



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO : 430

DATA : 10/12/2012

A P P U N T I

STUDENTE : Pecoriello

MATERIA : Idraulica + Eserc

Prof. Ridolfi_Camporeale

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

I DRAULICA

• Programmi

- Statica dei fluidi
- Cinematica
- Dinamica dei fluidi
 - ↳ Fluidi perfetti
 - ↳ Fluidi viscosi

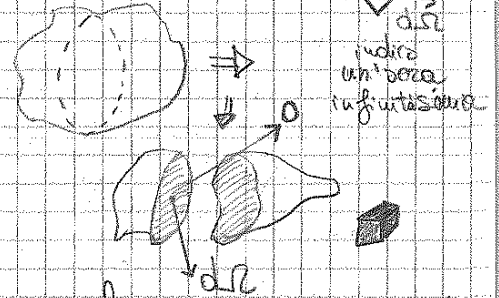
conetti → in pressione
 ↘ in superficie libera

- Moti a potenziale
- Moti di filtrazione
- Semiuoni

Libri → Idraulica, Circoli / Nosedo

DAI MIEI APPUNTI:

FLUIDI: non hanno capacità di resistere



- Definisce la normale orientamento della gravitazione
 - Forza che agisce in un intorno di O con gravitazione del vettore "n" (Forza Dev.)
- $$\lim_{\Delta \pi \rightarrow 0} \frac{d\pi}{d\pi} = \frac{\phi}{u} \quad d\pi = \phi dl \quad \pi = \int \phi dl$$
- si vuole in ogni punto

FLUIDI: sono sostanze materiali con due caratteristiche:

- la resistenza alla deformazione → ϕ quanto + le deformazioni avvengono lentamente
- le deformazioni sono permanenti

$\phi = E \epsilon$ → nei fluidi conta la velocità con cui le def. avvengono
questo non conta

Nella meccanica dei fluidi conta il tempo oltre allo spazio. La differenza tra Gas e Liquidi è che i liquidi appaiono + resistenza alla deformazione

Sono importanti: Le scale spaziali e temporali
 Il fluido posso vederlo come un continuo

- DENSITA' del fluido = $\frac{kg}{m^3}$ (è indicato come "rho")
- PESO SPECIFICO: γ, ρ dove $g = 9,81 \frac{m}{s^2}$ (indicato come γ)

$\rho = \rho(\gamma, p) \approx \text{costante} \Rightarrow$ Eq. di Stato
Stato di pressione temperatura

• Ci occupiamo principalmente di fluidi freddi

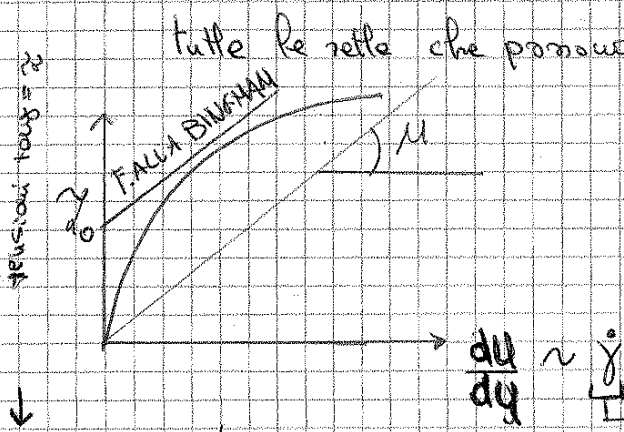
$\rho_{H_2O} \approx 1000 \frac{kg}{m^3}$	$\gamma_{H_2O} \approx 9806 \frac{N}{m^3}$
$\rho_{mercurio} = 13546 \frac{kg}{m^3}$	$\gamma_{mercurio} \approx 133000 \frac{N}{m^3}$
$\rho_{...} = 1,226 \frac{kg}{m^3}$	$\gamma_{...} = 12022 \frac{N}{m^3} \Rightarrow$ <small>non serve</small>

Se la T , diminuisce la viscosità
 Nei gas $T \uparrow, \mu \uparrow$

VISCOSITÀ CINEMATICA

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \rightarrow \text{aria} = 15,1 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

$$\rightarrow \text{H}_2\text{O} = 1 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$



tutte le rette che passano per l'origine si differenziano x la viscosità
 • Nei fluidi perfetti puoi definire con la velocità che vuoi e non a seconda
 ma τ_{tang}

$\frac{du}{dy} \sim \dot{\gamma}$ velocità di deformazione

FLUIDI TIXIOTOPICI: la resistenza va diminuendosi nel tempo perché dei legami interni vanno a rompersi
 la deformazione è la stessa

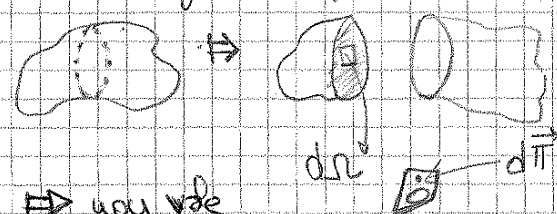
FLUIDI REOPE... : i legami interni vanno a crearsi

FLUIDI ELASTOVISCOSI: $\Rightarrow \dot{\gamma} = G \delta \quad \delta = \frac{\dot{\gamma}}{G} + \frac{\dot{\gamma}}{\mu}$

La reologia studia il comportamento dei fluidi (grafico)

2 tipi di forze \Rightarrow forze di Massa \Rightarrow forze peso, forze legate alle cariche
 \Rightarrow forze di superficie \Rightarrow superficie di contatto tra il fluido e qualcosa di fuori e qualcosa che taglia il fluido

$d\vec{\pi}$ forza infinitesima che agisce sulla superficie infinitesima dalla sua normale \vec{n}



• lui $\frac{d\vec{\pi}}{dS} = \vec{\Phi}_n$ sforzo \Rightarrow non vale Φ e non vale ∞

sforzo che c'è nel punto O rispetto alla normale \vec{n}

$d\vec{\pi} = \vec{\Phi}_n dS \Rightarrow \vec{\pi} = \int_S \vec{\Phi}_n dS$

Lezione 4 - ottobre 2013

Statica dei fluidi: nulla si muove quindi il vettore velocità $\vec{u} = 0$ in ogni

• $\vec{z} = \vec{u} = \frac{d\vec{u}}{dt}$

$\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} = 0$

$\vec{z} = 0$ in un fluido in quiete non sono presenti tangenziali:

$\phi_{xy} = \phi_{xz} = \phi_{yz} = 0$

$\phi_{xx} = \phi_{yy} = \phi_{zz} = p$

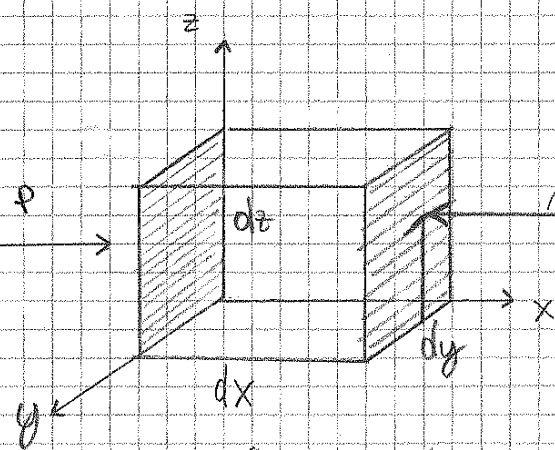
$\begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix}$

$\phi_n = \phi_x \cos n\hat{x} + \phi_y \cos n\hat{y} + \phi_z \cos n\hat{z}$

$\phi_{nx} = \phi_n \cos n\hat{x} = \phi_{xx} \cos n\hat{x} + 0 + 0 \rightarrow \phi_n = \phi_{xx}$

$\phi_{ny} = \phi_n \cos n\hat{y} \rightarrow \text{ricordo che } = \phi_{yy} \cos n\hat{y} \rightarrow \phi_n = \phi_{yy}$

$\phi_{nz} = \phi_n \cos n\hat{z} = \phi_{zz} \cos n\hat{z} \rightarrow \phi_n = \phi_{zz}$



$p + \frac{\partial p}{\partial x} dx$

$\rho dx dy dz = dm$

• c'è una massa, quindi a sono le relative forze di massa

$\vec{F} \cdot dm = \vec{F} \rho dx dy dz$

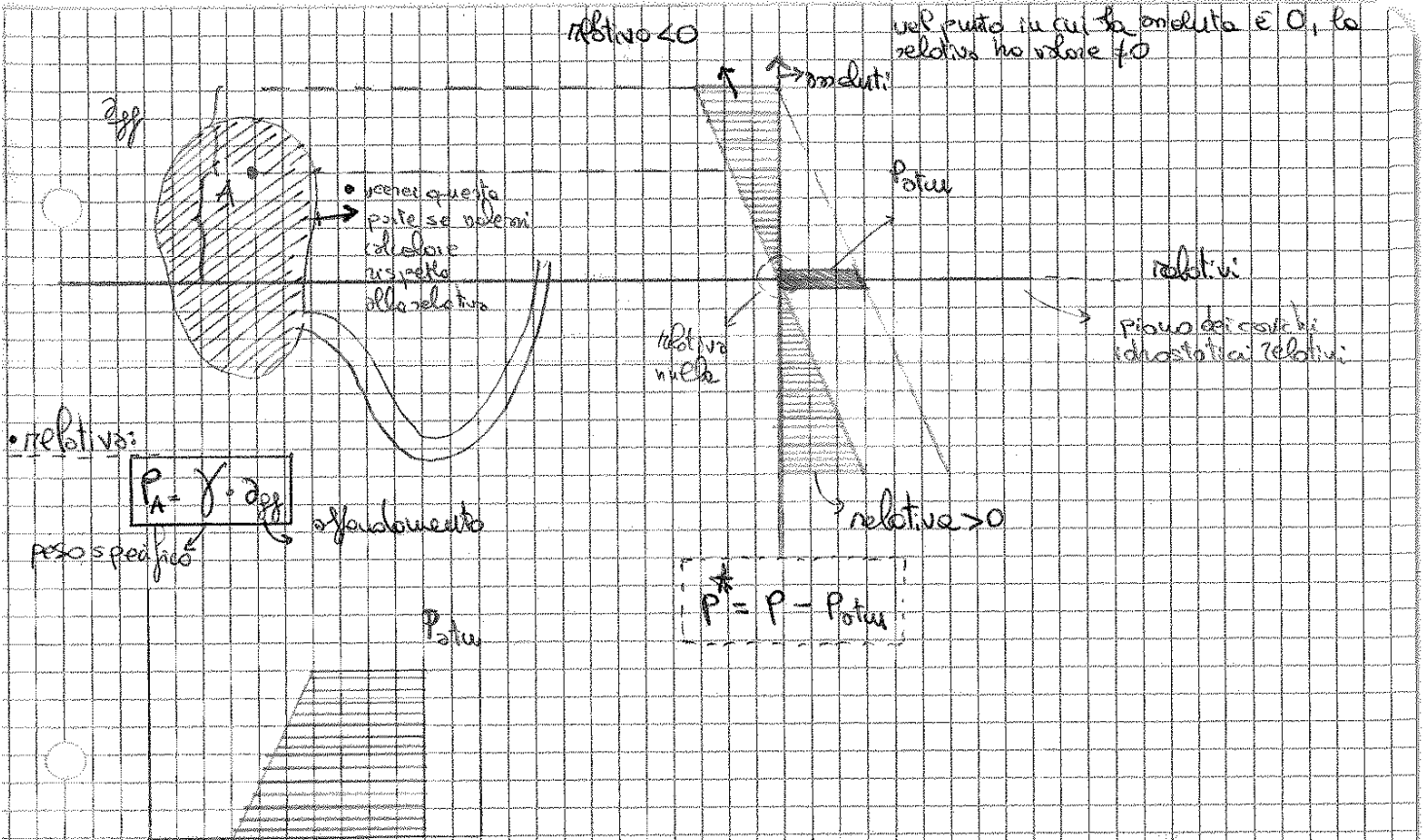
$\rho dz dy - (p + \frac{\partial p}{\partial x} dx) dx dy dz - \frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz + p dx dy dz$

• le risultante delle forze di superficie lungo la direzione X

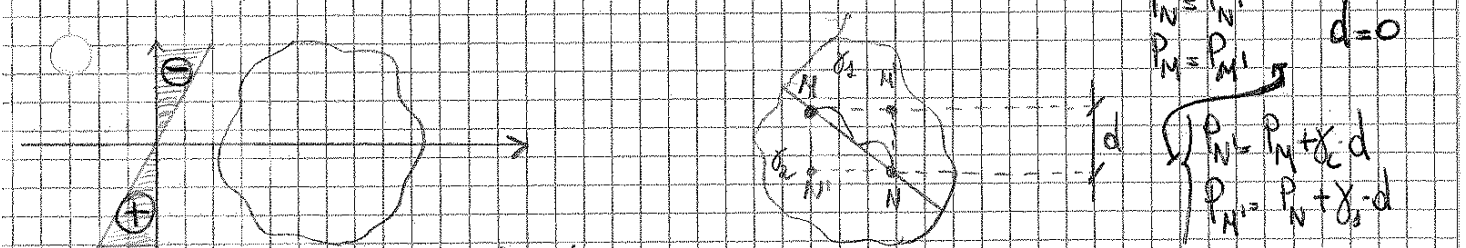
$\rho dz dx - (p + \frac{\partial p}{\partial y} dy) dx dz - \frac{\partial p}{\partial y} dx dy dz + p dx dy dz$

$\rho dz dx dy - \frac{\partial p}{\partial z} dz dx dy$

$\rho \vec{F} dx dy dz - \frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz - \frac{\partial p}{\partial y} dx dy dz - \frac{\partial p}{\partial z} dx dy dz = 0$
 $\rho \vec{F} = \text{grad } p$



- da pressione può andare anche sotto zero fino a $(-P_{atm})$
- contornio: \rightarrow sfruttiamo la pressione relativa che va sotto zero
- P assoluta al limite è zero al massimo, un solo
- Ragione in pressione relativa: devo conoscere un punto con la sua pressione assoluta, ricavo il suo piano dei carichi idrostatici relativi.
- $P -$ può andare fino a $-P_{atm}$
- $P +$ può andare all'infinito



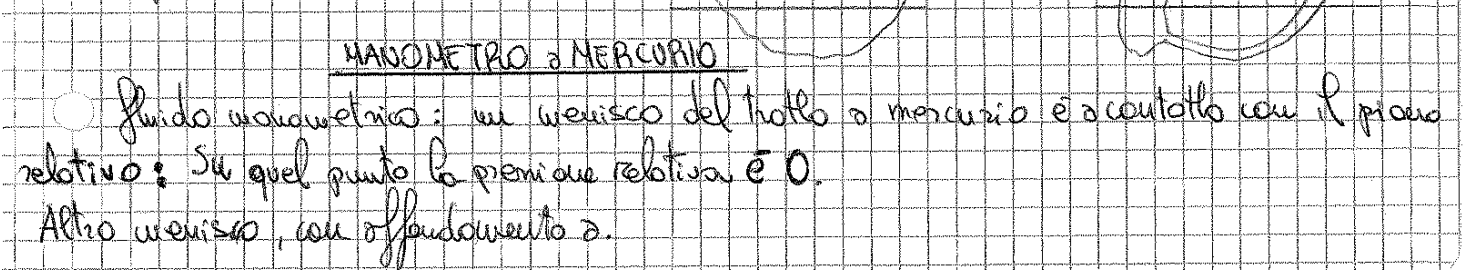
se sostituisco in quella sopra ho $d=0$

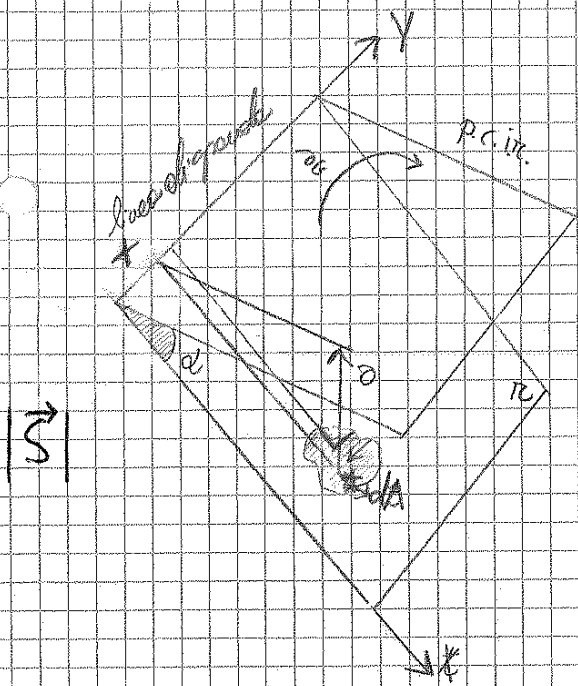
↓

Dimostra che se ho più fluidi, le superfici di separazione sono orizzontali

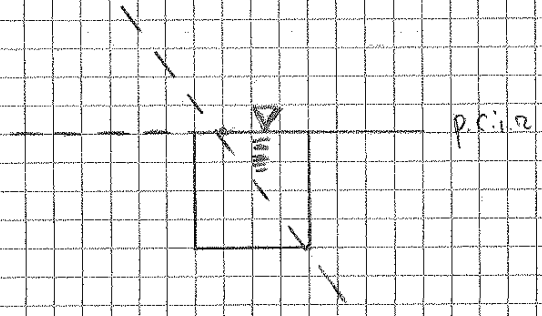
\rightarrow DEVO CONOSCERE UN PUNTO IN CUI SO LA PRESSIONE ragionamento ottenuto da prima

superficie libera che va a muoversi:





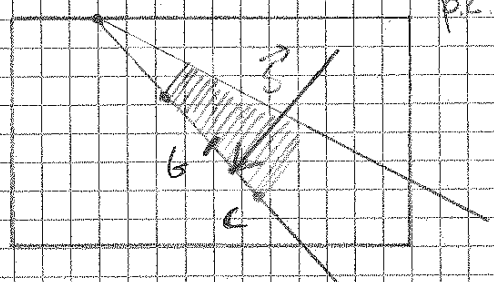
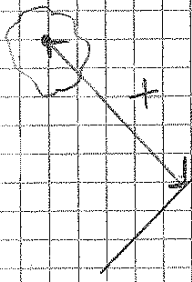
$|\vec{S}|$



