{N}\}$

- INSIEME delle PARTI: somma di tutti gli insiemi

$X \Rightarrow \mathcal{P}(X) = 2^X$ $\qquad \mathcal{P}(X) = \{\phi, X, \text{tutti gli insiemi propri di } X\}$

Es: $X = \{a, b, c\}$ $\qquad \mathcal{P}(X) = \{\phi, X, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}\}$

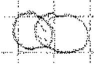
$\mathcal{P}(X)$ ha 8 elementi, dove $8 = 2^3$!

- Si dice CARDINALITÀ DI UN INSIEME il numero degli elementi di X
- Il COMPLEMENTARE indica gli elementi di un insieme X che non appartengono ad A ($\complement_X A = X \setminus A$)

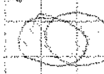
dato $A \subseteq X$ sarà $\{x \in X : x \notin A\}$

- L'INTERSEZIONE indica gli elementi che appartengono sia ad A che

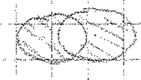
$A \cap B = \{x : x \in A, x \in B\}$ o $A \cap \complement_X A = \phi$



- $A \cup B = \{x \in A \text{ o } x \in B\}$ → UNIONE

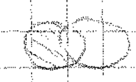


- $A \triangle B = (B \setminus A) \cup (A \setminus B) = (A \cup B) \setminus (A \cup B)$



- La DIFFERENZA indica gli elementi di A meno quelli di B

$A \setminus B = \{x \in A \text{ e } x \notin B\} = A \setminus (A \cap B) = \complement_A (A \cap B)$



- PROPRIETÀ BOOLEANE

$A \cap (\complement_X A) = \phi$ o $A \cup (\complement_X A) = X$

- PROPRIETÀ dei SEGNI

$A \cap B = B \cap A$ COMMUTATIVA $A \cup B = B \cup A$

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ ASSOCIATIVA $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup$

$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
DISTRIBUTIVA
$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

INSIEMI NUMERICI

Si prende come riferimento 0 e l'unità (1)

- $\mathbb{N}$

$m+n=n+m$ $\quad m\cdot n=n\cdot m$ COMMUTATIVA

$(m+n)+q=m+(n+q)$ ASSOCIATIVA

$\exists\, 0 \quad \forall\, m \in \mathbb{N}$ $\quad m\cdot 1=m$ NUMERI NEUTRI

$a(b+c)=ab+ac$ DISTRIBUTIVA

- $\mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}=\{0,\pm1,\pm2\ldots\}$ $\quad \forall\, m\in\mathbb{Z},\ \exists\, m'\in\mathbb{Z}\quad m+m'=0\quad m'=-m$

- $\mathbb{Q}$ (INTERI, DECIMALI LIMITATI, DECIMALI ILLIMITATI PERIODICI)

$\mathbb{Q}=\left\{\frac{p}{q},\ q\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\ p\in\mathbb{Z}\right\}$ $\qquad \mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}\qquad m=\frac{m}{1}$

$\frac{p}{q}=\frac{p_1\cdot p_2}{p_1\cdot q_2}$ → RIDOTTO AI MINIMI TERMINI $\qquad q\neq0\quad p:q=x \iff x\cdot q=p$

PRODOTTO: $\forall\, r\in\mathbb{Q},\ r\neq0\quad \exists\, s\in\mathbb{Q}:\ r\cdot s=1$

$r=\frac{p}{q}\implies s=\frac{q}{p}$

- Preso un intervallo $r,s\in\mathbb{Q}$ ci sono infiniti NUMERI RAZIONALI
es. IPOTENUSA del TRIANGOLO RETTANGOLO

TEOREMA (esistono anche num. non razionali): se $d^2=2\Rightarrow d=\sqrt2$ ∉

DIM. PER ASSURDO $d^2=2$ VERO e assumiamo vero che $\sqrt2$ ∈

$\sqrt2$ è razionale $\exists\, p\in\mathbb{N},\ \exists\, q\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$

tale che $\frac{p}{q}=\sqrt2$ p e q non hanno fattori in comune

- Moltiplico tutto x n $\quad p=\sqrt2 q\quad p^2=(\sqrt2 q)^2=(\sqrt2)^2q^2=2q^2$

$\Rightarrow p^2=2q^2\Rightarrow p^2$ È PARI

$p\cdot p=2\, q\cdot q\Rightarrow$ poiché p è pari $\exists\, K\in\mathbb{N},\ \boxed{p=2K}\Rightarrow$

$\Rightarrow p^2=2^2\cdot K^2\qquad 2q^2\Rightarrow q^2=2k^2\quad q$ è pari, cioè

$\exists\, k\in\mathbb{N},\ \boxed{q=2k}\Rightarrow$ P E Q HANNO UN FATTORE IN COMUNE (CONTRADDIZIONE)

- $\mathbb{R}$ (DECIMALI ILLIMITATI, es. $\sqrt2,\pi$)

IRRAZIONALI → numeri $x\in\mathbb{R}\wedge x\notin\mathbb{Q}$

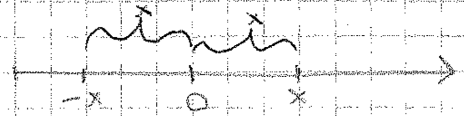
numeri TRASCENDENTI (π, e)

numeri ALGEBRICI $x^2=2$ → si ottengono da coeff. N

- ORDINAMENTO $\quad\forall\, x,y\ \mathbb{R},\ x\neq y\quad x<y\quad x<y\iff x-y<0$

VALORE ASSOLUTO

$x \in \mathbb{R}$ $\quad |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$



$|x|$ indica la DISTANZA dall'origine

$\boxed{0! = 1, \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}}$

• PROPRIETÀ

① $|x| = |-x| \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

② $|x \cdot y| = |x| \cdot |y| \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$

③ $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$

④ (TRIANGOLARE) $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$

$|x \pm y| \leq |x| + |y|$ $\qquad |x| = |x - 0| \qquad |x - y| = |y - x|$

• DISEQUAZIONI

ⓐ $|x| \leq a \quad x \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R}$

1) $a < 0 \Rightarrow \emptyset \quad \nexists\, x \in \mathbb{R}$

2) $a = 0 \Rightarrow x = 0$

3) $a > 0 \Rightarrow -a \leq x \leq a$

ⓑ $|x| \geq a \quad x \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R}$

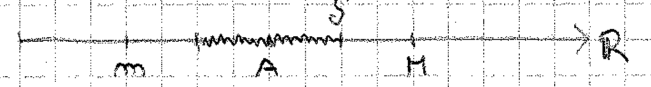
1) $a < 0 \Rightarrow \forall\, x \in \mathbb{R}$

2) $a = 0 \Rightarrow \forall\, x \in \mathbb{R}$

3) $a > 0 \Rightarrow x \leq -a \ \vee\ x \geq a$

ESTREMI DI UN INSIEME

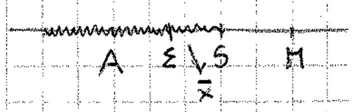
$A \subset \mathbb{R}$



M è maggiorante se $x \leq M, \quad \forall\, x \in A$
m è minorante se $x \geq m, \quad \forall\, x \in A$

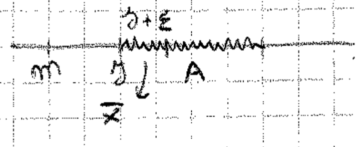
• ESTREMO SUPERIORE (il più piccolo dei maggioranti):
$\sup A = S$

TEOREMA: $A \subset \mathbb{R}$ allora $S \iff$
① $x \leq S, \quad \forall\, x \in A$
② $\forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists\, \bar{x} \in A : \bar{x} > S - \varepsilon$



• ESTREMO INFERIORE (il più grande dei minoranti):
$\inf A = J$

TEOREMA: $A \subset \mathbb{R}$ allora $J \iff$
① $x \geq J \quad \forall\, x \in A$
② $\forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists\, \bar{x} \in A : \bar{x} < J + \varepsilon$



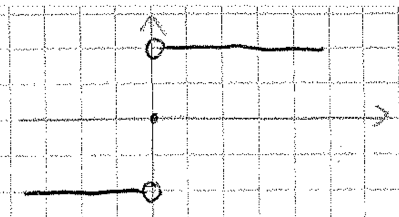
Se $\exists\, x^* \in A : x^* = S \Rightarrow x^*$ è detto MASSIMO di A

Se $\exists\, x^{**} \in A : x^{**} = J \Rightarrow x^{**}$ è detto MINIMO di A

Preso un intervallo di $\mathbb{R}$ (Q per es. no!) si avrà sempre un max e un min xké è COMPLET SECOND DEDEKIN

• $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad x \to \text{sgn}$ (segno di x)

$$\begin{cases} 1 & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$$



$$\text{sgn}(x): z = \begin{cases} \frac{x}{|x|} = \frac{|x|}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

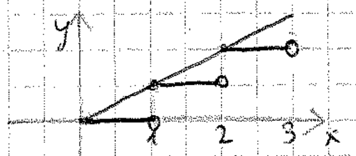
$\text{dom}(\text{sgn}) = \mathbb{R}$ $\quad \text{Im}(\text{sgn}) = \{1, 0; -1\} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ $\quad \Gamma(\text{sgn}) = \{(x, \text{sgn}) : x \in \mathbb{R}\}$

• Parte intera $[x]$

$[x] = n \in \mathbb{Z}$, il più grande intero $\leq x$ $\qquad [x] = n \leq x < [x]+1$

$[\frac{1}{2}] = 0 \qquad 0 \leq 0{,}5 < 1$

$[-\frac{1}{2}] = -1 \qquad -1 \leq 0{,}5 < 0$



$[x] : \mathbb{R} \to \mathbb{Z} \qquad x \to [x]$

$\text{dom}([x]) = \mathbb{R} \qquad \text{Im}[(x)] = \mathbb{Z}$

$0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0$

$1 \leq x < 2 \Rightarrow [x] = 1$

• Mantissa (M)

$M(x) = x - [x] \qquad M : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \geq 0$ $\quad [x]$ = parte prima della virgola

$M(x) = x - [x]$ = parte decimale

$[x] \leq x < [x]+1$

$[x] - \cancel{[x]} \leq x - [x] < \cancel{[x]} + 1 - \cancel{[x]}$

$0 \leq x - [x] < 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$x \in \mathbb{Z}, [x] = x \Rightarrow M(x) = x - [x] = 0$

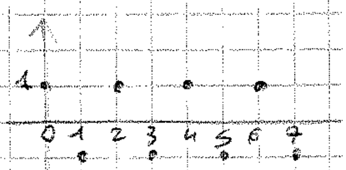
Es. $[2{,}3] = 2 \qquad 2{,}3 - [2{,}3] = 2{,}3 - 2 = 0{,}3$ $\quad \text{dom} M = \mathbb{R}$ $\quad \text{Im} M = [0$

• Successioni (succ)

$\mathbb{N} \to \mathbb{R} \qquad \text{dom}(\text{succ}) = \mathbb{N}$

Es. $n \to f(n) = a_n \qquad n \to n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$

$$n \to (-1)^n = \begin{cases} (-1)^{2k} = [(-1)^2]^k = 1 \\ (-1)^{2k+1} = [(-1)^{2k} \cdot (-1)] = -1 \end{cases}$$



- Talvolta è necessario restringere l'insieme per far diventare la legge una funzione.

$f : X \to Y \qquad A \subseteq \text{dom} f \subseteq Y$ $\quad$ Restrizione di f ad A: $f|_A : A \to Y \quad x \to f$

Es. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \to x^2 \qquad \text{dom} f = \mathbb{R}$

$f|_{[0;+\infty)} : [0; +\infty) \to \mathbb{R} \qquad x \to x^2$

COMPOSIZIONE DI FUNZIONI

$f: X \to Y \qquad g: Y \to Z \qquad X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$

$x \to f(x) \to g(f(x)) \qquad x \to g \circ f(x) = g(f(x))$

dom $= \{x \in \text{dom} f : f(x) \in \text{dom}\, g\}$

- NON È COMMUTATIVA!

- FUNZIONE IDENTITÀ O IDENTICA $A \to A \quad x \to x$

$f^{-1} \circ f(x) = x \qquad \forall x \in \text{dom} f$

$f^{-1} \circ f(x) = id_A\, x$

Es. $f(x) = x^3 \qquad f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$

$f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(x^3) = \sqrt[3]{x^3} = x$

- MONOTONIA

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — è l'unico caso in cui si può parlare di monotonia

f MONOTONA su un insieme $A \subseteq \text{dom} f$

① a) f è MONOTONA CRESCENTE su A se $x_1, x_2 \in A \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

b) f è MONOTONA STRETTAMENTE CRESCENTE su A se $x_1, x_2 \in A \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

② a) f è MONOTONA DECRESCENTE su A se $x_1, x_2 \in A, \; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

b) f è MONOTONA STRETTAMENTE DECRESCENTE su A se $x_1, x_2 \in A \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Si dice che f è monotona su A se è CRESCENTE o DECRESCENTE, strettamente monotona se è STRETTAMENTE CRESCENTE o DECRESCENTE

Es. $f(x) = K \qquad \forall x \in \mathbb{R}$ è sia crescente che decrescente!

- f è cresc. su A (strett. cresc.) $\Leftrightarrow x_1, x_2 \in A, \; x_1 \neq x_2 \Rightarrow \boxed{\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \geq 0 \;\; (>)}$

DIM: a) Se $x_1 > x_2 \Rightarrow x_1 - x_2 > 0$

f è crescente $\Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \Rightarrow f(x_1) - f(x_2) \geq 0$

b) Se $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - x_2 < 0$

f è crescente $\Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \Rightarrow f(x_1) - f(x_2) \leq 0$

$\Downarrow$

$x_1 > x_2, \; x_1, x_2 \in A \Rightarrow \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$ (per IP!) $\Rightarrow f(x_1) - f(x_2) \geq 0$

$\Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \Rightarrow f$ è CRESCENTE

- f è decres. su A (strett. decres.) $\Leftrightarrow x_1, x_2 \in A, \; x_1 \neq x_2 \Rightarrow \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leq 0 \;\; (<0)$

Si dice che:
- f è LIMITATA SUPERIORMENTE se $f(A)$ è un insieme superiormente limitato e $\sup f(A) = S \in \mathbb{R}$
- f è ILLIMITATA SUPERIORMENTE se $\forall M, \exists\, x \in A : f(x) > M$ $(\sup f(A) = +\infty)$
- f è LIMITATA INFERIORMENTE se $f(A)$ è limitato inferiormente $\Rightarrow \inf f(A) = i \in \mathbb{R}$
- f è ILLIMITATA INFERIORMENTE se $f(A)$ è illimitato $\Rightarrow \forall M, \exists\, x \in A,\ f(x) < M$ $(\inf f(A) = -\infty)$

• SIMMETRIE DI UNA FUNZIONE $D(-a, a)$ $a > 0$

$f(-x) = f(x),\ \forall x \in D \Rightarrow$ è PARI (grafico simmetrico all'asse y)

$f(-x) = -f(x),\ \forall x \in D \Rightarrow$ è DISPARI (grafico simmetrico all'origine)

- Se una f è PARI NON è INVERTIBILE

$f(x) = \cos x \qquad f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x) \rightarrow$ è PARI

$f(x) = \sin x \qquad f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x) \rightarrow$ è DISPARI

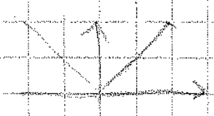
- PROPRIETÀ COMPOSIZIONI:
  - Se f e g sono ~~entrambe PARI o DISPARI~~ $\Rightarrow f \cdot g$ e f/g è PARI

    DIM: $f(-x) \cdot g(-x) = f(-x) = f(x)$ e $g(-x) = g(x)$ [PER IPOTESI]
    $f(-x) \cdot g(-x) = -f(x) \cdot [-g(x)] = f(x) \cdot g(x)$

  - Se f e g sono una PARI e l'altra DISPARI $\rightarrow f \cdot g$ e f/g è DISPARI

- ESEMPI DI FUNZIONI

$f(x) = |x| \rightarrow$ PARI



• ESPONENZIALE

$f(x) = a^x \qquad a > 0 \qquad a \neq 1$

$a^{x+y} = a^x \, a^y \qquad a^x : \mathbb{R} \rightarrow\,]0, +\infty[$

$\inf (a^x) = 0 \qquad \sup f(a^x) = +\infty$

$y = a^x \rightarrow$ è invertibile $\rightarrow \log_a y = x$

- GRAFICI

$x \in [0,1] : x^2 \geq x^3 \geq x^4 \qquad \forall x > 1 \quad x^2 < x^3 < x^4$

$f_{2m}(x) = x^{2m} \rightarrow$ PARI $\qquad f_{2m}(x) = x^{2m+1} \rightarrow$ DISPARI

Es: $f(x) = x^4 \rightarrow$ NON è INIETTIVA SU $\mathbb{R}$

$f_{|[0,+\infty)}$ è INIETTIVA SU $[0, +\infty)$ $\qquad \left(f_{|[0,+\infty)}\right)^{-1}(x) = \sqrt[4]{x}$

$x^2 < x^4 \quad 0 < x < 1 \qquad \sqrt{x} > \sqrt[4]{x} \quad x > 1$

TOPOLOGIA DI $\mathbb{R}$

$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ $\quad d(x_1 - x_2) = |x_1 - x_2|$

$d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ PROPRIETÀ:
1. $d(x_1, x_2) = d(x_2, x_1) \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$
2. $d(x_1, x_2) \geq 0 \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$
   $d(x_1, x_2) = 0 \iff x_1 = x_2$
3. $d(x_1, x_2) \leq d(x_1, x_3) + d(x_3, x_2) \quad \forall x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$

Si dice INTORNO (simmetrico) di x_0 di raggio $\rho > 0$ l'insieme dei punti che hanno distanza da x_0 strettamente minore di ρ

$$\boxed{B_\rho(x_0)} = \{x \in \mathbb{R} : d(x, x_0) < \rho\} = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \rho\} = (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$$

Ball

$\mathbb{R}$ — $x_0 - \rho$, x_0, $x_0 + \rho$

in $\mathbb{R}^3$ si ottiene una sfera!

