NUMERO : 432

DATA : 10/12/2012

A P P U N T I

STUDENTE : Pecoriello

MATERIA : Analisi II + Eserc
Prof. Bonzani

Analisi Matematica II - Criteri di Convergenza

Algebra delle serie

- Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ convergono allora convergono anche:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n+\sum_{n=0}^{\infty} b_n \quad e \quad \sum_{n=0}^{\infty}\lambda a_n=\lambda\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

- se divergono entrambe positivamente → diverge positivamente
- se una converge e l'altra diverge positiv./negat. → diverge +/-

Condizione necessaria: se converge = $\lim_n a_n = 0$

Criterio della convergenza assoluta:

Se $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge assolutamente → $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge

- CRITERI PER LA SERIE A TERMINI POSITIVI: Sia a_n una successione tale che $a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge o diverge positivamente (no indeterminata).

confronto condizione: $0 \leq a_n \leq b_n$

1. se $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge → $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge → $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} b_n$
2. se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge → $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ diverge

confronto asintotico condizione $a_n \geq 0$ $b_n > 0$

$$\lim_n \frac{a_n}{b_n} = l \in \mathbb{R}$$

1. $l \neq 0$ → $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge se e solo se $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge
2. $l=0$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge allora anche $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge
3. $l=0$ e $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge allora anche $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ diverge

radice: Sia (a_n) una successione tale che $a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_n \sqrt[n]{a_n} = l \in [0,+\infty) \cup \{+\infty\}$$

1. se $l < 1$ → $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge
2. se $l > 1$ → $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge

$l=1$ nulla

rapporto: " " " $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \in [0,\infty) \cup \{+\infty\}$

1. se $l<1$ allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ conv.
2. se $l>1$ allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ div.

$l=1$ nulla

CAPITOLO 7

Successioni di Funzioni

Definizione: Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ non vuoto, (f_n) una successione di funzioni da Ω in $\mathbb{R}$ e $f: \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione.

→ Diciamo che la successione (f_n) converge puntualmente a f in Ω se $\forall x \in \Omega$ $\quad \lim_n f_n(x) = f(x)$

f è il limite puntuale della successione (f_n)

Definizione: Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ non vuoto (f_n) una successione di funzioni limitate da Ω in $\mathbb{R}$ e $f: \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione

→ Diciamo che la successione (f_n) converge uniformemente a f in Ω se: $\quad \lim_n \|f_n - f\|_\infty = 0$

dove $\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x \in \Omega} |f_n(x) - f(x)|$

proposizione: Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ non vuoto, (f_n) una successione di funzioni limitate da Ω in $\mathbb{R}$ convergente uniformemente a f in Ω
→ Allora (f_n) converge puntualmente a f in Ω)

proposizione: Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ non vuoto, (f_n) una successione di funzioni continue e limitate da Ω in $\mathbb{R}$ convergente uniformemente a f in Ω. → Allora f è continua.

Se conv. unif → conv. punt. $\quad$ PROP 1
Se conv. unif → continua $\quad$ PROP 2

• AUTOVALORI dell'HESSIANA

- Se tutti gli autovalori di $Hf(x_0)$ sono positivi, allora (x_0) è punto di minimo locale per f
- Se tutti gli autovalori di $Hf(x_0)$ sono negativi, allora (x_0) è un punto di massimo locale
- Se sono discordi → punto di sella

OSSERVAZIONE:

- Se tutti gli autovalori di $Hf(x_0)$ sono <u>non</u> negativi e ne esiste almeno uno nullo allora x_0 non è un punto di massimo locale per f ma NON si può concludere nulla
- Se tutti gli autovalori di $Hf(x_0)$ sono <u>non</u> positivi e ne esiste almeno uno nullo allora x_0 non è un punto di minimo locale per f ma NON si può concludere nulla.

Derivate doppie

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2y^2}{x^3} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2y}{x} + 4\frac{1}{(y+1)^2} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\frac{2}{x^2}$$

$$H_f(x;y) = \begin{pmatrix} \frac{2y^2}{x^3} & -\frac{2}{x^2} \\ -\frac{2}{x^2} & \frac{2y}{x} + 4\frac{1}{(y+1)^2} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{nel punto} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & -2 \\ -2 & 3-\lambda \end{pmatrix} ; \quad (2-\lambda)(3-\lambda) - 4 = 0$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 2 = 0$$

$$\boxed{\sim 4}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{5 \mp \sqrt{25-8}}{2} \rightarrow \frac{5 \mp \sqrt{17}}{2} \begin{cases} \frac{5+4}{2} \\ \frac{5-4}{2} \end{cases}$$

→ entrambi maggiori di 0 : MIN. LOCALE

c) $f(x;y) = x^2 y - y^2$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2xy = 0 \\ x^2 - 2y = 0 \end{cases} \qquad P(0;0)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x$$

$$\begin{pmatrix} 2y & -2x \\ -2x & -2 \end{pmatrix} \rightarrow (0;0) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$-\lambda(-2-\lambda) = 0$$

$\downarrow$ 0 $\quad \downarrow$ 2   concordi positivi

il punto (0;0) è di minimo locale

avendo un ~~punto~~ autovalore = 0 non siamo sicuri del fatto che sia certamente minimo locale.

Def. minimo locale: $f(x;y) \leq f(0;0)$

$$x^2 y - y^2 \leq 0$$

$$y(x^2 - y) \leq 0 \quad \text{risoluzione grafica di una parabola}$$

in un intorno di (0;0) trovo valori per cui $f(x;y)$ è $>$ e <0

quindi è punto di sella

f) $f(x;y) = 2x^4 - y^2 - 3x^2y$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 8x^3 - 6xy = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 3x^2 = 0 \end{cases} \qquad P = (0;0)$$

$$\frac{\partial f^2}{\partial x^2} = 24x^2 - 6y \qquad \frac{\partial f^2}{\partial y^2} = 2 \qquad \frac{\partial f^2}{\partial x \partial y} = -6x$$

$$H = \begin{pmatrix} 24x^2 - 6y & -6x \\ -6x & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow (0;0) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left| \begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \right| = 0 \qquad (2-\lambda)(-\lambda) = 0$$

$$\underset{2}{\downarrow} \qquad \underset{0}{\downarrow}$$

valori concordi positivi il punto è di minimo locale ma non ne sono sicuro

$$f(x;y) \geq f(0;0)$$

$2x^4 - y^2 - 3x^2y \geq 0$ scompongo in 2 prodotti $(y - x^2)(y - 2x^2) \geq 0$

graficamente vedo che nei un intorno circo ho valori + che - quindi è punto di Sella.

g) $f(x;y) = e^{-x^2-y^2-x}$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = e^{-x^2-y^2-x}(-2x-1) = 0 & x = -\frac{1}{2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = e^{-x^2-y^2-x}(-2y) = 0 & y = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{(-x^2-y^2-x)}(4x^2+4x-1); \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^{(-x^2-y^2-x)}(-2+4y^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2y e^{(-x^2-y^2-x)}(-2x-1)$$

$$\begin{pmatrix} -2e^{(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2})} = -2e^{\frac{1}{4}} & 0 \\ 0 & e^{1/4}(-2) \end{pmatrix} \Rightarrow \text{calcolo autovalori}$$

$$\left(-2e^{1/4} - \lambda\right)^2 = 0$$

$\lambda = -2e^{1/4} < 0$ coincidenti e <0 massimo locale

per ogni $(x;y) \in \mathbb{R}^2$ risulta $f(x;y) \leq 1 = f(-\frac{1}{2};0)$ quindi è punto di massimo assoluto.

m) Svolto con modulo positivo

$$f(x;y) = |x| + |y| - xy$$

$$f(x;y) = x + y - xy$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 1 - y \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 1 - x \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -1$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda^2 - 1 = 0 \qquad \lambda_{1,2} = \mp 1 \quad \text{sella}$$

OSSERVAZIONE: sui massimi e minimi assoluti

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ compatto non vuoto e $f: \Omega \to \mathbb{R}$ continua. Allora per il teorema di Weierstrass f ammette almeno un punto di massimo e di minimo (assoluti) su Ω.

Supponiamo che $\Omega = \{x \in U : g(x) \leq 0\}$ sia compatto, dove $U \subseteq \mathbb{R}^n$ è un aperto non vuoto e $g: U \to \mathbb{R}$ è di classe C^1.

Allora per determinare i punti di massimo e minimo assoluto per f su Ω si può procedere nel seguente modo.

a) Si cercano innanzitutto i punti di massimo e minimo locale liberi di f su $\mathrm{int}(\Omega)$ dove $\mathrm{int}(\Omega) = \{x \in U : g(x) < 0\}$

ovvero tolgo il segno = alla disuguaglianza per escludere i confini.

b) Poi si cercano i punti di massimo e di minimo vincolato di f su $\partial\Omega$ dove $\partial\Omega = \{x \in U : g(x) = 0\}$

Se $\partial\Omega$ è una varietà di dimensione $n-1$ in $\mathbb{R}^n$, allora si può procedere con i metodi descritti precedentemente

OSSERVAZIONE (2)

$x_0 \in \mathrm{int}(\Omega)$ è un punto di massimo o di minimo locale per f su $\mathrm{int}(\Omega)$ ma non assoluto per f su Ω, allora è un punto di massimo o di minimo locale per f su Ω.

Invece, se $x_0 \in \partial\Omega$ è un punto di massimo o di minimo vincolato per f su $\partial\Omega$ ma non assoluto per f su Ω, allora non è detto che questo punto sia di massimo o di minimo locale per f su Ω. Per stabilire se x_0 è o non è un punto di estremo locale per f su Ω, si può seguire:

$\to$ Consideriamo $x_0 \in \partial\Omega = \{x \in U : g(x) = 0\}$ e supponiamo che f sia differenziabile in x_0 con $\nabla f(x_0) \neq 0$ e $\nabla g(x_0) \neq 0$

1) se $\nabla f(x_0)$ applicato in x_0 punta verso l'esterno di Ω, allora x_0 è un punto di massimo locale per f su Ω.

2) se $\nabla f(x_0)$ applicato in x_0 punta verso l'interno di Ω, allora x_0 non è né un punto di massimo né di minimo locale per f su Ω.

$\to$ Consideriamo $x_0 \in \partial\Omega$ è un punto di minimo locale per f su $\partial\Omega$

3) se $\nabla f(x_0)$ applicato in x_0 punta verso l'interno di Ω allora x_0 è un punto di minimo locale per f su Ω.

4) se $\nabla f(x_0)$ applicato in x_0 punta verso l'esterno di Ω, allora x_0 non è né punto di massimo né di minimo

c) $f(x;y) = x^2 + y^2$

$M = \{ (x;y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + (y-2)^2 - 20 = 0 \}$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x;y) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(x;y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x;y) = \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(x;y) \\ (x;y) \in M \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} \cancel{2}x = \lambda \cancel{2}(x-1) \\ \cancel{2}y = \lambda \cancel{2}(y-2) \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 = 20 \end{cases}$$

$x = \frac{\lambda}{\lambda - 1}$ $\qquad x_{1;2} = 3/2 ; 1/2$

$y = \frac{2\lambda}{\lambda - 1}$

punti stazionari $\qquad x = -1 \qquad y = -2$

$\qquad x = 3 \qquad y = 6$

$f(-1;2) = 5$ min

$f(3;6) = 45$ max

e) $f(x;y) = 3x^2 + 4y^2 - 6x - 12$

$M = \{ (x;y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 4 \leq 0 \}$

$\text{int}(M) = \{ \dots \ x^2 + y^2 < 4 \}$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x;y) = 6x - 6 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x;y) = 8y \qquad \begin{cases} 6x - 6 = 0 & x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \quad P(1;0)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x;y) = 6 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 8 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$

$H_f = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = \left| \begin{pmatrix} (6-\lambda) & 0 \\ 0 & (8-\lambda) \end{pmatrix} \right| = 0 \rightarrow (6-\lambda)(8-\lambda) = 0$

$\lambda_1 = 6 \qquad \lambda_2 = 8$ minimo local

$f(1;0) = 3 - 6 - 12 = -15$

h) $f(x;y) = e^{xy}$

$M = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 : x^2-1 \le y \le 3 \le 0\}$

$\text{int}(M) = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 : x^2-1 < y < 3\}$

$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{xy} \cdot y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = e^{xy} x$

$P(0;0)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{xy} \cdot y^2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^2 e^{xy} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = xy e^{xy} + e^{xy} = (xy+1)e^{xy}$

$$\begin{pmatrix} e^{xy} \cdot y^2 & (xy+1)e^{xy} \\ (xy+1)e^{xy} & e^{xy} x^2 \end{pmatrix} = Hf$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda^2 - 1 = 0$$

$\lambda = \mp 1$ sella

i) $f(x;y) = x|x| - 2y^2$

$M = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 4 \ ; \ y \ge 0\}$

$\text{int}(M) = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 4 \ ; \ y > 0\}$

Considero $|x| = x$

$f(x;y) = x^2 - 2y^2$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -4y \qquad R(0;0)$

$\frac{\partial f^2}{\partial x^2} = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -4 \qquad \frac{\partial f^2}{\partial x \partial y} = 0$

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \to \left| \begin{pmatrix} (2-\lambda) & 0 \\ 0 & (4-\lambda) \end{pmatrix} \right| = 0 \qquad (2-\lambda)(-4-\lambda) = 0$$

$\lambda = 2 \qquad \lambda = -4$

sella

l) $f(x;y) = x \log(y+1)$

dom $f \Rightarrow 1+y > 0 \qquad y > -1$

$M = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 1 \ ; \ x \ge 0 \ ; \ y \ge 0\}$

$\text{int}(M) = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2+y^2 < 1 \ ; \ x > 0 \ ; \ y > 0\}$

$\frac{\partial f}{\partial x} = \log(1+y) \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = x\left(\frac{1}{1+y}\right)$

y fuori dal dominio quando si annulla = non ci sono max e min.