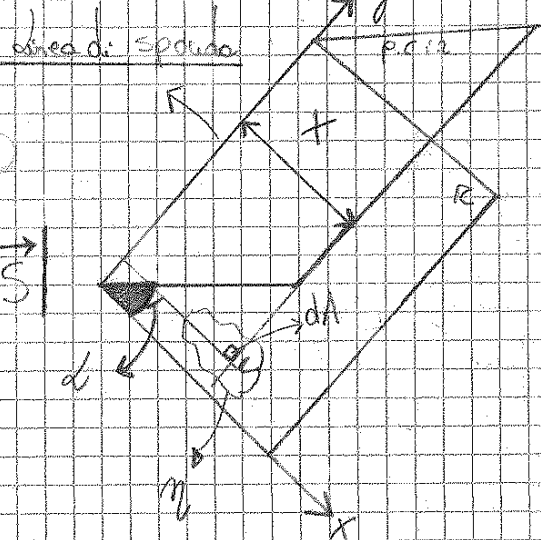
• Vogliamo sapere la spinta su una superficie piana di un oggetto qualunque

• $p \cdot dA = \gamma \cdot dA \cdot r \sin \alpha = \gamma \cdot dA$

$|\vec{S}| = \int_A X \sin \alpha \cdot \gamma \cdot dA = \gamma \sin \alpha \int_A X$



• Risultati volumi delle piane



$|\vec{S}|$

$X \cdot p \cdot dA = X \cdot X \cdot \gamma \sin \alpha \cdot dA =$

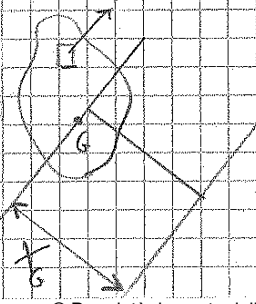
$= \int_A X^2 \gamma \sin \alpha \cdot dA = S \cdot \eta$

$\eta = \frac{\int_A X^2 \gamma \sin \alpha \cdot dA}{S}$

$\eta = \frac{\gamma \sin \alpha \int_A X^2 \cdot dA}{\gamma \sin \alpha \cdot M} = \frac{I_y}{M}$

$I_y = I_{oy} + X_G^2 \cdot A$ • ricordo la trasposizione dei momenti

• momento I_A della superficie rispetto alla linea di spinta



$I = \int_A X^2 \cdot dA$

$\gamma \cdot p \cdot dA \Rightarrow \gamma \sin \alpha \cdot X \cdot \gamma \cdot dA$

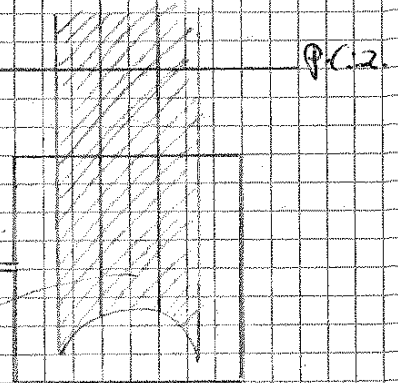
$\gamma \sin \alpha \int_A X \cdot \gamma \cdot dA = \eta \cdot S$

$\eta = \frac{\gamma \sin \alpha \cdot I_{xy}}{S} = \frac{I_{xy}}{M} \rightarrow \frac{\text{momento pl.}}{\text{momento statico}}$

$$S_z = \int_A p \cos n \hat{r} dA = \int_{A_2} p dA_2 = \int \underbrace{\gamma}_{\text{peso del fluido contenuto}} \cdot \underbrace{h}_{\text{volume prisma}} dA_2 = dA_2$$

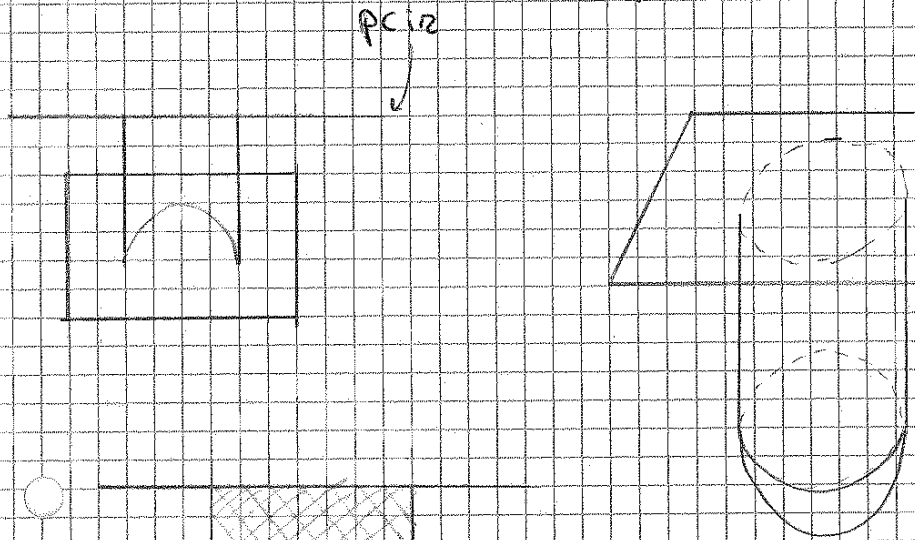
peso del fluido contenuto al di sopra della sup. curva e il p.c.i.z.

S_z è un peso specifico del volume di fluido compreso tra la sup. curva e il p.c.i.z. = $S_z = \int \gamma h dA_2$

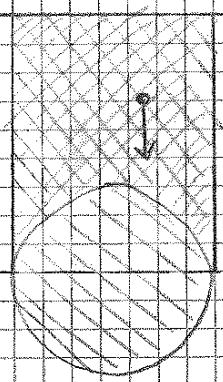


• spostamento x proiezione = volume

spinta su sup. curva = pari al peso del V del fluido che si trova sopra

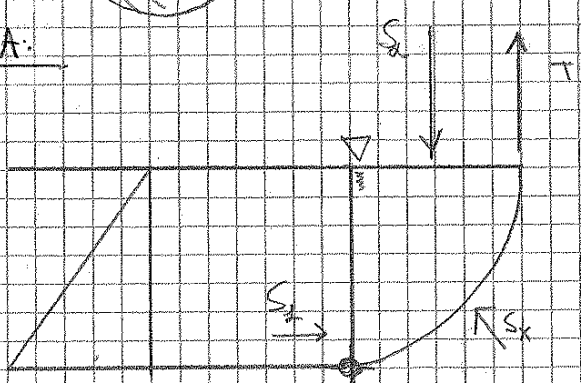


principio di Archimede:
spinta verso l'alto pari al peso del V del fluido spostato



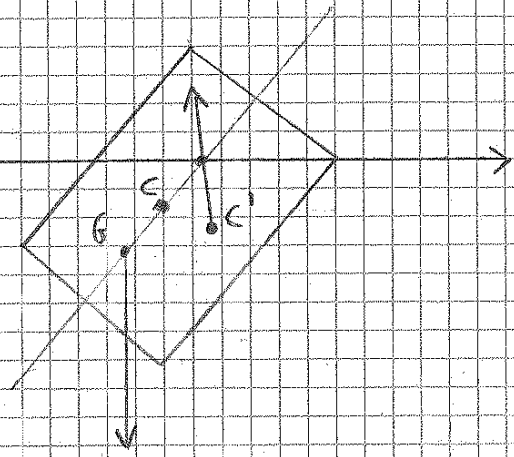
spinta su A } sovrapposizione sulla sfera
spinta su B } e pari al peso del V spostato
- - - = volume del corpo

BAGAZZOLA:



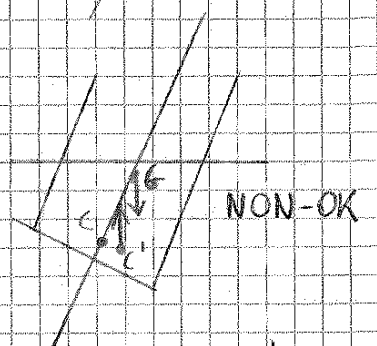
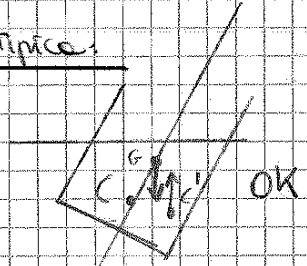
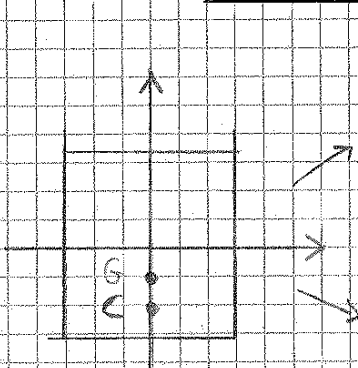
\vec{P} = forza peso

- fu quando il baricentro è più basso del centro di carena, ho sempre stabilità.



- fu quando il baricentro è più basso del centro di carena, ho sempre stabilità

• condizione tipica:



prova galleggiamento X corpo dritto

C = centro di Spinta

S_x = spinta di Archimede

M, Metacentro (prolungamento C')

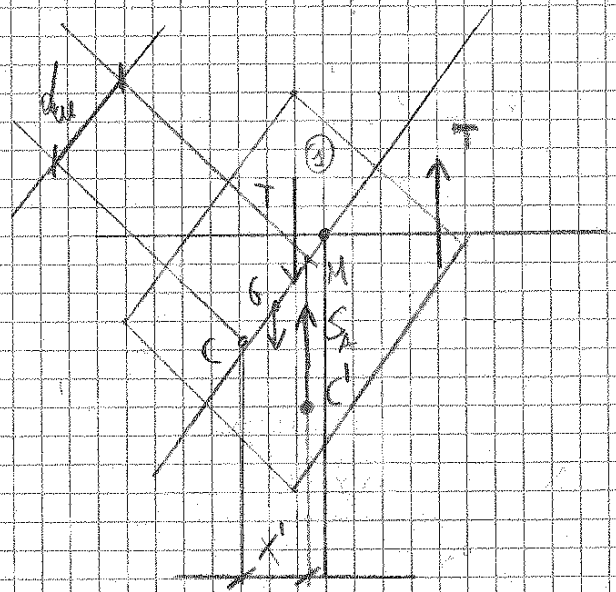
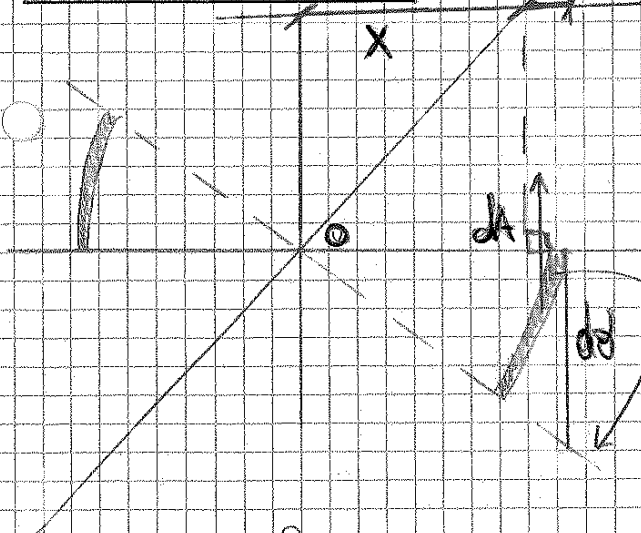
d_m = altezza METACENTRO

sta sopra xh M non sta tra C e B

EQ STABILE se $\overline{CM} > \overline{CG}$

EQ INSTABILE se $\overline{CM} < \overline{CG}$

• METODI DI CALCOLO:



- sluscia lunga X d'è lunga dA

• coppia T fa sì che C si sposti su C'

una parte s'innalza → nasce ↑ T l'altra s'abbassa → nasce ↓ T.

Questa coppia fa ruotare C

Lezione 10/10/2011

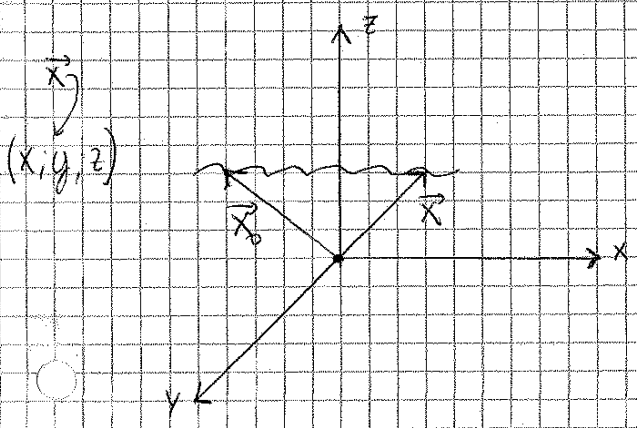
Approccio \rightarrow Lagrangiano
 \rightarrow Eulero

Derivata Euleriana

ϕ , portata

Eq. diff. continuità

Eq. integrale continuità

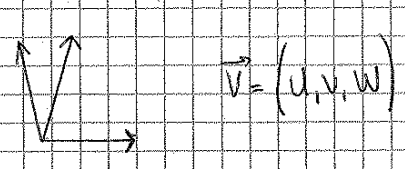


LAGRANGE: Approccio, fisso un fluido immaginato come costituito da infinite particelle di cui descrivo l'evoluzione istante per istante, con un vettore. (istante $\rightarrow t_0$)
 descrivo l'evoluzione nel tempo

$$\begin{cases} x = x(t, x_0, y_0, z_0) \\ y = y(t, x_0, y_0, z_0) \\ z = z(t, x_0, y_0, z_0) \end{cases}$$

EULERO: non si occupa della traiettoria

- 1) Perché è ben chiara cos'è una particella? (All'interno di un fluido non è ben definibile).
- 2) Proseguendo con Eulero arrivo ad equazioni complete: non interrompo le equazioni di Eulero, ma volutamente il procedimento: fisso il sistema e ne prendo un generico punto, quindi voglio sapere u, v, w e $u = u(x, y, z, t)$
 $v = v(x, y, z, t)$
 $w = w(x, y, z, t)$



dice come cambia nel tempo la velocità

• Il Lagrangiano è il metodo più specifico ma quello generalmente usato è l'Euleriano

$$\begin{cases} dx = u(x, y, z, t) dt \\ dy = v(x, y, z, t) dt \\ dz = w(x, y, z, t) dt \end{cases}$$

definendo la dx di una traiettoria

• ottengo 3 eq. differenziali del primo ordine

PARTENZA:

$$\vec{F} = m\vec{A}$$

in ogni momento le forze sono uguali alla massa per accelerazione

Accelerazione lo sovo come $\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$ variazioni di velocità in un intervallo di tempo

• Nei formalismi non sono sicuro di chi compie il movimento: se mi metto nell'approccio

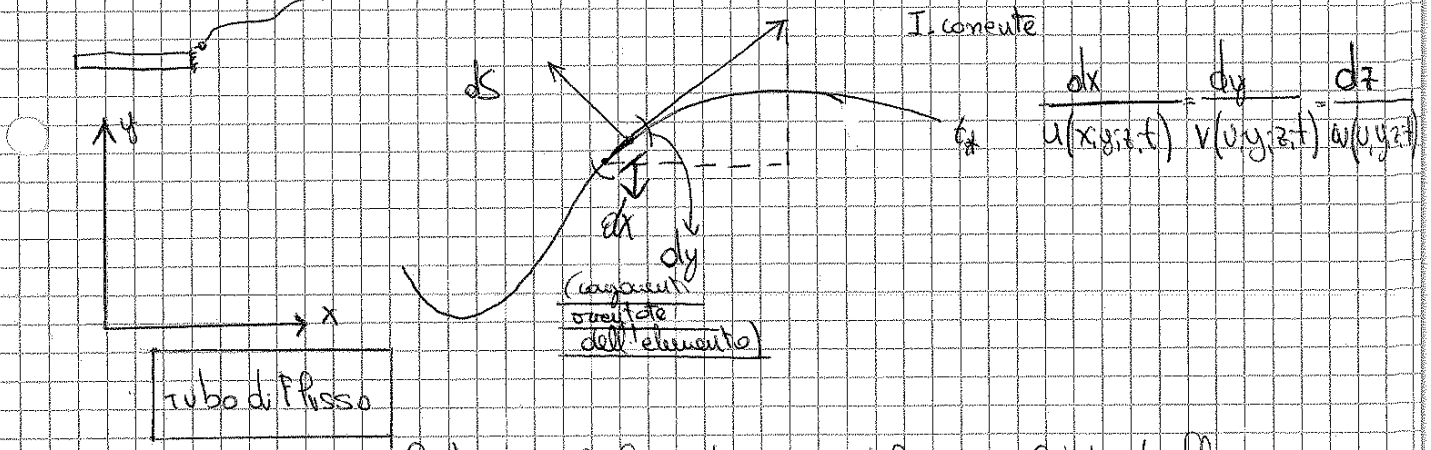
Lagrangiano uso l'ostacolo di come particella che si muove con proprio la traiettoria

Eulero: ci permette di sapere un punto fisso istante per istante (non serve la traiettoria)

$$\vec{A} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$$

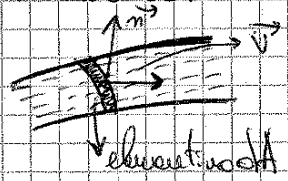
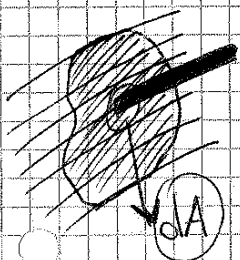
in Eulero cambia significato, perché l'ordine sarebbe attribuito alle particelle diverse.