$\mathbb{R}^2$

PROPRIETÀ: se $B_{\rho_1}(x_0)$ e $B_{\rho_2}(x_0)$ sono intorni di $x_0 \Rightarrow$
$\Rightarrow B_{\rho_1}(x_0) \cap B_{\rho_2}(x_0)$ è un intorno di x_0 di raggio $\rho = \min\{\rho_1, \rho_2\}$

DEF: Dato $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice che $\bar{x} \in A$ è interno ad A se $\exists B_\rho(\bar{x}) \subseteq A$

Es: $A = [1,2)$ $\quad \forall x \in (1,2)$ sono interni
$\min\{|\bar{x} - 1|, |\bar{x} - 2|\} = \rho \Rightarrow B_\rho(\bar{x}) \subseteq A$

1 non è interno ad A, infatti $\forall B_\rho(1), \exists x \in \mathbb{R} - A, x \in B_\rho(1)$

$\cdot A = \mathbb{Q}$ $\quad \forall x \in \mathbb{Q}$ non è interno ad A $\quad (x - \rho, x + \rho) = B_\rho(x)$

DEF: Si dice che $x \in \mathbb{R}$ è di FRONTIERA per $A \subseteq \mathbb{R}$ se $\forall B_\rho(x)$ interseca sia A che $\mathbb{R} \setminus A$, cioè: $B_\rho(x) \cap A \neq \emptyset$
$B_\rho \cap (\mathbb{R} \setminus A) \neq \emptyset$

Es: 1. $[1,2)$ $\quad x = 1$ e $x = 2$ sono punti di frontiera $1 \in A$, $2 \notin A$
2. $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ $\quad$ 0, 1 $\quad \forall x \in [0,1] \quad B(x, \rho) \cap A \neq \emptyset$
$B(x, \rho) \cap \complement A \neq \emptyset$
$\Rightarrow [0,1] =$ Insieme dei punti di frontiera
3. $A = [0,1) \cup \{3, 4\}$ $\quad$ 0, 1, 2, 3, 4 $\quad B(3, \rho) \cap A \supseteq \{3\}$
$B(3, \rho) \cap \complement A \neq \emptyset$
- 0, 1, 3, 4 sono i punti di frontiera di A
- $(0,1) = \{$punti interni di $A\}$

$\mathring{A} = \{$punti interni di $A\}$ $\qquad \mathring{A} \subseteq A \subseteq A \cup \partial A$

$\partial A = \{$punti di frontiera di $A\}$

DEF: Un insieme A si dice APERTO se tutti i suoi punti sono interni di A
$A = \mathring{A}$

Es. $(0,1)$ è aperto $\qquad [0,1)$ NON È APERTO $\qquad (0,1) \cup \{2\}$ NON È APERTO
$B_\rho(x)$ è aperto $\qquad \mathbb{Q}$ NON È APERTO

DEF: A è CHIUSO se $\partial A \subseteq A$
$\emptyset$ e $\mathbb{R}$ sono sia APERTI che CHIUSI

Es. $[0,1]$ è CHIUSO $\qquad [0,1] \cup \{2\}$ è CHIUSO $\qquad \{a_1 \dots a_m\}$ è CHIUSO

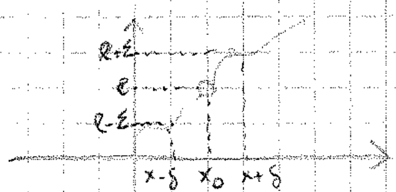
LIMITE

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad A = \text{dom} f$ $\quad \bar{x}$ p.to di accumulazione di A

Esiste il limite di $f(x)$ per x che tende ad $\bar{x}$ ed è uguale ad l:

$$\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = l$$

se $\forall B_\varepsilon(l)\ \exists B_\delta(\bar{x}),\ x \in B_\delta(\bar{x}) \cap A \setminus \{\bar{x}\} \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(l)$



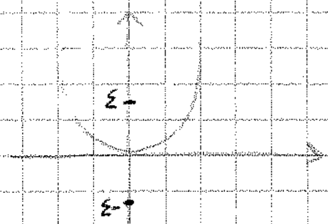
$$\boxed{B_\varepsilon(l) = (l - \varepsilon, l + \varepsilon)}$$

$\bar{x} \neq x$

il punto deve essere DI ACCUMULAZIONE

$\forall (l - \varepsilon, l + \varepsilon)\ \exists (\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta)$

Es: • $f(x) = x^2$ $\quad \lim_{x \to 0} f(x) \stackrel{?}{=} 0$



$\forall B_\varepsilon(0) = (0 - \varepsilon, 0 + \varepsilon) = (-\varepsilon, \varepsilon)$

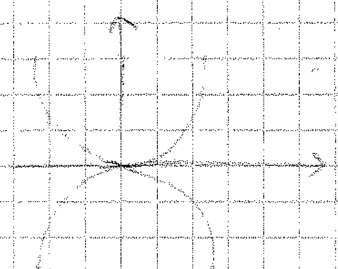
$\exists B_\delta(0) = (-\delta, \delta)$ $\quad x \in B_\delta(0) \cap \text{dom} f \setminus \{0\} \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) = x^2 \in B_\varepsilon(0) = (-\varepsilon, \varepsilon)$ $\quad -\varepsilon < x^2 < \varepsilon$ (sempre vero)

$x^2 < \varepsilon$ $\quad -\sqrt{\varepsilon} < x < \sqrt{\varepsilon}$

$\delta = \sqrt{\varepsilon}$ $\quad (-\sqrt{\varepsilon}, \sqrt{\varepsilon}) = B_{\sqrt{\varepsilon}}(0)$

• $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{Q} \\ -x^2 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$



$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ $\quad \forall B_\varepsilon(0) = (-\varepsilon, \varepsilon)\ \exists B_\delta(0) = (-\delta, \delta)$

$x \in B_\delta(0) \cap \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(0)$

$-\varepsilon < f(x) < \varepsilon$

- $x \in \mathbb{Q} \to f(x) = x^2$ $\quad -\varepsilon < x^2 < \varepsilon \iff -\sqrt{\varepsilon} < x < \sqrt{\varepsilon}$
- $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow f(x) = -x^2$ $\quad -\varepsilon < -x^2 < \varepsilon \iff \varepsilon > x^2 \iff -\sqrt{\varepsilon} < x < \sqrt{\varepsilon}$

• La $\boxed{f(x) = \text{sgn}\, x \text{ NON HA LIMITI}}$ di $x \to 0$ perché in ogni intorno di $x=$ si trovano punti tali che $f(x) = 1 \in (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$, ma si trovano punti $f(x) = -1 \notin (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$ se $\varepsilon < 2$

• $f(x) = k$ $\quad \text{dom} f = A$ $\quad$ se $\bar{x}$ è p.to di accumulazione di $A \Rightarrow \lim_{x \to \bar{x}} f(x) =$

- DEFINIZIONE DI LIMITE:

$\forall B_\varepsilon(l)\ \exists B_\delta(\bar{x}),\ x \in B_\delta(\bar{x}) \cap A \setminus \{\bar{x}\} \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(l)$

$\Downarrow$

$\forall (l - \varepsilon, l + \varepsilon)\ \exists (\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta)\ x \in (\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta) \cap A,\ x \neq \bar{x} \Rightarrow f(x) \in (l - \varepsilon, l +$

$\Downarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad 0 < |x - \bar{x}| < \delta \wedge x \in A \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

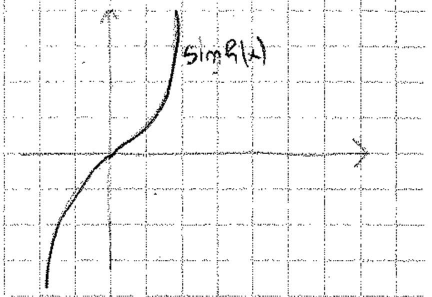
- $\nexists \lim_{x \to \bar{x}} f(x)$ $\quad \urcorner(\forall B_\varepsilon(\ell)\ \exists B_\delta(\bar{x})\ x \in B_\delta(\bar{x}) \cap A \setminus \{\bar{x}\} \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(\ell))$

$\bar{x}$ p.to di acc $\quad \exists B_\varepsilon(\ell)\ \forall B_\delta(\bar{x})\ \exists x \in B_\delta(\bar{x}) \cap A \setminus \{\bar{x}\} \wedge f(x) \notin B_\varepsilon(\ell)$

Es: $\nexists \lim_{x \to \pm\infty} \sin x \qquad \nexists \lim_{x \to \pm\infty} \cos x$

-FUNZIONI IPERBOLICHE

- $\sinh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ DISPARI



-INVERSA:

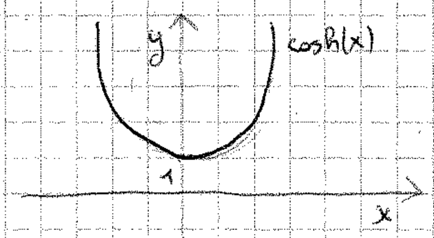
$y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad 2y = e^{-x} - e^{-x} \qquad 2y = e^x - \dfrac{1}{e^x}$

$2e^x y = e^{2x} - 1 \qquad e^{2x} - y - 1 = 0 \qquad e^x = y \pm \sqrt{y^2+1}$ ↳ posso applicare log solo per pos

$x = \log(y + \sqrt{y^2+1}) \qquad f^{-1}(x) = \log(x + \sqrt{x^2+1}) \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

↳ settore seno iperbolico (settsinh(x))

- $\cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \mathbb{R} \to [1, +\infty[$ PARI



-INVERSA:

$y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad e^{2x} - 2e^x y + 1 = 0$

$e^x = y \pm \sqrt{y^2 - 1} \qquad x = \log y + \sqrt{y^2 - 1}$

↳ solo pos.

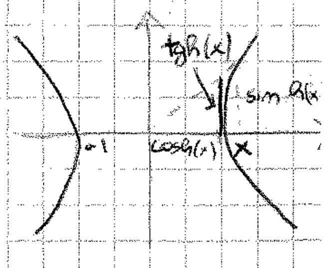
$f^{-1}(x) = \log(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad : [1, +\infty[\to [0, +\infty[$

↳ settcosh(x)

- PROPRIETÀ FONDAMENTALE:

$$(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \left(\frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4} - \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{4}\right) =$$

$$x^2 - y^2 = 1$$



- $\tanh(x) \quad \mathbb{R} \to]-1, +1)$

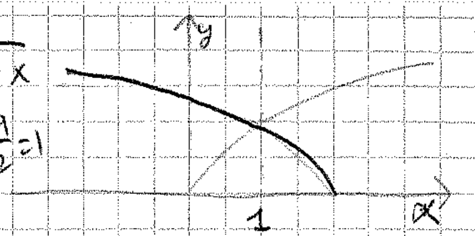
$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad -1 < \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} < 1$$

• $f(x) = g(a-x) \quad a>0$
$= g(-(x-a))$

$\Rightarrow x = \frac{a}{2} \Rightarrow$ grafico simmetrico rispetto a questa x

Es: $f(x) = \sqrt{2-x}$

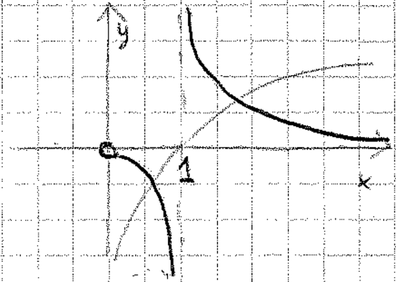
$a = 2 \quad x = \frac{a}{2} = 1$



• $f(x) = \frac{1}{g(x)}$

- se x_0 è uno zero di $g(x_0) = 0$, allora nell'intorno di quel punto la f si allontana;
- se $g(x)$ è cresc o decresc $\Rightarrow$ $\Rightarrow f(x)$ diventa decres. o cresc.

Es: $f(x) = \frac{1}{\log x}$



- COMPOSIZIONI (II)

$f(x) = g(h(x))$ - g crescente, h crescente $\rightarrow g(h(x))$ è CRESCENTE

DIM: $x_1 < x_2 \Rightarrow h(x_1) < h(x_2) \Rightarrow g(h(x_1)) < g(h(x_2)) \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ c.v.d.!

- g crescente, h decrescente $\rightarrow g(h(x))$ è DECRESCENTE

DIM: $x_1 < x_2 \Rightarrow h(x_1) > h(x_2) \Rightarrow g(h(x_1)) > g(h(x_2)) \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$ c.v.d!

- FUNZIONI PERIODICHE (di periodo T)

$f: D \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è periodica se $f(x+T) = f(x) \quad \forall x \in D$

Es: $M(x) = x - [x] \quad T = 1$

- MASSIMI E MINIMI

$f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ • $h(x) = \max\{f(x), g(x)\} = \frac{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|}{2}$

$= \{\underline{\max}\ f(x) \text{ e } g(x) \quad \forall x \in D\}$

• $h(x) = \underline{\min}\{f(x), g(x)\} = \frac{f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|}{2}$

- FUNZIONE PARTE POSITIVA (di $f(x)$)

$f^+(x) = \max_D \{f(x), 0\} = \frac{f(x) + |f(x)|}{2}$

$\Rightarrow f^+(x) + f^-(x) = f(x)$

- FUNZIONE PARTE NEGATIVA

$f^-(x) = \min_D \{f(x), 0\} = \frac{f(x) - |f(x)|}{2}$

- **CONTINUITÀ**: f continua in $\bar{x} \in \operatorname{dom} f$ se:

$\forall B_\varepsilon(f(\bar x))\ \exists B_\delta(\bar x)\quad x \in B_\delta(\bar x) \cap A \Rightarrow f(x) \in B(f(\bar x))$ → il punto è compreso
$\equiv |f(x) - f(\bar x)| < \varepsilon$

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\quad |x - \bar x| < \delta \quad x \in A \Rightarrow |f(x) - f(\bar x)| < \varepsilon}$$

- $\bar x$ punto isolato

$\exists B_\delta(\bar x) : B_\delta(\bar x) \cap A = \{\bar x\} \qquad f(\bar x) - f(\bar x) = 0 < \varepsilon$

① Una f è sempre continua nei punti isolati del dominio.

② $\bar x \in A$ e $\bar x$ è punto di accumulazione di A → f è continua in $\bar x \iff$
$\iff \lim_{x \to \bar x} f(x) = f(\bar x)$

- se $\lim_{x \to \bar x} f(x)$ esiste ma è $\neq f(\bar x) \Rightarrow f$ NON È CONTINUA in $\bar x$

Esempi:
① $f(x) = k \in \mathbb{R} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ è continua $\forall x \in A$
② $f(x) = \operatorname{sign} x \qquad \nexists \lim_{x\to 0} f(x) \qquad \exists \lim_{x \to 0} f_{|(0,+\infty)}(x) = 1 \qquad \exists \lim_{x\to 0} f_{|(-\infty,0)}(x) = -1$
③ $f(x) = \frac{1}{x} \qquad \nexists \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \qquad \exists \lim_{x \to 0} f_{|(0,+\infty)}(x) = +\infty \qquad \exists \lim_{x\to 0} f_{|(-\infty,0)}(x) = -\infty$
④ $f(x) = \begin{cases} 1/x & x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \\ -\frac{1}{x} & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \qquad \nexists \lim_{x \to 0} f(x)$ e $\nexists \lim_{x \to 0} f_{|(-\infty,0)}(x)$

- $\bar x$ è p.to di accumulazione destro di A se $\forall B_\delta(\bar x) = (\bar x - \delta, \bar x + \delta)$
$(\bar x, \bar x + \delta \cap A) = (\bar x - \delta, \bar x + \delta) \cap A \cap (\bar x + \delta) \neq \emptyset$
- $\bar x$ è p.to di accumulazione sinistro di A se $\forall B_\delta(\bar x) = (\bar x - \delta, \bar x + \delta)$
$(\bar x - \delta, x + \delta) \cap A \cap (-\infty, \bar x) \neq \emptyset$

} in questo caso si può calcolare lim sin e dx

$(\bar x - \delta, \bar x) = B^-_\delta(\bar x)$ intorno sinistro
$(\bar x, \bar x + \delta) = B^+_\delta(\bar x)$ intorno destro

- $\lim_{x \to \bar x^+} f(x) = \ell_1$ se $\bar x$ è p.to di acc di A

$$\boxed{\forall B_\varepsilon(\ell_1)\ \exists B^+_\delta(x) = (\bar x, \bar x + \delta) \qquad x \in (\bar x, \bar x + \delta) \cap A \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(\ell_1)}$$

$\lim_{x \to x^+} f(x) = \lim_{x \to \bar x} f_{|(\bar x, +\infty) \cap A}(x)$

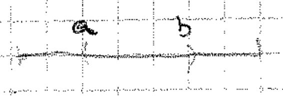
- $\lim_{x \to x^-} f(x) = \ell_2$

- OSSERVAZIONE: se parlo di $\lim_{x \to \bar x} f(x)$ $\bar x$ deve essere p.to di accumulazione di A, ma va bene anche solamente da una parte.

Es. $f(x) = \log x \qquad \operatorname{dom} f = (0, +\infty) \qquad 0$ è p.to di acc. $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$

$\forall B(-\infty) = (-\infty, a) \qquad \exists B_\delta(0) = (-\delta, +\delta)$

$x \in (-\delta, \delta) \cap A = (0, \delta) \Rightarrow f(x) \in (-\infty, a)$

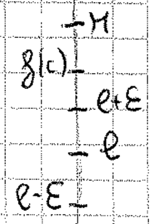


f def (a, b)

TEOREMA DI LIMITATEZZA LOCALE

Sia $A = \mathrm{dom} f$, c p.to di accumulazione di A $\exists M > 0$

$\exists \lim_{x \to c} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists B(c), \forall x \in B(c) \cap A \; |f(x)| < M$



$f(B(c) \cap A)$ È UN INSIEME LIMITATO!