SISTEMI DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Equazione differenziale ordinaria: (EDO) scalare in forma normale:

$$x^{(n)} = F(t, x, x', \dots, x^{(n-1)})$$

dove F è una funzione reale di $n+1$ variabili reali ed n è detto ORDINE dell'equazione

SOLUZIONI: $x: I \to \mathbb{R}$ definite su un intervallo aperto $I \subseteq \mathbb{R}$ tali che
- x è derivabile n-volte su I
- $x^{(n)}(t) = F(t, x(t), \dots, x^{(n-1)}(t))$ per ogni $t \in I$

ESEMPIO:

$$\begin{cases} x' = \log y - 2x^2 + \frac{3}{t} \\ y' = 2xy - e^{xt} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1' = f_1(t, \overbrace{x_1, x_2, \dots x_n}^{X}) \\ x_2' = f_2(t, x_1, x_2, \dots x_n) \\ \vdots \\ x_n' = f_n(t, x_1, x_2 \dots x_n) \end{cases}$$

$J = (-\infty, 0) \vee J = (0, +\infty)$ insieme del tempo

$\Omega = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\} \mapsto$ insieme delle y ($\log \neq 0$)

$$X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad X' = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix}$$

EQUAZIONE SCALARE di NEWTON

$\boxed{m x'' = F(t, \underset{x}{x}, \underset{y}{x'})}$ equivale al sistema

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = \frac{1}{m} F(t, x, y) \end{cases}$$

PROBLEMA DI CAUCHY: integrale generale

$$\begin{cases} X' = f(t, X) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases} \qquad f: J \times \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \qquad (t_0, X_0) \in J \times \Omega$$

→ soluzioni di una collezione su un certo punto

$X_{t_0, X_0}(t)$: soluzione unica per il teorema di Cauchy

SISTEMI LINEARI:

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}(t)x_1 + \dots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t) & = f_1(\overset{\in I}{t}, \overbrace{x_1, x_2 \dots x_n}^{\in \mathbb{R}^n}) \\ x_2' = a_{21}(t)x_1 + \dots + a_{2n}(t)x_n + b_2(t) & = f_2(\\ \vdots & \vdots \\ x_n' = a_{n1}(t)x_1 + \dots + a_{3n}(t)x_n + b_n(t) & = f_n(\end{cases}$$

dominio $I \times \mathbb{R}^n$

$$\boxed{X' = A(t)X + B(t) = f(t, X)}$$

$$\begin{cases} x' = 2x + 3y \\ y' = x - 3y + 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = 2x + (t^2 - 1)y - \cos t \\ y' = \frac{1}{t}x + y + e^t \end{cases}$$

dominio $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ — dominio $(0; +\infty) \times \mathbb{R}^2$, oppure $(-\infty, 0) \times \mathbb{R}^2$

1 Analisi Matematica 2 – 18 gennaio 2010 – ore 11:00, versione A

Esercizio 1 Siano

P

$$F(x,y) = (y+2x)\,x^2 \sin(2y) \quad \text{e} \quad \boxed{(x_0,y_0) = (1,\pi)}.$$

a) Dire se in $\boxed{(x_0,y_0)}$ si applica il teorema di Dini. • cond. non ~~suff~~ necessaria: $F(x_0;y_0)=0$ (si annulla nel punto) • $\nabla f(x_0;y_0) \neq 0$

b) Dire se l'equazione $F(x,y) = F(x_0,y_0)$ definisce implicitamente una funzione $y = y(x)$ (in un intorno di x_0) oppure $x = x(y)$ (in un intorno di y_0), specificando quale delle due.

c) In caso di risposta affermativa, calcolare $y'(x_0)$ oppure $x'(y_0)$. la funzione si annulla nel punto P

Svolgimento La funzione $\boxed{F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}}$ è di classe $\boxed{C^1}$ soddisfa la condizione standard $F(x_0,y_0) = 0$ (che però non è necessaria in generale) e si ha

gradiente nel punto $\neq (0;0)$ ←

$$\nabla F(x_0,y_0) = \left(2x_0(y_0+3x_0)\sin(2y_0),\, x_0^2(\sin(2y_0) + 2(y_0+2x_0)\cos(2y_0))\right) = (0, 2\pi+4) \neq (0,0).$$

Dunque le ipotesi del teorema di Dini sono verificate. In particolare, risulta

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0) = 2\pi + 4 \neq 0$$

nulla

parte non negativa del gradiente

e quindi l'equazione $F(x,y) = F(x_0,y_0)$, cioè $F(x,y) = 0$, definisce implicitamente una funzione $\boxed{y = y(x)}$ in un intorno di $x_0 = 1$. Tale funzione è di classe C^1 e si ha

$$\boxed{y'(x_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)} = -\frac{0}{2\pi+4} = 0.} \qquad y'(x_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0;y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0;y_0)}$$

Esercizio 2 Siano

$$D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 9y^2 \leq 1\} \quad \text{e} \quad \underbrace{V := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D,\ 0 \leq z \leq 5 - x - y\}}_{\text{parte per integrare lo z}}.$$

parte per integrare y e x

Calcolare $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{1/9} = 1 \quad < 1$

$$\boxed{\int_V xy^2\,dxdydz.}$$

Svolgimento Riducendo per fili, si ha

$$\int_V xy^2\,dxdydz = \int_D \left(\int_0^{5-x-y} xy^2\,dz\right) dxdy = \int_D xy^2 \left(\int_0^{5-x-y} dz\right) dxdy = \int_D xy^2 \underbrace{(5-x-y)}_{z}\,dxdy.$$

Essendo

$$D : \boxed{x^2 + \frac{y^2}{\frac{1}{9}} \leq 1,}$$

passando alle corrispondenti coordinate ellittiche

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = \frac{1}{3}r\sin\theta \end{cases}, \quad r > 0, \quad \theta \in [0, 2\pi),$$

• Sostituisco: $(xy^2)(dxdy)$ $\iint(\frac{1}{3}r)(r\cos\theta)(\frac{1}{9}r^2\sin^2\theta)$

l'insieme D privato dell'origine (che è trascurabile nell'integrazione) si trasforma nel rettangolo $(0,1] \times [0,2\pi)$ e risulta $dxdy = \frac{1}{3}r\,drd\theta$. Allora, integrando tramite cambiamento di variabili si ottiene

$$\begin{aligned}
\int_D xy^2(5-x-y)\,dxdy &= \int_{(0,1]\times[0,2\pi)} r\cos\theta\left(\frac{1}{3}r\sin\theta\right)^2\left(5 - r\cos\theta - \frac{1}{3}r\sin\theta\right)\frac{1}{3}r\,drd\theta \\
&= \frac{1}{27}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^4\cos\theta\sin^2\theta\left(5 - r\cos\theta - \frac{1}{3}r\sin\theta\right)drd\theta \\
&= \frac{1}{27}\int_0^{2\pi}\cos\theta\sin^2\theta\left(\int_0^1\left(5r^4 - r^5\cos\theta - \frac{1}{3}r^5\sin\theta\right)dr\right)d\theta \\
&= \frac{1}{27}\int_0^{2\pi}\cos\theta\sin^2\theta\left[r^5 - \frac{r^6}{6}\cos\theta - \frac{1}{3}\frac{r^6}{6}\sin\theta\right]_{r=0}^{r=1}d\theta \\
&= \frac{1}{27}\int_0^{2\pi}\cos\theta\sin^2\theta\left(1 - \frac{1}{6}\cos\theta - \frac{1}{18}\sin\theta\right)d\theta
\end{aligned}$$

• la parte sotto nulla z

ANALISI MATEMATICA II

8 Febbraio 2010 ore 11:00

Versione **A**

Nome, Cognome:

Matricola	Codice corso 19ACI

Docente:

Corso di Laurea:

Analisi II 7,5 cr. es. 1,2,3	**Analisi D** es. 2,4,5	**Analisi II V.O.** es 2,4,5

V

ESERCIZIO 1 Dato il sistema di equazioni differenziali

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \begin{pmatrix} \alpha+1 & -4 \\ 2 & \alpha+5 \end{pmatrix} \mathbf{X},$$

dove α è un parmetro reale,

a) discutere la stabilità della soluzione nulla al variare di α;

b) determinare il valore di α per cui esistono soluzioni periodiche non costanti;

c) determinare i valori di α per cui tutte le soluzioni sono limitate su $[0, +\infty)$;

d) per il valore di α determinato al punto b), scrivere l'integrale generale.

ESERCIZIO 2 Utilizzando il Teorema di Green, calcolare l'integrale di linea

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \tau,$$

dove

$$\mathbf{F}(x,y) = \Big(2xy^2 + \frac{\sqrt[4]{\log(16+x^4)}}{x^4}\Big)\mathbf{i} + \Big(-x^3y + \operatorname{arctg}\frac{2y^4}{\sqrt{32+y^4}}\Big)\mathbf{j}$$

e γ è il bordo, percorso una volta in verso antiorario, dell'insieme

$$T = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 2 \le x \le 3, \ \sqrt{x-2} \le y \le 2x\Big\}.$$

ESERCIZIO 3 Si consideri la funzione $f(x)$ periodica di periodo 2π, data nell'intervallo $(-\pi, \pi]$ da

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x \le -1 \\ 2x & -1 < x \le 1 \\ 0 & 1 < x \le \pi. \end{cases}$$

a) Rappresentare il grafico della somma $F(x)$ della serie di Fourier di $f(x)$, specificando in particolare i valori che $F(x)$ assume nei punti x in cui f non è derivabile.

b) Calcolare il polinomio di Fourier $F_1(x)$ di ordine 1 della funzione $f(x)$.

c) Calcolare la norma quadratica $\|f\|_2^2$ su $(-\pi, \pi)$.

V

ESERCIZIO 4 Mostrare che il seguente campo vettoriale è conservativo in $\mathbb{R}^2$ e determinarne un potenziale:

$$\mathbf{F}(x,y) = \big((-8x+3y)e^{-3x}, -e^{-3x}\big).$$

ESERCIZIO 5 Data la funzione

$$f(x,y) = 5x^2 - 2y^3 + 3x + y,$$

a) scrivere l'equazione della retta tangente alla curva di livello di f nel punto $P = (1,1)$;

V

b) trovare i punti stazionari di f e precisarne la natura.

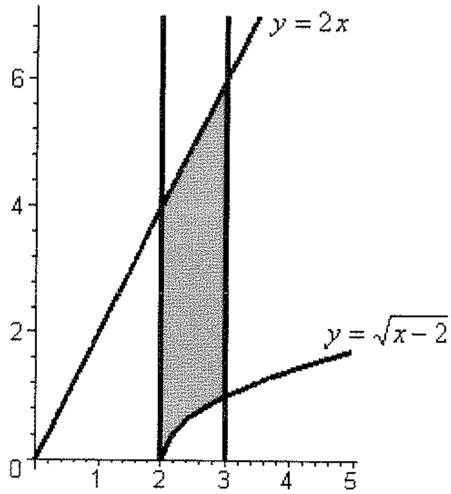
$$
\begin{aligned}
&= c_1 \begin{pmatrix} -\cos 2t - \sin 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \cos 2t - \sin 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -c_1 \cos 2t - c_1 \sin 2t \\ c_1 \cos 2t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_2 \cos 2t - c_2 \sin 2t \\ c_2 \sin 2t \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

ossia

$$X_O(t) = \begin{pmatrix} (c_2 - c_1)\cos 2t - (c_1 + c_2)\sin 2t \\ c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t \end{pmatrix} \quad \text{con } c_1, c_2 \text{ costanti reali arbitrarie.}$$

Esercizio 2 L'insieme T, rappresentato in figura, è G-ammissibile.

Poiché il verso antiorario di γ è positivo (lascia T a sinistra), per il teorema di Green risulta



$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \tau = \int_T \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy$$

dove $\mathbf{F}(x,y) = F_1(x,y)\,\mathrm{i} + F_2(x,y)\,\mathrm{j}$ con

$$F_1(x,y) = 2xy^2 + \frac{\sqrt[4]{\log(16 + x^4)}}{x^4}$$

e

$$F_2(x,y) = -x^3 y + \arctan \frac{2y^4}{\sqrt{32 + y^4}}.$$

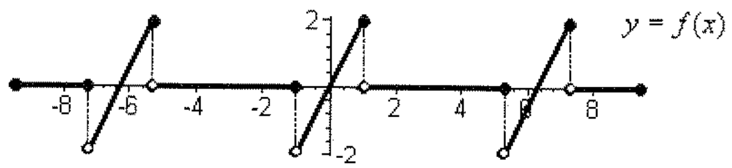
Allora

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) = -3x^2 y \quad \text{e} \quad \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = 4xy$$

e quindi, integrando su T per verticali, si ottiene

$$
\begin{aligned}
\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \tau &= \int_T (-3x^2 y - 4xy)\, dx dy = -\int_T (3x^2 + 4x)\, y dx dy = -\int_2^3 \left(\int_{\sqrt{x-2}}^{2x} (3x^2 + 4x)\, y dy \right) dx \\
&= -\int_2^3 (3x^2 + 4x) \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=\sqrt{x-2}}^{y=2x} dx = -\int_2^3 (3x^2 + 4x) \left[2x^2 - \frac{1}{2}x + 1 \right] dx \\
&= -\int_2^3 \left(6x^4 + \frac{13}{2}x^3 + x^2 + 4x \right) dx = -\left[\frac{6}{5}x^5 + \frac{13}{8}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 \right]_{x=2}^{x=3} = -\frac{45019}{120}.
\end{aligned}
$$

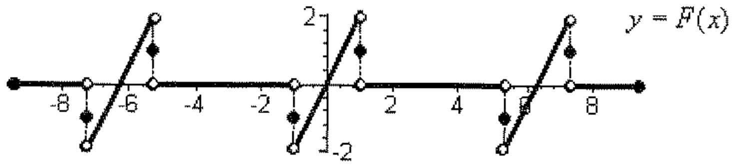
Esercizio 3 In figura è rappresentata la funzione f sull'intervallo $[-3\pi, 3\pi]$.



a) Poiché f è periodica di periodo 2π ed è regolare a tratti su $[0, 2\pi]$, la sua serie di Fourier converge puntualmente

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 27 di 285

su $\mathbb{R}$ alla funzione regolarizzata di f, il cui grafico è riportato nella figura sottostante per $x \in [-3\pi, 3\pi]$.