Linee di tubo: linee descritte che sono passate per un punto



tubo di flusso

al tempo t_0 le linee di corrente definiscono il tubo di flusso
 All'interno del tubo del flusso prendo un elementino dA



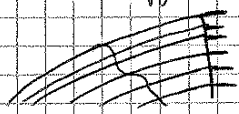
viene un vettore \vec{v}_n corrispondente a $|\vec{v}_n| = \vec{v} \cdot \vec{n}$

$dQ = v_n dA$

portata infinitesima

volume che passa di fluido (m^3/s)

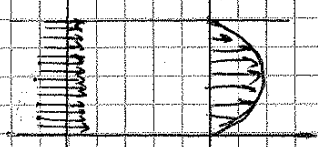
applico il vettore opposto dovuto $\rightarrow dQ = \vec{v} \cdot \vec{n} \cdot dA$ (superficie orientata)



$Q = \int_A \vec{v} \cdot \vec{n} \cdot dA = \int_A v_n dA$
 integrale usato allo stesso modo Smerale

v_s velocità media = $\frac{Q}{A}$

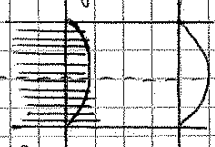
velocità media (colore rosso) per una determinata portata



Moto Variabile (variabile) \rightarrow molto complicato

Quando il campo del moto dipende dallo spazio e non dal tempo \rightarrow Moto permanente

$\frac{\partial}{\partial t} = 0$



• moto uniforme: non cambia lungo la condotta

• moto piano $\left\{ \begin{array}{l} v = u(x, y, t) \\ v = v(x, y, t) \\ w = 0 \end{array} \right.$ 4 principi della fisica

• principio di conservazione della massa: se prendo un qualunque volume, la variazione ha entrata e uscita è uguale alla massa iniziale.

$$\int_V \rho \vec{v} \cdot \vec{n} \cdot dA = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

• $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \rightarrow$ poco energia per il moto permanente $\rho = \text{cost}$

$$\int_V \rho \vec{v} \cdot \vec{n} \cdot dA = 0$$

\downarrow
 v_x

$$M_e = M_u \Rightarrow Q_e = Q_u$$

CORRENTI

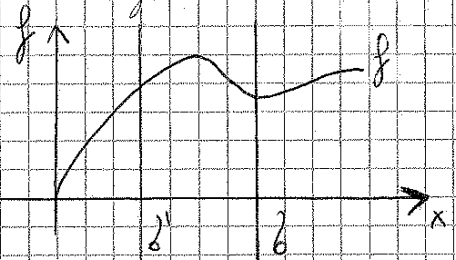
• Di tutti i moti dei fluidi significa che ci occupiamo di quelle in una direzione precisa.
 • posso individuare una coordinata curvilinea s lungo la corrente, che è utile per definire alcune misure come:

• $Q = Q(s, t)$
 $v = v(s, t)$
 $\rho = \rho(s, t)$

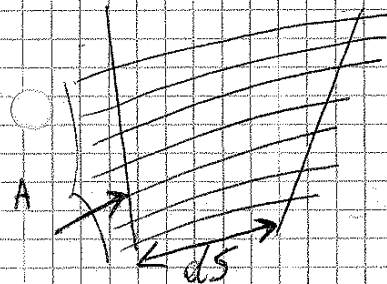
$A_t = A_t(s, t)$

• tutte le funzioni con la stessa area dallo stesso punto, con l'integrale si rivelano le informazioni

• da derivate esatte o approssimate, l'integrale ha un'oscillazione



$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{u}) = 0$$



$$1) \int \rho v ds$$

$$2) \int \left(\rho v + \frac{\partial \rho v}{\partial s} ds \right) dt$$

$$2) - 1) \Rightarrow \int \frac{\partial \rho v}{\partial s} ds dt$$

• $\rho A ds$: nel tempo può cambiare
 • $\rho v ds$

$$\int \frac{\partial \rho v}{\partial t} ds dt$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial s} + \frac{\partial \rho A v}{\partial t} = 0$$

moto permanente: scegliere $\frac{\partial}{\partial t} = 0 \rightarrow \frac{\partial \rho v}{\partial s} = 0$

$\rho = \text{cost.} / \text{unif}$ fluido incompressibile

$$\frac{\partial \rho}{\partial s} + \frac{\partial A v}{\partial t} = 0$$

• moto permanente $\frac{dQ}{ds} = 0$ $Q = \text{costante}$ portata costante

Nel caso della statica dei fluidi: ϕ è uguale alla pressione, mentre $\vec{v} = 0$ e otteniamo l'equazione vista nelle lezioni precedenti.

Queste 3 equazioni sono a sistema. Le incognite che dobbiamo trovare sono: $p, u, v, w, \phi_{xx}, \phi_{yy}, \phi_{zz}, \phi_{xy}, \phi_{xz}, \phi_{yz}$ (10 variabili)

Nella prima equazione ci sono 3 equazioni e 3 variabili

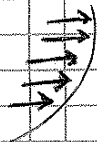
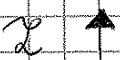
Nella seconda solo 1

Nella terza solo 1

Abbiamo 10 incognite e 3 equazioni. Come si risolve?

PIANO REOLOGICO:

stato di tensione:



gradiente spaziale di velocità:

il liquido sopra va più veloce che sotto

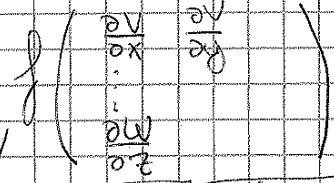
velocità di deformazione
costituita da gradienti spaziali di velocità

Ci che manca nelle nostre equazioni è la relazione del piano reologico cioè il legame tra il gradiente spaziale di velocità e lo stato di tensione

piano reologico



stato tensionale

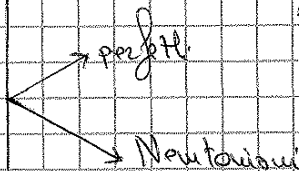
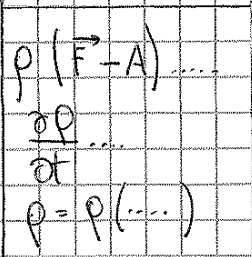


gradiente spaziale di velocità

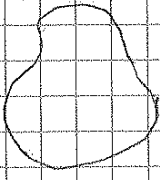
funzione dipendente dai tipi di fluidi considerati

• quelli che noi troviamo sono fluidi

- perfetti
- Newtoniani



Supponiamo di riuscire a risolvere l'equazione



u, v, w, p, ρ

← venghi a conoscenza di tutto ciò in ogni istante e in ogni punto → troppe informazioni da leggere e cogliere

Per descrivere un decimetro cubo di fluido; devo sapere u, v, w, p, ρ di tutti i suoi punti (10^3) per ogni lato del cubetto.

Per evitare di avere così tante informazioni che mi complicano il problema utilizzo l'integrale → serve per buttare via molte informazioni

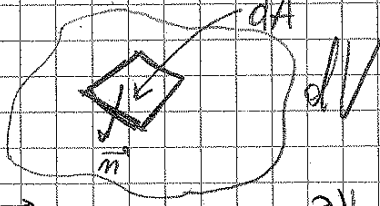
$$\int \rho(\vec{F} - \vec{A}) = \int \rho \vec{g} dV$$

Proviamo a fare l'integrale direttamente sull'equazione ridotta dalla densità

$$\int_V \rho \vec{F} dV - \int_V \rho \vec{A} dV = \int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \rho}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial \rho}{\partial z} \vec{e}_z \right) dV$$

2) Teorema di Green

$$\int_V \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{e}_z \right) dV = - \int_A \left(\phi \cos n_x \vec{e}_x + \phi \cos n_y \vec{e}_y + \phi \cos n_z \vec{e}_z \right) dA$$



$$\vec{e}_z = - \int_A \phi \vec{n} dA$$

$$= \phi \vec{n}$$

• descrive come si comporta la superficie del fluido

$$\rho \vec{A} = \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho v \frac{\partial v}{\partial x} + \rho w \frac{\partial v}{\partial y} + \rho w \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\rho v \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial(\rho v^2)}{\partial x} - v \frac{\partial(\rho v)}{\partial x}$$


← regola di derivazione del prodotto

$$\rho \vec{A} = \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \left[\frac{\partial(\rho v^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v w)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v w)}{\partial z} \right] - v \left[\frac{\partial(\rho v)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] = \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \left[\frac{\partial(\rho v^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v w)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v w)}{\partial z} \right] - v \text{div}(\rho \vec{v})$$

$$\text{div}(\rho \vec{v}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0 \rightarrow \text{div}(\rho \vec{v}) = - \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\rho \vec{A} = \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \left[\frac{\partial(\rho v^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v w)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v w)}{\partial z} \right]$$

NOTO PERMANENTE : è il moto su cui si basa il corso per questi esercizi. Perché ci riconduce a pensare soltanto le forze d'azione

3)  → sono passato all'equazione covada (int. superficie, volume regione, moto permanente → condizioni per rendere covada l'equazione globale) condizioni che useremo nel corso.

EQUAZIONE CAPOSTIPITE

(due mobilità)

$$\rho(\vec{F}-\vec{A}) = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

↓ perfett.
Newtoniani
↓ non-newtoniani

elementi solidi
ovvero tutti

ultimo integrale

$$\vec{p} + \vec{F}_c + \vec{I} + \vec{M}_e - \vec{M}_a = 0$$

→ condizione particolare $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

FLUIDI PERFETTI : Euleroiani → Sono suggeriti da Eulero come fluidi che non hanno tensioni tangenziali (ovvero non hanno attriti interni) alle deformazioni. VISCOSITÀ = 0

Questa è un modello matematico perfettamente coincidente con la realtà fisica. Il modello ben fatto è: bilancia conetto tra strumenti approssimati che costituiscono il grosso del conetto.

Ipotesi covada per approssimare: "aria" incompressibile → $\rho = \text{cost}$

$$\vec{a} \rightarrow \phi_{,j} \quad (i \neq j) = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}$$

situazione dove non ci sono attriti interni (o attriti tangenziali) → componente viscolosa

$$\rho(\vec{F}-\vec{A}) = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

fluidi perfetti

$$\rho(\vec{F}-\vec{A}) = \text{grad}(p)$$

Il risultato fisico comemo è il teorema di Bernoulli : vale sotto 4 ipotesi:

- 1) fluido perfetto
- 2) Si muove nel campo della gravità, l'unica forza di massa è la forza peso
- 3) $\vec{F} = g \text{ grad}(z)$
- 4) $\rho = \text{cost}$ e uniforme → fluido incompressibile

$$u \frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{u^2}{2} \right)$$

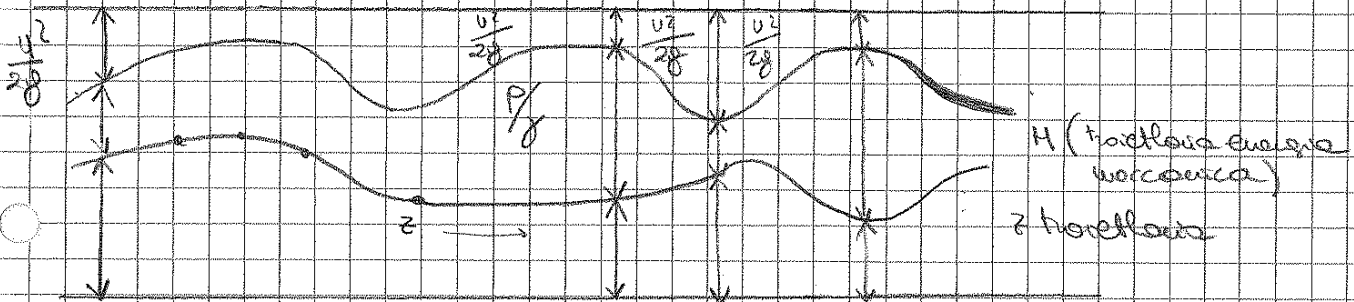
$$\frac{\partial}{\partial s} \left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} \right) = \frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} \right) = 0 ;$$

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} = \text{cost}$$

H

• l'energia meccanica dell'interno della particella è costante (il globale della particella in energia è costante)



3 elementi possono variare ma la somma dei 3 rimane costante:

• sono 3 forme di energia meccanica che possono essere inter-attive

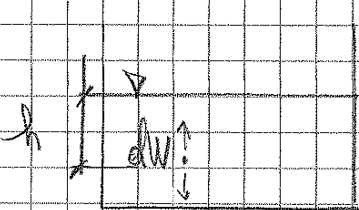
→ potenziali rispetto ad un piano (z=0)

$$mgz \Rightarrow \frac{mgz}{mg} = z \rightarrow z = \text{energia potenziale per unità di peso}$$

$$\frac{\frac{1}{2} m v^2}{mg} = \frac{u^2}{2g}$$

pressione interna al fluido ed il movimento di particelle

$$p = \gamma h$$



rispetto al sistema che ha risultanti uguali a zero

→ se lo spostato in superficie non cambia lavoro

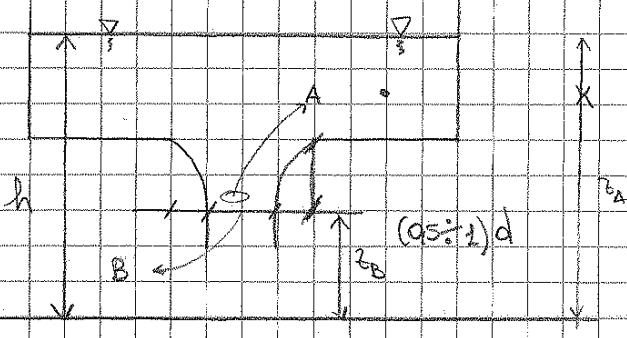
• il fluido ha guadagnato energia potenziale con la uscita, a dispetto delle perdite, perché il sistema è in equilibrio con le sue risultanti, oppure perché le forze applicative sono con risultante nulla.

$$\text{gratificò con: } \frac{\rho dW \gamma h}{\rho dW g} = h ; \quad p = \gamma h \Rightarrow \frac{p}{\gamma} = \frac{\gamma \cdot h}{A} = h$$

CORRENTI GRADUALMENTE VARIATE:

conservazione dell'energia meccanica sono costanti in cui si possono fare i bilanci di energia per loro costanti ma le correnti sono quasi rettilinee

$\rho = \text{cost}$ esclude elasticità



$$z_A + \frac{\rho}{\gamma} \frac{V_A^2}{2} + \frac{V_A^2}{2g} = z_B + \frac{\rho}{\gamma} \frac{V_B^2}{2} + \frac{V_B^2}{2g}$$

$$\left(z_A + \frac{\rho}{\gamma} \frac{V_A^2}{2} \right) - \frac{V_B^2}{2g} = \frac{V_B^2}{2g}$$

$$V_B = \sqrt{2g \left[h_s + (0.5 \pm 1)d \right]}$$

piccola velocità delle sezioni

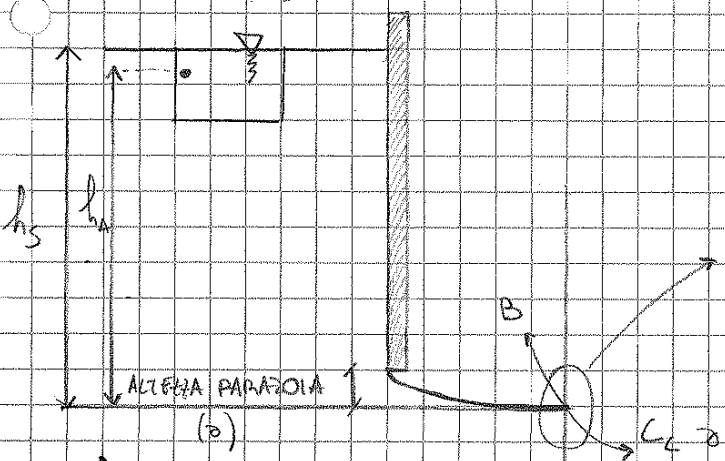
$$Q = A_c \cdot V_B = A_c \cdot \sqrt{2g \left[h_s + (0.5 \pm 1)d \right]}$$

Area contratto $\rightarrow C_c \approx 0.999$

coefficiente di contrazione

poi si eguagliano l'area del foro

$$A = \pi \frac{d^2}{4} \Rightarrow \frac{A_c}{A} = 0.96$$



$Q =$

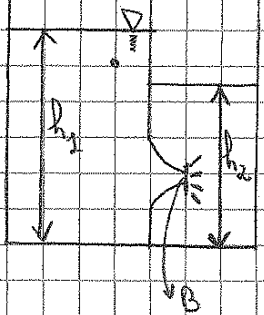
$$V_B = \sqrt{2g(h_A - h_B)} = \sqrt{2g(h_s - c \cdot a)}$$

$$Q = c \cdot a \cdot L \cdot \sqrt{2g \cdot (h_s - c \cdot a)}$$

coefficiente

lunghezza del passaggio

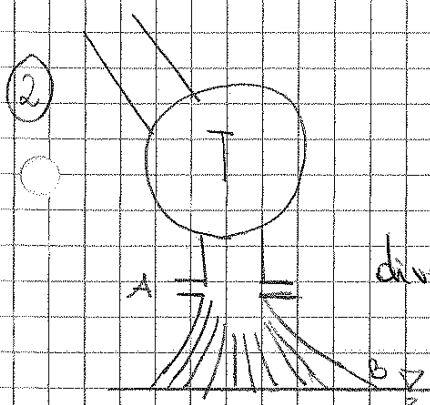
collegamento tra serbatoi



$$V_B = \sqrt{2g(h_1 - h_2)}$$

$$Q = C_c \cdot \frac{\pi d^2}{4} \cdot \sqrt{2g(h_1 - h_2)}$$

② $H_A \approx H_B = 0 \rightarrow \frac{\rho}{2g} v_B^2 + z$



divergente di accompagnamento

Grande al divergente verso il sottopiede energia all'acqua. Il divergente prende il nome di diffusore:

$$H_A = H_B = z + \frac{v_0^2}{2g}$$

Attraverso il diffusore, genera una depressione in corrispondenza della sezione A.