DIM: $\forall B_\varepsilon(\ell) \; \exists B(c) \; x \in B(c) \cap A \setminus \{c\} \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(\ell)$

$|f(x) - \ell| < \varepsilon$ $\qquad \ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$

- se $c \in A$, $f(c) \Rightarrow M = \max\{|\ell - \varepsilon|, |\ell + \varepsilon|, |f(c)|\}$

$|f(x)| < M$

SOMMA DI LIMITI

$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad \mathrm{dom} f = \mathrm{dom} g = A$ $\qquad c$ p.to di acc. di A

$\exists \lim_{x \to c} f(x) = \ell$ $\qquad \exists \lim_{x \to c} g(x) = m \overset{th}{\Rightarrow} \boxed{\lim_{x \to c}(f(x) + g(x))}$? $= \ell + m$

$f(x)$	$g(x)$	$(f+g)(x)$
$\ell \in \mathbb{R}$	$m \in \mathbb{R}$	$\ell + m$
$-\infty$	m	$-\infty$
$+\infty$	m	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$+\infty$	FORMA INDETERMINATA

esempi:

① $f(x) = x$ $\qquad g(x) = -x$ $\qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ $\qquad \lim_{x \to +\infty} g(x) = \infty$

$\lim_{x \to \infty}(f(x) + g(x)) = \lim_{x \to \infty}(x - x) = \lim 0 = 0$

② $f(x) = x$ $\qquad g(x) = -Kx$, $K > 0$ $\qquad \lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty}(f(x) + g(x)) = \lim_{x \to +\infty}(x - Kx) = \lim_{x \to +\infty}(1 - x)x$ $\begin{cases} \text{se } K > 1 : -\infty \\ \text{se } K = 0 : 0 \\ \text{se } 0 < K < 1 : +\infty \end{cases}$

③ $f(x) = x$ $\qquad g(x) = -x^2$ $\qquad f(x) = +\infty$ $\qquad g(x) = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty}(f(x) + g(x)) = \lim_{x \to +\infty}(x - x^2) = -\infty$

DIM: $\lim_{x \to c} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ $\qquad \lim_{x \to c} g(x) = m \in \mathbb{R}$

- $\forall B_\varepsilon(\ell) \; \exists B(c) \quad x \in B(c) \cap A \setminus \{c\} \Rightarrow |f(x) - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$
- $\forall B_\varepsilon(m) \; \exists B'(c) \quad x \in B'(c) \cap A \setminus \{c\} \Rightarrow |g(x) - m| < \frac{\varepsilon}{2}$

$B(c) \cap B'(c) = B''(c) \rightarrow$ è un intorno di c

$\forall B_\varepsilon(\ell + m) \; \exists B''(c) \quad x \in B''(c) \cap A \setminus \{c\} \Rightarrow |f(x) + g(x) - (\ell + m)|$

$|f(x) + g(x) - (\ell + m)| = |f(x) - \ell + g(x) - m| \leq \boxed{|f(x) - \ell| + |g(x) - m|}$

$\varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \rightarrow$ posso anche fare tutto $/2$ e così: $\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} =$

$\forall B_\varepsilon(m\ell)\ \exists B'''(c)\quad x \in B'''(c) \cap A \setminus \{c\} \Rightarrow |f(x)\cdot g(x) - \ell m| < (M+|m|)\varepsilon$

RECIPROCO

$f(x)\qquad \frac{1}{f(x)}\qquad f(x)$ definita su $A\qquad c$ pto di acc. di A

$\exists B(c)\ x \in B(c) \cap A \setminus \{c\} \Rightarrow f(x) \neq 0$

TEOREMA: Se $\lim_{x\to c} f(x) = \ell \Rightarrow \lim_{x\to c} \frac{1}{f(x)} = \begin{cases} 1/\ell & \ell \neq 0,\ \ell \in \mathbb{R} \\ 0^+ & \ell = +\infty \\ 0^- & \ell = -\infty \end{cases}$

$\lim_{x\to c} \left|\frac{1}{f(x)}\right| = +\infty$ se $\ell = 0$

- Si dice che una f è un INFINITO per $x \to c$ se $\lim_{x\to c}|f(x)| = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to c} f(x) = \infty$
- Se $\lim_{x\to c}|f(x)| = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to c}\frac{1}{f(x)} = 0$

OSSERVAZIONE: $\exists \lim_{x\to c} f(x) = 0 \iff \exists \lim_{x\to c}|f(x)| = 0$

DIM: $\forall B_\varepsilon(0) = (-\varepsilon, \varepsilon)\ \exists B(c)\ x \in B(c) \cap A \setminus \{c\} \Rightarrow |f(x) - 0| < \varepsilon \iff$
$\iff |f(x)| < \varepsilon$

$||f(x)| - 0| = ||f(x)|| = |f(x)|$

DIM: $\forall B(+\infty) = (a, +\infty)\ \exists B(c)\ x \in B(c) \cap A \setminus \{c\} \Rightarrow |f(x)| > a$

? $\forall B_\varepsilon(0)\ \exists B(c)\ x \in B(c) \cap A \setminus \{c\} \Rightarrow \left|\frac{1}{f(x)}\right| < \varepsilon$

Pongo: $a = \frac{1}{\varepsilon}\qquad x \in B(c) \cap A \setminus \{c\}\qquad |f(x)| > a > 0 \iff \frac{1}{f(x)} < \frac{1}{a} = \varepsilon$

- F. COMPOSTE

TEOREMA: $f(x)$ def in $A\qquad g(x)$ e $\frac{1}{g(x)}$ def. su $A\qquad c$ pto di acc di

$\exists \lim_{x\to c} f(x) = \ell\qquad \exists \lim_{x\to c} g(x) = m$

$\Rightarrow \lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}$

F.I. $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$

f	$\lvert g(x)\rvert$	$g(x)$	$f\cdot\frac{1}{g(x)}$	$\lvert f(x)\rvert\cdot\frac{1}{g(x)}$
$\ell \in \mathbb{R}$	/	$m \neq 0, m \in \mathbb{R}$	$\ell\frac{1}{m} = \frac{\ell}{m}$	\
$\ell \neq 0, \ell \in \mathbb{R}$	0	0	/	$+\infty$
$\pm\infty$	/	0	/	$+\infty$
0	$+\infty$	\	0	0
0	\	0	F.I.	F.I.
$\pm\infty$	\	∞	F.I.	F.I.

DIM: $\cdot\ \forall a\ \exists B'(c)\ x \in B'(c) \cap A \setminus \{c\} \Rightarrow g(x) > a$

$\cdot\ B''(c) = B'(c) \cap B(c)$

$\exists A\ \exists B''(c)\ x \in B''(c) \cap A \setminus \{c\} \Rightarrow \boxed{f(x) \geq g(x) > a \Rightarrow \lim_{x \to c} f(x) = +\infty}$

Es: $f(x) = x(\cos x + 2) \quad -1 \leq \cos x \leq 1 \quad 1 \leq \cos x + 2 \leq 3 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

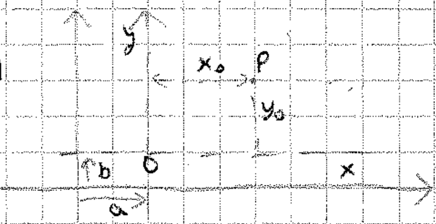
$\underset{+\infty}{1x} \leq (\cos x + 2)x \leq 3x \quad \forall x \geq 0$

$\lim_{x \to +\infty} x(\cos x + 2) = +\infty$

$\cdot\ \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x}(\cos x + 2)}{\cancel{x}} \to$ NON ESISTE $\quad x(\cos x + 1) \to$ NON HA LIMITE!

SIMMETRIA RISPETTO ALLA RETTA $x = a$, O UN PUNTO (x_0, y_0)

$\begin{cases} X_0 = x_0 - a \\ Y_0 = y_0 - b \end{cases} \iff \begin{cases} x_0 = X_0 + a \\ y_0 = Y_0 + a \end{cases} \quad O' \equiv (a, b) \quad p_0 \equiv (X_0, Y_0) = (x_0, y_0)$



$\cdot\ f(x)$ è simmetrica rispetto alla retta $x = a$ se è PARI nel sistema $O' \equiv (a, 0)\ X, Y$

$\cdot\ f(x)$ è simmetrica rispetto al punto (a, b) se è DISPARI nel sistema $O' \equiv (a, b)\ X, Y$

- PROPOSIZIONE (TEOREMA DEL CONFRONTO)

$f, g : B_\delta(x_0) : \mathbb{R}$

① f è limitata

② $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ (g è infinitesima quando $x \to x_0$)

$\Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} f(x)\, g(x) = 0$

DIM: Dimostriamo che $\exists \lim_{x \to x_0} |f(x)\, g(x)| = 0$

$\exists M > 0 : |f(x)| \leq M$

$0 \leq |f(x) \cdot g(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)| \leq M \cdot |g(x)|$

$\Rightarrow 0 \leq |f(x) \cdot g(x)| \leq M\,|g(x)|$ (1° e 3° membro $\to 0$, quindi per confronto anche il 2° $\to 0$!)

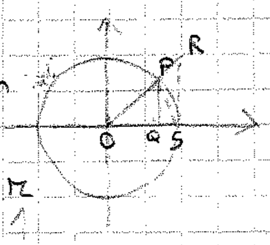
Es: $\lim_{x \to +\infty} \underbrace{\sin\left(\log \frac{x^2+1}{x}\right)}_{\text{limitata}} \cdot \underbrace{\frac{e^x}{e^{2x}+1}}_{\to 0} = 0$

$\cdot\ \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \to$ è pari $\lim x \to 0^+ \quad x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

$\overline{PQ} < \overset{\frown}{PS} < \overline{RS} \quad PQ = \sin x \quad OQ = \cos x$

$RS = \operatorname{tg} x \quad \overset{\frown}{PS} =$ raggio(1) $\cdot$ ang in radianti

$\sin x < x < \operatorname{tg} x$



$A(\triangle OPS) < A(\overset{\frown}{OPS}) < A(\triangle ORS) \quad \pi r^2 : 2\pi = A_S : x$

$\lim_{x\to 3} f(x)=3$ $\lim_{y\to 3} g(y)$ $\lim_{x\to 3} g\circ f(x)=\lim_{y\to 3} g(y)$ → NON È VERO!

- SUCCESSIONI: $a: \mathbb{N}\to\mathbb{R}$ $\text{dom}\, a=\{n\in\mathbb{N},\ n\geq n_0\}$

↳ passo dal continuo al discreto

$g\ B\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $a(n)=a_n$ $\mathbb{N}\to\mathbb{R}\xrightarrow{g}\mathbb{R}$

$$n\xrightarrow{a} a_n\in B\xrightarrow{g} g(a_n)$$

• COROLLARIO: se $\lim_{n\to\infty} a_n=\ell$ · se ℓ è p.to di acc. di $B=\text{dom}\, g$

per le succ. per forza $\lim n\to\infty$ · se $a_n\neq\ell$ $\forall n\geq n_1$ · se $\lim_{y\to\ell} g(y)=m$

$$\Rightarrow \boxed{\exists \lim_{n\to+\infty} g(a_n)=\lim_{y\to\ell} g(y)=m}$$

• TEOREMA: $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ c p.to di acc. di $B=\text{dom}\, g$

$\exists \lim_{x\to c} g(x)=\ell \iff \forall$ successione $\Rightarrow \{a_n\}\subseteq B$ tale che $\lim_{n\to+\infty} a_n=c$, $\lim_{n\to+\infty} g(a_n)=\ell$

$\exists \lim_{n\to+\infty} g(x)\neq\ell \Rightarrow a_n\to c$ $b_n\to c$ $\lim_{n\to+\infty} g(a_n)=\ell$

$\lim_{n\to+\infty} g(b_n)=\ell$

- COROLLARIO: se $\exists\, a_n\to c$, tale che $\lim_{n\to+\infty} g(a_n)=\ell_1$

$\exists\, b_n\to c$ tale che $\lim_{n\to+\infty} g(b_n)=\ell_2$ e $\ell_1\neq\ell_2 \Rightarrow \nexists \lim_{x\to c} g$ → NEGO LA TESI!

Es: $\nexists \lim_{x\to+\infty} \sin x, \cos x, H(x), \text{tg}\, x$ $\nexists \lim_{x\to 0} \cos\frac{1}{x}, \sin\frac{1}{x}$

$-a_n=n\pi\to+\infty$ per $n\to+\infty$ $\sin(a_n)=\sin(n\pi)=0$ →

$-b_n=\frac{\pi}{2}+2n\pi\to b_n\to+\infty$ per $n\to+\infty$ $\sin(b_n)=\sin(\frac{\pi}{2}+2n\pi)=1$

$\lim_{n\to+\infty}\sin(b_n)=1$ $\lim_{n\to+\infty}(a_n)=0$ → la f non ha lim

- COROLLARIO: ① se $\exists \lim_{n\to+\infty} a_n=\ell \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_{2n+1}=\ell$ $\lim_{n\to+\infty} a_{2n}=\ell$

② se $\lim_n a_{2n}=\ell_1$ $\lim_n a_{2n+1}=\ell_2 \Rightarrow \nexists \lim_n a_n$

Es: $a_n=(-1)^n$ $a_{2n}=(-1)^{2n}=1\to 1$ per $n\to+\infty$; $a_{2n+1}=(-1)^{2n+1}=-1\to -1$ per $n\to+\infty$ $\}\ \nexists \lim$

LIMITE DI FUNZIONE MONOTONA

TEOREMA: $f: A\to\mathbb{R}$ c p.to di acc. di $A=\text{dom}\, f$

① f è MONOTONA su $B^+(c)\cap A \Rightarrow \exists \lim_{x\to c^+} f(x)=$
- se f è CRESCENTE: $\inf f\{f(x)\},\ x\in B^+(c)\cap A$
- se f è DECRESCENTE: $\sup\{f(x)\},\ x\in B^+(c)\cap A\}$

② c p.to di acc. "a sinistra" di A

se f è MONOTONA su $B^-(c)\cap A \Rightarrow \exists \lim_{x\to c^-} f(x)=$
- se f è CRESCENTE: $\sup\{f(x),\ x\in B^-(c)\cap A\}$
- se f è DECRESCENTE: $\inf f\{f(x),\ x\in B^-(c)\cap A\}$

a volte possono esistere lim dx e sin, ma $\nexists$ lim!

- FUNZIONE CONTINUA SU UN INTERVALLO

f continua su un insieme A se f è continua per $\forall x \in A$
Si dice che $\bar{x} \in A = \text{dom} f$ è uno zero di f se $f(\bar{x}) = 0$

• TEOREMA DEGLI ZERI

f continua su un intervallo $[a, b]$ e sia $f(a) \cdot f(b) < 0 \Rightarrow \exists \bar{x} \in (a, b)\ f(\bar{x}) =$

DIM: $\underset{a}{<0}$ — c — $\underset{b}{>0}$ $\quad f(a) < 0 \quad f(b) > 0 \qquad c = \frac{a+b}{2}$

$f(c) = \begin{cases} 0 & \text{OK} \\ \neq 0 & f(c) > 0 \end{cases} \quad a_0 = a = a_1 \quad b_0 = b \quad c = b$

$a_1 \leq b_1 \leq b \qquad a_0 \leq a_1 \quad b_1 \leq b_0 \qquad f(b_1) > 0 \quad f(b_0) > 0$

$f(a_0) < 0$
$f(a_1) < 0 \qquad [a_0, b_0] \supseteq [a_1, b_1] \quad f(a_1) < 0 \quad f(b_1) > 0$

$b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2} \qquad c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} \qquad f(c_1) = \begin{cases} 0 & \text{OK} \\ \neq 0 \end{cases}$

Pongo $a_2 = c_1 \qquad b_2 = b_1 \qquad a_0 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_n$

$f(a_i) < 0 \quad i \in \mathbb{N} \qquad f(b_i) > 0 \qquad b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$

$b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{b-a}{2^2} \qquad b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$

- SUCC. $\{a_n\}$ è succ. crescente $\Rightarrow \exists \lim_{n\to+\infty} a_n = \sup\{a_n\} = \bar{x}$

$\{b_n\}$ è decrescente $\Rightarrow \exists \lim_{n\to+\infty} b_n = \inf\{b_n\} = \bar{z} \qquad \bar{x} < \bar{z}$

• $\lim_{n\to+\infty} (b_n - a_n) \quad \lim_n b_n - \lim_n a_n = \bar{z} - \bar{x} = 0 \Rightarrow \bar{z} = \bar{x}$

$= \lim_n \frac{b-a}{2^n}$

• $f(a_n) < 0 \qquad f(b_n) > 0 \qquad a_n \to \bar{x} \qquad b_n \to \bar{x}$

$\lim_n f(a_n) = f(\bar{x}) \leq 0$ CONTINUITÀ DI f in $\bar{x}$

$\lim_n f(b_n) = f(\bar{x})$ per la continuità di f in $\bar{x}$ $\quad f(\bar{x}) \geq 0 \Rightarrow f(\bar{x}) =$

COROLLARIO ①: f è continua e strettamente monotona su $[a, b]$ e
$f(a) \cdot f(b) < 0 \Rightarrow \exists!\ \bar{x} : f(\bar{x}) = 0$

COROLLARIO ②: se f è continua su (a, b) $\quad \exists \lim_{x\to a} f(x) = l_1$

$\exists \lim_{x\to b} f(x) = l_2 \qquad l_1 \cdot l_2 < 0 \Rightarrow \exists\ \bar{x} \in (a, b), f(\bar{x}) =$

- se $l_2 > 0 \qquad \varepsilon = \frac{l_2}{2} \qquad \exists B(b)\ x \in B(b) \cap (a, b) \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{l_2}{2} = l_2 - \frac{l_2}{2} = l_2 - \varepsilon < f(x) < l_2 + \varepsilon$

Es: $x^5 - 2x^4 + 5x^2 - 3$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

- TEOREMA LIMITATEZZA GLOBALE PER SUCCESSIONI

$\{$ LOCALE: $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists B_\delta(x_0) : f(x)$ è LIMITATA $\}$

- Se $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è CONVERGENTE $\Rightarrow a_n$ è LIMITATA

DIM: $\exists \lim_n a_n = \ell \in \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \ \forall n > n_\varepsilon \ |a_n - \ell| < \varepsilon \rightarrow$ c'è un maggiorante $\ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon$

Es: $\cdot \lim_n \left[\frac{n^2+1}{2n^2+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^n \right] \rightarrow$ è CONVERGENTE e quindi LIMITATA!

$\cdot \lim_n \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e \qquad a_n \to +\infty$

- TEOREMA (PONTE). Se $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}^* \quad x_0 \in \mathbb{R}^* \Longleftrightarrow \forall x_n \to x_0$ è tale che $f(x_n) \to \ell$

$\boxed{\lim_{x \to x_0} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e} \rightarrow$ vale anche per le funzioni! (se $f(x) \to +\infty$)

- CRITERIO NON ESISTENZA PER LIMITI DI FUNZIONI

$x_n \to x_0 \qquad y_n \to x_0 \qquad f(x_n) = \ell_1 \qquad f(y_n) = \ell_2 \Rightarrow \nexists \lim_{x \to x_0} f(x)$

Es: $\nexists \lim_{x \to +\infty} \sin x, \cos x \ldots$ PERIODO: $2n\pi \rightarrow$ è UNA SUCCESSIONE $\to +\infty$

$\nexists \lim \longleftarrow \begin{cases} x_n = 2n\pi \Rightarrow f(x) = (\cos 2n\pi) = 1 \to 1 \\ y_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \to +\infty \Rightarrow f(y_n) = \cos(\frac{\pi}{2} + 2n\pi) \to 0 \end{cases}$

· LIMITI NOTEVOLI

① $\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \qquad t = \frac{1}{x} \to x = \frac{1}{t} \qquad x \to 0$, quindi $t \to \infty$

$\boxed{\lim_{t \to \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e}$ (per F.I. 1^∞)

② $\lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \cdot \log(1+x) = \lim_{x \to 0} \log_a(1+x)^{\frac{1}{x}} = \boxed{\log_a e}$

③ $\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} \qquad a^x - 1 = t \Rightarrow x = \log_a(1+t)$

$\lim_{t \to 0} \frac{t}{\log_a(1+t)} = \boxed{\frac{1}{\log_a e}}$

④ $\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} \qquad \arcsin x = t \Longleftrightarrow x = \sin t \qquad \boxed{\lim_{t \to 0} \frac{t}{\sin t} = 1}$

⑤ $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} \qquad \operatorname{arctg} x = t \qquad \boxed{\lim_{t \to 0} \frac{t}{\operatorname{tg} t} = 1}$

TEOREMA WEIERSTRASS

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua su $[a,b]$

$\Rightarrow$ ① f è limitata su $[a,b]$

② $\exists\, x_1 \in [a,b]$ $\forall x \in [a,b]$ $f(x_1) \leq f(x)$ $\to f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ $\forall x \in [a,b$

$\exists\, x_2 \in [a,b]$ $\forall x \in [a,b]$ $f(x) \leq f(x_2)$ min max

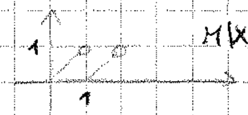
③ Se min $= m$ max $= M$ $f([a,b]) = [m, M]$

$\Downarrow$

① Se f continua su un intervallo limitato ma NON CHIUSO:
$f(x) = 1/x$ su $(0,1]$ $f(0,1] = [1, +\infty)$

② Se f continua su $(0, +\infty)$, $f(x) = x^2$ $f([0,+\infty)) = [0, +\infty)$ $\to$ è ILLIMITATA!