Analiticamente, per ogni $x \in \mathbb{R}$ risulta

$$F(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 1 + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \\ -1 & \text{se } x = -1 + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \\ f(x) & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

b) Il polinomio di Fourier di ordine 1 di f (cioè la ridotta di ordine 1 della serie di Fourier di f) è

$$F_1(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x$$

dove a_0, a_1, b_1 sono i primi coeffcienti di Fourier di f. Poiché f su $(-\pi, \pi)$ è dispari, risulta $a_0 = a_1 = 0$ e

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin x \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^1 2x \sin x \, dx = \frac{4}{\pi} \left(-[x \cos x]_0^1 + \int_0^1 \cos x \, dx \right) \\ &= \frac{4}{\pi} \left(-\cos 1 + [\sin x]_0^1 \right) = \frac{4}{\pi} (\sin 1 - \cos 1). \end{aligned}$$

Dunque

$$F_1(x) = \frac{4(\sin 1 - \cos 1)}{\pi} \sin x \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

c) Si ha

$$\|f\|^2_{2,(-\pi,\pi)} = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx = \int_{-1}^{1} |f(x)|^2 \, dx = \int_{-1}^{1} 4x^2 dx = 4 \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{1} = \frac{8}{3}.$$

□ Svolgimento Versione A

Esercizio 1 a) I punti critici di $f(x,y)$ sono i punti in cui si annulla il gradiente $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$. Si ha

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= e^{-(x^2+5y^2)}\frac{\partial}{\partial x}\left(-x^2-5y^2\right)) = -2xe^{-(x^2+5y^2)},\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= e^{-(x^2+5y^2)}\frac{\partial}{\partial y}\left(-x^2-5y^2\right)) = -10ye^{-(x^2+5y^2)},\end{aligned}$$

da cui

$$\nabla f = \left(-2xe^{-(x^2+5y^2)}, -10ye^{-(x^2+5y^2)}\right).$$

Allora, siccome $e^{-(x^2+5y^2)}$ non si annulla mai, risulta

$$\nabla f = \mathbf{0} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} -2xe^{-(x^2+5y^2)} = 0 \\ -10ye^{-(x^2+5y^2)} = 0 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} -2x = 0 \\ -10y = 0 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

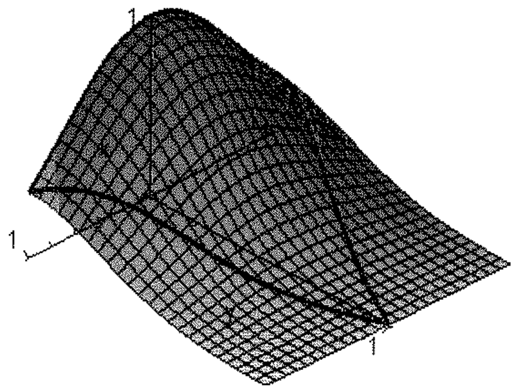
e l'unico punto critico è $P_0(0,0)$.

b) Studiamo innanzitutto le restrizioni f_1, f_2, f_3 di $f(x,y)$ ai tre lati del triangolo ABC ([1]), ossia ai segmenti

$$\overline{AB}: \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases}, \; t \in [-1,1]$$

$$\overline{BC}: \begin{cases} x = t \\ y = -t+1 \end{cases}, \; t \in [0,1]$$

$$\overline{CA}: \begin{cases} x = t \\ y = t+1 \end{cases}, \; t \in [-1,0].$$



- Si ha
$$f_1(t) = f(t,0) = e^{-t^2} \quad \text{con } t \in [-1,1]$$
e quindi risulta
$$f_1'(t) = -2te^{-t^2} \geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad -2t \geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad t \leq 0,$$
dove si è tenuto conto che è $e^{-t^2} > 0$ sempre. Dunque $f_1(t)$ è crescente su $[-1,0]$ e decrescente su $[0,1]$ e pertanto ha un massimo relativo per $t = 0$ e due minimi relativi per $t = -1, 1$. Ciò significa che la restrizione $f_{|\overline{AB}}$ ha un massimo relativo in $P_0(0,0)$ e due minimi relativi in $A(-1,0)$ e $B(1,0)$.
- Si ha
$$f_2(t) = f(t,-t+1) = e^{-\left(t^2+5(-t+1)^2\right)} = e^{-\left(6t^2-10t+5\right)} \quad \text{con } t \in [0,1]$$
e quindi risulta
$$f_2'(t) = -e^{-\left(6t^2-10t+5\right)}(12t-10) \geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad 12t-10 \leq 0 \quad\Leftrightarrow\quad t \leq \frac{5}{6},$$
dove si è tenuto conto che è $e^{-\left(6t^2-10t+5\right)} > 0$ sempre. Dunque $f_2(t)$ è crescente su $[0,5/6]$ e decrescente su $[5/6,1]$ e pertanto ha un massimo relativo per $t = 5/6$ e due minimi relativi per $t = 0, 1$. Ciò significa che la restrizione $f_{|\overline{BC}}$ ha un massimo relativo in $P_1(5/6, 1/6)$ e due minimi relativi in $B(1,0)$ e $C(0,1)$.
- Si ha
$$f_3(t) = f(t,t+1) = e^{-\left(t^2+5(t+1)^2\right)} = e^{-\left(6t^2+10t+5\right)} \quad \text{con } t \in [-1,0]$$

[1] per una risoluzione alternativa tramite il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, si veda al fondo dell'esercizio

Poiché non è richiesto di stabilire se i punti P_0, P_1, P_2 siano di estremo relativo o meno, resta da rintracciare i due punti di estremo assoluto di f vincolati al bordo del triangolo ABC, i quali esistono certamente per il teorema di Weierstrass e devono trovarsi tra i punti P_0, P_1, P_2, A, B, C. Calcolando

$$f(P_0) = 1, \quad f(P_1) = f(P_2) = e^{-\frac{5}{6}}, \quad f(A) = f(B) = e^{-1}, \quad f(C) = e^{-5},$$

risulta

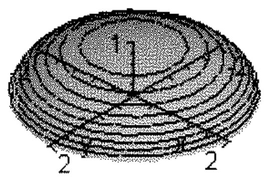
$$f(C) < f(A) = f(B) < f(P_1) = f(P_2) < f(P_0)$$

e dunque i punti di minimo e massimo assoluto cercati sono rispettivamente $C(0,1)$ e $P_0(0,0)$.

Esercizio 2 La superficie

$$\Sigma : \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{4} + z^2 = 1 \\ z \geq 0 \end{cases}$$

è la parte dell'ellissoide $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{4} + z^2 = 1$ contenuta nel semispazio $z \geq 0$



e non costituisce la frontiera di un aperto a cui poter applicare il teorema della divergenza. Ricorriamo allora all'artificio di "chiudere la superficie Σ" aggiungendovi il cerchio di base

$$\Sigma_1 : \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{4} \leq 1 \\ z = 0. \end{cases}$$

Così facendo, la superficie $\Sigma \cup \Sigma_1$ è la frontiera dell'aperto

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2+y^2}{4} + z^2 \leq 1,\ z \geq 0\right\}$$

e il teorema della divergenza consente di calcolare il flusso $\Phi_{\Sigma\cup\Sigma_1}(\mathbf{F})$ di $\mathbf{F}$ uscente da $\Sigma \cup \Sigma_1 = \partial\Omega$ tramite l'uguaglianza

$$\Phi_{\Sigma\cup\Sigma_1}(\mathbf{F}) = \int_\Omega \operatorname{div}\mathbf{F}\, dxdydz.$$

Poiché si ha

$$\Phi_{\Sigma\cup\Sigma_1}(\mathbf{F}) = \Phi_\Sigma(\mathbf{F}) + \Phi_{\Sigma_1}(\mathbf{F})$$

dove $\Phi_\Sigma(\mathbf{F})$ è il flusso richiesto dal testo e $\Phi_{\Sigma_1}(\mathbf{F})$ è il flusso di $\mathbf{F}$ attraverso Σ_1 orientata compatibilmente con Σ (cioè "verso il basso"), risulta

$$\Phi_\Sigma(\mathbf{F}) = \Phi_{\Sigma\cup\Sigma_1}(\mathbf{F}) - \Phi_{\Sigma_1}(\mathbf{F}) = \int_\Omega \operatorname{div}\mathbf{F}\, dxdydz - \Phi_{\Sigma_1}(\mathbf{F})$$

e si tratta quindi di calcolare i due termini a secondo membro.

- Si ha

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 1 + 2z$$

e quindi

$$\int_\Omega \operatorname{div}\mathbf{F}\, dxdydz = \int_\Omega (1+2z)\, dxdydz.$$

Poiché le sezioni orizzontali di Ω sono cerchi, conviene integrare per fette (ma anche per fili il calcolo non risulta troppo difficile); dunque, osservato che la proiezione di Ω sull'asse z è l'intervallo $[0,1]$ (i semiassi dell'ellissoide sono $2, 2, 1$), si ottiene

$$\begin{aligned}\int_\Omega (1+2z)\, dxdydz &= \int_0^1 \left(\int_{x^2+y^2\leq 4-4z^2} (1+2z)\, dxdy\right) dz = \int_0^1 (1+2z) \left(\int_{x^2+y^2\leq 4(1-z^2)} dxdy\right) dz \\ &= \int_0^1 (1+2z)\, \pi 4 \left(1-z^2\right) dz = 4\pi \int_0^1 \left(1+2z-z^2-2z^3\right) dz \\ &= 4\pi \left[z + z^2 - \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{2}\right]_0^1 = \frac{14}{3}\pi.\end{aligned}$$

Resta allora da stabilire se l'uguaglianza (4) vale per $x = 1/2$ e, a tale scopo, essendo f continua su $(-1/2, 1/2]$, basta controllare se la serie (4) converge in $x = 1/2$; in tal caso, infatti, $f(x)$ e la somma della serie sarebbero entrambe continue su $(-1/2, 1/2]$ e quindi, coincidendo su $(-1/2, 1/2)$, dovrebbero coincidere anche in $x = 1/2$. Consideriamo allora la serie numerica

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2^n + 1) \left(\frac{1}{2}\right)^n . \tag{5}$$

Il suo termine generale è

$$b_n = (-1)^n (2^n + 1) \left(\frac{1}{2}\right)^n = (-1)^n \frac{2^n + 1}{2^n}$$

e risulta

$$\lim_{n\to\infty} |b_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n + 1}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) = 1.$$

Dunque b_n non tende a zero (si ricordi che $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ se e solo se $\lim_{n\to\infty} |b_n| = 0$) e pertanto la serie (5) non converge.

In definitiva, l'intervallo degli x per cui l'uguaglianza (4) sussiste è esattamente $(-1/2, 1/2)$.

1 Svolgimento Versione A

Esercizio 1 a) Il dominio comune a tutti i termini $f_n(x) = \left(16 - x^2\right)^{n/2}/n!$ della serie è l'intervallo $[-4, 4]$; infatti, i termini con n pari sono in effetti definiti per ogni $x \in \mathbb{R}$, ma per i termini con n dispari deve essere $16 - x^2 \geq 0$, cioè $-4 \leq x \leq 4$. Dunque A sarà un sottoinsieme di $[-4, 4]$, eventualmente $[-4, 4]$ stesso.
Tramite la sostituzione $t = \left(16 - x^2\right)^{1/2}$, la serie data si riconduce alla serie esponenziale e si ottiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(16 - x^2\right)^{\frac{n}{2}}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = e^t = e^{\sqrt{16-x^2}} \qquad \text{per ogni } t \in \mathbb{R}.$$

La serie converge quindi ad $e^{\sqrt{16-x^2}}$ per ogni x per cui i suoi termini hanno senso, ossia risulta $A = [-4, 4]$ e la somma della serie è $S(x) = e^{\sqrt{16-x^2}}$ per ogni $x \in [-4, 4]$.

b) Siccome la serie esponenziale $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$ converge uniformemente su ogni intervallo chiuso e limitato $[a, b]$, la serie data converge uniformemente su ogni insieme del tipo $\left\{x \in [-4, 4] : \sqrt{16 - x^2} \in [a, b]\right\}$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Prendendo ad esempio $a = 0$ e $b = 1$, risulta

$$\sqrt{16 - x^2} \in [0, 1] \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{16 - x^2} \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 16 - x^2 \geq 0 \\ 16 - x^2 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \leq x \leq 4 \\ x \leq -\sqrt{15} \vee x \geq \sqrt{15} \end{cases},$$

che significa $-4 \leq x \leq -\sqrt{15}$ oppure $\sqrt{15} \leq x \leq 4$. I due intervalli $\left[-4, -\sqrt{15}\right]$ e $\left[\sqrt{15}, 4\right]$ sono quindi esempi di intervalli su cui la serie converge uniformemente.

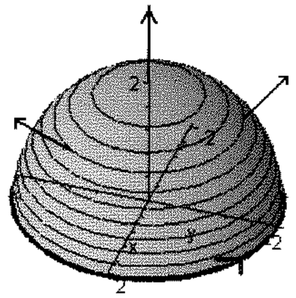
c) Lo stesso ragionamento del punto b) prova che la serie data converge uniformemente su tutto $A = [-4, 4]$. Infatti, ripetendo i conti con $a = 0$ e $b = 16$ (ma un qualunque $b > 16$ servirebbe allo scopo), si ottiene

$$\sqrt{16 - x^2} \in [0, 16] \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{16 - x^2} \leq 16 \Leftrightarrow \begin{cases} 16 - x^2 \geq 0 \\ 16 - x^2 \leq 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \leq 16 \\ x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 \leq 16,$$

che significa $-4 \leq x \leq 4$, cioè $x \in A$.

Esercizio 2 Il teorema di Stokes assicura che il flusso $\Phi_\Sigma(\operatorname{rot}\mathbf{F})$ del rotore $\operatorname{rot}\mathbf{F}$ di $\mathbf{F}$ attraverso la calotta orientata Σ coincide con il lavoro del campo $\mathbf{F}$ lungo il bordo Γ di Σ orientato coerentemente con Σ (cioè secondo il verso di un osservatore che, disposto come il campo normale che orienta Σ, percorre Γ vedendo Σ alla sua sinistra).
La superficie Σ è la semisfera di centro l'origine e raggio 2 contenuta nel semispazio $z \geq 0$ e dunque il suo bordo Γ è la circonferenza del piano xy di centro l'origine e raggio 2, che ammette la rappresentazione parametrica

$$\Gamma : \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \\ z = 0 \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi].$$



Tale rappresentazione risulta coerente con l'orientamento di Σ, in quanto, al crescere di t, il punto $P(t) = (2\cos t, 2\sin t, 0)$ si muove lungo Γ come in figura. Dunque, poiché

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(P(t)) &= \mathbf{F}(2\cos t, 2\sin t, 0) = \left(-8\cos^2 t \sin t, 8\cos^3 t, \arctan e^{2\cos t + 2\sin t}\right), \\ P'(t) &= (-2\sin t, 2\cos t, 0), \end{aligned}$$

si ha

$$\begin{aligned} \Phi_\Sigma(\operatorname{rot}\mathbf{F}) &= \int_\Gamma \mathbf{F} \cdot dP = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(P(t)) \cdot P'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \left(16\cos^2 t \sin^2 t + 16\cos^4 t\right) dt \\ &= 16 \int_0^{2\pi} \cos^2 t \left(\sin^2 t + \cos^2 t\right) dt = 16 \int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt = 16 \left[\frac{t + \cos t \sin t}{2}\right]_0^{2\pi} = 16\pi. \end{aligned}$$

ANALISI MATEMATICA II

16 settembre 2010 Versione A

Nome, Cognome:

Matricola	Codice corso

Docente: Corso di Laurea:

Analisi II 7,5 cr.	*Analisi D*	*Analisi II V.O.*	*Analisi C*
es. 1,2,4	*es. 2,4,5*	*es 1,3,4*	*es. 1, es. 3 .*

ESERCIZIO 1 Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, periodica di periodo 2π, pari, definita sull'intervallo $[0, \pi]$ da:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x < \frac{\pi}{5} \\ -x + \pi & \frac{\pi}{5} \le x \le \pi \end{cases}$$

a) disegnare il grafico di f nell'intervallo $[-3\pi, 3\pi]$,

b) discutere la convergenza quadratica e puntuale della serie di Fourier $\mathfrak{F}$ associata ad f,

c) determinare il valore della serie in $x = \frac{\pi}{5}$: $\mathfrak{F}(\frac{\pi}{5})$,

d) calcolare il polinomio di Fourier di ordine 1.