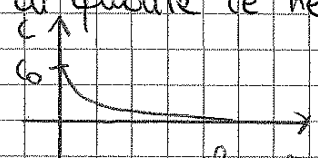
$$z_A + \frac{v_A^2}{2g} + d = z_B + \frac{v_B^2}{2g}$$

$d < 0$

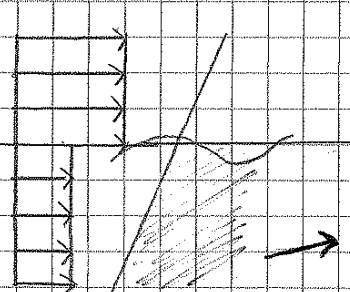
Instabilità di Kelvin-Helmholtz:

Modello: le cose deperiscono in funzione di quanto ce ne sono nuove

$$\frac{dc}{dt} = -kc \Rightarrow c = c_0 e^{-kt}$$



soluzione stabile: ritorno alle condizioni di partenza. Le soluzioni simili sono quelle instabili



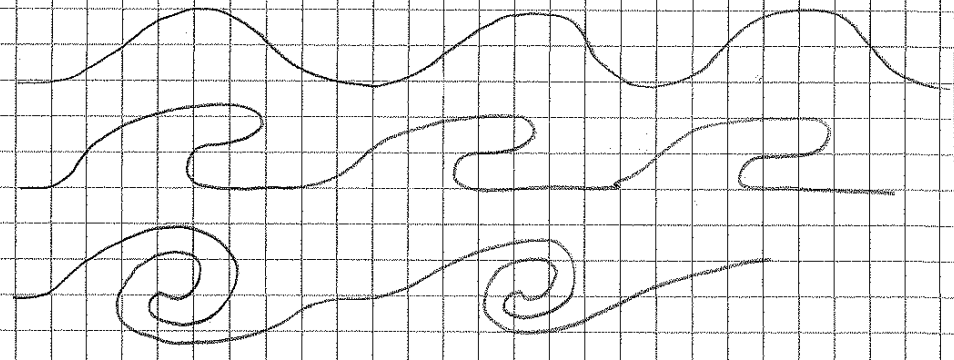
- rotolo di due fluidi
- fronte tra i due fluidi

→ portate costanti, diminuisce la velocità → cresce la pressione x il teorema di Bernoulli

- Il fenomeno di ondulosità del fronte continua ad essere accentuato

diminuisce la pressione
si induce la rotazione e nasce il termine cinetico

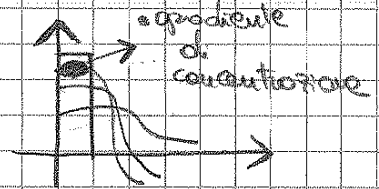
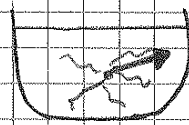
• instabile di Kelvin-Helmholtz



div $\vec{u} = 0$ campo di vito solenoidale

$\nabla \cdot \vec{0} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$: operatore lineare in quanto somma di gradienti
 termine differenziale: il fenomeno delle linee
 differenziale minimizza i gradienti spaziali

Esempio: goccia d'inchiostro nel bicchiere



$\vec{P} + \vec{F}_c + \vec{I} + \vec{M}_0 - \vec{M}_u$

$\int_A \vec{\rho} dA \rightarrow \vec{\pi} = \int p \vec{n} dA \quad \mu \int \nabla^2 \vec{u} dV \dots$

$= -\mu \int_A \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos n_x + \frac{\partial u}{\partial y} \cos n_y + \frac{\partial u}{\partial z} \cos n_z \right) dA = -\mu \int_A \frac{\partial u}{\partial n} dA = -\vec{T}$

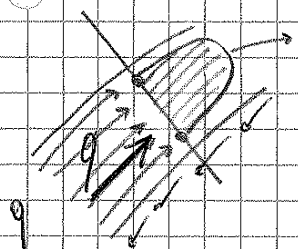
considero la normale entrante positiva per flussi vorticosi

risultante delle forze tangenziali dovute alle viscosità → e presenza di un gradiente delle velocità

$\vec{\pi} - \vec{T} = \int_A p \vec{n} dA - \mu \int_A \frac{\partial u}{\partial n} dA$

$\int_A p \vec{n} dA$

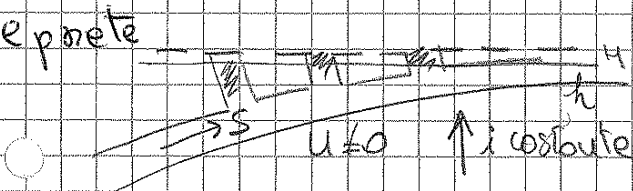
Se μ è in funzione di θ (presenza del gradiente di temperatura) va inserita all'interno dell'integrale



profilo di velocità; Esiste un gradiente spaziale delle velocità lungo la sezione (parete) $\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\text{parete}} \neq 0$

$T_{\text{parete}} \neq 0 \Rightarrow T \neq 0$

Le tensioni ostacolano il moto del fluido. Vi è una dissipazione di energia delle correnti all'interno della parete dovute agli attriti generati tra fluido e parete



$i = \text{pendenza molare} = -\frac{dH}{ds}$ i.e. un certo tratto ds , perdo energia dH

$\Omega(\text{sezione}) = \text{costante / unif.}$

$i(s) = -\frac{dH}{ds}$

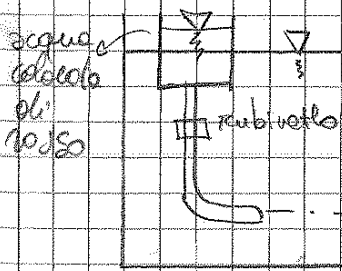
$H(s) = H_0 - \int_0^s i(s) ds$

Lezione

25/10/2011

Moto laminare. Esperimento di Reynolds

consideriamo un serbatoio



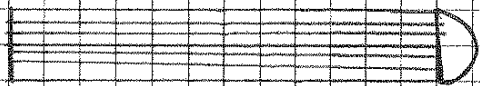
tubo ad un'angolo retto

rubinetto regolatore di portata

Apri il rubinetto a valle. Successivamente apri il rubinetto d'acqua colorata: si inizia a vedere nel tubo ad imbocco colorato una traiettoria "filiforme" d'acqua colorata.

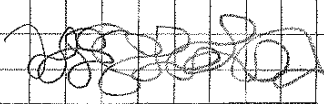
All'interno del tubo

MOTO LAMINARE:



• traiettorie rettilinee e parallele → lamine sovrapposte in successione

Aumentando la portata del rubinetto a valle il piccolo fluido inizia ad oscillare finché riesce ad occupare tutta la sezione. Da quel momento, tutto il tubo inizia a contenere acqua rosata → moto turbolento



il moto turbolento prevede le traiettorie più complicate, ottenute aumentando progressivamente la portata del fluido

MOTO LAMINARE:

$$Re = \frac{\rho U L}{\mu} \rightarrow \text{no di Reynolds (adimensionato)}$$

$Re < Re_{crit.} \rightarrow$ no di Reynolds critico \Rightarrow moto laminare

$Re > Re_{crit.} \rightarrow$ moto turbolento

ρ, μ proprietà del fluido

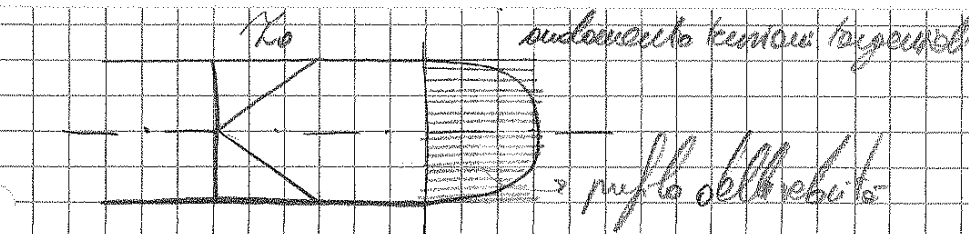
U, L = definiscono le sole geometrie del problema

Il numero di Reynolds rappresenta la combinazione fra le 4 grandezze che lo

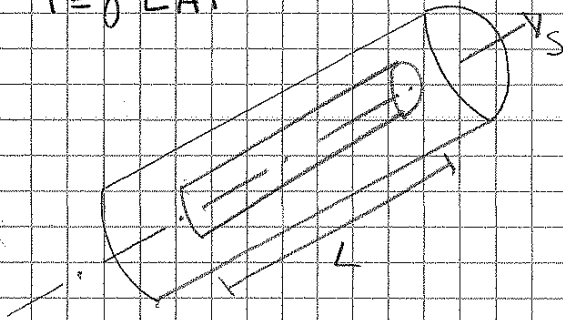
caratterizzano. Significato fisico: rapporto tra le forze d'inerzia e le forze viscose

$Re \propto \frac{F_{in}}{F_{visc}}$

Esempio: $\mu \rightarrow L \rightarrow \frac{1}{\rho}$



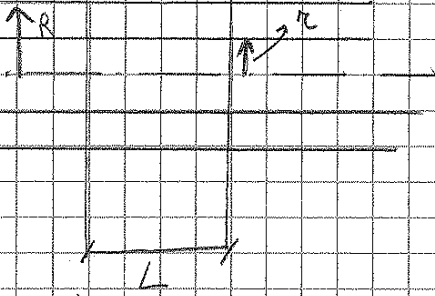
$$T = \gamma L A i$$



$$T(r) = \gamma L \pi r^2 i$$

$$\vec{T} = M \int_A \frac{\partial \vec{u}}{\partial n} dA$$

= risultato delle forze tangenziali agenti sul contorno



$$T = M \frac{du}{dn} \cdot 2\pi r L = -M \frac{du}{dr} 2\pi r L$$

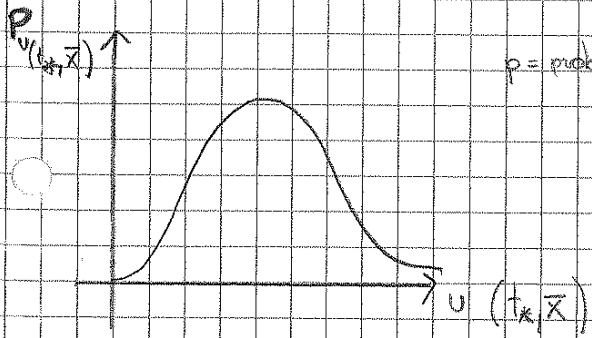
$$\gamma L \pi r^2 i = -M \frac{du}{dr} 2\pi r L$$

$$\frac{du}{dr} = -\frac{\gamma r i}{2M} \Rightarrow u(r) = -\frac{\gamma r^2}{4M} + \text{cost}$$

$$U = \frac{\gamma i}{4M} (R^2 - r^2) = \frac{\gamma i}{4M} \left(\frac{D^2}{4} - r^2 \right); \quad U_{\text{max}} = \frac{\gamma i D^2}{16M}; \quad T = \frac{\gamma i D^2}{32M}$$

$$q = T \cdot A = T \cdot \pi \frac{D^2}{4} = \frac{\gamma i D^4}{128M} \Rightarrow i = \frac{128 M q}{\gamma D^4}$$

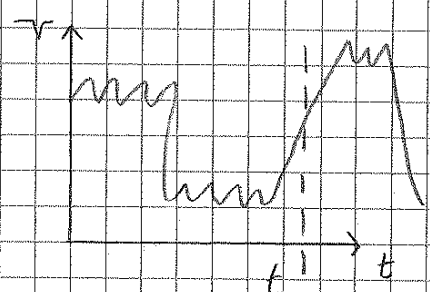
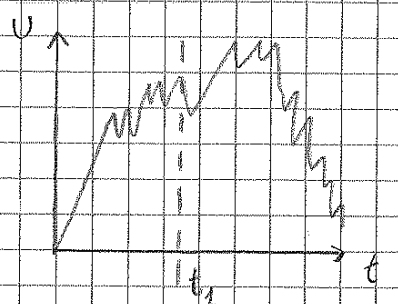
pendente motrice: energia che devo fornire alla corrente per spostare di un'unità di lunghezza



p = probability

$$\int_{-\infty}^{\infty} u P_u du = \langle U \rangle \quad \text{MEDIA D'INSIEME}$$

$U_1(t_1, \vec{x}_1)$
 $V_1(t_1, \vec{x}_1)$

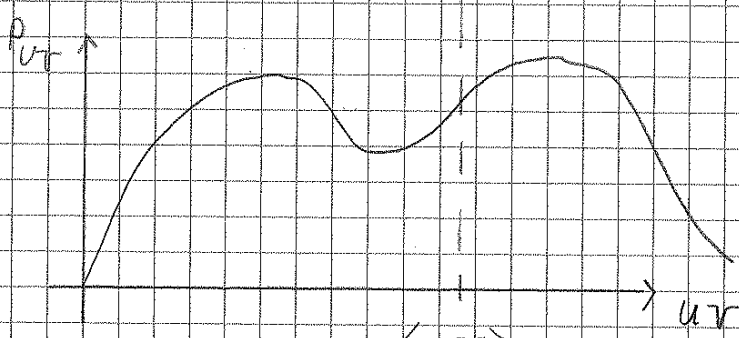


Come varia nel tempo u nel punto x_1

Come varia v nel tempo nel punto x_2

• Posso farlo infinite volte, avrò delle coppie

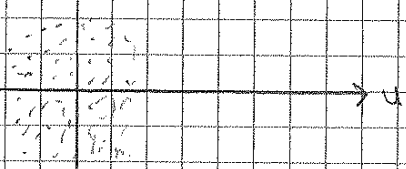
$\{u_1, v_1\}, \{u_2, v_2\}, \dots, \{u_n, v_n\}$
 $u_1, v_1 \quad u_2, v_2 \quad u_n, v_n$



$\langle uv \rangle$
correlazione

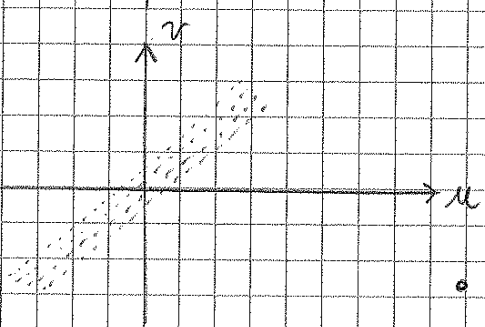
u e v sono sconnesse, in questo caso

$$\langle uv \rangle \cong 0$$



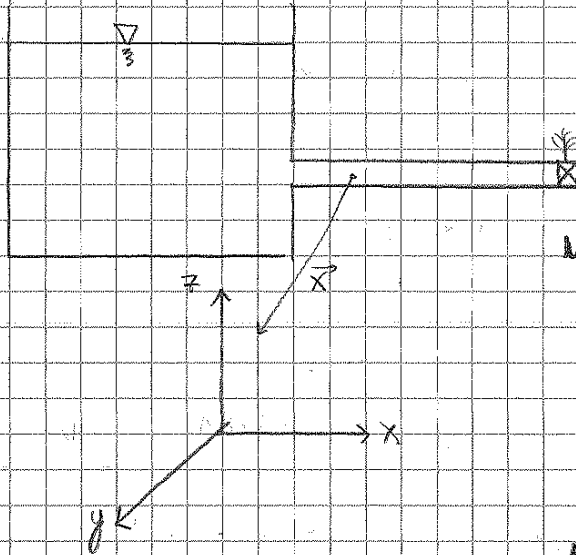
u e v sono correlate, c'è una relazione

$$\langle uv \rangle \neq 0$$

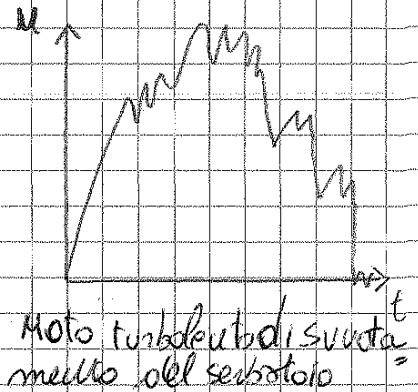


• mi permette di dire se una variabile è più o meno correlata con un'altra

Kolmogorov:



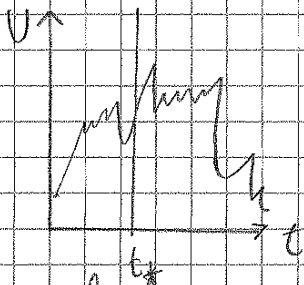
• in quel punto esiste un certo andamento



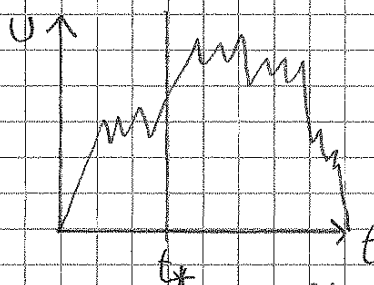
È come se in ogni punto, in ogni istante qualcuno stesse lanciando un DADO → CASUALITÀ → STOCASTICO

È un campo che cambia nello spazio e nel tempo. È così complesso che mi conviene osservarlo in maniera casuale.