③ $f(x) = M(x)$ su $[0,1)$ f è discontinua in $x = 1$
e f NON HA MAX $\sup f(x) = 1 \neq \max$ $x \in [0,1)$

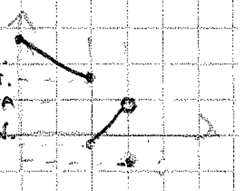


- f continua su un intervallo I

TEOREMA: f continua su un intervallo I
f è invertibile su I (è INIETTIVA) $\Leftrightarrow$ f è STRETT. MONOTONA su

OSSERV: ① $\Leftarrow$ è SEMPRE VERA
② $\Rightarrow$ VERA solo per f CONTINUA!

- è INIETT.
- NON STRETT. MONOTONA
- è DISCON.



- f continua su I $\Rightarrow f(I) = J$ intervallo
- se f è STRETT. MONOTONA su I $\Rightarrow \exists\, f^{-1}: J \to I$

TEOREMA: se f è CONTINUA su I e f è INIETTIVA $\Rightarrow f^{-1}: f(I) = J \to$ I è CONTINUA su J

Es: ① $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ è CONTINUA in $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$\operatorname{arctg} x : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ è CONTINUA!

② $f(x) = e^x$ è CONTINUA su $\mathbb{R}$ $\Rightarrow \log : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ è CONTINUA su $(0,$

[COROLLARIO (FUNZIONE COMPOSTA)]:

f è CONTINUA in x_0 e g è CONTINUA in $f(x_0)$:

$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ $x_0 \to f(x_0)$ $\Rightarrow g \circ f(x)$ è CONTINUA in x_0

⑤ $\lim_{x \to c} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = +\infty$

$\forall B(+\infty) = (a, +\infty) \ \exists B(c) \ x \in B(c) \cap A \setminus \{c\} \Rightarrow \left|\frac{g(x)}{f(x)}\right| \in B(+\infty)$ cioè $\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| > a$

$\Rightarrow \exists B(c) \ x \in B(c) \cap A \setminus \{c\} \Rightarrow f(x) \neq 0$

$\Rightarrow \frac{g(x)}{f(x)}$ è definita in $B(c) \cap A \setminus \{c\}$

$\Rightarrow \lim_{x \to c} \frac{g(x)}{f(x)} = 0 \Rightarrow g(x) \underset{\text{per } x \to c}{=} o(f)$

Es: $\sin x \sim x$ per $x \to 0$ $\quad e^x - 1 \sim x$ per $x \to 0$
$1 - \cos x \sim 1/2\, x^2$ per $x \to 0$ $\quad \log(1+x) \sim x$ per $x \to 0$

$\boxed{\sin x = o(x)}$ per $x \to \pm\infty$ $\quad \boxed{\lim_{x \to \pm\infty} \frac{\sin x}{x} = 0}$

• PROPRIETÀ:
• $f = O(g)$ $\quad |f(x)| \leq M |g(x)| \quad x \in B(c) \cap A \setminus \{c\}$
• $f \ o\ (g)$

$\left.\begin{array}{l} \cdot f \asymp g \ \text{ per } x \to c \\ \cdot f \sim g \ \text{ per } x \to c \end{array}\right\} f = O(g)$ per $x \to c$

• PROPOSIZIONE: Se $f \asymp g$ per $x \to c$

$\Rightarrow \exists\, \ell \in \mathbb{R}, \ell \neq 0 \quad f(x) \sim \ell \cdot g(x)$ per $x \to c$

DIM: $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \neq 0 \Rightarrow f(x) \sim \ell \cdot g(x),\ x \to c$

• PROPOSIZIONE: $f \sim g$ per $x \to c \iff f(x) = g(x) + o(g)$ per $x \to c$

DIM: $f \sim g \iff \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

$\Rightarrow \lim_{x \to c} \left[\frac{f(x)}{g(x)} - 1\right] = 0 = \lim_{x \to c} \left[\frac{f(x) - g(x)}{g(x)}\right] \overset{0}{} \iff f(x) - g(x) =$

$\underset{\text{per } x \to c}{= o(g)} \iff \boxed{f(x) = g(x) + o(g)}$ per $x \to c$

Es: • $1 - \cos x \sim 1/2\, x^2$ per $x \to 0$ $\quad 1 - \cos x = 1/2\, x^2 + o(1/2\, x^2)$
• $e^x - 1 \sim x$ per $x \to 0$ $\quad e^x = 1 + x + o(x)$
• $\log(1+x) \sim x$ per $x \to 0$ $\quad \log(1+x) = x + o(x)$

• PROPOSIZIONE: $f = o(g)$ per $x \to c \iff \forall \alpha \neq 0 \quad f = o(\alpha g)$ per $x \to c$

$\iff \alpha f = o(g)$ per $x \to 0 \quad \forall \alpha \neq 0$

DIM: $f = o(g)$ per $x \to c \iff \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \iff \forall \alpha \neq 0,$

$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{\alpha \cdot g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \iff$

$\iff \boxed{\alpha f = o(g)}$ per $x \to c$

Es: $\lim_{x\to 0} \left|\frac{\sin x}{1-\cos x}\right| = \lim_{x\to 0} \left|\frac{x}{\frac{1}{2}x^2}\right| = +\infty$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^3 x}{\log(x+1)(1-\cos x)} = \frac{\sin x \cdot \sin x \cdot \sin x}{x \cdot \frac{1}{2}x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{\frac{1}{2}x^3} = \boxed{2}$$

- $f(x) + o(f) \sim f$ $\qquad g + o(g) \sim g$

$$\boxed{\lim_{x\to c} \frac{f(x)+o(f)}{g(x)+o(g)}} = \lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f(x)\left[1+\frac{o(f)}{f}\right]^{\to 0}}{g(x)\left[1+\frac{o(g)}{g}\right]_{\to 0}} = \boxed{\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}}$$

Es: $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^3+2x^2}{x^6-5x} = 0$

PROPOSIZIONE: $f \sim \tilde{f}$, $g \sim \tilde{g}$ per $x \to c$ $\Rightarrow$ $f \cdot g \sim \tilde{f} \cdot \tilde{g}$ $\quad f/g \sim \tilde{f}/\tilde{g}$ per $x\to c$

N.B. è FALSO: $f+g \sim \tilde{f}+\tilde{g}$

Es: $x^2+1 \sim x^2$ $\qquad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)^{\to 0} = 1$

- $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+\sin x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x^2}^{\to 1} + \overbrace{\sin x}^{\text{limitata}} \cdot \overbrace{\frac{1}{x^2}}^{\to 0}\right) = 1$

- $f(x)\cdot g(x) = (x^2+1)(x^2+\sin x) \sim x^2 \cdot x^2 = x^4$

- $f(x) = x^2+1 = x^2+o(x^2)$ $\qquad g(x) = x^2+\sin x = x^2+o(x^2)$
$\Rightarrow f(x)-g(x) = x^2+o(x^2)-(x^2+o(x^2)) = o(x^2)$

$\sin x = x + o(x)$ per $x\to 0$
$\operatorname{tg} x = x + o(x)$

Es: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x+o(x)-(x+o(x))}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{o(x)}{x} = 0$

- $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{o(x)}{x} \cdot \frac{1}{x} = ?$

$$\sin x - \operatorname{tg} x = \sin x - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x \cdot \sin x - \sin x}{\cos x} = \frac{\sin x(\cos x - 1)}{\cos x}$$

$\sin x \sim x$ $\quad \cos x - 1 \sim -\frac{1}{2}x^2$ $\quad \cos x \sim 1$ $\quad \sin x - \operatorname{tg} x \sim (x \cdot -\frac{1}{2}x^2)$ per $x\to 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2}x^3}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{-\frac{1}{2}x^3} = 1 \Rightarrow \sin x - \operatorname{tg} x \sim -\frac{1}{2}x^3 \quad x\to 0$$

- INFINITI

f, g def. su A $\quad c$ p.to di acc. di A

$$\lim_{x\to c} |f(x)| = \lim_{x\to c} |g(x)| = +\infty$$

① $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \boxed{l} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\quad f(x) \asymp g(x)$ per $x \to c$

Le due funzioni hanno lo stesso ordine di infinito per $x \to c$

② $\lim_{x\to c} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = \boxed{+\infty}$ $\quad f$ ha ordine di infinito superiore rispetto a g, per $x \to c$

③ $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \boxed{0}$ $\quad f$ ha ordine di infinito inferiore rispetto a g, per $x \to c$

$f(x) = o(g)$

④ $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \boxed{\nexists}$ $\quad f$ e g hanno ordine di infinito non confrontabile

Es.: $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{3x^3 - x + 1} = \frac{1}{3}$ → STESSO ORDINE DI ∞

- $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 + 2x - 1}{-x^2 + 5} = -\infty$ → NUMERATORE HA ORDINE DI ∞ SUPERIORE AL DENOMINATORE

- $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 - 7}{5x^5 + 10x} = 0$ → NUM. HA ORDINE DI ∞ INFERIORE AL DENOM.

- $x^3 + 2x\sin x + 1 = x^3\left(1 + \underbrace{\frac{2x\sin x}{x^3}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{1}{x^3}}_{\to 0}\right) = x^3 + o(x^3) \quad x \to +\infty$

- $\lim_{x\to+\infty} x^3 + o(x^3) = +\infty$ $\qquad \lim_{x\to-\infty} x^3 + o(x^3) = -\infty$

- $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 + 2x\sin x + 1}{x^4 + x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 + o(x^3)}{x^4 + o(x^4)} = 0$

- $x(\sin x + 2) \quad x \to +\infty$ $\qquad 1 \le \sin x + 2 \le 3$

$\underset{\to +\infty}{x} \le x(\sin x + 2) \le \underset{\to +\infty}{3x} \quad \forall x > 0$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{x(\sin x + 2)}{x} = \nexists$ → NON SONO CONFRONTABILI!

- $\lim_{x\to+\infty} \frac{x(\sin x + 2)}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \overset{\to 0}{\frac{1}{x}} \underbrace{(\sin x + 2)}_{\text{limitato}} = 0$ $\Rightarrow x(\sin x)$ è un ∞ di ordine inferiore rispetto a x^2, $x \to +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x(\sin x + 2)}{x^{\alpha}} = \begin{cases} +\infty & 0 < \alpha < 1 \\ 0 & \alpha > 1 \\ \nexists & \alpha = 1 \end{cases}$$

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} 0 & f \text{ è } o(1) \text{ superiore a } g \\ l \neq 0 & f \text{ e } g \text{ infinitesime stesso ordine} \\ +\infty & g \text{ è inf.mo di ordine superiore di } f \end{cases}}$$

- $\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1} \qquad x \to +\infty$

$$\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} - \sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} = \sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - \sqrt{x^2}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} = |x|\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}} - |x|\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}} = |x|\left[\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$(1+t)^\alpha = 1 - \alpha t + o(t) \qquad t \to 0 \qquad t = \frac{1}{x^2} \qquad t = -\frac{1}{x^2}$$

$$= |x|\left[1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) - \left(1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\right] = |x| \cdot \left[\frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right] \quad \text{per } x \to \pm\infty$$

$$= \frac{|x|}{x^2} + |x|\, o\left(\frac{1}{x^2}\right) = \operatorname{sgm} x \cdot \frac{1}{x} \cdot o\left(\frac{1}{x^2}\right) \qquad x \to \pm\infty$$

$$= \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1} = \boxed{(\operatorname{sgm} x)\cdot\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)} \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1} = 0$$

$\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$ ha ordine di inf mo 1 rispetto a $\frac{1}{x}$, per $x \to +\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\log x}{x^\alpha} = 0 \quad \forall\, \alpha > 0 \qquad \log x = t \qquad x = e^t \qquad x^\alpha = (e^t)^\alpha$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{t}{e^{t\alpha}} = \qquad \alpha t = s \qquad t = \frac{s}{\alpha} \qquad = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{s}{\alpha}}{e^s} = \boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{s}{e^s} = 0}$$

- $x \log x$ ha ORDINE DI ∞ superiore a 1 rispetto a x, per $x \to +\infty$, ma ha ORDINE INFERIORE a $1+\varepsilon$, $\forall\, \varepsilon > 0$

Es: $\dfrac{\log(\log x)}{\log x} = \dfrac{\log t}{t} = 0$

ASINTOTI

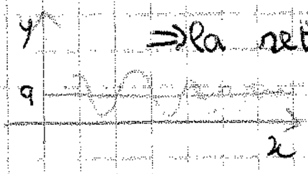
- f definita su $(a, +\infty)$
- f ha ASINTOTO per $x \to +\infty$ (DESTRO) se $\exists$ una retta $y = mx + q$ tale che

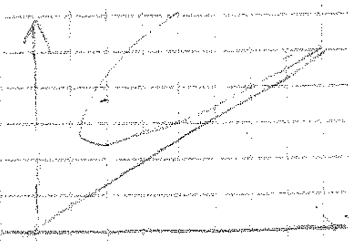
$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - (mx+q)) = 0 \qquad f(x) - (mx+q) = o(1) \quad \text{per } x \to +\infty$$

$$f(x) = mx + q + o(1) \quad \text{per } x \to +\infty$$

① $m = 0 \qquad f(x) = q + o(1) \quad$ per $x \to +\infty \iff \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(q + o(1)) = q$

$\Rightarrow$ la retta orizzontale $y = q$ è l'ASINTOTO per $x \to +\infty$ di $f(x)$





② $m \neq 0 \qquad f(x) = mx + q + o(1) \quad$ per $x \to +\infty$

$\Rightarrow$ ASINTOTO: $y = mx + q$ (OBLIQUO) $\iff$

$$\iff \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} [mx + q + o(1)] = \begin{cases} +\infty & m > 0 \\ -\infty & m < 0 \end{cases}$$

Es: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{mx + q + o(1)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{mx}{x} + \underbrace{\dfrac{q}{x}}_{\to 0} + \underbrace{\dfrac{o(1)}{x}}_{\to 0}\right) = m \neq 0$

$\Rightarrow f(x)$ ha ORDINE DI ∞ 1 rispetto a x, per $x \to +\infty$

FATTORIALE DI $n \in \mathbb{N}$

- $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty}$ $\frac{n^n}{n!} = \frac{n\cdot n\cdot n \cdots n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 \cdots n} > \underset{+\infty}{\underset{\downarrow}{n}} \Rightarrow n < \frac{n^n}{n!} \to \infty$

- $\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{a^n}{n!}=0}$ $\forall a \in \mathbb{R}$ $|a|<1 \Rightarrow 0\le\left|\frac{a^n}{n!}\right| = \frac{|a|^n}{n!} < \frac{1}{n!} \to 0$

- $\boxed{\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=1}$ $n^{\frac1n} = \infty^0$ $a = e^{\log a}$ $\sqrt[n]{n} = e^{\log n^{\frac1n}} = e^{\frac1n \log n} = e^{\frac{\log n}{n}} = 1$

- LIMITI NOTEVOLI

$$\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha \qquad 1+x=e^t \Rightarrow x=e^t-1$$

$$\boxed{\lim_{t\to0}\frac{e^{\alpha t}-1}{e^t-1}\cdot\frac{\alpha t}{\alpha t}=\alpha}$$

Es:
$$\lim_n \frac{\sqrt[3]{\frac{n^2+1}{n}}-1}{\log\frac{n^2+1}{n^2}} \qquad [x^3+a^3=(x-a)(x^2+ax+a)]$$

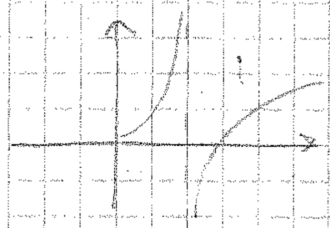
$$=\lim_n \frac{\left(1+\frac1n\right)^{\frac13}-1}{\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}\cdot\frac{\frac{1}{n^2}}{1/n^2} = \boxed{\frac13}$$

ASINTOTI VERTICALI

$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=+\infty$ $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=-\infty$

Es: $f(x)=e^{\frac1x}$ $\lim_{x\to0^+}e^{\frac1x}=\lim_{t\to+\infty}e^t=+\infty$

$\lim_{x\to0^-}e^{\frac1x}=\lim_{s\to-\infty}e^t=0$



- se $\lim_{x\to x_0}|f(x)|=+\infty \Rightarrow x=x_0$ ASINTOTO VERTICALE BILATERALE
- se $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=+\infty$ o $-\infty$, $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ non è $\pm\infty$ } $x_0=x_0$ ASINTOTO VERTICALE DESTRO
- se $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=+\infty$ o $-\infty$, $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ non è $\pm\infty$ } $x=x_0$ ASINTOTO VERTICALE SINISTRO

Esempio: $f(x)=x\cdot e^{\frac{1}{|x^2-1|}}$ $\text{dom} f=\mathbb{R}\setminus\{\pm1\}$ f è CONTINUA sul dom

- $f(0)=0$ $\text{sgn} f(x)=\text{sgn}\, x$, cioè $f>0$ se $x>0$, $f<0$ se $x<0$
- $f(-x)=-f(x) \to$ DISPARI

$\lim_{x\to1^\pm}\underset{1}{x}\cdot\underset{+\infty}{e^{\frac{1}{|x^2-1|}}}=\lim_{x\to1^\pm}=+\infty \Rightarrow x=1$ ASINTOTO VERTICALE
essendo dispari $x=-1$ ASINTOTO VERTICALE

$\lim_{x\to+\infty}x\cdot e^{\frac{1}{|x^2-1|}}=+\infty$

$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h)$ per $h \to 0$ $\quad x_0 \quad x \to x_0^+ \quad x - x_0 =$

$\Longleftrightarrow \boxed{\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)}$

X TEOREMA: se f è derivabile in x_0 punto interno al dom f $\Longleftrightarrow$ f è continua in x_0.

DIM: x_0 è p.to di acc. del dom $f \Rightarrow f$ è continua in $x_0 \Longleftrightarrow$
$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \Longleftrightarrow \boxed{\lim_{x\to x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0}$ Th

• So che $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)$ $\quad x \to x_0$

$\lim_{x\to x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \to x_0} [\underbrace{f'(x_0)(x-x_0)}_{0} + \underbrace{o(x-x_0)}_{0}] =$

$\frac{o(x-x_0)}{x-x_0} \to 0 \Rightarrow o(x-x_0) \to 0$ per $x \to x_0$

$\Rightarrow f$ è CONTINUA in x_0

N.B. Esistono funzioni continue in x_0 e NON DERIVABILI in x_0!