ESERCIZIO 2 Determinare i punti di estremo locale della funzione $f(x, y) = 2x + 3y$, nell'insieme A:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \ge 0,\ y \ge 0,\ x + 2y \le 12,\ 4x + y \le 12\}.$$

ESERCIZIO 3 Si consideri il sistema differenziale lineare

$$X' = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} X$$

a) Calcolare l'integrale generale del sistema assegnato.

b) Determinare la soluzione del problema di Cauchy, con condizione iniziale $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

c) Determinare, se esistono, le soluzioni limitate in $\mathbb{R}$, diverse dalla soluzione nulla.

ESERCIZIO 4. Sia dato il campo vettoriale $\mathbf{F}(x, y) = (x \tan \frac{1}{4}(x^2 + y^2), y + y \tan \frac{1}{4}(x^2 + y^2))$.

a) Determinare il dominio di $\mathbf{F}$ e disegnarlo sul piano cartesiano.

b) Determinare un insieme A contenente l'origine in cui $\mathbf{F}$ è conservativo.

c) Determinare i potenziali di $\mathbf{F}$ su A.

d) Data la curva $\gamma(t) = (t - 1, \frac{1}{8}t^2)$, con $t \in [-1, 1]$, calcolare $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot dP$.

ESERCIZIO 5 Sia data la funzione $g(x, y) = \log \frac{x^2+y^2-9}{y}$.

a) Determinare il dominio di g e disegnarlo sul piano cartesiano.

b) Calcolare $\nabla g(x, y)$ nei punti interni al dominio di g.

c) Calcolare, nei punti interni al dominio di g, la derivata direzionale di g nella direzione della bisettrice del secondo quadrante.

d) Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di g nel punto $(-1, -1, g(-1, -1))$.

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\pi) + b_n \sin(n\pi)\right) = \tilde{f}\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{2}{5}\pi$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$ (dove a_0, a_n, b_n sono ovviamente i coefficienti di Fourier di f). In particolare, per $x = \pi/5$ si ottiene

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(n\frac{\pi}{5}\right) + b_n \sin\left(n\frac{\pi}{5}\right)\right) = \tilde{f}\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{2}{5}\pi,$$

→ tende al valore del f.co m. punt.

cioè la serie di Fourier di f in $x = \pi/5$ converge a $2\pi/5$.

Osserviamo che nelle scritture precedenti della serie di Fourier di f si sarebbero potuti sopprimere i termini contenenti b_n, in quanto la parità di f implica $b_n = 0$ per ogni n.

d) Il polinomio di Fourier di ordine 1 di f (cioè la ridotta di ordine 1 della serie di Fourier di f) è

$$S_{1,f}(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{1} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x,$$

dove a_0, a_1, b_1 sono ovviamente i primi coefficienti di Fourier di f. Poiché f è pari, risulta

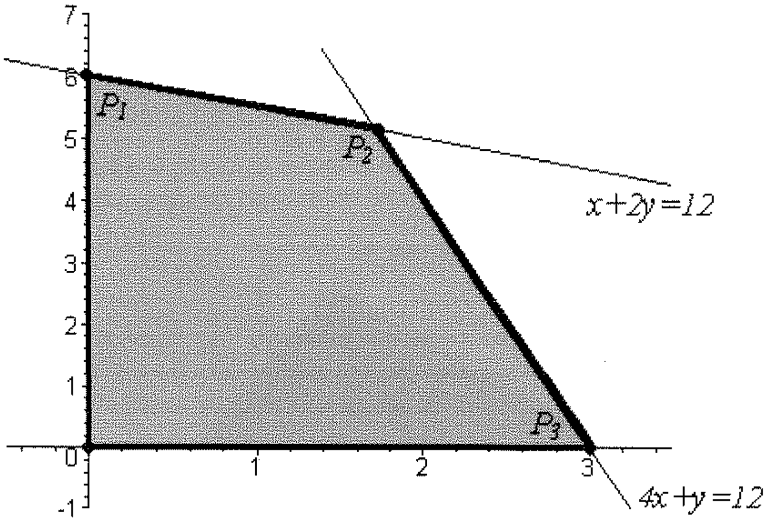
$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \boxed{\frac{1}{\pi}\int_{\pi/5}^{\pi} (\pi - x)\,dx} = -\frac{1}{\pi}\left[\frac{(\pi - x)^2}{2}\right]_{\pi/5}^{\pi} = \frac{1}{2\pi}(4\pi/5)^2 = \frac{8}{25}\pi,$$

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos x\,dx = \boxed{\frac{2}{\pi}\int_{\pi/5}^{\pi} (\pi - x)\cos x\,dx} = \frac{2}{\pi}\left([(\pi - x)\sin x]_{\pi/5}^{\pi} + \int_{\pi/5}^{\pi} \sin x\,dx\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left(-\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right)\sin\frac{\pi}{5} - [\cos x]_{\pi/5}^{\pi}\right) = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{4}{5}\pi\sin\frac{\pi}{5} - \cos\pi + \cos\frac{\pi}{5}\right) \\
&= -\frac{8}{5}\sin\frac{\pi}{5} + \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{5}
\end{aligned}$$

e $b_1 = 0$. Dunque perché è pari e $b_n = 0$ → dispari

$$\boxed{S_{1,f}(x) = \frac{8}{25}\pi + \left(\frac{2}{\pi} - \frac{8}{5}\sin\frac{\pi}{5} + \frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{5}\right)\cos x.}$$

Esercizio 2 Siccome l'insieme piano A (rappresentato in figura) ha interno non vuoto, cerchiamo innanzitutto gli eventuali estremi locali di f sull'interno di A.



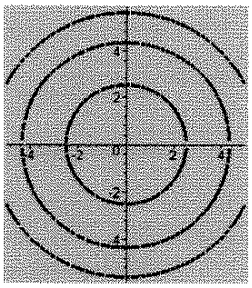
Poiché l'interno di A è un aperto, gli eventuali punti di estremo locale di f sull'interno di A devono essere punti critici per f (che è di classe C^{∞} su tutto $\mathbb{R}^2$). D'altra parte, f non ha punti critici (né su A, né su $\mathbb{R}^2$), in quanto il suo grafico è un piano non orizzontale (più precisamente, $\nabla f(x, y) = (2, 3) \neq (0, 0)$ per ogni (x, y)). Dunque f *non ha estremi* (né locali né assoluti) *sull'interno di A*.

Di conseguenza, poiché se un punto di estremo locale di f su A sta sulla frontiera di A allora è punto di estremo di locale per f ristretta alla frontiera di A, gli estremi (locali e/o assoluti) di f su A sono da ricercarsi tra gli

Esercizio 4 a) Poiché la funzione tangente non è definita in $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, il dominio di $\mathbf{F}$ è l'insieme dei punti (x, y) tali che

$$\frac{x^2 + y^2}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

ossia $x^2 + y^2 \neq 2\pi + 4k\pi$, dove è sufficiente prendere $k \in \mathbb{N}$ in quanto $x^2 + y^2$ è non negativo.



Dunque

$$\operatorname{dom} \mathbf{F} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \neq 2\pi + 4k\pi,\ k \in \mathbb{N}\right\}.$$

Geometricamente, si tratta del piano privato delle circonferenze di raggi

$$\sqrt{2\pi + 4k\pi} \quad \text{con } k = 0, 1, 2, \ldots.$$

b) Ricordando che *un campo irrotazionale (di classe C^1) è conservativo su ogni aperto semplicemente connesso del proprio dominio* (lemma di Poincaré), calcoliamo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_2}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(y + y \tan \frac{x^2 + y^2}{4}\right) = y \frac{\partial}{\partial x}\left(\tan \frac{x^2 + y^2}{4}\right) = y\left(1 + \tan^2\left(\frac{x^2 + y^2}{4}\right)\right)\frac{x}{2} \\
\frac{\partial F_1}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(x \tan \frac{x^2 + y^2}{4}\right) = x \frac{\partial}{\partial y}\left(\tan \frac{x^2 + y^2}{4}\right) = x\left(1 + \tan^2\left(\frac{x^2 + y^2}{4}\right)\right)\frac{y}{2}.
\end{aligned}$$

Poiché risulta $\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$ ovunque in $\operatorname{dom} \mathbf{F}$, il campo $\mathbf{F}$ è conservativo su ogni aperto semplicemente connesso contenuto in $\operatorname{dom} \mathbf{F}$, ad esempio sul cerchio di centro l'origine e raggio $\sqrt{2\pi}$. Dunque possiamo scegliere

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 2\pi\right\}.$$

c) Poiché $\mathbf{F}$ è conservativo su A, esiste $U : A \to \mathbb{R}$ (di classe C^2) tale che $\nabla U = \mathbf{F}$ ovunque su A, ossia

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, y) = F_1(x, y) = x \tan \frac{x^2 + y^2}{4} \quad \text{e} \quad \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = F_2(x, y) = y + y \tan \frac{x^2 + y^2}{4}.$$

Fissando y ed integrando la prima uguaglianza rispetto a x, otteniamo

$$\begin{aligned}
U(x, y) &= \int x \tan \frac{x^2 + y^2}{4} dx = 2 \int \tan t \, dt = 2 \int \frac{\sin t}{\cos t} dt = -2 \log |\cos t| + k(y) \\
&= -2 \log\left(\cos \frac{x^2 + y^2}{4}\right) + k(y)
\end{aligned}$$

dove si è effettuata la sostituzione $t = \frac{x^2+y^2}{4}$, $dt = \frac{x}{2} dx$, e si è poi tenuto conto del fatto che $(x, y) \in A$ implica $\frac{x^2+y^2}{4} < \frac{\pi}{2}$ e quindi $\cos \frac{x^2+y^2}{4} > 0$. La costante arbitraria k dipende naturalmente dalla variabile y momentaneamente fissata.

Imponiamo ora la seconda uguaglianza. Poiché

$$\frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = -2 \frac{1}{\cos \frac{x^2+y^2}{4}}\left(-\sin \frac{x^2 + y^2}{4}\right)\frac{y}{2} + k'(y) = y \tan \frac{x^2 + y^2}{4} + k'(y),$$

la seconda uguaglianza diventa

$$y \tan \frac{x^2 + y^2}{4} + k'(y) = y + y \tan \frac{x^2 + y^2}{4},$$

che significa $k'(y) = y$ e quindi

$$k(y) = \frac{y^2}{2} + c \quad \text{con } c \in \mathbb{R} \text{ costante arbitraria.}$$

In definitiva, i potenziali di $\mathbf{F}$ su A sono le funzioni

$$U(x, y) = -2 \log\left(\cos \frac{x^2 + y^2}{4}\right) + \frac{y^2}{2} + c \quad \text{con } c \in \mathbb{R} \text{ costante arbitraria.}$$

Esame di Analisi Matematica II del 9 febbraio 2009 ore 11

Versione A

Esercizio 1. (10 punti)

Dato il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \dot{x} = e^y - 1 \\ \dot{y} = 2x^2 y + 9x^2 - 1, \end{cases}$$

a) determinare i punti critici (o punti di equilibrio) del sistema;

b) studiare la stabilità dei punti critici del sistema.

Svolgimento

punto da trovare

a) Il sistema è autonomo non lineare. Posto $\boxed{X = (x, y)}$ e $\boxed{F(x,y) = (e^y - 1, 2x^2y + 9x^2 - 1),}$ i punti critici (o di equilibrio) del sistema $\dot{X} = F(X)$ sono tutti i punti $X \in \mathbb{R}^2$ tali che $F(X) = 0$.

Si ha che

$$F(X) = 0 \iff \begin{cases} e^y - 1 = 0 \\ 2x^2y + 9x^2 - 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \pm\frac{1}{3} \\ y = 0. \end{cases} \mapsto 9x^2 - 1 = 0 \quad \boxed{x = \mp \frac{1}{3}}$$

Quindi i punti critici del sistema $\dot{X} = F(X)$ sono $X_1 = \left(\frac{1}{3}, 0\right)$ e $X_2 = \left(-\frac{1}{3}, 0\right)$.

b) La matrice Jacobiana di F in $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ è

$$J_F(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & e^y \\ 4xy + 18x & 2x^2 \end{pmatrix}. \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Consideriamo inizialmente il punto $X_1 = \left(\frac{1}{3}, 0\right)$. Si ha che

sostituisco

$$J_F\left(\frac{1}{3}, 0\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & \frac{2}{9} \end{pmatrix}.$$

Consideriamo le coordinate cilindriche con asse parallelo all'asse z:

$$\Phi: \begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta \\ z = z \end{cases} \qquad \rho \geq 0, \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \quad z \in \mathbb{R}, \quad |\det J_\Phi(\rho,\vartheta,z)| = \rho.$$

Si ha che $\Phi(\Omega') = \Omega$, dove

$$\Omega' = \left\{(\rho,\vartheta,z) \in \mathbb{R}^3 : \ 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \ 0 \leq z \leq 1, \ \rho \geq 0, \ \rho^2 + z^2 \leq 4\right\} =$$

$$= \left\{(\rho,\vartheta,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \ 0 \leq z \leq 1, \ 0 \leq \rho \leq \sqrt{4-z^2}\right\}.$$ z ρ perchè ho 3 D

Si ha che

$$\int_\Omega z^2\, dx\, dy\, dz = \int_{\Omega'} z^2\rho\, d\rho\, d\vartheta\, dz = \left(\int_0^{2\pi} d\vartheta\right)\left(\int_0^1 \left[\int_0^{\sqrt{4-z^2}} z^2\rho\, d\rho\right] dz\right) =$$

$$= 2\pi\int_0^1 z^2 \left[\frac{1}{2}\rho^2\right]_0^{\sqrt{4-z^2}} dz = \pi\int_0^1 z^2\left(4-z^2\right) dz = \pi\int_0^1 \left(4z^2 - z^4\right) dz = \pi\left[\frac{4}{3}z^3 - \frac{1}{5}z^5\right]_0^1 = \frac{17}{15}\pi.$$

Esercizio 3. (10 punti)

a) Studiare la convergenza semplice e assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{2+n^2}.$$

b) Determinare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza puntuale della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3+n}\left(\sin\frac{1}{5n}\right)(2x)^n.$$

c) Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=5}^{\infty} \frac{(n+2)!\, n^{n-2} - (n-2)!\, n^{n+2}}{(n-1)!\, n^{n+\frac{1}{2}}}.$$

<u>Svolgimento</u>

a) La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{2+n^2}$ è a termini di segno variabile. Studiamo inizialmente la convergenza assoluta. Consideriamo quindi la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin n}{2+n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{2+n^2}.$$

Se $t = 1$ abbiamo la serie a termini positivi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3+n}\left(\sin\frac{1}{5n}\right).$$

Poichè $\sin\frac{1}{5n} \sim \frac{1}{5n}$ per $n \to +\infty$, si ha che

$$\frac{1}{3+n}\left(\sin\frac{1}{5n}\right) \sim \frac{1}{5n(3+n)} \sim \frac{1}{5n^2}, \qquad n \to +\infty.$$

Poichè la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ converge, per il criterio del confronto asintotico anche la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3+n}\left(\sin\frac{1}{5n}\right)$ converge.