→ Faccio tante ripetizioni del mio processo.



$$u_1(t_*, \vec{x})$$



$$u_2(t_*, \vec{x})$$

Lo faccio 100 volte → Ho la popolazione delle velocità al tempo t_*

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}$$

$\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ non ho moto verso

$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ perché la velocità non cambia in quel verso

$v, w = 0$ sono nulle queste componenti della velocità

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{d^2 u}{dy^2}$$

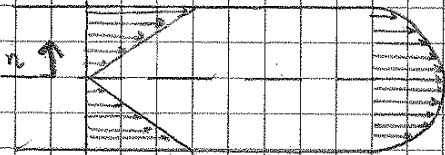
L'eq. di Navier-Stokes diventa: $\rho \left(\frac{\partial}{\partial x} (-g^z) \right) = \frac{\partial p}{\partial x} - \mu \frac{d^2 u}{dy^2}$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{p}{\rho} + \frac{z}{\gamma} \right] = \frac{\mu}{\rho} \frac{d^2 u}{dy^2}$$

MOTO LAMINARE

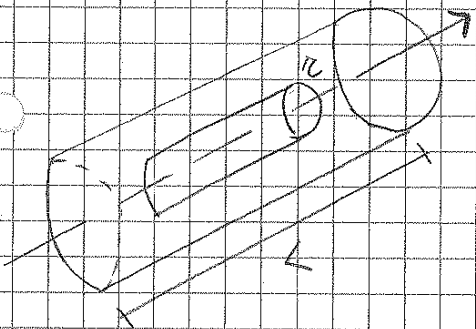
- Tutti i moti all'interno dei mezzi porosi - Acqui feni e giacimenti petroliferi
- Lubrificatore
- Sistema circolatorio (cerello il cuore)

Andamento delle tensioni e velocità



$$T = \gamma L A i$$

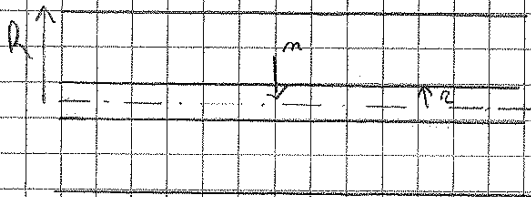
Nel caso di un cilindro



$$T(r) = \gamma L \pi r^2 i$$

$$T = \mu \int_A \frac{\partial u}{\partial r} dA$$

Tutte le infinite aree dA vedono lo stesso gradiente di velocità



scrivo quindi: $T = \mu \frac{dv}{dr} 2\pi r L = -\mu \frac{du}{dr} 2\pi r L$

$$\gamma L \pi r^2 i = -\mu \frac{du}{dr} 2\pi r L$$

$$\frac{du}{dr} = \frac{-r \gamma i}{2\mu} \Rightarrow u(r) = -\frac{\gamma r^2 i}{4\mu} + \text{cost}$$

$$u = \frac{\gamma i}{4\mu} (R^2 - r^2) = \frac{\gamma i}{4\mu} \left(\frac{D^2}{4} - r^2 \right) \quad \leftarrow \text{profilo di velocità}$$

$$u_{\text{max}} = \frac{\gamma i D^2}{16\mu} ; \quad v = \frac{\gamma i D^2}{32\mu} \quad \text{velocità media}$$

$$Q = v \cdot A = v \cdot \pi \cdot \frac{D^2}{4} ; \quad Q = \frac{\gamma i D^4}{128\mu} \Rightarrow i = \frac{128 \mu Q}{\gamma D^4}$$

OTTENGO L'EQUAZIONE DI REYNOLDS o DI NAVIER-STOKES MEDIATA

$$\textcircled{b} \langle (V_j + U_j) \frac{\partial (V_i + U_i)}{\partial x_j} \rangle = \langle V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \rangle + \langle U_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \rangle + \langle V_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \rangle$$

$$\textcircled{*} \langle U_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \rangle = \langle \frac{\partial U_i U_j}{\partial x_j} - U_i \frac{\partial U_j}{\partial x_j} \rangle = \langle \frac{\partial U_i U_j}{\partial x_j} \rangle - \frac{\partial}{\partial x_j} \langle U_i U_j \rangle$$

questo è il prodotto di 2 cose che danno media zero ma non è detto che il prodotto dia zero stesso, media zero

quindi, volendo studiare il moto medio, esso dipende comunque dalla turbolenza e in particolare dalla covarianza

EQ. REYNOLDS: $\frac{\partial V_i}{\partial t} + V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle U_i U_j \rangle}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_j \partial x_j} - \int_{\Omega} g_{ij}$

$$\frac{dV_i}{dt} = -\frac{\partial \langle V_i U_j \rangle}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_j \partial x_j} - g_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_i} \langle T_{ij} \rangle$$

$$\langle T_{ij} \rangle = -\frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right] + \rho \langle U_i U_j \rangle$$

il termine $\rho \langle U_i U_j \rangle$ prende il nome di, tensore di Reynolds (matrice delle tensioni di Reynolds)

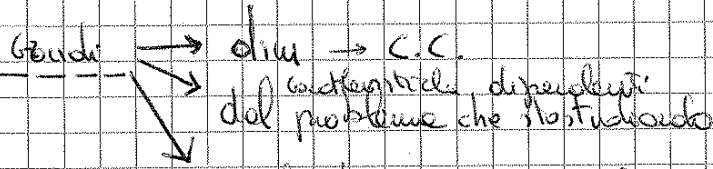
rieplogo a: $\frac{\partial V_i}{\partial t}$
 b: $V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \langle U_i U_j \rangle$ → termine completo

usciamo dalle tensioni tangenziali, che vanno a variare la velocità delle particelle vicine; questo origina alle tensioni di Reynolds → più correttamente nome il tensore di Reynolds, che è possibile grazie alla covarianza = 0 (lo chiesto nel termine precedente che genera correlazioni / tensioni).

$$\rho \begin{pmatrix} \langle U_1 U_1 \rangle & \langle U_1 U_2 \rangle & \langle U_1 U_3 \rangle \\ \langle U_2 U_1 \rangle & \langle U_2 U_2 \rangle & \langle U_2 U_3 \rangle \\ \langle U_3 U_1 \rangle & \langle U_3 U_2 \rangle & \langle U_3 U_3 \rangle \end{pmatrix}$$

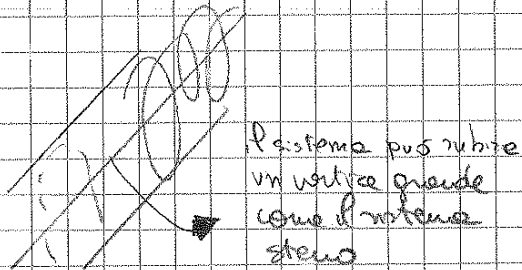
$\uparrow U_j$

• ricavo le tensioni di Reynolds con un elemento che viene aggiunto all'equazione e se danno contributo negativo, nell'equazione ne abbiamo un contributo positivo



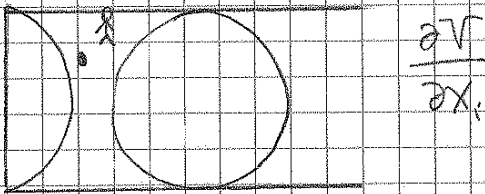
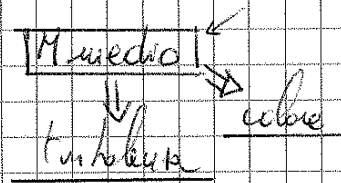
quando che consumano ~~meno~~ ^{energia} perché si muovono, l'energia non può muoverli la presenza del vortice medio.

• avere energia → area in vortice medio



• sono che c'è un corrispettivo piano di energia (legato alle fluttuazioni)

• avere energia → area in vortice medio



• esempio come: i vortici grossi / piccoli sono "spinti" come un uovo sulla terra: sono volti coprire che sia "ferma" x.b. il problema è molto legato al tipo grande

Tensore di debito di Deformazione:

indica la velocità con cui si deforma il sistema di particelle.

$$\mu \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right)$$

Il sistema di riferimento su cui avvengono le operazioni fisiche (esempio quello in cui vive un uovo) è quello di grande rotto: ovvero rotato

DIA CONJUGAZIONE

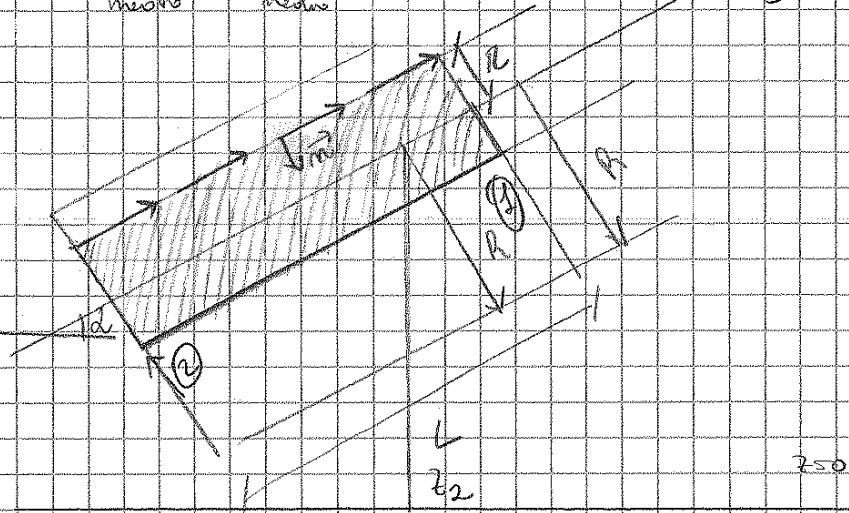
$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial v}{\partial x_2} \\ \frac{\partial v}{\partial x_1} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

EFFETTO DEL VORTEX STRETCHING: è un caso in cui la turbolenza prende energia dal vortice medio.

- nel vortex stretching avviene un prelievo non-viscoso: La vita dei vortici grandi, non dipende dalla viscosità
- Tutti i vortici medi hanno la caratteristica di universalità, studiabili con tutto ^{non} una condizione universale che ci togli le condizioni d'entrata.

$$\vec{P} + \vec{F}_c + \vec{I} + \vec{M} + \int_A \rho \vec{U} \vec{v}_n \gamma dA = 0$$

\downarrow medio \downarrow medio \rightarrow medio \rightarrow S



-6

$$-\gamma \pi r^2 L \sin \alpha = -\gamma \pi r^2 \frac{z_2 - z_1}{L} = -\gamma \pi r^2 (z_2 - z_1) = \gamma \pi r^2 (z_1 - z_2)$$

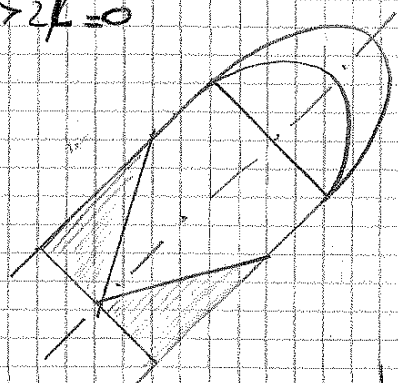
$$\pi r^2 (p_1 - p_2) + \mu \int_A \frac{dv}{dr} dA = \pi r^2 (p_2 - p_1) + \mu \frac{dv}{dr} 2\pi r L$$

$$\gamma \pi r^2 (z_1 - z_2) + \pi r^2 (p_1 - p_2) + \mu \frac{dv}{dr} 2\pi r L + \rho \langle u v \rangle 2\pi r L = 0$$

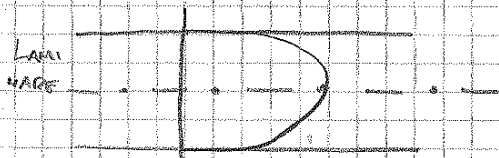
$$\gamma r L + \mu \frac{dv}{dr} 2r + \rho \langle u v \rangle 2r = 0$$

$$\gamma \frac{r}{\rho} = -\mu \frac{dv}{dr} - \rho \langle u v \rangle$$

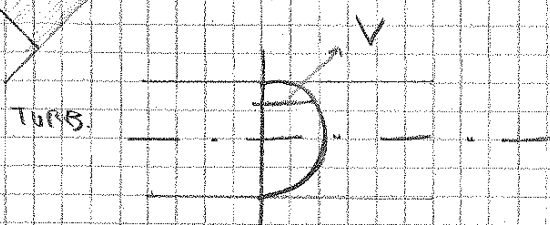
$$z = z(r)$$



$z_0 = \gamma r \rightarrow$ *raggio idraulico*



Turbolento



• *Ipotesi* → *cont.*
 → *conelotae*

- Equazioni cont. media
- Eq. moto medio
- Momenti
- Corrente vortici
- Eq. globale media
- Momenti alchiche

(singola)
 L U A
 N ρ V
 T
 M
 P

Andre guardare *up* & *down*

→ Sistemi interconnessi

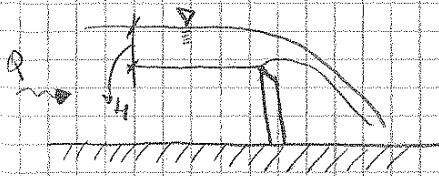
• nella misura dei *torchi*, nella *prospete dei con*, conviene non usare le *relte* *quadrere* *unita* di *curvura* ma impostare U, P, μ come *referimento*

Notro

Extra

L, T, M *fund*
 Q_1, Q_2, Q_3 *deriv.*

Q_1, Q_2, Q_3 *fund*
 L, T, M *deriv*



Abbiamo scoperto che la viscosità conta quando sono in presenza di una parete, inoltre se il numero di Reynolds è abbastanza basso possiamo trascurare la viscosità

$$Q = f(H, L, g)$$

↳ cono dello stomato

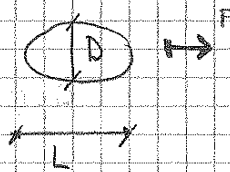
$$\frac{Q}{H^{5/2} g^{1/2}} = \alpha \frac{L}{H}$$

→ $Q = \alpha L \sqrt{g} H$

• Esempio



devo scegliere la forza portante da cosa dipende la forza



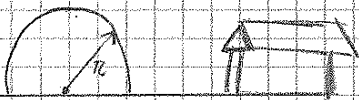
$$F = f(D, L, \rho, \mu)$$

(L, T, M) ρ, μ, D
 • mi mette nella condizione di non avere molti calcoli

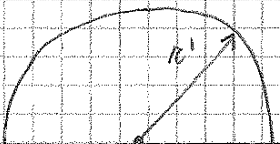
$$\frac{F}{\rho \mu D^2} = f_2 \left(\frac{L}{D}, \frac{\mu}{\rho U D} \right)$$

Re^{-1}

FOTO AMERICANI BOMBA



$$\chi_{\text{cylinder}} = f(t, \rho, E)$$



lo cono acqua più

$$\frac{R}{t^2 \rho^2 E^3} = \text{cost. nota}$$

OBHUKOV → Pitagora originale

$$v = \rho^2 \cdot \rho_0 \cdot \Sigma_0$$

$$\Rightarrow \boxed{v = v(y, v, u_*)}$$

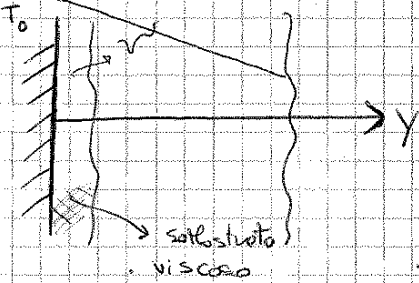
esprimiamo la formula nel nuovo sistema:
ritroviamo la struttura come in Reynolds

• PROVA III

$$\frac{U}{u_*} = f\left(\frac{Y u_*}{v}\right) = f(Y_T)$$

$$Y_T = \frac{Y}{v/u_*}$$

- Si ritrova il modello anche nella natura, per problemi di erosione, ad esempio le dune del deserto: sono problemi di turbolenza
- Con la derivata di Inver degli strati vicini a collocati tra la parete e lo strato:



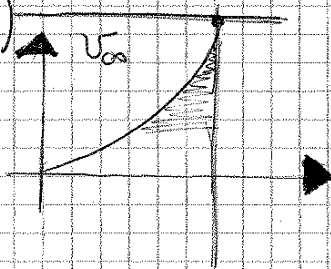
- molto vicino alla parete viscoso che la parete non entra più (velocità lineare)
- v, μ $\Sigma =$

→ nel sottostato viscoso possiamo dire che $\Sigma \approx \Sigma_0 = \mu \frac{dv}{dy}$

$$v(y=0) = 0$$

$$\boxed{v = \frac{\Sigma_0 y}{\mu}} \Rightarrow \frac{v}{u_*} = Y_T$$

$$(v_\infty - v) = F(u_*, Y, \Sigma, \delta)$$



$$\Rightarrow \frac{v_\infty - v}{u_*} = F\left(\frac{Y}{\delta}\right) = F\left(\frac{y}{\delta}\right)$$

- se dice che molto distante si trova una velocità infinita

• inu.: $\frac{v}{u_*} = f\left(\frac{Y u_*}{v}\right)$

• out.: $\frac{v_\infty - v}{u_*} = F\left(\frac{Y}{\delta}\right)$

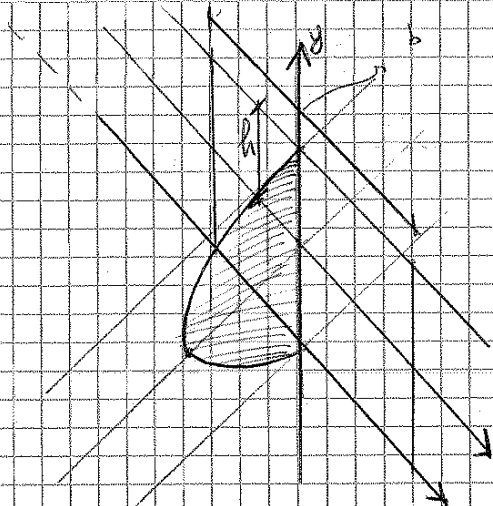
le strutture del profilo di velocità per inu/out.

- over δ_p (zona ipotetica in cui valgono le 2 leggi)

modo vecchio $\frac{dv}{dy} = \frac{u_*^2}{v} \cdot \frac{df}{dY_T} \parallel \frac{dv}{dy} = \frac{u_*}{\delta} \cdot \frac{dF}{d\zeta}$; $\frac{dv}{dy} = \frac{u_*^2}{v} \cdot \frac{df}{dY_T} = \frac{u_*}{\delta} \cdot \frac{dF}{d\zeta} \parallel \frac{Y_T}{u_*} \cdot \frac{df}{dY_T} = \frac{dF}{\delta \cdot d\zeta} \parallel \frac{Y_T}{u_*}$

$Y_T \frac{df}{dY_T} = \frac{dF}{d\zeta} = \text{cost} = \frac{1}{K} \rightarrow$ costante di Van Karman

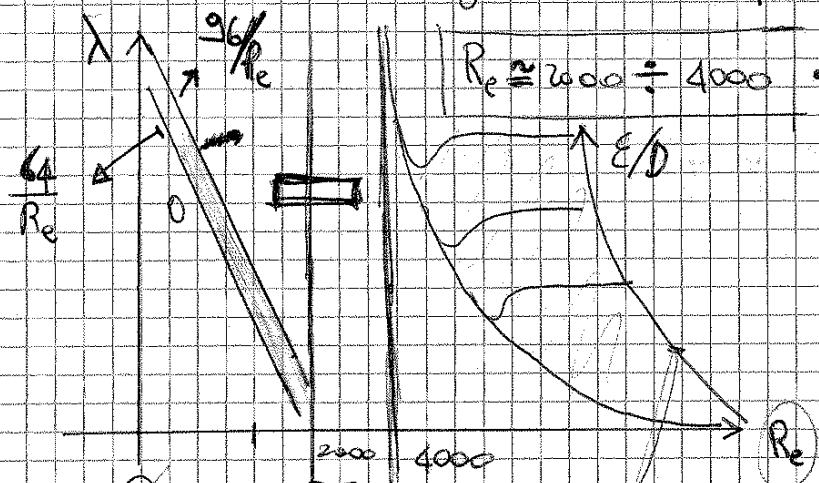
forma logaritmica



$U = \frac{1}{3} \frac{\gamma}{\mu} \cdot R^2 = \frac{1}{3} \frac{\gamma}{\mu} R^2$
 • raggio isodromo di una corrente circolare
 $R = \frac{A}{P} = \frac{b \cdot 2h}{2b} = h$
 $\lambda = \frac{D_i}{\frac{v^2}{2g}} = \frac{2g D_i}{v^2}$

c. Archimede

$\lambda = \frac{2g D_i}{v^2} = \frac{2g D}{v^2} \cdot \frac{32 \cdot \mu D^2}{\gamma D^2} = \frac{64 \mu}{\rho v D} = \frac{64}{Re}$



$\lambda = \frac{2g R_i}{v^2} =$
 relazione particolare per
 $R = \frac{D}{d}$ tra il
 diametro
 del
 cerchio

$= \frac{8g R}{v^2} = \frac{3 \mu v}{\gamma R^2} = \frac{24 \mu}{\rho v R} = \frac{96}{Re}$

Nikuradse Esperimento.