Es: ① $\sqrt[3]{x} = f(x)$ è continua in $x=0$

$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{2/3}} = \boxed{+\infty}$

$f(x) = \cancel{f(0) + \ell(x)} + o(x)$ perché retta tang. al grafico di f in $(0,0)$ è $x=0$

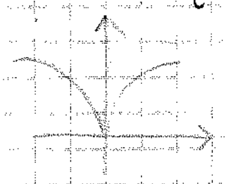
② $f(x) = |x|$ è continua in $\mathbb{R}$, è continua in $x=0$

$x>0 \quad |x| = x$ $\qquad \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x} = \begin{cases} \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1 \\ \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1 \end{cases}$
$x<0 \quad |x| = -x$

$\Rightarrow \exists \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-0} \neq \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \Rightarrow \nexists \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

• il modulo di x non è derivabile in $x=0$ perché non ha retta tangente!

③ $\sqrt{|x|} = \begin{cases} \sqrt{x} & x>0 \\ -\sqrt{x} & x<0 \end{cases}$ $\qquad \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{|x|}}{x} = \begin{cases} x>0 & \frac{1}{\sqrt{x}} \\ x<0 & \frac{\sqrt{-x}}{x} \end{cases}$



$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{|x|}}{x} = +\infty \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{|x|}}{x} = -\infty$

• $\exists \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \pm\infty$, ma $\nexists \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

• f derivabile in $x_0 \Rightarrow f$ è CONTINUA in x_0
OSSERVAZIONE: se f non è continua in $x_0 \Rightarrow f$ NON è DERIVABILE in

7) $f(x) = \log x$ è definita $x \in (0, +\infty)$

$f(x_0 + h) - f(x_0) = l \cdot h + o(h)$ per $h \to 0$ $\quad \log(x_0 + h) - \log x_0 =$

$\log(1+t) = t + o(t)$ $t \to 0$ $\quad = \log\left[x_0\left(1 + \frac{h}{x_0}\right)\right] - \log x_0 =$

$= \log x_0 + \log\left(1 + \underbrace{\frac{h}{x_0}}_{0}\right) - \log x_0 = \frac{h}{x_0} + o\left(\frac{h}{x_0}\right) = \frac{1}{x_0} \cdot h + o(h)$ per $h \to 0$

$\Rightarrow \boxed{f(x) = \log x \quad f'(x_0) = \frac{1}{x_0}}$ $\forall\, x_0 > 0 \in \mathbb{R}$

8) $f(x) = \sin x$ $\quad \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x_0 + h) - \sin x_0}{h} =$ divido e moltiplico ×2

$= \frac{2 \sin\left(\frac{x_0 + h - x_0}{2}\right) \cos\left(\frac{x_0 + h + x_0}{2}\right)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2 \sin \frac{h}{2} \cdot \cos \frac{2x_0 + h}{2}}{2} =$

$= \lim_{h \to 0} \underbrace{\frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}}_{1} \cdot \underbrace{\frac{\cos 2x_0 + h}{2}}_{\cos x_0} = \cos x_0$ $\quad \boxed{f(x) = \sin x \quad f'(x_0) = \cos x_0}$ $\forall$

9) $\boxed{f(x) = \cos x \quad f'(x_0) = -\sin x_0}$

ALGEBRA DELLE DERIVATE

f, g definite in un intervallo di x_0 e derivabile in x_0

1) $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$, αf è derivabile in x_0 e $\boxed{(\alpha f)'(x_0) = \alpha \cdot f'(x_0)}$

2) $f + g$ è derivabile in x_0 e $\boxed{(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)}$

3) $f \cdot g$ è derivabile in x_0 e $\boxed{(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)}$ → FORMULA DI LEIBNIZ

4) se $f \neq 0$ in x_0 $\Leftrightarrow$ $\frac{1}{f}$ è derivabile in x_0 e $\boxed{\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{[f(x_0)]^2}}$

5) se $f(x_0) \neq 0 \Rightarrow \frac{g(x)}{f(x)}$ è derivabile in x_0 e $\boxed{\left(\frac{g}{f}\right)'(x_0) = \frac{g'(x_0)(f(x_0)) - f(x_0) f'(x_0)}{[f(x_0)]^2}}$

DIMOSTRAZIONI

1) $\alpha \in \mathbb{R}$ $\quad \alpha f(x)$ $\quad f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$ $\quad x \to x_0$

$h(x) = \alpha f(x)$ $\quad h(x) - h(x_0) = \alpha f(x) - \alpha f(x_0) =$

$= \alpha [f(x) - f(x_0)] = \alpha [f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)] =$

$= \alpha f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$ $\quad x \to x_0$

es: $f(x) = \pi x^2$ $\quad f'(x) = 2\pi x$

× DERIVATA SOMMA:

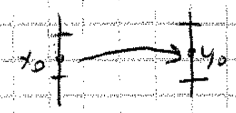
2) $\begin{cases} f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \\ g(x) - g(x_0) = g'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \end{cases}$ $\quad x \to x_0$

$[f(x) + g(x)] - [f(x_0) + g(x_0)] = f'(x_0)(x - x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) + o(x - x_0)$

TEOREMA DI DERIVABILITÀ FUNZ. COMPOSTA

$f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad g: B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

x_0 interno ad A $\quad \exists B_\delta(x_0)$ tale che $f(B_\delta(x_0)) \subseteq B$



th: $f(B_\delta(x_0))$ sia un intervallo che contiene y_0 al suo interno

- f sia derivabile in x_0 $\quad \Rightarrow g \circ f$ è derivabile in x_0 e
- g sia derivabile in $f(x_0) = y_0$ $\quad (g \circ f)'(x_0) = \boxed{g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)}$

- Ammettiamo il LEMMA: $h(x) = o(f(x) - f(x_0))$ con f derivabile in x_0 $\quad x \to x_0$
$\Rightarrow h(x) = o(x - x_0)$ per $x \to x_0$

DIM: $\dfrac{h(x)}{x - x_0} = \dfrac{h(x)}{f(x) - f(x_0)} \quad \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \to f'(x_0) \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{h(x)}{x - x_0} = 0 \Rightarrow h(x) = o(x - x_0)$$

Per IPOTESI so che:

ⓐ $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$

ⓑ $g(y) = g(y_0) + g'(y_0)(y - y_0) + o(y - y_0)$

Se y è abbastanza vicino a y_0, $\exists x : f(x) = y$. Per ipotesi $y_0 = f(x_0)$

$g(f(x)) = g \circ f(x) = g(f(x_0)) + g'(f(x_0)) \cdot (f(x) - f(x_0)) + o(f(x) - f(x_0)) \quad x \to x_0$

$g \circ f = g \circ f(x_0) + g'(f(x_0))(f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)) + o(x - x_0)$ per il lemma

$= g \circ f + \underline{g'(f(x_0)) f'(x_0)(x - x_0)} + o(x - x_0) \quad x \to x_0$

es.: $\sin 3x \quad x \xrightarrow{f} 3x \quad y \xrightarrow{g} \sin y \quad g \circ f(x) \to$ derivabile $\forall x \in \mathbb{R}$

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = \cos 3x \cdot 3 = 3\cos 3x$$

- $e^{\sin 3x} \quad x \xrightarrow{f} 3x \quad y \xrightarrow{g} \sin y \quad z \xrightarrow{h} e^z$

$(h \circ g \circ f)'(x) = (h \circ g)'(f(x)) \cdot f'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(f(x)) \cdot f'(x)$

$= e^{\sin 3x} \cdot \cos 3x \cdot 3 = \boxed{3\cos 3x \, e^{\sin 3x}}$

TEOREMA (DERIVABILITÀ FUNZIONE INVERSA)

(è già supposta l'INVERTIBILITÀ)

- f continua e invertibile in $B_\delta(x_0)$
- f derivabile in x_0, $f'(x_0) \neq 0$

$\Rightarrow f^{-1}: \underset{(y_0 - a,\, y_0 + b) \quad a, b > 0}{B_\varepsilon(y_0)} \longrightarrow B_\delta(x_0)$ dove $y_0 = f(x_0)$ è derivabile in y_0

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

DIM: $\forall y \in (y_0 - a, y_0 + b)$, $\exists x \in B_\delta(x_0)$ tale che $f(x) = y \Longleftrightarrow f^{-1}(y) =$

Rapporto incrementale per f^{-1}: $\dfrac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \dfrac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}$

$\displaystyle\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}$: f^{-1} è continua (xké f continua)

$y \to y_0 \quad \underset{\to x}{f^{-1}(y)} \to \underset{\to x_0}{f^{-1}(y_0)}$

$$= \boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)}} \in \mathbb{R} \text{ se } \boxed{f'(x_0) \neq 0}$$

(è finito)

DERIVATE LATERALI O DERIVATA DESTRA E SINISTRA

x_0 punto interno al dom f • f è derivabile a destra in x_0 se $\exists\, l_1 \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) = f(x_0) + l_1(x - x_0) + o(x - x_0)$ per $x \to x_0^+$, $x > x_0$

$\iff \exists \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l_1$ l finito $f'_+(x_0)$ derivata destra di f in x_0

• f è derivabile a sinistra in x_0 se $\exists\, l_2 \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) = f(x_0) + l_2(x - x_0) + o(x - x_0)$ $x < x_0$ $x \to x_0$

$\iff \exists \lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l_2$ $f'_-(x_0)$ = derivata sinistra!

PROPOSIZIONE: x_0 p.to interno al dom f f è derivabile in $x_0 \iff \exists$ finiti e uguali

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \iff f'_+(x_0) = f'_-(x_0) \text{ esistono}$$

• Se f è definita in $[a, b]$

(1) in $x = b$ posso chiedermi se $\exists\, f'_-(b)$: $\exists$ finito $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_-(b)$

$\Rightarrow f$ è continua in b, cioè $\lim\limits_{x \to b} f(x) = f(b)$

(2) in $x = a$ $f'_+(a)$ $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_+(a)$ $\Rightarrow f$ è continua in a, cioè $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

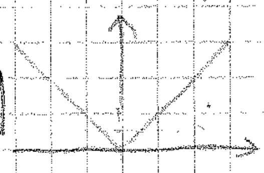
PUNTI DI NON DERIVABILITÀ

x_0 punto interno al dom f f continua in x_0

(1) PUNTO ANGOLOSO $x_0 \in$ dom f

$x \to f'_+(x_0)$ $\exists\, f'_-(x_0)$ e $f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$

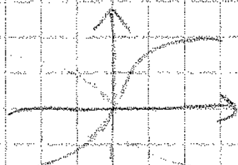
Es: $\boxed{|x|}$



(2) PUNTO DI FLESSO A TANGENTE VERTICALE

$\exists \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$ o $-\infty$ (entrambi)

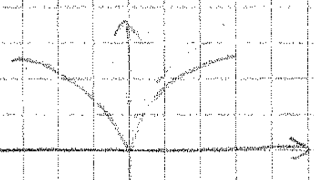
Es: $\boxed{\sqrt[3]{x} \to +\infty,\ -\sqrt[3]{x} \to -\infty}$



(3) PUNTO DI CUSPIDE $x_0 \in$ dom f

$\underbrace{\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\text{sono } \infty \text{ di segno diversi}}$

Es: $\sqrt[3]{x^2}$



Esempio: $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ $f(0) \Rightarrow f$ è CONTINUA in $x = 0$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - 0}{x - 0} = \dfrac{x \sin \frac{1}{x}}{x} = \nexists$ NON ESISTE IL LIM!

TEOREMI "GLOBALI"

- TEOREMA DI ROLLE

IP:
- f continua su $[a,b]$
- f derivabile su (a,b)
- $f(a) = f(b)$

$\Rightarrow$

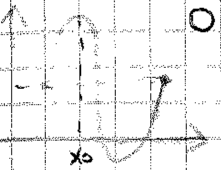
TH: $\exists\, x_0 \in (a,b),\ f'(x_0) = 0$

DIM: ① f COSTANTE: $\forall x \in [a,b],\ f(x) = f(a) = f(b)$
$\Rightarrow f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b)$

② f NON COSTANTE su $[a,b]$: $\exists\, x \in (a,b)\ f(x) \neq f(a) \neq f(b)$
f è CONTINUA su $[a,b] \Rightarrow f$ ha MAX e MIN ASS. su $[a,b]$ per il teorema di Weierstrass, cioè $\exists\, x_1, x_2 \in [a,b]$

$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \quad \forall x \in [a,b]$ e $f(x_1) \neq f(x_2)$ perché non costante

$\Rightarrow$ almeno uno fra x_1 e x_2 sta in (a,b) per esempio:
$x_1 \Rightarrow x_1$ è p.to di estremo di f, $x_1 \in (a,b)$ e f è derivabile in $(a,b) \Rightarrow f'(x_1) =$
0 per teorema di FERMAT



$\exists\, x_0 \in (a,b)$: $f'(x_0) = 0 \Rightarrow$ la retta tg al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$ è ORIZ
la retta per $(a, f(a)), (b, f(b))$ è ORIZZ. perché $f(a) = f(b)$

Se f è continua in $[a,b]$, f derivabile in (a,b), $f(a) = f(b)$
$\Rightarrow \exists\, x_0 \in (a,b)$ in cui la retta tg. al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$ è // alla retta che unisce $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$

- TEOREMA DI LAGRANGE (O VALOR MEDIO)

IP:
- f continua su $[a,b]$
- f derivabile su (a,b)

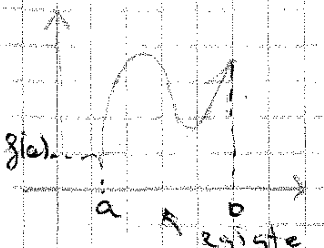
$\Rightarrow$

TH: $\exists\, x_0 \in (a,b),\ f'(x_0) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

DIM: $g(x) = f(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a)$

$\Rightarrow g$ soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle
$\Rightarrow \exists\, x_0 \in (a,b)$ tale che $g'(x_0) = 0$

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \qquad \boxed{0 = g'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}}$$



$(a, f(a)) \quad (b, f(b))$

$$\frac{y - f(a)}{x - a} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad y - f(a) = \underbrace{\frac{f(b) - f(a)}{b - a}}_{m}(x - a)$$

esiste almeno un punto in cui la retta tang. al punto è // alla retta secante passante per gli estremi dell'intervallo

- CONSEGUENZE TEOREMA DI LAGRANGE

I formula dell'incremento finito (sviluppo di Taylor al 1° ordine)
- f derivabile su un intervallo aperto $I \ni x_0, x \in I$

$\Rightarrow \exists\, c$ che sta fra x_0 e x tale che
$f(x) = f(x_0) + f'(c)(x - x_0)$

DIM. $\Leftrightarrow \exists\, c$ fra x_0 e x tale che $f'(c) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ ⊛

① $x > x_0$ $\quad$ $x_0 \quad x$ $\quad$ $[x_0, x]$ è un interv. chiuso su cui f è CONTINUA, è derivabile in (x_0, x)

LEGAMI FRA MONOTONIA E DERIVABILITÀ

TEOREMA 1:

① f è crescente su I, int. aperto $\Rightarrow f'(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in I$
f è derivabile su I

② f è decres. su I, int. aperto $\Rightarrow f'(x) \leq 0 \quad \forall\, x \in I$
f è derivabile su I

DIM ①: f è cresc. su $I \Longleftrightarrow \forall\, x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

$$\Longleftrightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 0 \quad \forall\, x_1 \neq x_2$$

$$\lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(x_1) \geq 0$$ perché f è deriv. in I e anche in x_1

per cor. teor. perm. segno!

TEOREMA 2:

f derivabile su un intervallo aperto I:
① se $f'(x) \geq 0,\ \forall\, x \in I \Rightarrow f$ è CRESCENTE su I
② se $f'(x) > 0,\ \forall\, x \in I \Rightarrow f$ è STRETT. CRESCENTE su I
③ se $f'(x) \leq 0,\ \forall\, x \in I \Rightarrow f$ è DECRESCENTE su I
④ se $f'(x) < 0,\ \forall\, x \in I \Rightarrow f$ è STRETT. DECRESCENTE su I

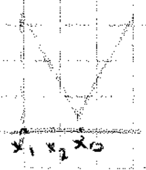
DIM: ⓐ Prendo $x_1, x_2 \in I \quad x_1 < x_2 \overset{?}{=} f(x_1) \leq f(x_2)\ 0 \leq f(x_1) - f(x_2)$

- Scrivo la I formula dell'increm. finito: $f(x_2) = f(x_1) + \underbrace{f'(c)}_{\geq 0}\underbrace{(x_2 - x_1)}_{> 0} \geq f(x_1)$
con $c \in (x_1, x_2)$

ⓑ se $f'(c) > 0 \quad \forall\, c \in I \qquad f(x_2) = f(x_1) + \underbrace{f'(c)}_{> 0}\underbrace{(x_2 - x_1)}_{> 0} > f(x_1)$

Es: $f(x) = \frac{1}{x} \qquad f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

- f non è DERIVABILE su dom f $\quad -\frac{1}{x^2} < 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
$\Rightarrow f$ è STRETT. DECRESC. su $(-\infty, 0)$, e su $(0, +\infty)$



$x_1, x_2 \in (x_0 - \varepsilon, x_0] \quad x_1 < x_2$
$f(x_1) \geq f(x_2) \geq f(x_0)$

$x_3, x_4 \in [x_0, x + \varepsilon] \quad f(x_3) \leq f(x_4) \Rightarrow f(x_0) \leq f(x_3) \leq f(x_4)$

- f è DECRESCENTE in $(x_0 - \varepsilon, x_0) \Rightarrow x_0$ è un punto di min locale
f è CRESCENTE in $[x_0, x_0 + \varepsilon)$

- Se f è continua in x_0 e derivabile in $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \setminus \{x_0\}$ e $f'(x) \leq 0 \ \forall\, x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$
$f'(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$
$\Longleftrightarrow x_0$ è un PUNTO DI MINIMO

Es. $f(x) = x e^{2x} \qquad$ dom $f = \mathbb{R} \qquad f$ è deriv. su $\mathbb{R}$

$f'(x) = e^{2x} + x\,2e^{2x} = e^{2x}(1 + 2x) = 0 \Longleftrightarrow 1 + 2x = 0 \Longleftrightarrow x = -\frac{1}{2}$ $\quad f' \; - - - \; -\frac{1}{2} \; + + +$ ↘ ↗

Es: $\sin x, \cos x, e^x, x^n \in \mathcal{C}^\infty(I)$

- Se $f \in \mathcal{C}^k(I)$ si dice che f è di classe $\mathcal{C}^k$ su I
- Se $f, g \in \mathcal{C}^k(I) \Rightarrow f+g, f \cdot g$ sono di classe $\mathcal{C}^k$ su I

  se $g(x) \neq 0 \ \forall x \in I \Rightarrow \frac{1}{g}, \frac{f}{g} \in \mathcal{C}^k$