Se $t = -1$ abbiamo la serie a termini di segno alterno

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3+n}\left(\sin\frac{1}{5n}\right).$$

Per quanto appena visto questa serie converge assoltamente e quindi converge. Ne segue che la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3+n}\left(\sin\frac{1}{5n}\right)t^n$ converge puntualmente se $t \in [-1,1]$.

oalio ✓

Ne segue che il raggio di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3+n}\left(\sin\frac{1}{5n}\right)(2x)^n$ è $R = \frac{1}{2}$ e questa serie converge puntualmente in $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

$t=2x$

$r=1 \to x=\frac{1}{2}$

$\mp\frac{1}{2}$

c) Consideriamo la serie numerica

$$\sum_{n=5}^{\infty}\frac{(n+2)!\,n^{n-2}-(n-2)!\,n^{n+2}}{(n-1)!\,n^{n+\frac{1}{2}}}.$$

Osserviamo che

$$\frac{(n+2)!\,n^{n-2}-(n-2)!\,n^{n+2}}{(n-1)!\,n^{n+\frac{1}{2}}} = \frac{(n-2)!\,n^{n-2}\left[(n+2)(n+1)n(n-1)-n^4\right]}{(n-2)!\,(n-1)\,n^{n+\frac{1}{2}}} =$$

$$= \frac{n^{n-1}\left[(n+2)(n+1)(n-1)-n^3\right]}{(n-1)\,n^{n+\frac{1}{2}}} = \frac{n^{n-1}\left[n^3+2n^2-n-2-n^3\right]}{(n-1)\,n^{n+\frac{1}{2}}} =$$

$$= \frac{n^{n-1}\left(2n^2-n-2\right)}{(n-1)\,n^{n+\frac{1}{2}}} \sim \frac{2n^{n+1}}{n^{n+\frac{3}{2}}} = \frac{2}{n^{\frac{1}{2}}}, \qquad n \to +\infty.$$

Ne segue che in primo luogo la serie data è a termini positivi. Inoltre, poichè la serie $\displaystyle\sum_{n=5}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ diverge, per il criterio del confronto asintotico anche la serie data diverge.

Compito di Analisi Matematica II del 30 gennaio 2006 ore 11

Versione A

Esercizio 1. (10 punti)

Si consideri il campo vettoriale

$$F(x,y) = (-2xy, |x^2 + y^2 - 4|).$$

a) Mostrare che F è conservativo nel cerchio $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 < 4\}$ e determinarne tutti i potenziali.

b) Calcolare l'integrale di linea di F lungo il grafico della funzione

$$g(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{se } 1 < x \leq 3, \end{cases}$$

percorso nel verso delle x crescenti.

<u>Svolgimento</u>

a) Il campo F è continuo su $\mathbb{R}^2$. Osserviamo che F ristretto ad A è

$$F_{|A}(x,y) = (-2xy, 4 - x^2 - y^2)$$

e che $F_{|A}$ è di classe C^∞ su A. Inoltre A è semplicemente connesso. Posto $F_{|A} = (f_1, f_2)$, si ha che per ogni $(x,y) \in A$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = -2x.$$

Ne segue che F è conservativo.

Detto $f : A \to \mathbb{R}$ un potenziale di F su A, si ha che per ogni $(x,y) \in A$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f_1(x,y) = -2xy, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f_2(x,y) = 4 - x^2 - y^2.$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 51 di 285

Detta γ una curva parametrica che parametrizza il grafico di g inducendo un verso di percorrenza dal punto $(0,0)$ al punto $(3,1)$, si ha che

$$\int_\gamma F\cdot dP = \int_{\gamma_1} F\cdot dP + \int_{\gamma_2} F\cdot dP.$$

Osserviamo che $\mathrm{Im}(\gamma_1)\subseteq A$. Poichè per il punto $a)$ un potenziale di F su A è $f(x,y) = -x^2y+4y-\frac{1}{3}y^3$, si ha che

$$\int_{\gamma_1} F\cdot dP = f(\gamma_1(1)) - f(\gamma_1(0)) = f(1,1)-f(0,0) = \frac{8}{3}.$$

Invece $\mathrm{Im}(\gamma_2)\not\subseteq A$. Si ha che

$$\int_{\gamma_2} F\cdot dP = \int_1^3 F(\gamma_2(t))\cdot\gamma_2'(t)\,dt.$$

Per ogni $t\in[1,3]$ si ha che

$$\gamma_2'(t) = (1,0), \qquad F(\gamma_2(t)) = F(t,1) = (-2t, |t^2-3|),$$

$$F(\gamma_2(t))\cdot\gamma_2'(t) = (1,0)\cdot(-2t,|t^2-3|) = -2t.$$

Quindi

$$\int_{\gamma_2} F\cdot dP = \int_1^3 F(\gamma_2(t))\cdot\gamma_2'(t)\,dt = \int_1^3(-2t)\,dt = -\left[t^2\right]_1^3 = -8.$$

Ne segue che

$$\int_\gamma F\cdot dP = \int_{\gamma_1} F\cdot dP + \int_{\gamma_2} F\cdot dP = \frac{8}{3}-8 = -\frac{16}{3}.$$

Esercizio 2. (10 punti)

a) Determinare il carattere della serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-3(-1)^n}{2^n},$$

motivando le conclusioni in modo dettagliato.

b) Determinare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-3(-1)^n}{2^n}(x-1)^n.$$

e

$$\lim_n \left(n^2 - 3(-1)^n\right) = +\infty, \qquad \lim_n (-1)^n \left(n^2 - 3(-1)^n\right) = \nexists.$$

In ogni caso questo limite non è zero e quindi non è soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza della serie. Ne segue che l'insieme di convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 3(-1)^n}{2^n} t^n$ è $(-2,2)$. Quindi l'insieme di convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 3(-1)^n}{2^n} (x-1)^n$ è $(-1,3)$.

c) Posto $t = x - 1$, si ha che

$$f(x) = \frac{2}{x-3} = \frac{2}{t-2} = \frac{2}{2\left(\frac{t}{2} - 1\right)} = -\frac{1}{1 - \frac{t}{2}}.$$

Poichè $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ per ogni $z \in (-1,1)$, si ha che

$$f(x) = \frac{2}{x-3} = -\frac{1}{1-\frac{t}{2}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{t}{2}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n}, \quad \forall x \in (0,2).$$

Esercizio 3. (10 punti)

Dato il sistema

$$X' = \begin{pmatrix} 2 & \alpha \\ \alpha & 2 \end{pmatrix} X, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

a) discutere, al variare di α, la stabilità della soluzione nulla;

b) posto $\alpha = 1$, determinare l'integrale generale del sistema;

c) posto $\alpha = 1$, determinare l'integrale particolare del sistema che doddisfa la condizione iniziale

$$X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Svolgimento

a) Detta A la matrice dei coefficienti, determiniamo gli autovalori di A. Si ha quindi che

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & \alpha \\ \alpha & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - \alpha^2.$$

Quindi gli autovalori di A sono $\lambda_{1,2} = \pm\alpha + 2$. Si ha che

$$\lambda_{1,2} \le 0 \iff \begin{cases} -\alpha + 2 \le 0 \\ \alpha + 2 \le 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha \ge 2 \\ \alpha \le -2 \end{cases} \implies \nexists \alpha \in \mathbb{R}.$$

Quindi la soluzione $X = 0$ è instabile per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

c) Imponendo la condizione iniziale

$$X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

si ha che

$$X(0) = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 \\ -c_1 + c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ -c_1 + c_2 = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 1. \end{cases}$$

Quindi la soluzione particolare cercata è

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}.$$

integrando per fili paralleli all'asse x si ottiene

$$= \int_{\Omega} \left[\int_{y^2+z^2}^{1} \left(y^2+z^2\right) \, dx \right] dy\,dz = \int_{\Omega} \left(y^2+z^2\right)\left(1-y^2-z^2\right) dy\,dz,$$

dove $\Omega = \left\{ (y,z) \in \mathbb{R}^2 : \ y^2+z^2 \le 1, \ z \ge 0 \right\}$.

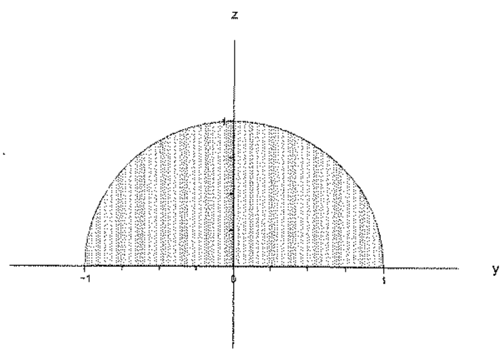


Fig. 2: L'insieme Ω.

Passiamo in coordinate polari nel piano yz. Poniamo quindi

$$\Phi : \begin{cases} y = \rho\cos\vartheta \\ z = \rho\sin\vartheta, \end{cases} \qquad \rho \ge 0, \ 0 \le \vartheta \le 2\pi, \qquad |\det J_{\Phi}(\rho,\vartheta)| = \rho.$$

Allora

$$(y,z) \in \Omega \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 0 \le \rho \le 1 \\ 0 \le \vartheta \le \pi. \end{cases}$$

Quindi si ha che $\Omega = \Phi(\Omega')$, dove

$$\Omega' = \left\{ (\rho,\vartheta) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le \rho \le 1, \ 0 \le \vartheta \le \pi \right\}.$$

Ne segue che

$$\int_{\partial D} F \cdot n = \int_{\Omega} \left(y^2+z^2\right)\left(1-y^2-z^2\right) dy\,dz = \int_{\Omega'} \rho^3\left(1-\rho^2\right) d\rho\,d\vartheta =$$

essendo Ω' un rettangolo con lati paralleli agli assi ρ e ϑ, si ottiene

$$= \left(\int_0^{\pi} d\vartheta\right)\left[\int_0^1 \rho^3\left(1-\rho^2\right) d\rho\right] = \pi \int_0^1 \left(\rho^3-\rho^5\right) d\rho = \pi\left[\frac{1}{4}\rho^4 - \frac{1}{6}\rho^6\right]_0^1 = \frac{\pi}{12}.$$

Esercizio 2. (10 punti)

Sia data la funzione

$$g(x) = \begin{cases} k(x+\pi) & -\pi \le x \le 0 \\ -x+\pi & 0 < x \le \pi. \end{cases}$$

Sia f il prolungamento periodico di g sulla retta reale.

$$= -\frac{2}{n^2\pi}\Big[(-1)^n - 1\Big] = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 2m \\ \frac{4}{n^2\pi} & \text{se } n = 2m+1. \end{cases}$$

Quindi la serie di Fourier di f è

$$\frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}\cos{(2n+1)x}.$$

b) Osserviamo che se $k = 1$ la funzione g è continua su $[-\pi, \pi]$, mentre se $0 \le k < 1$ è continua in ogni $x \in [-\pi, \pi]$ escluso $x = 0$ dove presenta una discontinuità di *I* specie (o salto). Di conseguenza se $k = 1$ la funzione f è continua su $\mathbb{R}$, mentre se $0 \le k < 1$ si ha che f è continua in ogni $x \ne 2h\pi$, per ogni $h \in \mathbb{Z}$, dove presenta una discontinuità di *I* specie (o salto). Inoltre, per $k = 1$ la funzione f è di classe C^1 a tratti su $[-\pi, \pi]$. Infatti è derivabile in ogni $x \in [-\pi, \pi]$ esclusi i punti $x = 0, \pm\pi$, dove però esistono le derivate laterali $D^+f(0) = D^-f(\pi) = -1$, $D^-f(0) = D^+f(-\pi) = 1$. Quindi per il Teorema sulla convergenza uniforme della serie di Fourier di f si ha che per $k = 1$ la serie di Fourier di f converge uniformemente a f su $\mathbb{R}$. Di conseguenza converge anche quadraticamente e puntualmente a f su $\mathbb{R}$.

Consideriamo ora $0 \le k < 1$.

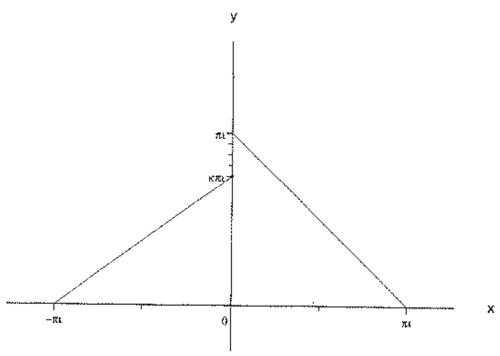


Fig. 4: La funzione g per $0 < k < 1$.