$Re = \frac{4 \rho v}{\mu}$



• Diagramma di linea liscia:

può essere Reynolds: per valori molto bassi come per quello stato liscio, ma poi avviene la "transizione" momento in cui l'indice di viscosità ricomincia a dipendere dallo Reynolds e costante al regime Reynolds (viscosità insufficiente).

• Distacco della linea liscia da scabrezza:

quello che nome Nikuradse e $\lambda \Rightarrow$ Tubo liscio $\lambda = \lambda(Re)$
 \Rightarrow Transit. $\lambda = \lambda(Re, \frac{E}{D})$
 \Rightarrow Tubo compl scabro $\lambda = \lambda(\frac{E}{D})$

$Re_* = \frac{E U_*}{\nu} = 70$

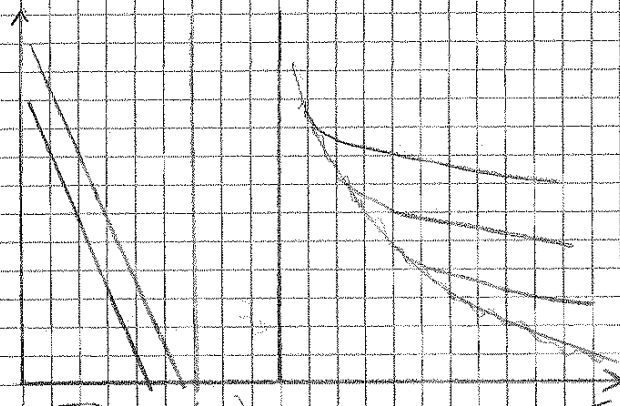
$$i = f \frac{Q^2}{D^5}$$

$$f = f(\text{rough}, D)$$

Drag coefficient:

→ poteri: positive energia pelle dello squado
defini

Lezione 15/11/2011



parte descritta da:

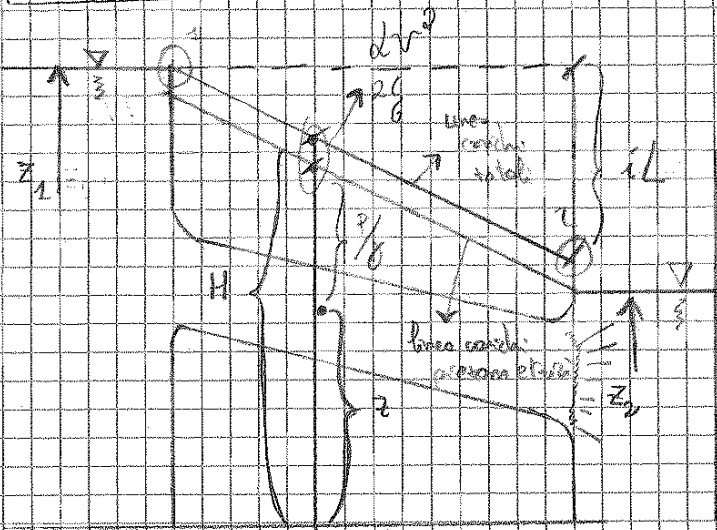
parte derivata dal turbolento scabro
ragiona le formula del turb. scabro

$$f_{\text{sm}} \Rightarrow \lambda = \frac{c}{Re}$$

$$\frac{2g i D}{v^2} = \frac{c \cdot v}{v D} i$$

$$i \propto \frac{v}{D^2}$$

$$i \propto \frac{Q}{D^4}$$



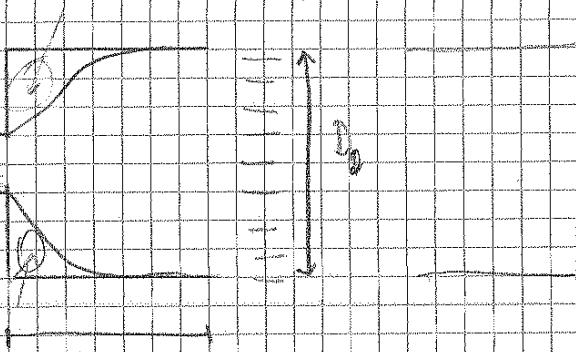
qualunque tronchetto considerato un
pozzo ad h

$$z_1 - z_2 = h = z + \frac{v^2}{2g}$$

$$H = h + \frac{dr^2}{2g}$$

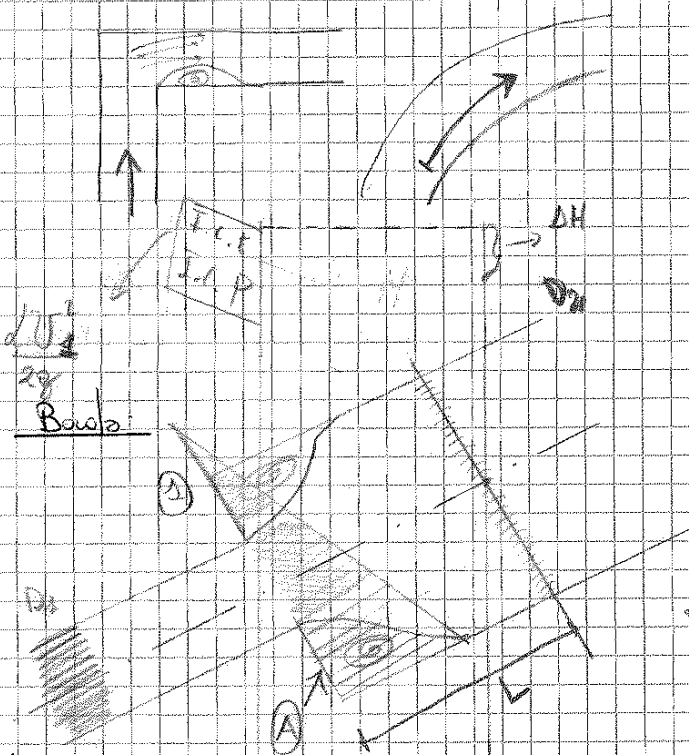
Appunto non ho dissipazioni: l'energia nel serbatoio è energia potenziale + una parte in presa in
prelievo: il punto virtuale sta all'uscita dello squado →

Dissipazioni localizzate



$D_0 \rightarrow$ nella realtà di un impianto, D_0 è dell'ordine dei cm (valotto piccolo)

- C'è la situazione di turbolenza localizzata alla prima parte, dopodiché tornano ad essere i moti di turbolenza ~~transversali~~ orientati separatamente: caso di dissipazione voluta per ridurre energia al fluido



$$\Delta H = \alpha \cdot \frac{U^2}{2g}$$

$\Delta H?$

- Per ipotesi: voglio conoscere il comportamento dello spessore e lo sviluppo idraulico anche adiacenti dove ho della turbolenza

- Sviluppo (ed è da verificare) che si possa studiare una condizione idraulica, partendo estendendo la linea dello spessore \rightarrow presenza della curvatura vedo un risultato esatto \rightarrow ipotesi idraulica

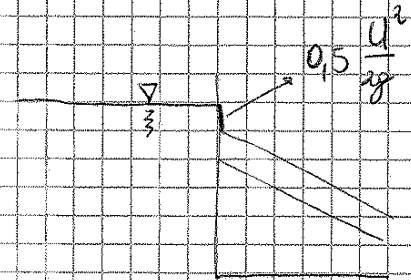
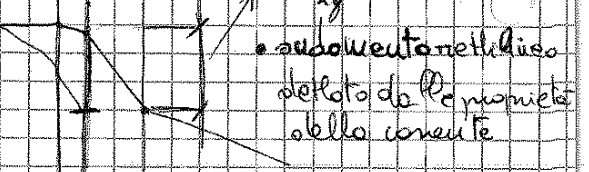
Supporre che sulla superficie di sezione ci sia un suddiv. di tipo idraulico, quindi prolungare il sezione e tracciando l'andamento di esso che è triangolare. Vedo che l'andamento nella parte di inizio del liquido può essere considerato idraulico, ma il punto critico è la parte bassa del triangolo dove è discutibile lo stato idraulico di presenza. Stiamo considerando il volume circolante nella parte della L.

Lezione 23/11/2011

Le diss. pot. concentrate hanno un paragrafo importante nel tratto di contrazione della sezione, dove insorge un restringimento seguito da allargamento

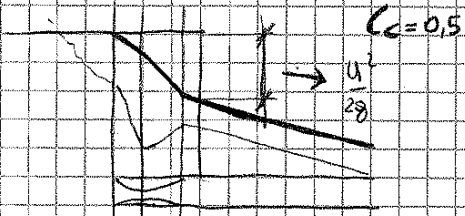
$$\eta = \frac{U_2^2}{2g}$$

$$\xi = \frac{U_2^2}{2g}$$



• Tutta questa situazione avviene sulle misure dell'P. in cui del diametro

non c'è nessuna dissipazione

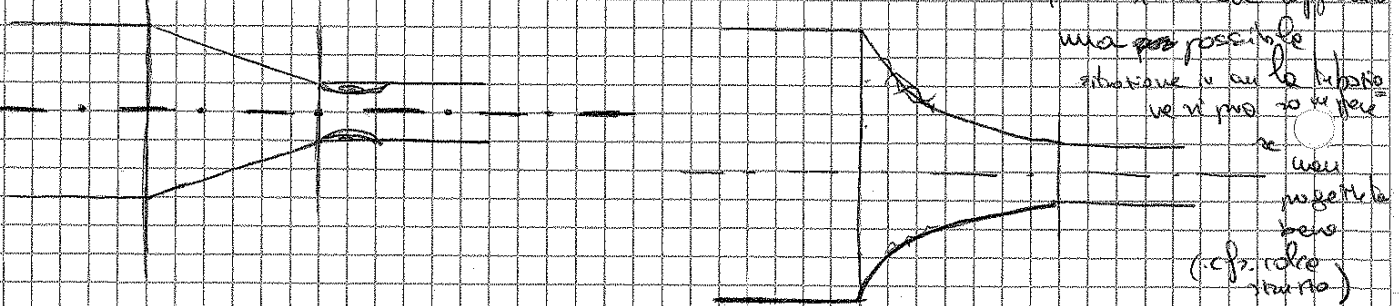


$$\rho \frac{U_2^2}{2g} = \rho \left(\frac{D_1}{D_2} \right)^2$$

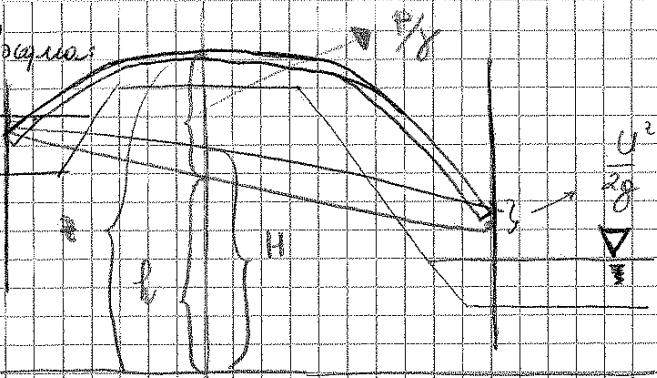
• Condotta che deve essere ricavata con una più grande: se che sino delle diss. pot.



Distacco di vena: ovvero in una zona in cui la corrente è più lenta: è sempre una situazione da dimensionare rispetto al problema che si sta studiando



• togliere l'acqua



• sistema di dimensioni
se fanno un foro sopra l'orlo
che entra nel tubo e
l'acqua esce

lunghezza condotte (resistenze di rasoio)

$$\frac{U^2}{2g} \leq 0,01 \text{ IL}$$

$$\lambda = \frac{2g D_i}{v^2} \Rightarrow i = \frac{\lambda V^3}{2g D}$$

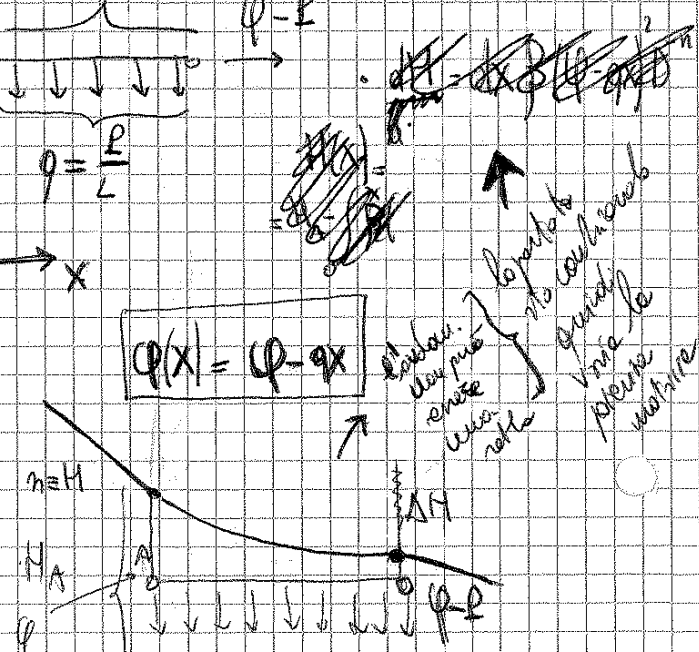
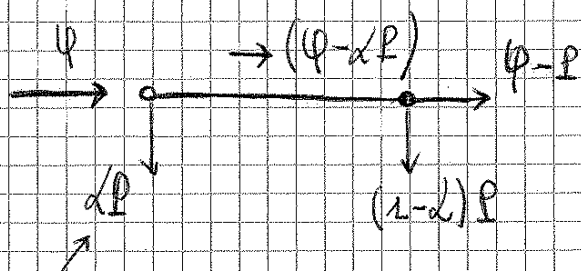
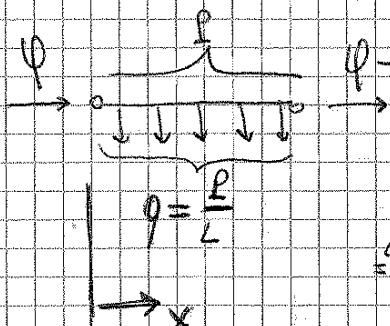
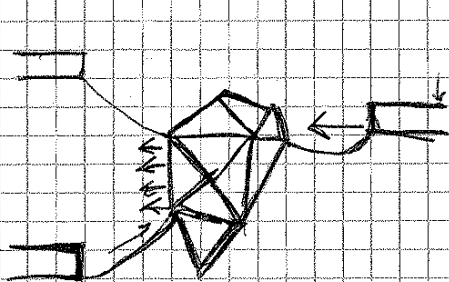
$$\frac{U^2}{2g} \leq 0,01 \quad \frac{\lambda V^3}{2g D} = 0 \quad \frac{U^2}{2g} \leq 0,01 \text{ m} \frac{V^3}{2g}$$

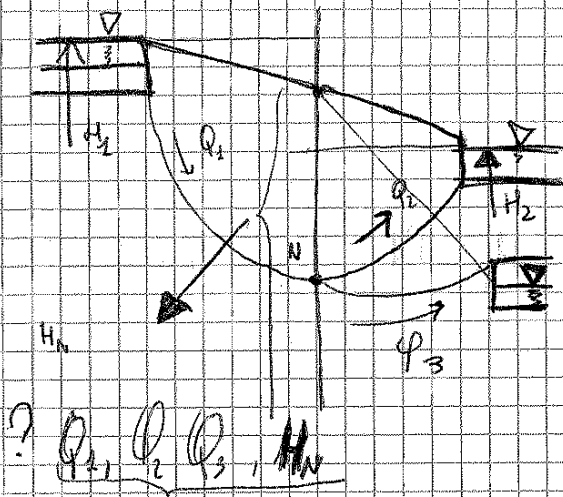
$$n > \frac{1}{0,01 \cdot \lambda} = 4000$$

Quando le lunghezze sono lunghe di volte superiori alle lunghezze del diametro sono dimensionabili dal tempo critico

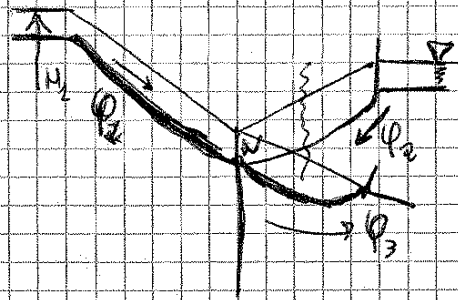
• caso delle condotte a richiesta di movimento: $i = \beta \cdot \varphi^{2-n}$

• rete con n nodi, m btr (rete magliata)





$m=1$
 $m=3$



B: sabbotta

Devoscurare 4 eq.

$$\begin{cases} H_1 - H_N = B_1 L_1 D_1^{-5} Q_1^2 \\ H_2 - H_N = B_2 L_2 D_2^{-5} Q_2^2 \\ H_3 - H_N = B_3 L_3 D_3^{-5} Q_3^2 \\ Q_1 + Q_2 = Q_3 \end{cases}$$

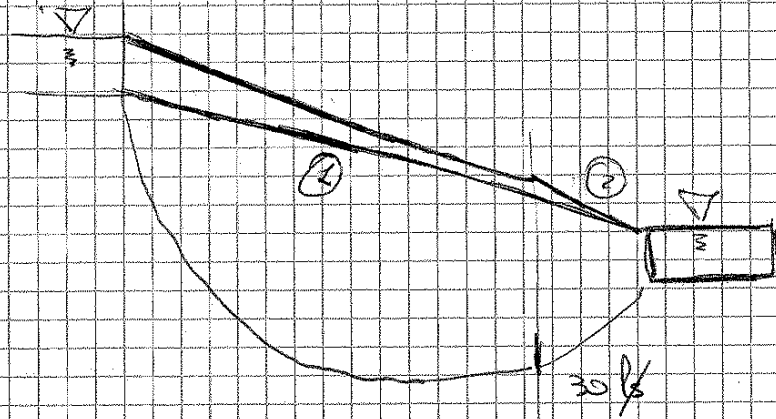
2 eq. 4 eq. in 4 incognite
non lineare

→ metodo ① se le portate nei rami
tutte positive, ci ha dato tutto e tutto
ok un no!