- La composizioni di funzioni di classi $\mathcal{C}^k$ è di classe $\mathcal{C}^k$

  Es: $\sin(e^x)$ è di classe $\mathcal{C}^\infty$

- Esempio: $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ $\quad x^2 \sin\frac{1}{x}$ è di classe $\mathcal{C}^\infty$ su $(-\infty, 0)$ e su $(0, +\infty)$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \underbrace{x^2}_{\to 0} \underbrace{\sin\frac{1}{x}}_{\text{limitata}} = 0 = f(0) \Rightarrow f \text{ è continua in } x = 0$$

$$f'(0) \overset{?}{=} \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$$

$\Rightarrow f$ è derivabile in x_0 e $f'(0) = 0$

$$f'(x) \overset{x\neq 0}{=} 2x \sin\frac{1}{x} + x^2 \cos\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} \Big(\underbrace{2x \sin\frac{1}{x}}_{\to 0} \underbrace{- \cos\frac{1}{x}}_{\nexists}\Big) \Rightarrow \text{il} \lim_{x\to 0} f'(x) \text{ NON ESISTE!}$$

$\Rightarrow f'$ NON È CONTINUA in $x = 0 \Rightarrow f \notin \mathcal{C}^1(\mathbb{R}), f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$

TEOREMA DI de l'Hopital

Ip:
f, g definite in $B(x_0) \setminus \{x_0\}$
f, g derivabili in $B(x_0) \setminus \{x_0\}$
$g(x) \neq 0$ in $B(x_0) \setminus \{x_0\}$
$g'(x) \neq 0$ in $B(x_0) \setminus \{x_0\}$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} \sin x = 0$$
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} \cos x = 0$$

a. se il $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ e se $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ $\Rightarrow \exists \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

b. se $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = \lim_{x\to x_0} |g(x)| = +\infty$ e se $\exists \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ $\Rightarrow \exists \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

OSSERVAZIONI:
1. Vale solo se f/g è una F.I. $0/0$ o ∞/∞
2. Se $\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \nexists$, non posso dire nulla su $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$

Es: $\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x} = \frac{\infty}{\infty}$ F.I. $\quad f(x) = e^x, g(x) = x$ sono DERIVABILI in $\mathbb{R}$; $g(x) \neq 0 \ \forall x > 0$, $g'(x) = 1 \neq 0 \ \forall x$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to +\infty} e^x = \boxed{+\infty}$$

• $g(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & x<0 \\ 0 & x\geq 0 \end{cases}$ $\quad g'(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} & x<0 \\ 0 & x>0 \end{cases}$

$\lim_{x\to x_0^-} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{x} = 0 = g'(x) \quad \lim_{x\to 0^+} g'(x) = 0 = g'_+(0)$

$\Rightarrow g'(0) = 0$, g è derivabile su $\mathbb{R}$, g non è continua in $x=0$ perché $\nexists \lim_{x\to 0^-} g$

FORMULE DI TAYLOR

$f(x) - P_n(x) =$ resto in x → formule dell'incr. finito

• $\boxed{f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)}$ $\quad x\to x_0$

• $f(x) = f(x_0) + f'(c)(x-x_0)$ con c che sta fra x e x_0

$f(x) = \sin x \quad f'(c) = |\cos c| \leq 1 \quad |f'(c)[x-x_0]| \leq 1\,|x-x_0|$

$\exists$ unico $\ell \ominus f'(x_0)$ tale che $f(x) - [f(x_0) + \ell(x-x_0)] = o(x-x_0)$ per $x\to x_0$

ORDINE 2: $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + a(x-x_0)^2 + o(x-x_0)$

Esisterrà a tale che rende vera l'uguaglianza ↑ per $x\to x_0$?

$\exists\, a \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + a(x-x_0)^2]}{(x-x_0)^2} \stackrel{?}{=} 0 \qquad f(x)\to f(x_0)\ \frac{0}{0}$

Se f è derivabile in $B(x_0)$ si può usare de l'Hôpital

$= \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0) - 2a(x-x_0)}{2(x-x_0)} = \lim_{x\to x_0} \left[\frac{1}{2}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0} - a\right] = 0$

$\Longleftrightarrow \exists\, f''(x_0)$ e $\frac{1}{2}f''(x_0) - a = 0 \qquad \boxed{a = \frac{1}{2}f''(x_0)}$

• Posso dire che
se f è derivabile 2 volte in $x_0 \Rightarrow \boxed{f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 + o((x-x_0)^2)}$ $x\to$

$f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0) \to$ si chiama POLINOMIO DI TAYLOR di GRADO 2 di f, centrato in x_0, con il resto $o((x-x_0)^2)$ RESTO IN FORMA DI PEANO

$f(x) = T^2_{f,x_0}(x) + o((x-x_0)^2) \quad x-x_0 \quad \boxed{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k}$ ORDINE 1 → RETTA, ORDINE 2 → PARABOLA

- ORDINE 3: $\exists\, b \in \mathbb{R}$ t.c.

$f(x) = T^2_{f,x_0}(x) + b(x-x_0)^3 + o((x-x_0)^3) \qquad x\to x_0$

$\lim_{x\to x_0} \frac{[T^2_{f,x_0}(x) + b(x-x_0)^3]}{x-x_0} \stackrel{?}{=} 0$

$= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0) - \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 - b(x-x_0)^3}{(x-x_0)^3}$ f è CONTINUA, $f(x)\to f(x_0)$, $x\to x_0$, $\frac{0}{0}$

- $\boxed{\text{USO DE L'HOPITAL}}$

$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0) - f''(x_0)(x-x_0) - 3b(x-x_0)^2}{3(x-x_0)^2}$ $\quad f$ è CONTINUA in $x_0 \Rightarrow f'(x_0) \to f'(x_0) \Rightarrow$

• Se f è derivabile 2 volte in $B(x_0)$, applico di nuovo de l'Hôpital

$\lim_{x\to x_0} \frac{f''(x) - f''(x_0) - 3\cdot 2\,b(x-x_0)}{3\cdot 2(x-x_0)} = \lim_{x\to x_0}\left[\frac{1}{3\cdot 2}\frac{f''(x)-f''(x_0)}{x-x_0} - b\right] \stackrel{?}{=} 0$

RESTO IN FORMA DI LAGRANGE

TEOREMA: formula di Taylor con il resto in forma di Lagrange, centrata in x_0
f derivabile n volte $B(x_0)$

{PEANO: f derivabile $n-1$ volte in $B(x_0)$
f derivabile n volte in x_0 $\exists f^n(x_0)$ }

$$\boxed{\Rightarrow \exists\, c \text{ fra } x_0 \text{ e } x \text{ tale che } f(x)=f(x_0)+\dots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + \underbrace{\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)(x-x_0)^{n+1}}_{\text{RESTO DI LAGRANGE}}}$$

$$f(x)-T^n_{f,x_0}(x)=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)(x-x_0)^{n+1}$$

Es: $\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^2}=$ $\quad \sin x = x+o(x)$ $\quad =\lim_{x\to 0}\frac{x-(x+o(x))}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{o(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{o(x)}{x}\cdot\frac{}{x}$

- Non posso calcolare il lim. con de L'Hopital

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{2}x^2}{x}=0$$

CALCOLI DI SVILUPPI

① f PARI, derivabile su $\mathbb{R}$ ② f DISPARI, derivabile su $\mathbb{R}$

② f dispari se $f(-x)=-f(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$

se f è CONTINUA in $x=0$: $\lim_{x\to 0^-}f(x)=$ $z=-x$ $x=-z$ $z\to 0^+$ $=\lim_{z\to 0^+}f(-z)=[-f($

$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^-}f(x)=f(0)=l$ $\quad l=f(0)=0$ $\quad$ se f è cont. in $x=0$, p.to interno al dom.

f dispari su $\mathbb{R}$ o $(-\varepsilon,\varepsilon)$ e continua in $x=0\Rightarrow f(0)=0$

(1) f dispari derivabile: $f(x)=f(-x)$ $\quad f'(x)=-[f'(-x)(-1)]$ $\forall x\in\mathbb{R}$ $\quad f'(x)=+f'(x$

$\Rightarrow$ la derivata di una funzione dispari è pari!

① f pari su $\mathbb{R}$ e derivabile

$f(x)=f(-x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$ $\quad f'(x)=\frac{d}{dx}f(-x)=f'(-x)(-1)=-f'(-x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ la derivata di una funzione pari è dispari!

Se f è PARI e di classe C^1 su $\mathbb{R}$, cioè f' è continua su $\mathbb{R}$.
$\Rightarrow f'(0)=0$ perché f' è DISPARI e CONTINUA

f PARI C^∞
① f' è dispari, $f'(0)=0$
② f'' è pari
③ f''' è dispari, $f'''(0)=0$
$\Rightarrow \boxed{f^{(2k+1)}(0)=0}$

f DISPARI C^∞
① $f(0)=0$
② $f'(x)$ è pari
③ $f''(x)$ è dispari, $f''(0)=0$
$\Rightarrow \boxed{f^{(2k)}(0)=0}$

Ex: ① $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - (1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + x + o(x) - 1 - x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3}{x^3} = ?$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{1} + \cancel{x} + \cancel{\frac{1}{2}x^2} + \cancel{\frac{1}{3!}x^3} + o(x^3) - (\cancel{1} + \cancel{x} + \cancel{\frac{1}{2}x^2} + \cancel{\frac{1}{3!}x^3})}{x^3} = 0$

② $\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x - (x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4))}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)}{x^2} = 0$

- ALGEBRA DELLE FORMULE DI TAYLOR
- f, g derivabili fino all'ordine n in x_0

$T^n_{f,x_0}(x) \qquad T^n_{g,x_0}(x) \qquad T^n(f+g)? \qquad T^n(f\cdot g)?$

$\alpha f + \beta g \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \qquad \boxed{T_{f+g} = T_f(x) + T_g(x)}$

$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o(x - x_0)^n$

$g(x) = g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + \dots + \frac{g^{n}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o(x - x_0)^n$

$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = (f(x_0) + g(x_0)) + (f'(x_0) + g'(x_0))(x - x_0) + \frac{1}{n!}(f^{(n)}(x_0) + g^{(n)}(x_0))(x - x_0) + o(x - x_0)^n \quad x \to x_0$

- f, g derivabili n volte in $x_0 \Rightarrow f \cdot g$ derivabili n volte in x_0

$f(x) = T^n_{f,x_0}(x) + o((x - x_0)^n) \quad x \to x_0 \qquad g(x) = T^n_{g,x_0}(x) + o(x - x_0)^n \quad x \to x_0$

$f(x) \cdot g(x) = (T^n_f(x) + o((x - x_0)^n)) \cdot (T^n_g(x) + o(x - x_0)^n) =$

$= \underbrace{T^n_f(x) + T^n_g(x)}_{\text{POLINOMIO DI GRADO } 2n \text{ in } (x - x_0)} + T^n_f\, o(x - x_0)^n + T^n_g(x)\, o((x - x_0)^n) + [o(x - x_0)^n]^2 =$

$= \underline{T^n_f(x) + T^n_g(x)} + o(x - x_0)^n \quad x \to x_0$

$\longrightarrow$ PARTE DI GRADO n $+ o(x - x_0)^n$

Es: $\sin x \cdot \cos x = (x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4))(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4)) =$

$= x - \frac{1}{2}x^3 + \cancel{\frac{1}{4!}x^5} - \frac{x^3}{3!} + \cancel{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3!}x^5} - \cancel{\frac{1}{3!}\frac{1}{4!}x^7} + o(x^4) =$

$= \boxed{x - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3!}\right)x^3 + o(x^3)} \qquad x \to 0$

$\underbrace{f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)]}_{} = \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + o(x - x_0)^2 \quad x \to x_0$

$g(x)$ [è come se fosse $f(x)$ - la retta t_g)

$\Rightarrow$ il segno di g è uguale localmente al segno di $\frac{1}{2} f''(x_0)$

- se $f''(x_0) > 0 \Rightarrow \exists\, B(x_0),\ \forall\, x \in B(x_0) \setminus \{x_0\}\quad f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)] > 0$
- se $f''(x_0) < 0 \Rightarrow$ " " " " $f(x) - [\ldots] < 0$

$\boxed{3-4}$ Se $f(x)$ è CONVESSA in x_0

$\Rightarrow f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)] \geq 0$

$\Rightarrow f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)] = \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + o(x - x_0)^2$

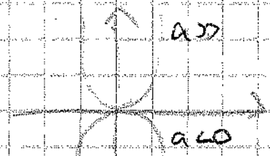
$\Rightarrow \boxed{f''(x_0) \geq 0}$

Es: $f(x) = ax^2 \quad f'(x) = 2ax \quad f''(x) = 2a$

$f'(0) = 0 \quad f''(x) = 2a$

$a > 0 \quad f''(0) = 2a > 0 \quad f''(x) = 2a > 0$

$\Rightarrow$ è loc. CONVESSA $\forall\, x$



- $f(x) = ax^4 \quad f'(x) = 4a^3 \quad f'(0) = 0 \quad f''(x) = 12a^2 \quad f''(0) = 0$

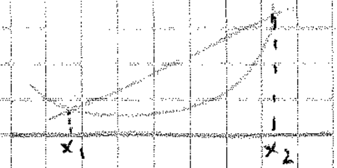
$f^{IV}(x) = 24a \quad f^{IV}(0) \neq 0$

- CONVESSA $f(x) - [f(0) + f'(0)x] = f(x) + [0 - 0] = f(x) = ax^4 \quad \begin{matrix} > 0 & \text{se } a > 0 \\ < 0 & \text{se } a < 0 \end{matrix}$

$\left.\begin{matrix} f \text{ è CONVESSA se } a > 0 \\ f \text{ è CONCAVA se } a < 0 \end{matrix}\right\}$ loc. $x = 0$

CONVESSITÀ GLOBALE (su un I)

più difficile da verificarsi



$\forall\, x_1, x_2 \in [a,b]$ e traccio la retta per $(x_1, f(x_1)),\ (x_2, f(x_2)) \quad x_1 < x_2$

f convessa su $[a,b]$ se il grafico di f, $\forall\, x \in [x_1, x_2]$ sta al di sotto della retta tangente.

$$f(x) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) - f(x_1) \qquad \forall\, x \in [x_1, x_2]$$

- TEOREMA: Sia f derivabile n volte in x_0

$f'(x) = \ldots = f^{(k-1)}(x) = 0 \qquad f^{k}(x_0) \neq 0 \quad k \leq n$

Se $k = 2R \Rightarrow x_0$ è pto di estremo locale di f

- se $f^{(k)}(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ è un pto di min locale
- se $f^{(k)}(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ è un pto di max locale

Se $k = 2R + 1 \Rightarrow x_0$ è un pto di FLESSO (e tg. orizzontale se $f'(x_0) = 0$

DIM: Scriviamo la formula di Taylor di f centrata in x_0, di ordine k:

$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k + o((x - x_0)^k) \quad x \to x_0$

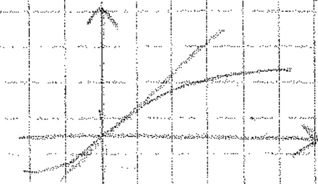
$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k + o(x - x_0)^k \quad x \to x_0$

- Supponiamo $\boxed{k = 2R}$ $\quad (x - x_0)^k = (x - x_0)^{2R} > 0 \quad$ se $x \neq x_0$

$f'(0)=1$ (è il coeff. di x) $f''(0)=0$ $\frac{1}{3!}f'''(0)=\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3!}\right)=-\frac{\;}{3!}=-\frac{\;}{3!}$

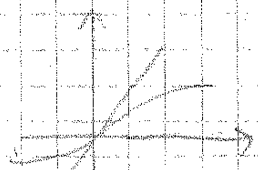
$f'''(0)=-\frac{3!\cdot 4}{3!}=-4$

$f^{IV}(0)=0$ $\frac{1}{5!}f^{V}(0)=\frac{1}{4!}+\frac{1}{2\cdot 3!}+\frac{1}{5!}$



$y=x$ è la retta tang. al grafico di f in $x=0$

$f(x)-x=\underbrace{-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3!}\right)x^3}+o(x^3)$



$f(x)-x>0$
$f(x)>0$

$+ \overset{0}{|} -$

$f(x)-f(x_0)=a(x-x_0)^k+o(x-x_0)^k$

$f(x)-[f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)]=b(x-x_0)^h+o((x-x_0)^h)$

PRIMITIVE

Data una funzione $f: I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua su I
F derivabile su I t.c. $F'(x)=f(x)\quad\forall x\in I$

F si dice PRIMITIVA di f su I e f è INTEGRABILE in senso indefinito

Es: $f(x)=\frac{1}{x}$ — $x>0$ su $I=(0,+\infty)\longrightarrow F(x)=\log x$
— $x<0$ su $I=(-\infty,0)\longrightarrow F(x)=\log|x|$ perché $\log(-x)$

$f(x)=\frac{1}{x}$ $F(x)=\log+c_1,\ c_1\in\mathbb{R}$ $x>0$ $G(x)=\log|x|+c_2$ $c_2\in\mathbb{R}$ $x<0$

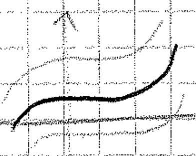
$\log|x|+c$ sono primitive di $f(x)=\frac{1}{x}$ (in genere non si tiene conto degli
anche se è sbagliato

PROP: se $F(x)$ è una PRIMITIVA di $f(x)$ su $I\Rightarrow\forall c\in\mathbb{R}$, $F(x)+c$ è una pri
di $f(x)$ su I

DIM: per def. $(F(x))'=F'(x)=f(x)\quad\forall x\in I$
devo verificare che anche $F(x)+c$ è primitiva

$(F(x)+c)'=F'(x)+\frac{d}{dx}(c)=F'(x)=f(x)\quad\forall x\in I$

tutte le traslate sono primitive!