Osserviamo che $f_{|[-\pi,\pi]} = g \in L^2(-\pi, \pi)$, ossia che $\int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2\, dx < +\infty$. Infatti,

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2\, dx = \int_{-\pi}^{0} k^2(x+\pi)^2\, dx + \int_{0}^{\pi} (-x+\pi)^2\, dx = \left[\frac{1}{3}k^2(x+\pi)^3\right]_{-\pi}^{0} + \left[-\frac{1}{3}(-x+\pi)^3\right]_{0}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{3}(k^2+1)\pi^3.$$

Ne segue che la serie di Fourier di f converge quadraticamente a f su $\mathbb{R}$.

b) Posto $a = 4$ si ha

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

L'integrale generale del sistema lineare $X' = AX$ è dato da

$$X(t) = e^{At}C, \quad \forall C \in \mathbb{R}^2,$$

dove e^{At} è la matrice esponenziale di At.

Gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 6$. Quindi la matrice A è diagonalizzabile. Cerchiamo un autovettore associato a $\lambda_1 = 0$. Si ha che

$$Av = 0 \quad \Longrightarrow \quad x + y = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} y = -x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad v = (x, -x), \ x \in \mathbb{R}.$$

Un autovettore associato a $\lambda_1 = 0$ è $v_1 = (1, -1)$.

Cerchiamo ora un autovettore associato a $\lambda_2 = 6$. Risolviamo il sistema lineare $(A - 6I)v = 0$. Si ha

$$x - 2y = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = 2y \\ y \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad v = (2y, y) \ , y \in \mathbb{R}.$$

Un autovettore associato a $\lambda_2 = 6$ è $v_2 = (2, 1)$.

I vettori v_1, v_2 formano, nell'ordine, le colonne della matrice di passaggio P tale che $A = PBP^{-1}$, dove B è la matrice simile ad A siffatta:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Quindi si ha

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Allora l'integrale generale è

$$X(t) = e^{At}C = Pe^{Bt}C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{6t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + 2c_2e^{6t} \\ -c_1 + c_2e^{6t} \end{pmatrix}, \qquad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

In modo alternativo ma equivalente, si può dire che l'integrale generale è dato da

$$X(t) = c_1v_1 + c_2e^{6t}v_2, \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

ovvero che l'integrale generale è dato da

$$X(t) = c_1X_1(t) + c_2X_2(t), \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

dove X_1, X_2 sono le due soluzioni linearmente indipendenti

$$X_1(t) = v_1, \qquad X_2(t) = e^{6t}v_2.$$

Infine si osserva che avendo A un autovalore nullo e l'altro positivo, le soluzioni non costanti sono limitate su $(-\infty, 0]$ ma non su $[0, +\infty)$.

Analisi Matematica II

7 Settembre 2006 **Versione B**

Nome, Cognome:

Docente: Corso di Laurea:

Matricola	Codice corso

Analisi II 7,5 cr. *Analisi II V.O.* *es. 2,3,4*	*Analisi D e III* *(Civ, Edili)* *es. 1,2,5*	*Analisi II, 5 cr.* *(Industriali)* *es. 1,4,5*	*Analisi D+E* *es. 1 ,3,5*	*Complementi Mat.A* *(Amb., PRT)* *3,4,5*

è come X

Esercizio 1. Calcolare il volume del solido che si ottiene facendo ruotare intorno all'asse z la figura piana

$$C = \{(x, y, z) \ : \boxed{y = 0}\ 4x^2 \leq z \leq 6x^4, 1 \leq x \leq 2\}.$$

Esercizio 2. Sono dati la funzione $f(x, y) = -2x^2 + y^2 + 12x$ ed il dominio $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ (x-2)^2 + y^2 \leq 4\}$.

(*i*) Determinare i punti di massimo e di minimo assoluto di f su D.

(*ii*) Posto $g(x, y) = \arctan(f(x, y))$, dire se i punti di massimo e di minimo assoluto di $g(x, y)$ su D sono diversi da quelli trovati precedentemente oppure no.

Esercizio 3. Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 3y + 1 \\ \dot{y} = 3x + y - 1 \end{cases}$$

(*i*) Scrivere l'integrale generale del sistema omogeneo associato.

(*ii*) Scrivere l'insieme di tutte le soluzioni $(x(t), y(t))$ del sistema dato.

(*iii*) Determinare la soluzione che soddisfa le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} x(0) + y(0) = 4 \\ x(0) - y(0) = -2 \end{cases}$$

Esercizio 4. Sia data la serie di potenze:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{x}{3}\right)^n.$$

(*i*) Determinarne il raggio di convergenza.

(*ii*) Determinarne l'insieme di convergenza puntuale e calcolarne la somma $S(x)$.

(*iii*) Indicare un valore di t diverso da 0 per cui

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \int_0^t \left(\frac{x}{3}\right)^n \, dx = \int_0^t S(x) \, dx.$$

Esercizio 5. Siano dati l'arco di curva

$$\gamma : \begin{cases} x = t(3-t) \\ y = t^2(t-3) \, , \\ z = 2 \end{cases} \qquad 0 \leq t \leq 3$$

e il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(x + y, (z-2)^2, e^{x^2 yz}\right).$$

(*i*) Verificare che γ è una curva chiusa e regolare.

(*ii*) Calcolare $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot dP$.

(*iii*) Dato il campo $\mathbf{G}(x, y, z) = \big(y \sin(xy), x \sin(xy), \log(z^2 + 1)\big)$, spiegare perché

$$\int_\gamma (\mathbf{F} + \mathbf{G}) \cdot dP = \int_\gamma \mathbf{F} \cdot dP$$

(*ii*) Per trovare le soluzioni del sistema completo è sufficiente trovarne una soluzione particolare, del tipo $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Imponendo che sia soluzione del sistema completo, troviamo:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} a + 2b = -1 \\ 2a + b = \ \ 1 \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} a = \ \ 1 \\ b = -1 \end{cases}.$$

L'integrale generale del sistema completo è quindi:

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t} + 1 \\ y(t) = c_1 e^{3t} - c_2 e^{-t} - 1 \end{cases}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbf{R}$$

(*iii*) Osserviamo che le condizioni che le soluzioni trovate devono soddisfare in $t = 0$ possono essere riscritte:

$$\begin{cases} x(0) + y(0) = \ \ 2 \\ x(0) - y(0) = -4 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x(0) = -1 \\ y(0) = \ \ 3 \end{cases},$$

dunque

$$\begin{cases} x(0) = c_1 + c_2 + 1 = -1 \\ y(0) = c_1 - c_2 - 1 = \ \ 3 \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} c_1 = \ \ 1 \\ c_2 = -3 \end{cases}.$$

La soluzione cercata è quindi:

$$\begin{cases} x(t) = e^{3t} - 3e^{-t} + 1 \\ y(t) = e^{3t} + 3e^{-t} - 1 \end{cases}$$

Esercizio 4.A. Ponendo $u = \frac{x}{2}$, vediamo che la serie è la serie logaritmica $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} u^n$, che ha raggio di convergenza 1, converge puntualmente se $u \in (-1, 1]$ e la cui somma è $S(u) = \log(1 + u)$.

Dunque la serie data ha raggio di convergenza $R = 2$ e converge puntualmente per $x \in (-2, 2]$. La sua somma è $S(x) = \log(1 + \frac{x}{2})$.

Se non si riconosce la serie, si può procedere utilizzando per esempio il criterio della radice per calcolare il raggio di convergenza:

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1 \longrightarrow R = 1.$$

Inoltre, per $x = 2$, la serie è $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} 1^n$, cioè la serie armonica a segni alterni, che converge semplicemente.

Per $x = 2$, la serie è $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} (-1)^n = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$, cioè la serie armonica, che diverge.

Ne segue che la serie converge semplicemente nell'intervallo $(-2, 2]$.

I Teoremi sulle serie di potenze garantiscono che la serie degli integrali termine a termine converge all'integrale della somma su tutto l'intervallo $(-R, R)$. Nel nostro caso quindi l'uguaglianza è certamente valida per ogni $t \in (-2, 2)$.

Esercizio 5.A.

(*i*) La funzione $\gamma(t)$ è di classe C^1, dato che tutte le sue componenti sono polinimiali. Inoltre

$$\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \gamma_2'(t), \gamma_3'(t)) = (2 - 2t, 3t^2 - 4t, 0).$$

Si vede che

$$\begin{cases} \gamma_1'(t) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad t = 1 \\ \gamma_2'(1) = 3 - 4 = -1 \neq 0 \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \gamma'(t) \neq \mathbf{O}, \ \forall t \in [0, 2].$$

Ne segue che l'arco di curva è regolare.

Inoltre $\gamma(0) = (0, 0, 4) = \gamma(2)$, quindi la curva è chiusa.

(*ii*) Dobbiamo calcolare:

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot dP = \int_0^2 \mathbf{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt.$$

Poiché la terza componente di $\gamma'(t)$ è nulla, non è necessario sostituire i valori di γ nella terza componente del campo.

$$\mathbf{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = (\gamma_1(t) + \gamma_2(t), 0, \dots) \cdot (\gamma_1'(t), \gamma_2'(t), 0) = (\gamma_1(t) + \gamma_2(t))\gamma_1'(t).$$

Dunque

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot dP = \int_0^2 \gamma_1(t)\gamma_1'(t)\, dt + \int_0^2 \gamma_2(t)\gamma_1'(t)\, dt.$$

(*i*) La funzione $\gamma(t)$ è di classe C^1, dato che tutte le sue componenti sono polinimiali. Inoltre

$$\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \gamma_2'(t), \gamma_3'(t)) = (3 - 2t, 3t^2 - 6t, 0).$$

Si vede che

$$\begin{cases} \gamma_1'(t) = 0 \iff t = \frac{3}{2} \\ \gamma_2'(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{4} \neq 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \gamma'(t) \neq \mathbf{O},\ \forall t \in [0,3].$$

Ne segue che l'arco di curva è regolare.

Inoltre $\gamma(0) = (0,0,2) = \gamma(3)$, quindi la curva è chiusa.

(*ii*) Dobbiamo calcolare:

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot dP = \int_0^3 \mathbf{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\ dt.$$

Poiché la terza componente di $\gamma'(t)$ è nulla, non è necessario sostituire i valori di γ nella terza componente del campo.

$$\mathbf{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = (\gamma_1(t) + \gamma_2(t), 0, \ldots) \cdot (\gamma_1'(t), \gamma_2'(t), 0) = (\gamma_1(t) + \gamma_2(t))\gamma_1'(t).$$

Dunque

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot dP = \int_0^3 \gamma_1(t)\gamma_1'(t)\ dt + \int_0^3 \gamma_2(t)\gamma_1'(t)\ dt.$$

Osserviamo che il primo dei due integrali è nullo. Infatti, possiamo sostituire $s = \gamma_1(t)$, $ds = \gamma_1'(t)\ dt$, mentre s varia fra 0 e 0. Allora: $\int_0^3\ dt.\gamma_1(t)\gamma_1'(t)\ dt = \int_0^0 s\ ds = 0$.

Il secondo integrale invece è:

$$\int_0^3 \gamma_2(t)\gamma_1'(t)\ dt = \int_0^2 (9t^3 - 2t^4 - 9t^2)\ dt = \frac{81}{20}.$$

(*iii*) Osserviamo che il campo $\mathbf{G}$ è conservativo. Infatti è definito su $\mathbf{R}^2$, che è connesso e semplicemente connesso, e:

$$\frac{\partial G_1}{\partial y}(x,y,z) = \sin xy + xy\cos xy = \frac{\partial G_2}{\partial x}(x,y,z)$$

$$\frac{\partial G_1}{\partial z}(x,y,z) = 0 = \frac{\partial G_3}{\partial x}(x,y,z)$$

$$\frac{\partial G_2}{\partial z}(x,y,z) = 0 = \frac{\partial G_3}{\partial y}(x,y,z)$$

L'integrale di un campo conservativo lungo qualsiasi curva chiusa il cui sostegno è contenuto nel dominio del campo è nullo. Ne segue che

$$\int_\gamma (\mathbf{F} + \mathbf{G}) \cdot dP = \int_\gamma \mathbf{F} \cdot dP + \int_\gamma \mathbf{G} \cdot dP = \int_\gamma \mathbf{F} \cdot dP.$$

$$= \max_{x\in[0,6]} 3\left[1 - \frac{n}{(x-3)^2+n}\right] \underset{\boxed{x=0;6}}{=} 3\left(1-\frac{n}{9+n}\right) = \frac{27}{9+n}.$$

Quindi

$$\lim_n \|f_n - f\|_\infty = \lim_n \frac{27}{9+n} = 0.$$

Ne segue che la successione (f_n) converge uniformemente su $[0,6]$ alla funzione $f(x) = 3$.

c) La successione (f_n) converge uniformemente su $\mathbb{R}$ alla funzione $f(x) = 3$ se

$$\lim_n \|f_n - f\|_\infty = 0, \qquad \text{dove } \|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)|.$$

Procedendo in modo analogo al caso precedente si ha che

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{3n}{(x-3)^2+n} - 3\right| = \sup_{x\in\mathbb{R}} 3\left[1-\frac{n}{(x-3)^2+n}\right] =$$

essendo la funzione $g_n(x) = 3\left[1 - \frac{n}{(x-3)^2+n}\right]$ non negativa, decrescente su $(-\infty, 3]$ e crescente su $[3, +\infty)$ con limiti uguali per $x \to \pm\infty$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} 3\left[1 - \frac{n}{(x-3)^2+n}\right] = 3.$$

Quindi

$$\lim_n \|f_n - f\|_\infty = \lim_n 3 = 3 \neq 0.$$

Ne segue che la successione (f_n) non converge uniformemente su $\mathbb{R}$ alla funzione $f(x) = 3$.