Il B è importante scegliere bene da quali eq / pt. partire

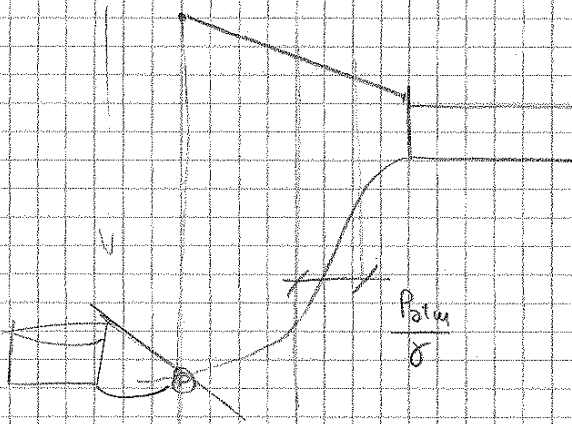
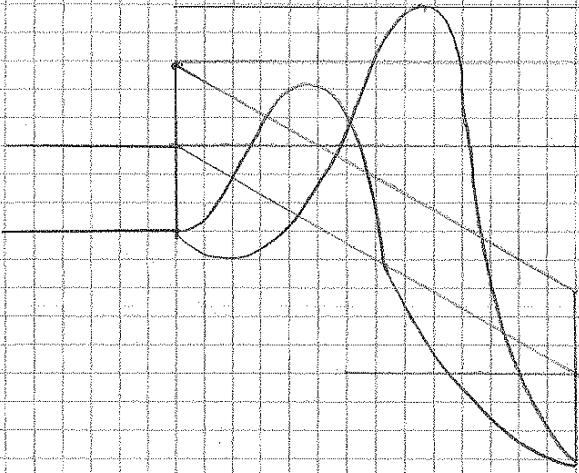
Esempio

Spota: 70 l/s

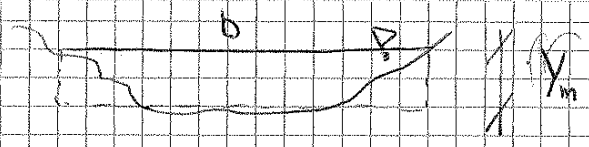


Ma se riservaio di più, 100 l/s, allora nella rete ~~potrebbe~~ che ne fornisce 30 l/s
la rete del ~~il~~ fatto facile si dice, nel punto primo tutto la pendenza da un unico
quindi la portate di conseguenza
hanno quindi fornire più di 30 l/s, anche 50 l/s

• caso in cui il problema dell'inverso
oltre che del minimo di costo dovuto
alla dispersione



$$1 = \frac{\rho^2 b}{g \Omega^3}$$



$$y_m = b = \Omega$$

$$Q = U \cdot \Omega = U \cdot y_m \cdot b$$

Espresso la condizione di criticità come rapporto volume sezione allungata costante b

$$\frac{\rho^2 b}{g \Omega^3} = \frac{U^2 \cdot y_m^2 \cdot b \cdot b^2}{g y_m^3 b^3} = \frac{U^2}{g y_m} = 1$$

Froude (F_r)

La condizione di criticità coincide al Numero di Froude = 1. Il significato fisico è che il rapporto tra cinetica e potenziale (ossia vista nel binomio di Bernoulli) è uguale a 1.

$$F_r = 1 \iff y = y_c$$

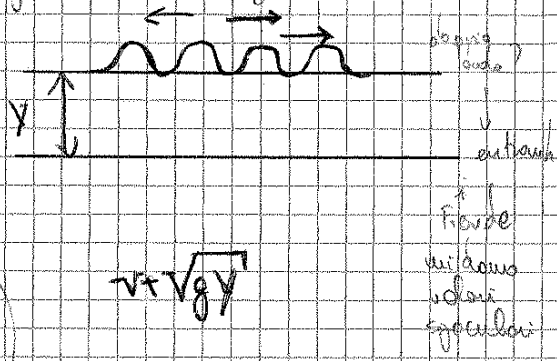
$$\frac{U^2}{2g y} = \frac{U^2}{2g y} = \frac{F_r^2}{2}$$

• la corrente lenta / corrente veloce

• Significato fisico (2): si crea una variazione della superficie libera: si generano onde opposte

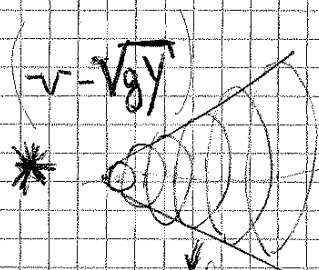
• maggiore o minore (velocità) della velocità con cui si propaga l'energia

• è l'energia del suono



$$C = \sqrt{g y}$$

• \times stesso valore direzione

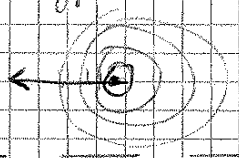


• $v = \sqrt{g y}$
• $v + \sqrt{g y}$
• $v - \sqrt{g y}$

• $F_r < 1$

$$\sqrt{g y} > U \implies \frac{U}{\sqrt{g y}} < 1$$

per $F_r < 1$ una qualunque perturbazione?



$$\delta(E, y, Q) = 0$$

• dove studiamo la questione per $E = \text{cost}$

$$E = y + \frac{Q^2}{2g \Omega^2}$$

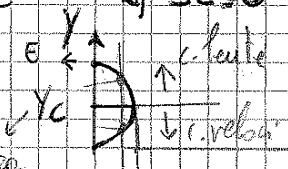
• valore costante legato tra Q e y

$$Q = \Omega \sqrt{2g(E - y)}$$

1) $E = y \implies Q = 0$

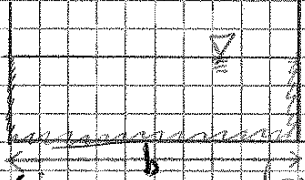
2) $\Omega = 0 \implies Q = 0$

• v. molto che tutto l'energia è portata come energia potenziale



• $E = \text{cost}$
• Devocione e la porta elastica

regime dell'onda al $\lambda \propto \omega^2$



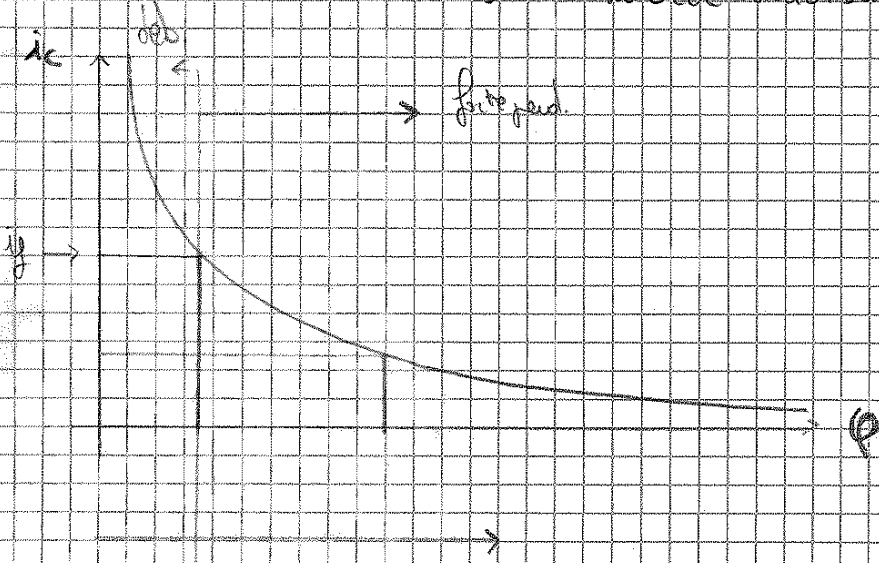
$$b = 0 \left(\frac{10^4}{10^2} \right) \omega$$

$$\lambda = 9.025$$

if $\lambda < \lambda_c$ → condizioni di flusso sub critico (o flusso fluviale o subolare profondo)

if $\lambda > \lambda_c$ → " " " " supercritico (o flusso torrente o forte corrente)

• $\lambda = C R^{4/3}$. dato più sta passando potete fare più cambia il flusso (un po' di sono flusso supercritico o sub critico? → vanno lo λ , un costo studiabile λ ha delle variazioni)



- Geometrie rigorosamente cilindriche;
 restringiamo lo studio a moti permanenti su sezioni cilindriche.

$$\frac{dE}{ds} = \frac{dE}{dy} \cdot \frac{dy}{ds}$$

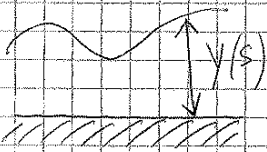
• stando a che la E cambia rispetto a y e y rispetto a s

- ricerca di Saint-Venant:

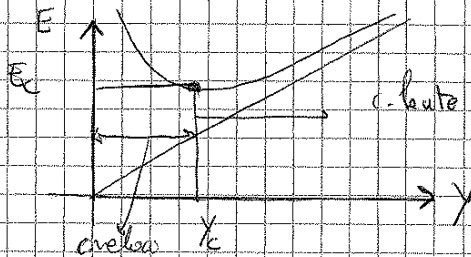
$$\frac{dE}{ds} \cdot \frac{dy}{ds} = \rho - J \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{ds} = \frac{\rho - J}{\frac{dE}{dy}} *$$

• è quello che viene detto di Saint-Venant



• nella stessa linea c'è il momento del diagramma E in funzione di y



c. veloci ($\frac{dE}{dy} < 0$)

$$\frac{dE}{dy} = 1 - \frac{\rho^2 b}{g \Omega^3} = 1 - F_r^2$$

$$F_r^2 = \frac{v^2}{gY}$$

* = buono come = $\frac{\rho - J}{1 - F_r^2}$; $i = J = f(\rho, v, E, \dots)$

D. Moody

$$\frac{dU}{ds}$$

(sulla curva di U velocità \rightarrow Navier-Stokes)
 • perché inidoneabile

• senso idraulico: si introduce un'ipotesi di canale: tutto più lontano rispetto al profilo base (\rightarrow profilo dolcemente variabile, per applicare l'ipotesi di Saint-Venant)

• Legge di Chezy: $J = \rho = \frac{\rho}{K^2 R^2} \rightarrow$ moto uniforme $\rho = i = J$

$$\frac{dy}{ds} = \frac{\rho - J}{1 - F_r^2} \rightarrow$$

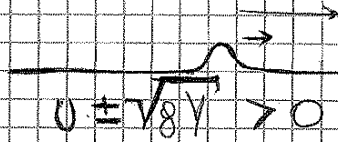
(regole empiriche) funzione di $y = f(y)$

• non indipendente da y , bene quindi f è una funzione costante non lineare.

questo numero f ha una scala...

resolvibile con il calcolatore (vari metodi \rightarrow differenza o leu. finite)

Cono veloce:



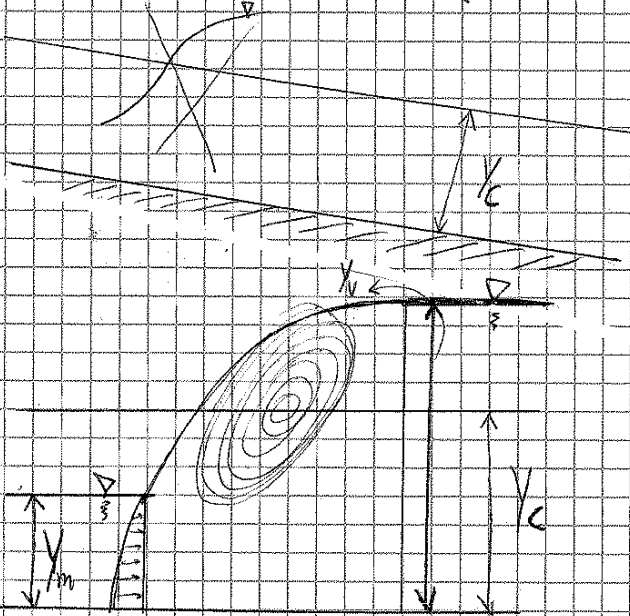
Cono lento:

$$u + \sqrt{\gamma y} > 0$$

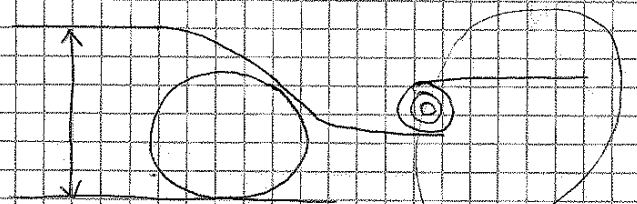
$$u - \sqrt{\gamma y} < 0$$

passaggio da cono da veloce a lento (con continuità di superficie)

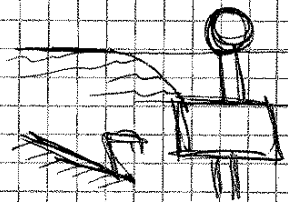
RISULTI



Cono = successione di uscite



è un fenomeno di
 → onda stazionaria piana (onda di shock)
 stesso fenomeno della gas-dinamica

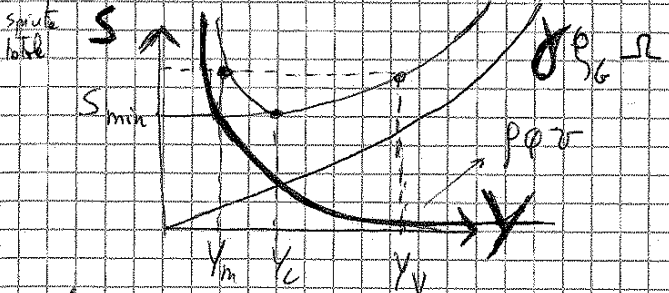


$$\sum \vec{F} = 0$$

$$p_1 + \rho u_1^2 = p_2 + \rho u_2^2$$

$$S = \int \rho u^2 = \rho \int u^2 = \rho \int u^2 + \rho \rho u^2$$

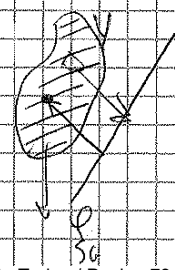
$$S_1 = S_2$$



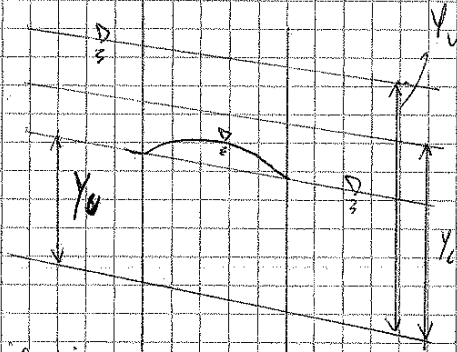
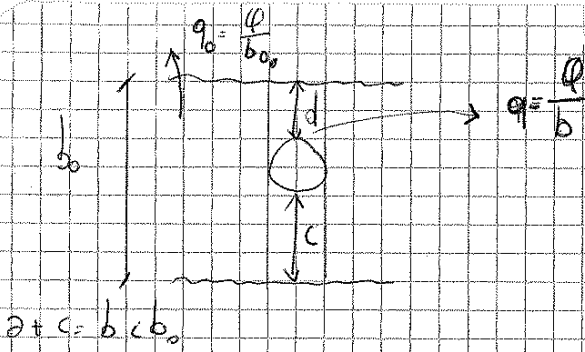
• alternati avanti e dietro d'onda sono uniti in
 Risultato

$$\frac{dS}{d\delta} = 0 \Rightarrow \delta = \delta_c$$

$$\rho = \frac{M_s}{A} \quad M_s = \int y dA$$



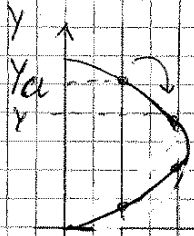
Lezione 6/11/2013



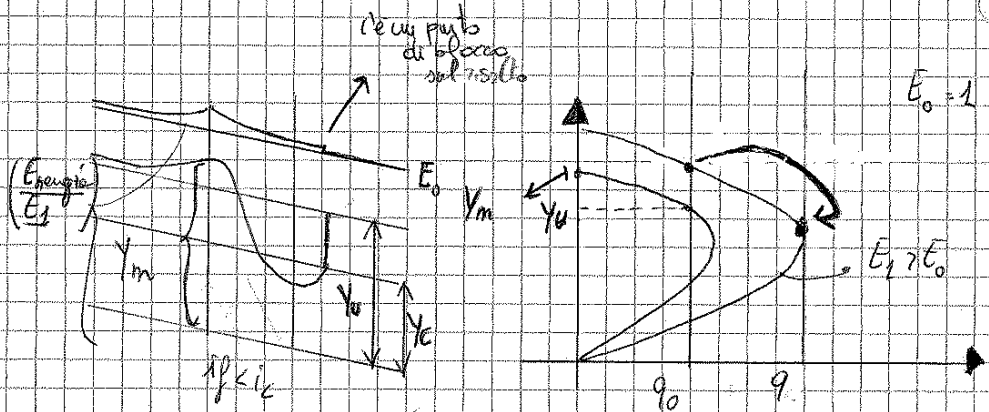
- if $< i_c$
- if $> i_c$

Quando la corrente lenta passa in un restringimento, rallenta (contorno a quello che posso pensare).