• Dobbiamo far vedere se ce ne sono altre

PROP: se $F(x)$ e $G(x)$ sono primitive di $f(x)$ sull'intervallo I
$\Rightarrow\exists c\in\mathbb{R}$ t.c. $F(x)=G(x)+c\quad\forall x\in I$

DIM: Voglio dimostrare che $\exists c\in\mathbb{R}: F(x)-G(x)=c\quad\forall x\in I$
Chiamo $H(x)=F(x)-G(x)$ è derivabile su I e $H'(x)=[F(x)-G(x)]'$
$=F'(x)-G'(x)=$ (per ipot.) $f(x)-f(x)=0\quad\forall x\in I$

$\Rightarrow$ per teorema di Lagrange e corollari $\exists c\in\mathbb{R}$ $H(x)=c=F(x)-G(x)$
$\forall x$

TEOREMA. Sia $f(x)$ una funz. che ammette primitive su I
$\Rightarrow$ l'insieme delle primitive di f

$\{F(x)+c,\ \text{con } F \text{ primitiva di } f \text{ su } I,\ c\in\mathbb{R}\}=\int f(x)\,dx$

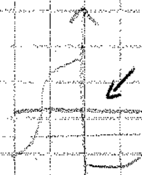
insieme di infinite funzioni

"PRIMITIVE NOTEVOLI"

- $\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\,dx = \int \frac{(x^2+1)}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1}\,dx = \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx = \int 1\,dx - \int \frac{1}{x^2+1}\,dx$
$= \boxed{x - \operatorname{arctg} x + c}$ $\quad c \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

- $\int tg^2 x\,dx = \qquad \frac{d}{dx}(tg\,x) = 1 + tg^2 x \qquad = \int (tg^2 x + 1 - 1)\,dx = \int (1 + tg^2 x)\,dx - \int 1\,dx$
$= \boxed{tg\,x - x + c}$ $\quad x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, + \frac{\pi}{2} + k\pi\right) \quad k \in \mathbb{Z}$

- $\sin|x| = \begin{cases} \sin x & x \geq 0 \\ \sin(-x) = -\sin x & x \leq 0 \end{cases}$ $\qquad \exists$ primitive su $\mathbb{R}$?



deve essere unire

$F(x)$ derivabile t.c. $F'(x) = \sin|x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$
: Cerco una f continua e derivabile

$F_1(x) = -\cos x + c_1 \quad x > 0 \qquad F_2(x) = \cos x + c \quad x < 0$

devo avere f continua e derivabile su $x = 0$

$\lim_{x \to 0^-} F_2(x) = \lim_{x \to 0^+} F_1(x) = F(0)$ $\qquad \Rightarrow F(x) = \begin{cases} -\cos x + 2 + c_2 & x > 0 \\ 1 + c_2 & x = 0 \\ \cos x + c_2 & x < 0 \end{cases}$

$1 + c_1 = -1 + c_2 = F(0) \quad c_1 = 2 + c_2$

$F'(x) = \begin{cases} \sin x & x > 0 \\ ?? & x = 0 \\ -\sin x & x < 0 \end{cases}$ $\qquad F(x)$ è cont. in $x = 0$ e deriv. in $\mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow$ uso TAPPABUCHI

$\lim_{x \to 0^-} F'(x) = \lim_{x \to 0^-} (-\sin x) = 0 = F'_-(0) \qquad \lim_{x \to 0^+} F'(x) = \lim_{x \to 0^+} (\sin x) = 0 = F'_+(0)$

$F'(0) = 0 = \sin|x| \Rightarrow$ $\boxed{F(x) \text{ è la famiglia delle primitive di } \sin|x| \text{ su } \mathbb{R}}$

TEOREMA: Siano f e g deriv. su I $\quad f'(x) g(x)$ integrabile su I
$\Rightarrow f(x) g'(x)$ è integr. su I e $\int f(x) g'(x)\,dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x)\,dx$

DIM: Sia $H(x)$ una primitiva di $f'(x) g(x)$ su I.
Calcolo la derivata di $[f(x) \cdot g(x) - H(x)]' = f'(x) g(x) + f(x) g'(x) - H'$

$= \cancel{f'(x) g(x)} + f(x) g'(x) - \cancel{f'(x) g(x)} \Rightarrow f(x) g'(x)$ ammette primitive su I e $f(x) \cdot g(x) - H(x)$ è una delle primitive $\therefore$

INTEGRAZIONE PER PARTI $\Rightarrow$ $\boxed{\int f(x) \cdot g'(x)\,dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x)\,dx}$

"PRIMITIVE NOTEVOLI"

Es:
- $\int x\, e^x\,dx \qquad x = f(x) \quad e^x = g'(x) \qquad f'(x) = 1 \qquad g(x) = e^x$
$\qquad x = g'(x) \quad e^x = f(x) \qquad g(x) = \frac{x^2}{2} \qquad f'(x) = e^x$

$\int x e^x\,dx = x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x\,dx = x e^x - \int e^x\,dx = \boxed{x e^x - e^x + c}$

- $\boxed{\int \sin^2 x\,dx} = \int \sin x \cdot \sin x\,dx \qquad f(x) = \sin x \to f'(x) = \cos x$
$\qquad g'(x) = \sin x \to g(x) = -\cos x$

$\sin x \cdot (-\cos x) - \int \cos x \cdot (-\cos x)\,dx = -\sin x \cos x + \int \cos^2 x\,dx =$

$$\boxed{\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\,dx = \log|\varphi(x)| + c}$$

$\varphi(x)$ deriv.

$$\frac{d}{dx}\left[\operatorname{arctg}\varphi(x)\right] = \frac{1}{1+\varphi^2(x)} \cdot \varphi'(x) = \frac{\varphi'(x)}{1+\varphi^2(x)}$$

$$\boxed{\int \frac{\varphi'(x)}{1+\varphi^2(x)}\,dx = \operatorname{arctg}\varphi(x) + c} \qquad c \in \mathbb{R}$$

- $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx = \int \frac{e^x}{1+(e^x)^2}\,dx = \qquad \varphi(x) = e^x \qquad = \operatorname{arctg} e^x + c$
- $\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx = \operatorname{arctg}(\sin x + c) \qquad \varphi(x) = \sin x \qquad \varphi'(x) = \cos x$
- $\int \frac{2x}{2+x^2}\,dx = \qquad \varphi(x) = 2+x^2 \qquad \varphi'(x) = 2x \qquad = \log|2+x^2| + c = \boxed{\log(2+x^2) + c} \qquad 2+x^2 > 0$
- $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + c$

INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE

$\varphi(x)$ deriv. su I $\qquad g(\varphi(x))$ def. su I, g deriv.

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} g(\varphi(x)) = g'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \quad \forall x \in I$$

TEOREMA - Sia $g: J \to \mathbb{R}$ $\quad J$ intervallo, g ammette primitiva F su J

- Sia $\varphi: I \to J$ derivabile su I

$\Rightarrow g(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$ ammette primitive su I e

$$\boxed{\int g(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = F(\varphi(x)) + c}$$

DIM: $\frac{d}{dx} F(\varphi(x)) = F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = g(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \quad \forall x \in I$

$$\varphi: \begin{array}{l} I \to J \\ x \to \varphi(x) = y \end{array} \qquad \int g(y)\,dy = F(y) = F(\varphi(x)) + c$$

$$\int g(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\,dx \qquad \boxed{y = \varphi(x) \quad dy = \varphi'(x)\,dx}$$

$$\boxed{dy = \varphi'(x)\,dx}$$

- $\int g(\varphi(x)) \frac{d\varphi}{dx}\,dx = \int g(\varphi(x))\,d\varphi = \int g(y)\,dy \qquad y = \varphi(x)$
- $\int g(\varphi(x)) \quad \varphi'(x)\,dx \qquad \begin{array}{l}\varphi(x) = y \\ \varphi'(x)\,dx = dy\end{array}$

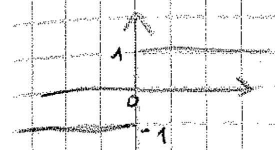
$$\int g(y)\,dy = F(y) + c = F(\varphi(x)) + c$$

es: $\int \sin x \cdot \cos x\,dx = \int \underbrace{\sin x}_{\varphi(x)} \cdot \underbrace{\cos x}_{\varphi'(x)}\,dx \qquad \begin{array}{l}\varphi(x) = y \quad \varphi'(x) = \cos x \\ dy = \varphi'(x)\,dx = \cos x\,dx\end{array}$

$$= \int y\,dy = \frac{y^2}{2} + c = \boxed{\frac{1}{2}\sin^2 x + c}$$

PRIMITIVE GENERALIZZATE

$F(x)$ è primitiva di $f(x)$ su I se è deriv. e se $\forall x \in I$, $F'(x) = f(x)$



$\mathrm{sgn}\,x = \begin{cases} 1 & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$ $\quad (|x|)' = \begin{cases} 1 & x>0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$ in $x=0$ $|x|$ non è derivabile

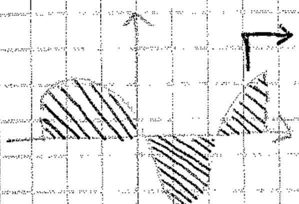
F è una PRIMITIVA GENERALIZZATA di f su I se:
1. F è continua su I;
2. $F'(x) = f(x)$ $\quad \forall x \in I \setminus E$, dove E è insieme "localmente finito", cioè $E \cap [a,b]$ è finito, $\forall [a,b]$ chiuso e limitato

Es: $F(x) = |x|$ è una prim. generaliz. di sgnx
$F'(x) = \mathrm{sgn}\,x \quad \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$f(x) = \begin{cases} 1 & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$ $\quad F(x) = x \quad F'(x) = f(x) \quad \forall x \neq 0$

Si può dimostrare che se $f(x)$ ha una primitiva generalizzata $F(x)$ su I
$\Rightarrow$ l'insieme delle primitive generalizzate su I è $\{F(x)+c,\ c \in \mathbb{R}\}$

INTEGRALI DEFINITI



→ lo approssimo calcolando l'area di rettangoli devono coincidere i sup di un rettangolo e l'inf dell'altro.

$E \subset \mathbb{R}$ si dice localmente finito se $\forall [a,b]$, $E \cap [a,b]$ contiene un numero finito di elementi (es. $\mathbb{N}$ o $\mathbb{Z}$)

Si dice che una $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ è una funzione a scala se esiste un numero finito di punti $x_0 = a < x_1 < \dots < x_m = b$ e $f(x) = c_i$ $\quad x \in (x_{i-1}, x_i)$ $\quad i = 1, \dots, m$

x_0, x_1, x_m si dice SUDDIVISIONE di $[a,b]$, f è adattata alla suddivisione

DEFINISCO L'INTEGRALE su $[a,b]$ di f

$$\int_{[a,b]} f = c_1(x_1 - x_0) + \dots + c_m(x_m - x_{m-1}) = \boxed{\sum_{i=1}^{m} c_i (x_i - x_{i-1})}$$ INTEGRALE FUNZIONE A SCALA

1. $\int_{[a,b]} f$ è indipendente dalla suddivisione di $[a,b]$
2. modificare f in un numero finito di punti non cambia il valore di un integrale
3. $f \geq 0$ $\int_{[a,b]} f = \text{area}\,\{(x,y) : a \leq x \leq b \quad 0 \leq y \leq f(x)\}$
4. f, g funzioni a scala se $f \leq g \Rightarrow \int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} g$
$c_1(x_1 - x_0) + \dots + c_m(x_m - x_{m-1}) \leq d_1(x_1 - x_0) + \dots + d_m(x_m - x_{m-1})$ $\quad c_i \leq d_i$

Es: $2f - 3g$ se f e g a scala $\Rightarrow \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\alpha f + \beta g$ è a scala!

$$\int_{[a,b]} \alpha f + \beta g = \alpha \int_{[a,b]} f + \beta \int_{[a,b]} g \qquad \alpha f + \beta g(x) = \alpha c_i + \beta d_i \quad x \in (x_{i-1}, x_i)$$

$$\Rightarrow \int_{[a,b]} \alpha f + \beta g = \sum (\alpha c_i + \beta d_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum [\alpha c_i (x_i - x_{i-1}) + \beta d_i (x_i - x_{i-1})] =$$
$$\alpha \sum c_i (x_i - x_{i-1}) + \beta \sum d_i (x_i - x_{i-1}) = \boxed{\alpha \int_{[a,b]} f + \beta \int_{[a,b]} g}$$

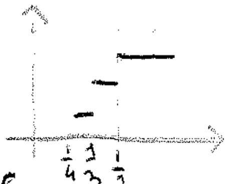
DEFINIZIONE: f è CONTINUA A TRATTI se f è continua tranne al più su un insieme localmente finito di punti, in cui ha discontinuità di tipo "salto".

Es: $f(x)=[x]$  è integrabile su $[a,b]$!

$\cdot f(x)=\begin{cases} \sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$

f è continua per $x\neq 0$, limitata su $\mathbb{R}$, non è continua a tratti perché $\nexists \lim_{x\to 0} f(x)$
$\Rightarrow$ è integrabile su $(0,1)$ xké è continua e limitata su $(0,1)$

$\cdot f(x)=\begin{cases} \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & x=0 \end{cases} \qquad x\in[0,1]$



$\forall x=\frac{1}{n}$ è un pto di discont. di tipo salto
$\Rightarrow$ ha ∞ discontinuità in $[0,1]$
$\Rightarrow f$ NON È CONTINUA A TRATTI su $[0,1]$
ma f è MONOTONA CRESCENTE su $[0,1]$
$\Rightarrow$ è INTEGRABILE!

$\int_{[0,1]} f =$ area

PROPRIETÀ DEGLI INTEGRALI DI RIEMANN

~~PROP~~: Se f è integ. su $[a,b] \Rightarrow f$ è integrabile su ogni $[c,d]\subseteq[a,b]$
Se f è integrabile su $[a,b] \Rightarrow |f|$ è integrabile su $[a,b]$
è area della parte di piano $\{a\leq x\leq b$
y è compresa fra 0 e $f(x)\} = \int_{[a,b]} |f|$

Se $a\leq b$ $\quad \int_{[a,b]} f = \int_a^b f = \int_a^b f(x)\,dx \qquad a\leq x\leq b$

Se $c\geq d$ $\quad \int_c^d f = -\int_{[c,d]} f = -\int_d^c f \qquad$ Es: $\int_3^2 f = -\int_{[2,3]} f = -\int_2^3$

Se $c=d$ $\quad \int_c^c f(x) = 0$

TEOREMA: Siano f e g integrabili su un I limitato. Allora:

① ADDITIVITÀ rispetto al dom:
$\forall a,b,c\in I \quad \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

② LINEARITÀ: $\forall \alpha,\beta\in\mathbb{R}$

DIM: $s = \sup\{f(x), x \in [a,b]\}$ $\quad i = \inf\{f(x), x \in [a,b]\}$

$\Rightarrow i \leq f(x) \leq s \quad \forall\ x \in [a,b]$

① $\Rightarrow$ per la MONOTONIA dell'INTEGRALE (e la integrali)

$i(b-a) = \int_a^b i \leq \int_a^b f \leq \int_a^b s = s\cdot(b-a) \rightarrow$ divido per $(b-a)$

$$\boxed{i \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f \leq s}$$

② se f è CONTINUA su $[a,b]$

$\Rightarrow$ per teorema di Weierstrass $i = \min f \quad s = \max f$

$f([a,b]) = [i,s]$

$i = \min f \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f \leq s = \max f$

$$\exists\, c \in [a,b] : \boxed{f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f}$$

- INTERPRETAZIONE GEOMETRICA:

se f è ≥ 0 $\quad \int_a^b f = \text{area}\{a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$

se f è continua $\int_a^b f = \underbrace{f(c)}_{\text{altezza}} \cdot \underbrace{(b-a)}_{\text{base}}$

TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

- f integr. su un intervallo limitato I (f è loc. integr. su I se integr. per $\forall$ $[a,b] \subseteq I$)

si può definire fissato $x_0 \in I$ e $\forall\ x \in I$:

$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ FUNZIONE INTEGRALE

TEOREMA: se f è continua su un intervallo aperto I, presi $x_0 \in I$, $x \in I$

$\Rightarrow F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ è una funzione derivabile su I e

TR: $F'(x) = \frac{d}{dx}F(x) = f(x)$

DIM: $\forall\ x, \forall\ h$ t.c. $x+h \in I$ se $\exists$ finito

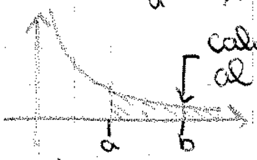
$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \Rightarrow F$ è derivabile in x

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_{x_0}^{x+h} f(t)\,dt - \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt\right) =$$

- Per additività rispetto al dom:

INTEGRALI IMPROPRI

2 casi: es. $\int_a^b \frac{1}{x} \to$ non è limitata!



calcolo l'intervallo al crescere di b

f loc. integrabile su $[a, +\infty)$ se è Riemann-integrabile su ogni intervallo $[a, t] \subseteq [a, +\infty)$

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)\,dx = \begin{cases} \exists \text{ finito} \\ \pm\infty \\ \nexists \end{cases}$$

- Se $\lim_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)\,dx = l \in \mathbb{R}$ l'integrale proprio è CONVERGENTE
- Se $\lim_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)\,dx = \pm\infty$ POSITIVAMENTE O NEGATIVAMENTE DIVERGENTE
- Se $\lim_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)\,dx = \nexists$ INDETERMINATO

Es: $\int_a^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \to$ non conosco le primitive!

PROP: Se f è loc. integrabile su $[a, +\infty)$
$\Rightarrow \forall c \geq a$, $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ e $\int_c^{+\infty} f(x)\,dx$ hanno lo stesso comportamento!

DIM: $\int_a^t f(x)\,dx = \underbrace{\int_a^c f(x)\,dx}_{\text{è un numero}} + \int_c^t f(x)\,dx$

$\Rightarrow$ differiscono per una costante!

$$\lim_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)\,dx = \lim_{t \to +\infty} \int_a^c f(x)\,dx + \lim_{t \to +\infty} \int_c^t f(x)\,dx$$

$\Rightarrow$ il comportamento dei limiti è lo stesso!

Es:
- $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t \to +\infty} \left(\int_1^t \frac{1}{x}\,dx \right) = \lim_{t \to +\infty} [\log t - \log 1] = +\infty$

  $\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}$ DIVERGE POSITIVAMENTE!

- $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t \to +\infty} \int_1^t \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t \to +\infty} \left[\int_1^t x^{-2}\,dx = \lim_{t \to +\infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_{x=1}^t = \right.$

  $= \lim_{t \to +\infty} \left[-\frac{1}{t} - \left(-\frac{1}{1} \right) \right] = \lim_{t \to +\infty} \left[-\frac{1}{t} + 1 \right] = 1$

- $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$: $\int \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} + c = \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} + c$ $= \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{t \to +\infty} \int_1^t \frac{1}{x^\alpha}\,dx =$

  $= \lim_{t \to +\infty} \left[\frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} \right]_1^t = \lim_{t \to +\infty} \left[\frac{1}{1-\alpha} t^{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \cdot 1^{1-\alpha} \right] =$

DIM: Posso usare il teorema fondam. calcolo integrale

$F'(t) = \frac{d}{dt} F(t) = f(t) \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow F$ è crescente c.v.d.