Esercizio 2. (10 punti)

Calcolare l'integrale triplo

$$\int_D y\, dx\, dy\, dz,$$

dove

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2-4x \le 0,\ y \le x \le 2,\ \boxed{0 \le z \le \sqrt{x^2+y^2}}\right\}$$

<u>Svolgimento</u>

primo inverse : mi tolgo la terza dimensione

Integrando per fili paralleli all'asse z si ha che

$$\int_D y\, dx\, dy\, dz = \int_K \left(\int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} y\, dz\right) dx\, dy = \boxed{\int_K y\sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy,}$$

dove

$$K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2+y^2-4x \le 0,\ y \le x \le 2\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \underbrace{0 \le x \le 2}_{},\ \underbrace{-\sqrt{4x-x^2} \le y \le x}_{}\right\}.$$

$y = \sqrt{4x - x^2} \rightarrow$

$y \le \sqrt{4x-x^2}$

Quindi

$$\int_D y\,dx\,dy\,dz = \int_{K'} \rho^3 \sin\vartheta\,d\rho\,d\vartheta = \int_A \rho^3 \sin\vartheta\,d\rho\,d\vartheta + \int_B \rho^3 \sin\vartheta\,d\rho\,d\vartheta.$$

Calcolando separatamente i due integrali si ottiene che

$$\int_A \rho^3 \sin\vartheta\,d\rho\,d\vartheta = -\frac{8}{5}\sqrt{2}, \qquad \int_B \rho^3 \sin\vartheta\,d\rho\,d\vartheta = 0.$$

Quindi

$$\int_D y\,dx\,dy\,dz = -\frac{8}{5}\sqrt{2}.$$

Esercizio 3. (10 punti)

Si consideri il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} x' = (3-\alpha)x + y \\ y' = -(3-\alpha)^2 x + (\alpha - 4)y. \end{cases}$$

a) Studiare la stabilità della soluzione nulla al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

b) Determinare tutti i valori di α per cui esistono soluzioni costanti non identicamente nulle.

c) Posto $\alpha = 3$, risolvere il sistema.

d) Si ponga $\alpha = \frac{13}{4}$. Dire, motivando opportunamente, se la seguente affermazione è vera o falsa: se $(x(t), y(t))$ è una qualsiasi soluzione del sistema, allora la funzione $\gamma(t) = e^{t/2}(x(t), y(x))$ è limitata.

Svolgimento

a) La matrice dei coefficienti è

$$A = \begin{pmatrix} 3-\alpha & 1 \\ -(3-\alpha)^2 & \alpha - 4 \end{pmatrix}.$$

Per studiare la stabilità della soluzione nulla calcoliamo gli autovalori di A. Si ha che

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\alpha-\lambda & 1 \\ -(3-\alpha)^2 & \alpha-4-\lambda \end{vmatrix} = (3-\alpha-\lambda)(\alpha-4-\lambda) + (3-\alpha)^2 = \lambda^2 + \lambda + \alpha - 3.$$

Ne segue che

$$\det(A-\lambda I) = 0 \iff \lambda^2 + \lambda + \alpha - 3 = 0 \iff \lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{13-4\alpha}}{2}.$$

L'integrale generale del sistema lineare è dato da

$$X(t) = c_1 v_1 e^{-t} + c_2 v_2 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{-t} + c_2 \\ -c_1 e^{-t} \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

d) Per $\alpha = \frac{13}{4}$, allora la matrice A ha un unico autovalore $\lambda = -\frac{1}{2}$ di molteplicità algebrica 2. Poichè la matrice A non è diagonale, allora l'integrale generale è dato da

$$X(t) = (x(t), y(t)) = c_1 v_1 e^{-t/2} + c_2(tv_1 + v_2) e^{-t/2} = e^{-t/2}[c_1 v_1 + c_2(tv_1 + v_2)], \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

dove v_1 è un autovettore associato a λ e v_2 è un autovettore generalizzato associato a λ e v_1. Quindi la funzione $\gamma(t) = e^{t/2}(x(t), y(x))$ è

$$\gamma(t) = e^{t/2}(x(t), y(x)) = e^{t/2} e^{-t/2}[c_1 v_1 + c_2(tv_1 + v_2)] = c_1 v_1 + c_2(tv_1 + v_2), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

Poichè per $t \to \pm\infty$, se $c_2 \neq 0$, almeno una delle due componenti di γ è illimitata, ne segue che γ è illimitata. Quindi l'affermazione "se $(x(t), y(t))$ è una qualsiasi soluzione del sistema, allora la funzione $\gamma(t) = e^{t/2}(x(t), y(x))$ è limitata" è falsa.

un periodo (con dimostrazione). Coefficienti e serie di Fourier per funzioni R_T; loro proprietà in caso di simmetrie (con dimostrazione).
Teorema di convergenza quadratica; identità di Parseval (con dimostrazione) e lemma di Riemann-Lebesgue (con dimostrazione). Teorema di convergenza puntuale, funzione regolarizzata. Teoremi di convergenza uniforme.
Generalizzazioni: sviluppo in serie trigonometrica su un intervallo compatto qualsiasi tramite prolungamento periodico, sviluppo in serie di soli coseni o seni tramite parificazione o disparificazione. Teorema di derivabilità termine a termine. Cenni sulle serie di Fourier in forma complessa e sulla caratterizzazione dei polinomi di Fourier come minimizzanti la distanza quadratica.

Funzioni di più variabili o vettoriali

Richiami su: spazio R^n, campi scalari (grafico, immagine, continuità, derivabilità parziale, gradiente, derivate successive, matrice hessiana, classi C^k, teorema di Schwarz), funzioni vettoriali (funzioni componenti, rappresentazione di campi vettoriali, continuità e derivabilità per componenti, matrice jacobiana, classi C^k), regola della catena.

Elementi di topologia in R^n – Distanza e intorni sferici. Punti interni, esterni e di frontiera. Interno, frontiera, chiusura ed esterno di un insieme. Insiemi aperti, chiusi, limitati, compatti, convessi, stellati. Insiemi connessi e regioni. Aperti semplicemente connessi.

Elementi di geometria delle curve e delle superfici – Rappresentazioni cartesiane e parametriche di curve e superfici (nel piano e nello spazio), insiemi di livello. Caso particolare dei grafici: parametrizzazioni standard, test delle rette, elementi tangenti. Punti regolari di curve e superfici (nel piano e nello spazio), varietà regolari.
Altri elementi sono descritti nelle parti sulle funzioni implicite e sugli integrali curvilinei e superficiali.

Funzioni implicite – Teorema di Dini in R^2 ed R^3 (con dimostrazione delle formule sulle derivate). Controesempi di punti regolari senza ipotesi di Dini. Ortogonalità tra gradiente e curve/superfici di livello ed equazione dei loro elementi tangenti (con dimostrazione nel caso delle curve). Cenno al caso delle curve cartesiane nello spazio.

Ottimizzazione – Definizioni di estremi e punti di estremo (relativi, assoluti, liberi, vincolati). Teoremi sui punti di estremo vincolati ad insiemi aperti, grafici, parametrici e cartesiani, metodo dei moltiplicatori di Lagrange per vincoli scalari (con dimostrazione) e vettoriali. Teorema di Weierstrass e ricerca di punti di estremo assoluto. Vincoli generici.

Integrazione multipla – Misura secondo Peano-Jordan, classi di insiemi quadrabili ed esempio di insieme non quadrabile, insiemi trascurabili, proprietà della misura. Integrazione doppia su insiemi quadrabili (nel dettaglio) e formula integrale per il calcolo di aree (con dimostrazione). Significato geometrico dell'integrale doppio. Integrazione tripla su insiemi quadrabili (cenno) e formula integrale per il calcolo di volumi. Classi di funzioni integrabili ed esempio di funzione non integrabile (funzione di Dirichlet). Proprietà dell'integrale multiplo. Significato fisico-probabilistico dell'integrale.
Calcolo di integrali doppi: teorema di riduzione a due integrazioni semplici; teorema di integrazione mediante cambiamento di variabili, coordinate polari ed ellittiche.
Calcolo di integrali tripli: teoremi di riduzione per fili e per strati; teorema di integrazione mediante cambiamento di variabili, coordinate sferiche e cilindriche.
Baricentro e momenti di inerzia. Primo teorema di Guldino.

Integrazione curvilinea – Curve parametriche: parametrizzazioni e parametrizzazioni semplici, regolarità di punti e retta tangente, vettore tangente relativo ad una parametrizzazione.
Archi: definizioni di arco, arco semplice, arco chiuso e arco aperto, estremi di un arco, arco regolare; teorema di Jordan; archi regolari a tratti. Orientamento di archi: verso di percorrenza e campo continuo di versori tangenti per archi regolari, parametrizzazioni concordi e discordi; estensione ad archi regolari a tratti tramite orientamenti compatibili.

POLITECNICO DI TORINO

I Facoltà di Ingegneria, Ingegneria civile (AA-ZZ) e Ingegneria per l'ambiente e il territorio (AA-LZ)

Sistemi piani completi a coefficienti costanti: principio di sovrapposizione ed esistenza di una soluzione particolare per termini noti con struttura speciale.

Sistemi autonomi piani – Definizione di sistema autonomo. Proprietà di tempo-invarianza (con dimostrazione). Spazio delle fasi e sua partizione in orbite. Ritratti di fase.
Punti di equilibrio: definizione e caratterizzazione in termini di soluzioni costanti (con dimostrazione); convergenza ad equilibri di soluzioni convergenti; condizioni di esistenza di equilibri non nulli per sistemi lineari (con dimostrazione).
Stabilità alla Liapunov per punti di equilibrio: definizioni di stabilità, attrattività, stabilità asintotica e instabilità; teorema di stabilità lineare e principio di stabilità linearizzata.

$\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$ $\quad \forall x \in I$ con $I \subseteq D$ fnoto

def. insieme di convergenza $\Lambda = \{x \in D \ \lim_{n\to\infty}$ esiste finito $\}$

caratteristiche insufficienti → conti
→ integrab./derivab.
• scambiabili condizioni di passaggio al limite

DISTANZE → norma 1 area geom.
→ norma 2 area trapezoide sotteso
→ norma ∞ al variare della $f_n(x)$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{n\to\infty} d(f_n; f) = 0\\ \lim_{n\to\infty} = \|f_n - f\|_\infty = 0 \\ \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = 0\end{array}\right\}$$
• conv. unif. implica la puntuale

SUCCESSIONI E SERIE DI FUNZIONI

• Passaggio al limite (continuità): se f_n continua e $f_n \to f$ uniformem.
→ continua su I

• Passaggio sotto il segno di integrale
$\left.\begin{array}{l} f_n \text{ sono integrabili su } [a;b] \\ f_n \to f \text{ unif. su } [a;b]\end{array}\right\}$ ALLORA $\int_b^a f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$

• → Derivata $\left(\lim_{n\to\infty} f(x)\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$

• conv. assoluta $\sum |f_n(x)| < +\infty$; cioè se la serie numerica $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge assolutamente per ogni $x \in I$
→ implica puntuale

• conv totale = (assoluta + puntuale) ⟹ $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_\infty < \infty$ con $\|\cdot\|_\infty$ calcolata su I

cioè la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x)|$ serie numerica a termini positivi, converge

Criterio di Weierstrass: totale = unif. + assoluta $\|S\|_\infty \le \sum \|f_n\|_\infty$

PASSAGGIO AL LIMITE DELLA CONV. UNIF. → continuità → f_n cont. su I
→ $\sum f_n(x) = S(x)$ unif. su I } continua su I

→ integrab. → f_n integrabili su $[a;b]$
→ $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = S(x)$ unif. su $[a;b]$

$$\boxed{\int_a^b S(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^b f_n(x)\,dx}$$

4

SERIE DI TAYLOR

definizione: Funzione di classe C^∞ nell'intorno di $x_0 \in \mathbb{R}$ è detta analitica o sviluppabile in serie di Taylor in x_0 (McL se $x_0 = 0$) se, $\exists \delta > 0$, $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

TEOREMA DI SVILUPPABILITÀ: sia $f \in C^\infty$ nell'intorno di $x_0 \in \mathbb{R}$. Se esistono un raggio $\delta > 0$, un indice $n_0 \geq 0$ ed una costante $M > 0$ tali che

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x + \delta), \quad \forall n \geq n_0 \quad |f^{(n)}(x)| \leq M \frac{n!}{\delta^n}$$

Allora

$$\forall x \in (x_0 - \delta; x + \delta), \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

• Dimostrazione:

Consideriamo il polinomio di Taylor di f in x_0

$$T_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \quad \text{con anche } N \geq n_0$$

Dobbiamo mostrare che $\forall x \in (x_0 + \delta; x - \delta)$;

$$\lim_{N \to \infty} |f(x) - T_N(x)| = 0$$

Utilizzo la formula di Taylor-Lagrange

$$\forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta), \quad f(x) - T_N(x) = \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}(x - x_0)^{(N+1)}$$

con ξ opportunamente tra x e x_0, quindi $\xi \in (x_0 - \delta, x + \delta)$

Allora

$$|f(x) - T_N(x)| = |f^{(N+1)}(\xi)| \frac{|x - x_0|^{N+1}}{(N+1)!} \leq M \frac{(N+1)!}{\delta^{N+1}} \frac{|x - x_0|^{N+1}}{(N+1)!} = M\left(\frac{|x - x_0|}{\delta}\right)^{N+1}$$

con $\frac{|x - x_0|}{\delta} < 1$ (essendo $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$)

Dunque la tesi segue, perché $\lim_{N \to \infty} \left(\frac{|x - x_0|}{\delta}\right)^{N+1} = 0$ ■

CONDIZIONI SUFFICIENTI

1) $\forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, $\forall n \geq n_0$, $|f^{(n)}(x)| \leq M^n$

oppure

2) $\forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, $\forall n \geq n_0$, $|f^{(n)}(x)| \leq M^n$
(derivate equilibrate)

SERIE NUMERICHE

Definita dalla prof come una somma di infiniti termini (in realtà è un'"infinità" numerabile)

Successione: susseguirsi di termini, definendo una funzione che da a associa un n, per poter definire un $a_n \Rightarrow a: n \to a_n \in \mathbb{R}$ con n variabile in $\mathbb{N}$ o sottoinsieme tipo $\{n \in \mathbb{N}: n \geq n_0\}$

La successione può essere convergente se esiste $l \in \mathbb{R}$ tale che per ogni $\varepsilon > 0$ risulta $|a_n - l| < \varepsilon$ (similitudine con la definizione di limite), definitivamente (ossia $d(a_n, l) < \varepsilon$ definitivamente) e si può scrivere $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ (che equivale a $\lim_{n\to\infty} d(a_n, l) = 0$).

divergente a $+\infty$ se per ogni $M > 0$ risulta $a_n > M$ definitivamente e possiamo scrivere $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$

divergente a $-\infty$ se per ogni $M > 0$ risulta $a_n < -M$ definitivamente
$\lim_{n\to-\infty} a_n = -\infty$

oscillante: né convergente né divergente

- Il carattere di una successione ed il suo limite, se esiste, non cambiano alterando un numero finito di termini verificando che $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$

TEOREMA (1): Se $(a_n)_{n \geq n_0}$ è crescente (cioè $a_n \leq a_{n+1}$ per ogni n), allora
$\lim_{n\to+\infty} a_n = \sup_{n\geq n_0} a_n := \sup\{a_n : n \geq n_0\}$

Per lo studio del carattere di una successione, è utile conoscere la condizione necessaria di esistenza del limite (finito o infinito) data dal **TEOREMA 2**

Se una successione ammette limite L (finito o infinito), allora ogni sua sottosuccessione ha lo stesso limite.