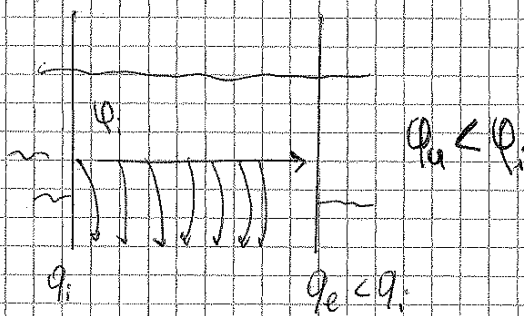
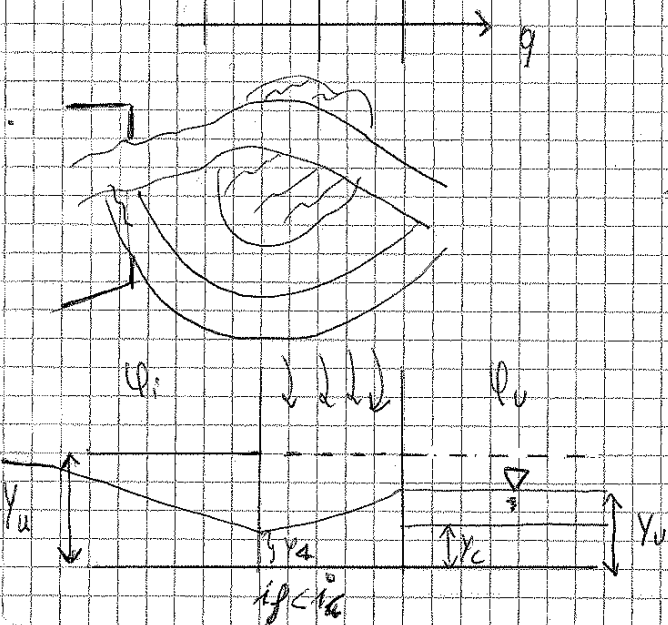
• Area di ristagno con corrente veloce molto uniforme, nel restringimento la corrente tende ad uniformarsi.

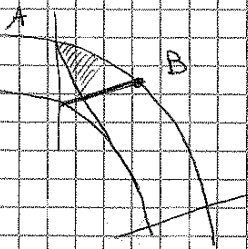


segno il caso if $< i_c$

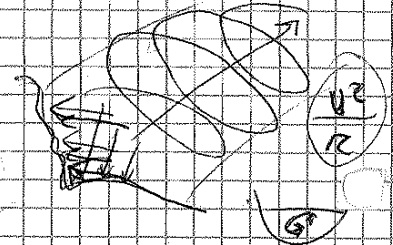


non viene possibile che restringimento: valore che indica come un'energia a un'uscita una \$q\$, tale che la corrente di venti tangente alla verticale



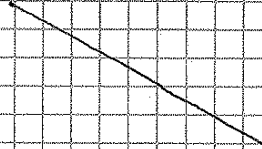
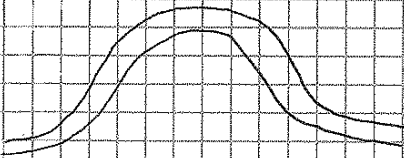


Devi



• spiro differenz su un flurolo = conetti Elicoidali. Quindi ogni curva genera un moto elicoidale.

• Nash



Lunghe condotte

$$JL \gg n \frac{u^2}{2g}$$

$$L \gg (3000 - 4000) D$$

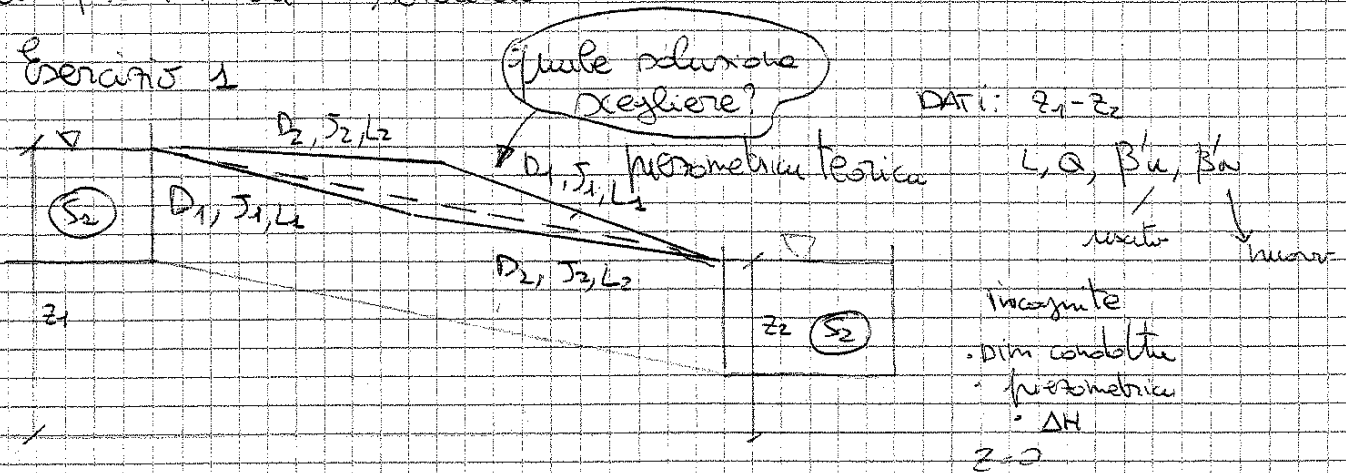
$\lambda = 0,025$ \rightarrow indice di resistenza

Condizione di lunga condotta

Per lunghe condotte, si parla solo di piezometrica \Rightarrow termine cinetico trascurabile

La piezometrica parte sempre dal p.c.i.v. del 1° serbatoio ed arriva al p.c.i.v. del 2° serbatoio

Esercizio 1



Potrebbe la piezometrica teorica; essa non è necessariamente // la condotta

$$z_1 - z_2 = \beta' \frac{Q^2}{D^{5,33}} L \Rightarrow D_n = \left(\frac{\beta' Q^2 L}{z_1 - z_2} \right)^{\frac{1}{5,33}} \text{ uso } \beta'u : \text{trovo il diametro}$$

tro teorico $D_n = 185,4 \text{ mm}$ non disponibile in commercio,

Non posso usare lo stesso diametro per tutta la condotta, ma divido essa in due tronchi

si usano i diametri più vicini a quello trovato.

$$L = L_1 + L_2 \quad \left. \begin{array}{l} D_1 = 175 \text{ mm} \\ D_2 = 200 \text{ mm} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{maggiore è il diametro, minore} \\ \text{è la perdita di carico} \\ \text{e viceversa} \end{array}$$

$$z_1 - z_2 = \beta'_1 \frac{Q^2}{D_1^{5,33}} L_1 + \beta'_2 \frac{Q^2}{D_2^{5,33}} L_2 \Rightarrow \beta'_1 = 0,1693 \quad \beta'_2 = 0,0806$$

$$1200 = L_1 + L_2$$

$$145 = 0,1693 L_1 + 0,0806 L_2 \quad \left. \begin{array}{l} L_1 = 576 \text{ m} \\ L_2 = 624 \text{ m} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{equazione di} \\ \text{bilancio energetico} \end{array}$$

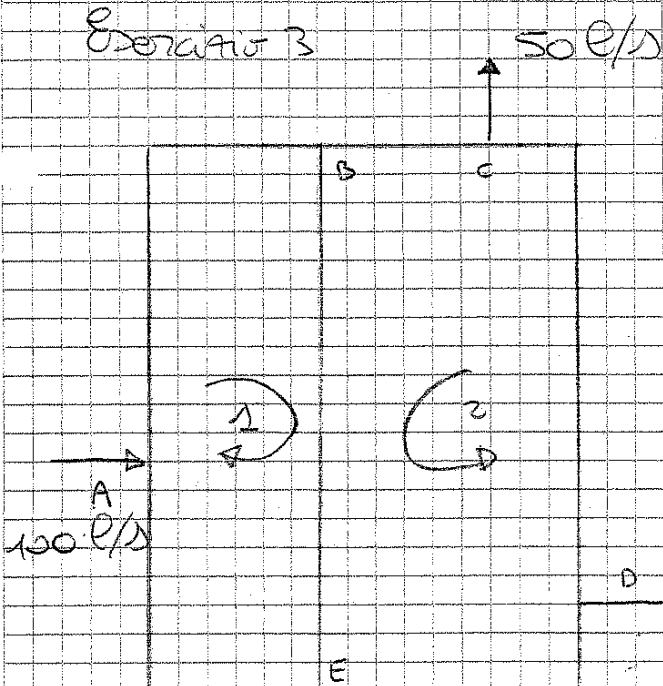
$$P = \gamma \Delta H Q_2 / \eta \rho$$

In assenza di pompa, nella condotta 2 il verso della portata è opposto

$$\begin{cases} z_1 - z_n = k_1 Q_1^2 & z_1 = z_2 \\ z_2 - z_n = k_2 Q_2^2 \\ z_n - z_3 = k_3 Q_3^2 \end{cases}$$

$$Q_1 + Q_2 = Q_3$$

Esercizio 3



definiamo un verso di circolazione delle portate nella maglia

Per fare sì che in BE il verso sia identico, nelle due maglie i versi

devono essere opposti

$$k_i = R_i \cdot \frac{L_i}{D_i^5}$$

metto il valore assoluto per mantenere il segno delle portate

$$\Delta Q = \frac{\sum k_i Q_i / |Q_i|}{2 \sum k_i / |Q_i|}$$

criterio da soddisfare: continuità al nodo

transitorio

$$\Delta Q_1 = \frac{Q_{AB} - 100 + Q_{AE}}{2 \cdot L_{AB} \cdot 100} = -50 \frac{l}{s}$$

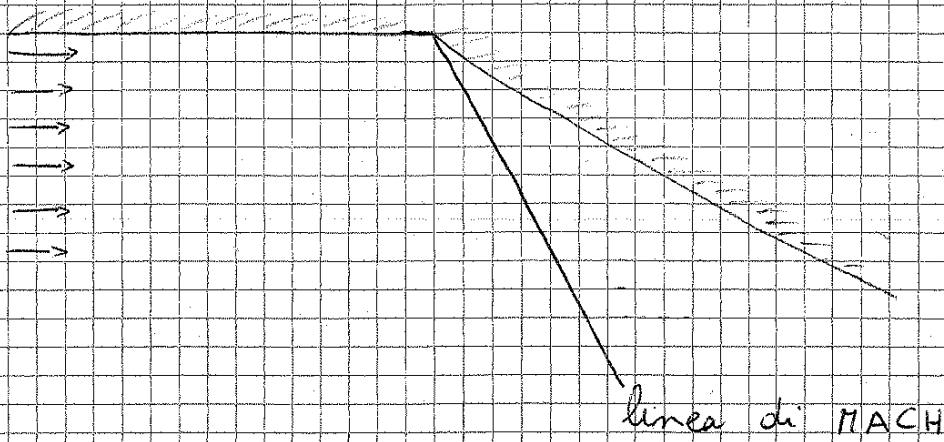
maglia

non ho considerato BE

$$\Delta Q_2 = \frac{Q_{BC} - (-100) - Q_{CD} + Q_{DE}}{2 \cdot L_{BC} \cdot 100 + L_{CD} \cdot 50} = 36,1 \frac{l}{s}$$

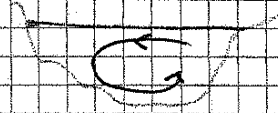
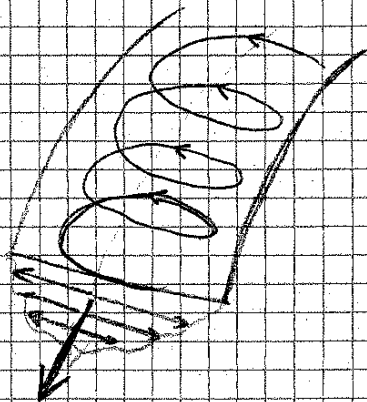
	(1)	(1)	(1)(2)	(2)	(2)	(2)
	AB	AE	BE	BC	CD	DE
L	400	300	500	200	500	400
Q ⁽¹⁾	100	0	0	-100	-50	0
Q ⁽²⁾	50	-50	-50 + 36,1	-63,9	-13,9	36,1
Q ⁽³⁾	137	-51	-98	-58	-8	42
Q ⁽⁴⁾	172	-52,8	-10,2	-57,4	-7,4	42,6

Se invece di una curva abbiamo una DEVIAZIONE



Prima della linea di Mach le particelle non si accorgono della presenza della deviazione.

La presenza delle curve fa nascere la VELOCITÀ secondaria
CORRENTI SECONDARIE

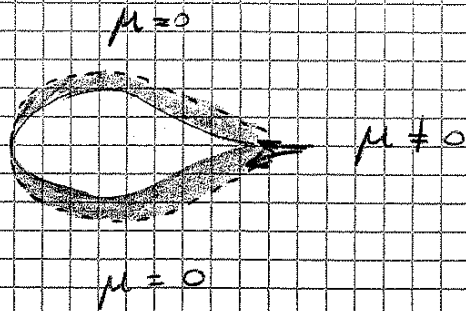


In superficie ci sarà una velocità maggiore

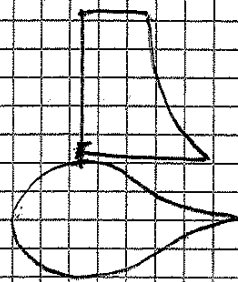
PRANDTL

Dividiamo la corrente in 2 DOMINI:

- 1) In cui si fa sentire la viscosità
- 2) In cui la viscosità non entra in gioco

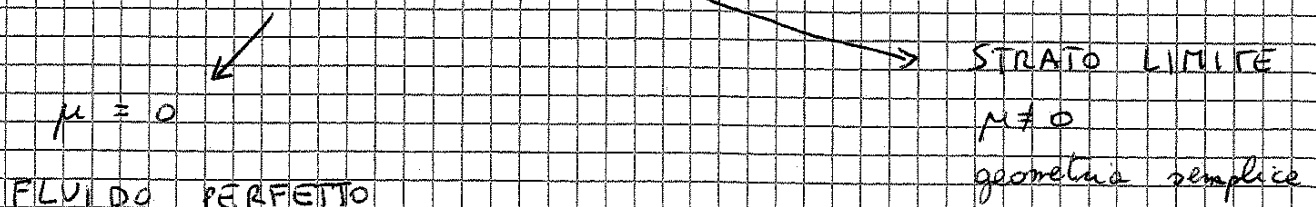


C'è solo una piccolissima zona in cui si nota la differenza di velocità, in cui la differenza di velocità è ELEVATA



STRATO LIMITE

NAVIER - STOKES



Se analizziamo il corpo a livello di dimensioni elevate possiamo TRASCURARE lo strato limite e vedere semplicemente il corpo come se fosse un po' più grande

Siamo nell'ipotesi di FLUIDO PERFETTO:

$$\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau = \mu \frac{du}{dn} = 0$$

Non ci sono sforzi tangenziali quindi le particelle ~~non~~ si muovono ma non possono RUOTARE.

Non ruotano perché avremmo bisogno di applicare una coppia, ma ciò non è possibile essendo tutte le $\tau = 0$.

~~Non si può esprimere che non c'è rotazione?~~

Come si esprime che non c'è rotazione?

$$\boxed{\text{rot } \vec{u} \Rightarrow 0} \quad \mathbb{R}^3 \Rightarrow \mathbb{R}^3$$

Questo ci porta a dire che il nostro problema è un problema IRROTAZIONALE

$$\text{rot } \vec{u} = 0$$

$$2D \left(\begin{array}{c} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{array} \right)$$

CONDIZIONE NECESSARIA e SUFFICIENTE affinché il rotore sia uguale a zero (campo irrotazionale) è che il campo ammetta potenziale.

$$\text{rot } \vec{u} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u} = \text{grad } \varphi$$

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

$$\varphi = \varphi(x, y) \quad \text{POTENZIALE}$$

ESERCITAZIONE 8

Moto uniforme nelle correnti a pelo libero

NOTAZIONI:

Ω = sezione trasversale

B = larghezza

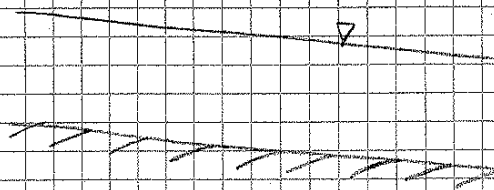
P = perimetro bagnato

E = carico specifico

Q = portata

Y = tirante (profondità della corrente)

Nel moto uniforme:



Le due linee sono
parallele

$$E = Y + \alpha \frac{v^2}{2g} \sim Y + \frac{v^2}{2g} \quad \text{con } \alpha = 1$$

poniamo esplicitarla in funzione della portata:

$$E = Y + \frac{Q^2}{2g \Omega^2} \rightarrow Q = \sqrt{2g(E-Y)} \cdot \Omega$$

$$\left. \frac{\partial E}{\partial Y} \right|_{Q=Q_0} = 0 \Rightarrow \boxed{\left(\frac{Q^2}{B} \right)_{Y=Y_0} = \frac{Q_0^2}{g}}$$

$$\left. \frac{\partial Q}{\partial Y} \right|_{E=E_0} = 0 \Rightarrow \boxed{Y_c + \frac{\Omega}{2B} = E_0}$$

C'è un metodo equivalente

$$\frac{\Omega(Y)^3}{b(Y)} = \frac{Q_0^2}{g} = 2293$$

$$F(Y) = \frac{\Omega^3(Y)}{b(Y)} - 2293 = 0$$

avremo una serie di valori, cerchiamo quello più prossimo allo zero (nella quinta colonna)

In questo caso sarà $= 52,8$

• Secondo caso $E_0 = 4,60 \text{ m}$

$$Q = \Omega \sqrt{2g} (E_0 - Y)$$

calcoliamo la portata in funzione di Y con carico specifico fisso E_0

Cerchiamo poi nel grafico $\begin{matrix} Y \uparrow \\ \rightarrow Q \end{matrix}$ il massimo

C'è un altro metodo per ottenere il valore che massimizza la portata:

$$Y_c + \frac{\Omega}{2b} = E_0$$

$$G(Y) = Y + \frac{\Omega(Y)}{2b(Y)} - E_0 = 0$$