PROP: Sia $f(x)$ loc. integrabile su $[a, +\infty)$, $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [0, +\infty)$

$\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,dx <$ CONVERGE a $\ell \geq 0$ / DIVERGE a $+\infty$

DIM: $F(t) = \int_a^t f(x)\,dx \geq 0 \quad F(t)$ è crescente

$\exists \lim_{t \to +\infty} F(t) = \begin{cases} \ell \geq 0 \Rightarrow \sup F(t) \quad t \geq a \\ +\infty \quad \text{c.v.d.} \end{cases}$

TEOREMA (CRITERIO) DEL CONFRONTO

- Siano $f(x)$ e $g(x)$ loc. integrabile su $[a, +\infty)$
- $0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \geq a$

Allora:

① se $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ converge $\Rightarrow \int_a f(x)\,dx$ converge e $\int_a f \leq \int_a g$

② se $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge positiv. $\Rightarrow \int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ diverge positivamente

DIM: $t \geq a \quad f(x) \leq g(x) \quad \forall x \geq a$

$\Rightarrow F(t) = \int_a^t f(x)\,dx \leq \int_a^t g(x)\,dx = G(T) \quad \forall t \geq a$

$\Rightarrow F(t) \leq G(T) \quad \forall t \geq a$

Per I teorema confronto + monotonia di F e G:

$\Rightarrow 0 \leq \lim_{t \to +\infty} F(t) \leq \lim_{t \to +\infty} G(t)$

$\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \leq \int_a^{+\infty} g(x)$ CONVERGE

Es: $f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{x} \quad h(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2} \quad [1, +\infty)$

$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx \quad \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{x} \leq \frac{\operatorname{arctg} x}{x} < \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{x}$ (moltiplicato per $\frac{1}{x}$)

$\int_1^{+} \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{x}\,dx = \frac{\pi}{4} \int \frac{1}{x}\,dx = \frac{\pi}{4} \int_1 \frac{1}{x}\,dx$ DIVERGE $\Rightarrow$ anche $\frac{\operatorname{arctg} x}{x}$ diverge

• $\frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{x^2} \leq \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2} \leq \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{x^2} \qquad \frac{\pi}{2} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ CONVERGE

$\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}$ CONVERGE (perché maggiorato da una f convergente!)

$$\boxed{\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx \leq \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\,dx \leq \frac{\pi}{2} \int_1 \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}}$$

$\forall\ x \geq 1$ e $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ CONVERGE

$\Rightarrow$ per CRITERIO CONFRONTO INTEGR. IMPROPRI $\int_1^{+\infty} \frac{|\cos x|}{x^2}\,dx$ CONVERGE

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\cos x|}{x^2}\,dx \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = 1 \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx \text{ CONVERGE ASSOLUTAMENTE}$$

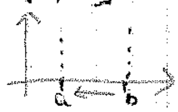
$$\left| \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx \right| \leq \int_1^{+\infty} \frac{|\cos x|}{x^2}\,dx \leq 1$$

2° CASO: f è illimitata in $[a,b)$ (es. $\frac{1}{x^\alpha}$ in $(0,1)$)

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \int_t^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx \quad 0<t<1 \quad = \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$$

- $f(x)$ illimitata in un intorno di a e loc. integr. su $(a,b]$

$$\lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)\,dx = \begin{cases} \ell \in \mathbb{R}, & \text{L'INTEGRALE CONVERGE} \\ \pm\infty, & \text{DIVERGE POSIT O NEGAT} \\ \nexists, & \text{INTEGRALE INDETERMINATO} \end{cases}$$



- $\int_t^1 \frac{1}{x}\,dx = \log x \Big]_t^1 = \log 1 - \log t \qquad \lim_{t\to 0^+}\left(\int_t^1 \frac{1}{x}\,dx\right) = \lim_{t\to 0^+}(-\log t) = +\infty$

$\Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ è DIVERGENTE

- $\int_t^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx,\ \alpha \neq 1 \quad = \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_t^1 = \frac{1}{1-\alpha}\left(1 - t^{1-\alpha}\right) \Rightarrow \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx =$

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{1-\alpha}\left(1 - t^{1-\alpha}\right) = \quad 1-\alpha>0 \to \alpha<1 \quad = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{se } 1-\alpha>0 \\ +\infty & \text{se } 1-\alpha<0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \text{CONVERGE} & \text{se } \alpha<1 \\ \text{DIVERGE} & \text{se } \alpha\geq 1 \end{cases}$$

= il criterio del confronto vale anche in questo caso!

$f(x) \geq 0$ e loc. integr. in $[a,b)$ e illimitata:

$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = <$ converge $\ell>0$ / diverge a $+\infty$

- CRITERIO CONFRONTO
  - f, g loc. integr. su $(a,b]$
  - f, g illimitate su $(a,b]$
  - $0 \leq f(x) \leq g(x)\ \ \forall\ x \in (a,b]$

$\Rightarrow$ $\int_a^b g(x)\,dx$ CONVERGE $\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ CONVERGE

$\int_a^b f(x)\,dx$ DIVERGE $\Rightarrow \int_a^b g(x)\,dx$ DIVERGE

- CRITERIO CONFRONTO ASINTOTICO

se $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \pm\infty$

e se ① $f(x)$ ha ordine di $\infty \geq 1$ rispetto a $\frac{1}{x}$, $x\to 0^+$ $\Rightarrow \int_0^1 f(x)\,dx$ DIVERGE

② $f(x)$ ha ordine di $\infty \leq \alpha \leq 1$ rispetto a $\frac{1}{x}$ per $x\to 0^+$ $\Rightarrow \int_0^1 f(x)\,dx$ CONVERGE

• FUNZIONI RAZIONALI

$\int \frac{A(x)}{B(x)}$ A, B polinomi
grado $[A(x)] = p$ grado $[B(x)] = q$

1° CASO: $p \geq q$

divisione fra polinomi: $A(x) \mid B(x)$, quoziente $Q(x)$, resto $R(x)$ $\quad A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x)$

$\int \frac{A(x)}{B(x)} = \int Q(x) + \int \frac{R(x)}{B(x)}$ ← devo risolvere questo

2° CASO: $p < q$ (decomposizione in fratti semplici)

$\frac{A_1}{x-a}, \frac{A_2}{(x-a)^m}, \frac{A_3 x + B}{ax^2+bx+c} \to \Delta < 0$

• TEOREMA (2ª SOSTITUZIONE)

$f: (a,b) \to \mathbb{R}$, primitive $\quad \underset{x}{g(t)}: (c,d) \to (a,b)$ g invertibile

$\int f(x)\,dx = \int f(g(t)) \cdot g'(t)\,dt$

• 1° CASO: $\int R(e^x)\,dx$

• 2° CASO: $\int R(\sin^2 x, \cos^2 x, \sin x \cos x)\,dx$

Per circolari e iperboliche: $\boxed{\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx}$

sapendo che: $\sin x^2 + \cos^2 x = 1$ e $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

$\begin{cases} a+c=a \\ b+d=b \end{cases} \iff \begin{cases} c=0 \\ d=0 \end{cases}$ Lo 0 dei num. complessi è $0+i0=0$

$(a+ib)+(a'+ib')=0\,i\,0$
$(a+a')+i(b+b')=0\cdot i\cdot 0$

$\begin{cases} a+a'=0 \\ b+b'=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=a' \\ b=b' \end{cases}$ $\underline{z=a+ib} \Rightarrow$ l'opposto è $-a+i(-b)=$
$=-a-ib=\underline{-(a+ib)}=-z$

Es: $z=2-3i$ $\quad -z=-(2-3i)=-2+3i$

- PRODOTTO $(z\cdot w)$

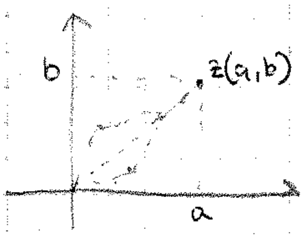
$i^2=-1$

$\underline{(a+ib)(c+id)}=ac+a\cdot id+ib\cdot c+ib\cdot id=ac+adi+bci+i^2bd=$
$=ac+adi+bci-bd=\underline{(ac-bd)+i(ad+bc)}$

Es: $(2-5i)(-1+4i)=-2+8i+5i+20i^2=18+13i$

$\forall\ z\neq 0=0\cdot i\cdot 0$
$(a+ib)(c+id)=a+ib \iff (ac-bd)+i(ad+bc)=a+ib$

$\begin{cases} ac-bd=a \\ ad+bc=b \end{cases}$ $\quad a(c-1)=bd$, $\ b(c-1)=ad$ $\quad \underline{d=0}$, $\underline{c=1}$ $\quad \underline{c+id=1+0i=1}\in\mathbb{R}$



$|z|$ è la distanza dall'origine: $=\sqrt{a^2+b^2}$
Quindi $\underline{|z|=\sqrt{a^2+b^2}}$

$|z|=0 \iff z$ è $0+i0$

$\forall\ z,w$ $\quad \underline{|z+w|\le|z|+|w|}$ (DIS. TRIANGOLARE)

Dato $z=\alpha+i\beta$ $\quad \bar z=\alpha-i\beta$ (si dice COMPLESSO CONIUGATO DI z)

$\mathrm{Re}\,z=\mathrm{Re}\,\bar z$ $\quad \mathrm{Im}\,z=-\mathrm{Im}\,\bar z$

- $\underline{z+\bar z}=(\alpha+i\beta)+(\alpha-i\beta)=\alpha+\alpha+i\beta-i\beta=2\alpha=2\,\mathrm{Re}\,z$
- $\underline{z-\bar z}=i\cdot 2\,\mathrm{Im}\,z$ $\quad$ · $\dfrac{z-\bar z}{i}=2\beta=\boxed{2\,\mathrm{Im}\,z}\in\mathbb{R}$
- $\overline{(z+w)}=\bar z+\bar w$, dove $z+w=(a+ib)+(c+id)=(a+c)+i(b+d)$
$(a+c)-i(b-d)=a+c-ib-id=\underline{(a-ib)+(c+id)}=\boxed{\bar z+\bar w}$
- $|\bar z|=|(a-ib)|=\sqrt{a^2+(-b)^2}=\sqrt{a^2+b^2}=|z|$
- $z\cdot\bar z=(a+ib)(a-ib)=a^2-(ib)^2=a^2-i^2-b^2=a^2+b^2\Rightarrow|z|^2$
- $\dfrac{1}{z}\cdot z=1$ $\quad$ con $z\neq 0$ $\quad z=a+ib$

$\dfrac{1}{z}=\dfrac{\bar z}{z\cdot\bar z}=\dfrac{\bar z}{|z|^2}=\dfrac{a-ib}{a^2+b^2}=\dfrac{a}{a^2+b^2}-\dfrac{ib}{a^2+b^2}=\left(\dfrac{a}{a^2+b^2}-i\dfrac{b}{a^2+b^2}\right)\underbrace{(a+ib)}^{z}=$

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{+3}}{2}$ $\quad z_1 = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{+3}}{2}$ $\quad z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{-3}}{2} \rightarrow$ con molt. 3

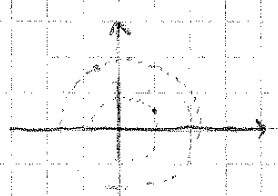
tot soluzioni: $3+2+6 = \underline{11}$!

• TEOREMA: $a_m x^m + \dots + a_1 x + a_0 = 0 \qquad a_0, \dots, a_m \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow$ l'eq. ha esattamente m radici complesse contate con moltep.

Es: $(z-1)^2(z+2i) = 0 \qquad z = -2i$ è soluzione (ma $\underline{\bar{z} \text{ non è solu!}}$)

• RAPPRESENTAZIONE TRIGONOMETRICA NUMERI COMPLESSI



$|z| \quad \theta \in [0, 2\pi)$

Es: $|z| = 2 \qquad \theta = \frac{3\pi}{4} \qquad z = 2(\cos\theta + i\sin\theta)$ $\begin{cases} a = 2\cos\theta \\ b = 2\sin\theta \end{cases}$

se $|z| = 0$ ogni θ va bene!

$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \Rightarrow \begin{cases} \rho = |z| \geq 0 \\ \underline{\theta} \in [0, 2\pi) \ \ \underline{\text{argomento di } z} \end{cases}$

$z = \rho\cos\theta + i\rho\sin\theta \qquad \operatorname{Re} z = \rho\cos\theta \qquad \operatorname{Im} z = \rho\sin\theta$

$|z| = \sqrt{(\rho\cos\theta)^2 + (\rho\sin\theta)^2} = \sqrt{\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta} = \sqrt{\rho(\cos^2\theta + \sin^2\theta)} = \sqrt{\rho^2} = \rho \geq 0$

· $i = 1 \cdot (\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = i \Rightarrow 1 = \rho \qquad \theta = \frac{\pi}{2}$

· $-i \qquad \rho = 1 \qquad \theta = \frac{3\pi}{2} \qquad \theta = -\frac{\pi}{2}$

• TEOREMA DI DE MOIVRE

$z_1, z_2 \in \mathbb{C} \qquad z_1 \neq 0, \ z_2 \neq 0$

$\Rightarrow z_1 \cdot z_2 =$ è t.c. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

$\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$

• RAPPRESENTAZIONE ESPONENZIALE $\qquad \boxed{z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) = |z| \cdot e^{i\theta}}$

DEF: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

$\theta_1 = \frac{\pi}{3} \qquad \theta_2 = \frac{\pi}{3} + 2\pi \qquad e^{i\theta_1} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} \qquad e^{i\theta_2} = \cos(\frac{\pi}{3} + 2\pi) + i\sin(\frac{\pi}{3} + 2\pi)$

· $e^z = e^{a+ib} = e^a \cdot e^{ib} = e^a(\cos b + i\sin b)$

$|e^z| = e^{\operatorname{Re} z} \qquad \arg(e^z) = \operatorname{Im} z$

③ Se $f(x)$ è t.c. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ => per essere conv. devono convergere entrambi (se 1 solo diverge, il TOT. diverge!)

$$\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha}\,dx = \begin{cases} \underline{\text{CONVERGE}} & \underline{\alpha<1} \\ \underline{\text{DIVERGE}} & \underline{\alpha\geq 1} \end{cases}$$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

$x(t)$ $\quad f(t, x, x'(t), \dots, x^{m}(t)) = 0$ eq. differ. ordinaria di ordine m

Risolvere un'eq. significa trovare una funzione $\varphi(t)$ definita su un intervallo I, derivabile m volte su I e tali che:

$$f(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(m)}(t)) = 0 \quad \forall t \in I$$

• $x^{(m)} = g(t, x, x', \dots, x^{(m-1)}(t))$ eq. ordinaria di ordine m in forma normale

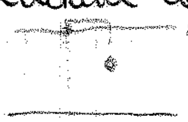
• $\varphi(t)$ è una <u>soluzione dell'eq. in forma normale</u> su I se è derivabile m volte su I e se:

$$\varphi^{(m)}(t) = \underline{g(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots}, \varphi^{(m-1)}(t)) \quad \forall t \in I$$

1° ORDINE: $x' = f(t, x)$ $\quad x(t)$ $\quad$ Velocità$(t) = f(t, x(t))$

2° ORDINE: $x'' = f(t, x, x')$ $\quad$ accel $(t) = f(t, x, x')$ → deve essere noto l'istante, la posizione e la vel!

- Caduta dei gravi



$$x''(t) = \ddot{x}(t) = g \qquad x''(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = g$$

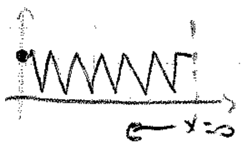
$$x'(t) = \frac{dx}{dt} = \int g\,dt = gt + c$$ la vel. dipende da una costante!

$$x(t) = \int (gt + c)\,dt = \frac{1}{2}gt^2 + ct + d, \quad \text{con } c, d \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2}gt^2 + ct + d}$$

Condizioni iniziali: $x(t_0)$ posizione iniziale (ho fissato un'altezza)
$x'(t_0)$ veloc. iniziale

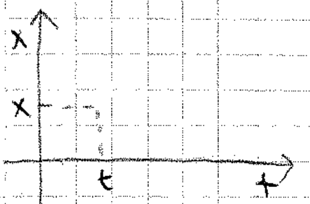
- Molla



$x'' = -\omega^2 x$ $\quad \omega > 0$ (cost. elasticità della molla)
↳ oscillatore armonico

$$\boxed{x'' = \underbrace{ax'}_{\text{attrito}} - \omega^2 x}$$

GEOMETRICAMENTE (EQ. AL 1° ORDINE):



$x' = f(t, x)$ $\quad x(t)$

$x'(t) = \frac{dx}{dt}$ t $\quad$ coeff. angolare retta tg al grafico

(si può associare il coeff. x ogni retta del grafico)

• PROBLEMA ALLE CONDIZIONI INIZIALI O PROBLEMA DI CAUCHY

$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} \dot{N} = aN \\ N(t_0) = N_0 \end{cases}$

Soluzione al problema di Cauchy è una funzione $\varphi(t)$ definita e derivabile in un intervallo I che contiene t_0 e tale che:

- $\varphi'(t_0) = f(t, \varphi(t))$ $\quad \forall t \in I$
- $\varphi(t_0) = \varphi_0$

1. Esiste almeno una soluzione al problema?
2. Su che intervallo è definito?
3. Esiste ed è unica, oppure ce ne sono tante?

- EQ. A VARIABILI SEPARABILI

$x' = a(t)\,b(x)$ $\qquad$ $x' = f(t, x)$ $\quad$ (o $y' = a(x)\,b(y)$ $x \to t$ $y \to x$)

$\boxed{y' = a(t)\,b(y)}$ $\qquad$ $N' = aN$

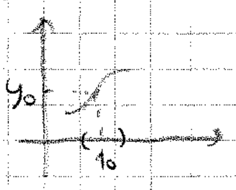
$\boxed{\begin{cases} y' = a(t)\,b(y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}}$

• TEOREMA DI ESISTENZA LOCALE DELLE SOLUZ. A UN PROB. DI CAUCHY

$\begin{cases} y' = a(t)\,b(y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ $\qquad$ - $a(t)$ continua in un interv. J, $t_0 \in J$

- $b(y)$ continua in un interv. B, $y_0 \in B$

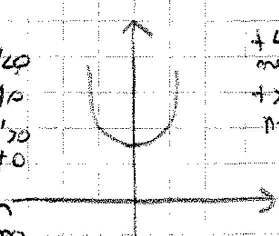
$\Rightarrow$ esiste un intervallo $(t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subseteq J$ ed esiste una funzione $\varphi(t)$ definita e deriv. in $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ che è soluzione del prob. di Cauchy:



$$\begin{cases} \varphi'(t) = a(t)\,b(\varphi(t)) & \forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \\ \varphi(t) = y_0 \end{cases}$$

Es: $\begin{cases} y' = \sqrt[3]{t}\; y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ $\qquad$ $a(t) = \sqrt[3]{t}$ cont. su $\mathbb{R}$ $\qquad$ $t<0 \Rightarrow y'<0$, $y \neq 0$

$b(y) = y^2$ cont. su $\mathbb{R}$ $\qquad$ $t>0 \Rightarrow y'>0$, $y \neq 0$



$t<0$ è negat.

$t>0$ è posit.

$\Rightarrow \exists$ almeno 1 soluzione al prob. di Cauchy

$\downarrow$ c'è un minimo in $t = 0$