Per riconoscere una successione oscillante otteniamo le sue sottosuccessioni (se ne ammette almeno 2), se queste 2 sottosuccessioni ammettono 2 limiti diversi allora la successione diverge

TEOREMA (3) Se il $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ esiste (finito o infinito) allora risulta $\lim_{n\to+\infty} f(n) = \lim_{x\to+\infty} f(x)$

Definizione di Equivalenza: diciamo che 2 successioni (a_n) e (b_n) sono equivalenti indicate come $a_n \sim b_n$ se $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ è un caso particolare di equigrandezza (stesso comportamento al limite)

Equigrandezza: $a_n \simeq b_n$ se $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ = esiste finito e non nullo: si comportano allo stesso modo al limite

La ridotta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è anche detta serie di termine generale a_n

- S_N è la somma della serie

La serie converge se $\lim_{N\to+\infty} S_N \in \mathbb{R}$, diverge se $\lim_{N\to\infty} S_N = \pm\infty$. Diversamente diciamo che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è indeterminata

SCHEMATICAMENTE:

data $(a_n)_{n\geq n_0} \subset \mathbb{R}$

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \begin{cases} \Rightarrow \text{convergente } \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n \text{ esiste finito} \\ \Rightarrow \text{divergente } \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n \text{ esiste infinito} \\ \Rightarrow \text{altrimenti è indeterminata} \end{cases}$$

Condizione necessaria di convergenza:

Ipotesi $\sum_{n}^{\infty} a_n$ converge $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Dimostrazione: per ipotesi $\lim_{N\to\infty} S_N = S \in \mathbb{R}$. ma $\boxed{S_N = S_{N-1} + a_N}$ perché S_N lo scomponго come la somma della serie al penultimo termine più il termine in **N**.

- Quindi $a_N = S_N - S_{(N-1)} \Rightarrow \boxed{S - S = 0}$

considero a_n come la differenza tra S_N e S_{N-1}, considerando $S_N = \lim_{N\to\infty} \sum_{0}^{N} a_n$ so che sia S_N che S_{N-1} convergeranno allo stesso valore perché S_{N-1} è sottosuccessione di S_N

- **NON VALE IL VICEVERSA**: Se il limite per $x \to +\infty$ della successione è $= +\infty$ la serie può sia divergere che convergere (mentre se una serie è data convergente implica che il limite sia finito)

Serie A termini Positivi:

Serie il cui termine generale soddisfa $a_n \geq 0$.

- basta $a_n \geq 0$ definitivamente (posso alterare i primi termini)
- studiamo serie a termini di segno costante $\sum -a_n = -\sum a_n$

→ Proposizione (carattere di serie a termini positivi): Se $a_n \geq 0$ implica $S_N = S_{N-1} + a_n \geq S_{N-1}$ la successione delle ridotte S_N è crescente e quindi ammette sempre limite $=$ $= \sup_N S_N$, finito o infinito. • <u>DICITURA</u> $\sum_{n}^{\infty} a_n$ convergente $\rightarrow \sum_{n}^{\infty} a_n < +\infty$

$\boxed{L>1}$ finito: Per ipotesi $\sqrt[n]{a_n}$ è definitivamente vicino a L tanto quanto voglio, quindi posso scegliere $\varepsilon>0$ tale che $L-\varepsilon>1$ e
$\sqrt[n]{a_n} > L-\varepsilon > 1$ da cui segue $a_n > 1^n = 1$
allora $a_n \not\to 0$ e perciò la serie non converge, ossia diverge
$\boxed{L=+\infty}$ Risulta $a_n > 1$ definitivamente

X IL CONFRONTO AS:

con a_n convergente: $\frac{\ell}{2} b_n < a_n$ riprendo le ipotesi del teorema del confronto (cfr. $0 \leq a_n \leq b_n$)
$a_n < \frac{3\ell}{2} a_n$ convergenza della serie
$\sum(\ell a_n)$ ~~=~~ $\ell \sum a_n$ stesso carattere

con a_n divergente: $\frac{\ell}{2} b_n < a_n$: carattere della serie $\sum(\ell a_n) = \ell \sum a_n$ stesso carattere
$a_n < \frac{3\ell}{2} b_n$: se a_n diverge, $\frac{3\ell}{2} b_n$ è maggiore di a_n e diverge anch'esso per confronto

X IL CRITERIO DELLA RADICE:

$\boxed{L<1}$

$0 < \sqrt[n]{a_n} < L+\varepsilon$
se a_n converge devo considerare la serie da 0 a 1

L+ε, L, L+ε, 1

scelgo un L+ε che deve essere < 1

$(L+\varepsilon)^n$ ragione $L+\varepsilon < 1$ quindi conv.

$\boxed{L>1}$

$\sqrt[n]{a_n} > L-\varepsilon > 1$
$a_n > (L-\varepsilon)^n > 1^n$
• a_n diverge se diverge anche $(L-\varepsilon)^n > 1$ che è serie geometrica di ragione maggiore di 1 (con il confronto)

TIPI DI SERIE

1) SERIE ARMONICA GENERALIZZATA: se $\alpha \neq 1$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}} \begin{cases} = +\infty & \text{se } 0 < \alpha \leq 1 \\ < +\infty & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}$$

ci riconduciamo lo studio del carattere degli integrali impropri (stesso carattere).

$$\lim_{b \to \infty} \frac{b^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha < 1 \quad \text{diverge} \\ \frac{1}{\alpha - 1} & \text{se } \alpha > 1 \quad \text{converge} \end{cases}$$

Serie a termini di segno alterno

serie del tipo: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n = b_0 - b_1 + b_2 - b_3 \dots$ con $b_n > 0$

Criterio di Leibniz: utilizzato per studiare la convergenza di una serie di segni alterni:

1) $\lim_{n \to \infty} b_n = 0$

2) (b_n) è definitivamente decrescente ($b_{n+1} \leq b_n$ definitivam.)

ESEMPIO: ARMONICA SEGNI ALTERNI:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^\alpha}}$$ converge per ogni $\alpha > 0$

Serie a termini di segno qualsiasi ($a_n \in \mathbb{R}$)

DEFINIZIONE (CONVERGENZA ASSOLUTA:)

Se $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < +\infty$ si dice che $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge assolutamente

CRITERIO DI CONVERGENZA ASSOLUTA:

Se $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < +\infty$, allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge e $\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$

la convergenza assoluta implica la convergenza semplice: il viceversa è falso: ad esempio la serie armonica a segni alterni con $0 < \alpha \leq 1$ converge semplicemente ma non assolutamente

SUCCESSIONI e SERIE DI FUNZIONI

Definizione: considerando la successione $(x^n)_{n \geq n_0}$ (possiamo prendere come esempio la geometrica di termine iniziale 1 e ragione x), posso fissare n concentrandomi su ciascun termine separatamente e interpretando x come variabile reale, si vede che lo stesso successione è una successione di funzioni.

$f_0(x), f_1(x), f_2(x), \dots f_n(x)$ successione di funzioni

come se $f(x)$, quindi x è fisso, fosse fissato come successione, di cui studio la serie al variare di n (variabile).

$f_0(x) = 1$, $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$ ... caso della geometrica

convergenza puntuale

Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ non vuoto (f_n) una successione di funzioni da Ω in $\mathbb{R}$ e $f: \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione: Diciamo che la successione (f_n) converge puntualmente a f in Ω se

$\forall x \in \Omega$: $\boxed{\lim_n f_n(x) = f(x)}$ è il limite puntuale della successione o funzione limite.

- f_n converge ad una funzione f in un punto $x_0 \in D$ se $\boxed{\lim_{n \to \infty} f_n(x_0) = f(x_0)}$

- f_n converge puntualmente ad una funzione f su un sottoinsieme $I \subseteq D$ se f_n converge ad f in tutti i punti $x \in I$, cioè se:

$\forall x \in I$ (fissato) risulta $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$

In tal caso scriviamo $f_n \to f$ puntualmente su I

APPLICABILE

$$\boxed{\forall x \in I \text{ (fissato) risulta } \lim_{n \to \infty} |f_n(x) - f(x)| = 0}$$

- definizione di convergenza puntuale ad una funzione

~~perché $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ equivale a $\lim_{n\to\infty} |f_n(x) - f(x)| = 0$~~

PROCEDIMENTO X CONV. PUNTUALE

1) trovare gli $x \in D$ per cui $\lim_{n \to \infty} f_n(x)$, (quindi con x fissato), esiste finito, definendo così l'insieme di convergenza puntuale delle f_n e noi lo indicheremo sempre con $\Lambda := \{ x \in D : \lim_{n \to \infty} f_n(x) \text{ esiste finito} \}$ dove il limite esiste finito

2) Per ogni $x \in \Lambda$ si calcola (quando possibile) il valore del limite, che dipende in generale da x, definendo una funzione $f: \Lambda \to \mathbb{R}$ detta funzione limite tale che: $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$ per ogni $x \in \Lambda$ (fissato)

- Λ è anche un insieme di ~~partenza~~ di una funzione ad $\mathbb{R}$ detta funzione limite fissato un qualunque x_0 in I, i punti di ascissa x_0 sui grafici delle f_n tendono al punto di ascissa x_0 nel grafico di f.

$d_\infty(f;g) = \|f-g\|_\infty$ | $d_1(f;g) = \|f-g\|_1$ e $d_2(f;g) = \|f-g\|_2$

$d_\infty(f;g) = \sup_{x\in[a;b]} |f(x)-g(x)|$ | $d_p(f;g) = \left(\int_a^b |f(x)-g(x)|^p dx\right)^{1/p}$ con $p=1,2$

DISTANZA INDICE INFINITO o del SUP | DISTANZA INDICE 1 O 2 (quadratica)

Se $f,g \in C([a;b])$ allora è continua anche la funzione $|f(x)-g(x)|$, quindi risulta $d_\infty(f;g) = \max_{x\in[a;b]} |f(x)-g(x)|$, ma l'intervallo $[a,b]$ può essere rimpiazzato, in tutte le definizioni, da un intervallo **I** qualsiasi

- la distanza $d_\infty(f;g)$ è l'estremo superiore dei condotti scostivertical fra f e g. cioè delle lunghezze $|f(x)-g(x)|$ dei segmenti che uniscono i punti dei grafici di f e g con uguale ascissa, $\rightarrow$ $d_\infty(f;g) = \max_{x\in[a;b]} |f(x)-g(x)|$
- distanza $d_1(f;g)$ è data da

$$d_1(f;g) = \int_a^b |f(x)-g(x)|dx$$

- distanza quadratica:

$$d_2(f;g) = \sqrt{\int_a^b |f(x)-g(x)|^2 dx}$$

Scelgo una distanza tra quelle viste e fisso un intervallo I in cui la calcolo, dunque la convergenza di una successione di funzioni f_n ad una f su I si può esprimere come:

Se $\|\cdot\|$ è una qualsiasi delle norme introdotte ~~ed~~ è la corrispondente distanza cioè $d(f;g) = \|f-g\|$, entrambe calcolate su I, allora si dice che f_n converge ad f su I nella norma $\|\cdot\|$ oppure rispetto alla distanza d, se

$\lim_{n\to\infty} d(f_n;f) = 0$ $\rightarrow$ cioè $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$

Convergenza Uniforme

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ non vuoto, (f_n) una successione di funzioni limitate da Ω in $\mathbb{R}$ e $f: \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione.

Diciamo che la successione (f_n) converge uniformemente a f su Ω se

$$\boxed{\lim_n \|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in\Omega} |f_n(x) - f(x)|}$$

- definizione applicabile con Weierstrass

Controesempio: la convergenza puntuale non implica la uniforme
$f_n(x) = x^n$ converge puntualmente a 0 sull'intervallo $[0;1)$, ma si è visto prima che non è uniforme.

TEOREMI DI PASSAGGIO AL LIMITE

Servono a superare le insufficienze della convergenza puntuale

TEOREMA DELLA CONTINUITÀ DELLA FUNZIONE LIMITE: Sia (f_n) una successione di funzioni $f_n: D \to \mathbb{R}$ e sia $I \subseteq D$ un intervallo qualsiasi.
Se vale
1) le f_n sono continue su I
2) $f_n \to f$ uniformemente su I

Allora f è continua su I

• se la successione è interamente continua su I, e tende uniformemente ad una funzione sullo stesso intervallo, allora la f è continua

TEOREMA DEL PASSAGGIO AL LIMITE SOTTO IL SEGNO D'INTEGRALE
Sia (f_n) una successione di funzioni $f_n: D \to \mathbb{R}$ e sia $[a;b] \subseteq D$. Se valgono le seguenti ipotesi:
1) le f_n sono integrabili su $[a;b]$
2) $f_n \to f$ uniformemente su $[a;b]$

• f è integrabile in un intervallo incluso nel dominio se le f_n sono integrabili in quel dominio e $f_n \to f$ in quel dominio uniform.

allora f è integrabile su $[a;b]$ e $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx$

$\boxed{\text{DIM.}}$

poiché f_n ed f sono integrabili su $[a;b]$ dalle proprietà degli integrali segue che

$$0 \le \left| \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \right| = \left| \int_a^b [f_n(x) - f(x)]\,dx \right| \le \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx$$

per definizione di $\|f_n - f\|_\infty$ risulta   applico la norma infinito tra f_n e f

$$|f_n(x) - f(x)| \le \|f_n - f\|_\infty \quad \text{per ogni } x \in [a;b]$$

tende a 0 perché è uniforme la convergenza

avendo

$$0 \le \left| \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \right| \le \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx \le \int_a^b \|f_n - f\|_\infty (b-a)$$

Se $f_n \to f$ uniformemente su $[a;b]$, l'ultimo termine tende a 0 quindi

$$\lim_{n\to\infty} \left| \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \right| = 0$$

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$$

TEOREMA DEL PASSAGGIO AL LIMITE SOTTO IL SEGNO DI DERIVATA: Sia (f_n) una successione di funzioni $f_n: D \to \mathbb{R}$ e sia $I \subseteq D$ un intervallo qualsiasi. Se
1) le f_n sono di classe C^1 su I (negli estremi considero le derivate direzionali)
2) $f_n \to f$ puntualmente su I
3) $f'_n \to g$ uniformemente su I

ALLORA f è di classe C^1 su I e

$\boxed{f'(x) = g(x) \text{ per ogni } x \in I,\ f'_n \to f' \text{ unif.};\ \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n} f'_n(x)}$