NUMERO : 428 DATA : 10/12/2012

A P P U N T I

STUDENTE : Margaria

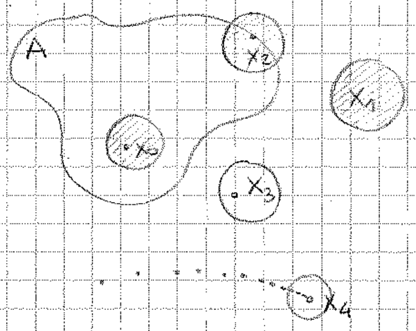
MATERIA : Analisi II
Prof. Codegone

LEZIONE 1 — 7.10.2011

INSIEMI IN $\mathbb{R}^n$

$$B_r(\vec{x}_0) = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n : \| \vec{x} - \vec{x}_0 \| < r \}$$

↳ intorno



x_0 : p.to INTERNO

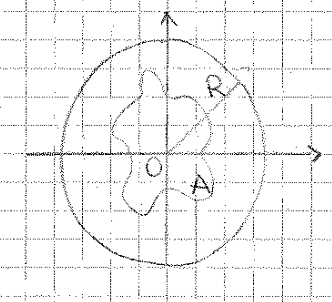
x_1 : p.to ESTERNO

x_2 : p.to DI FRONTIERA

x_3 : p.to ISOLATO

x_4 : p.to DI ACCUMULAZIONE

INSIEME LIMITATO



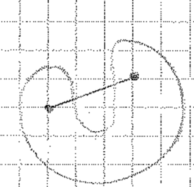
$\Leftrightarrow \quad B_r(\vec{0}) = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \; \| \vec{x} \| < R \}$

$\Leftrightarrow \quad A \subseteq B_r$

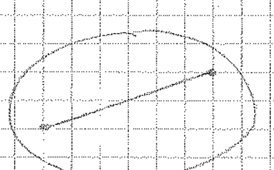
SOTTINSIEME COMPATTO $\Leftrightarrow$ chiuso e limitato

INSIEME CHIUSO $\Leftrightarrow$ contiene anche la frontiera

INSIEME CONVESSO $\Leftrightarrow$ il segmento che unisce due p.ti qualsiasi dell'insieme e' tutto contenuto nell'insieme

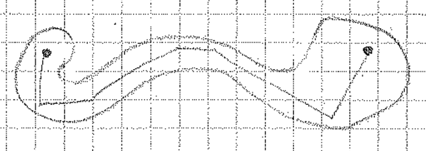


NON CONVESSO

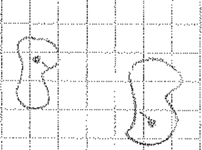


CONVESSO

INSIEME CONNESSO $\Leftrightarrow$ presi due punti nell'insieme esiste una poligonale che li congiunge tutta contenuta nell'insieme



CONNESSO



NON CONNESSO

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 110

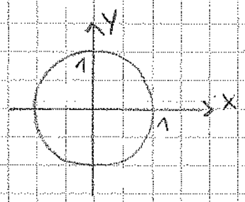
FUNZIONI VETTORIALI

$\vec{F}: dom\vec{F} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

a_ CURVE PARAMETRICHE NEL PIANO

$\gamma(t) \in \mathbb{R}^2 \qquad \vec{\gamma}: t \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

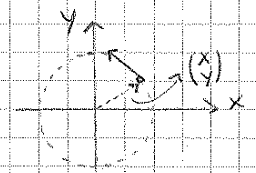
ES. $\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \qquad t \in [0, 2\pi]$



b_ CAMPI VETTORIALI

$\Leftrightarrow n = m \qquad \vec{F}: dom\vec{F} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

ES. $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ → vettore applicato



coord. di un pto qualunque

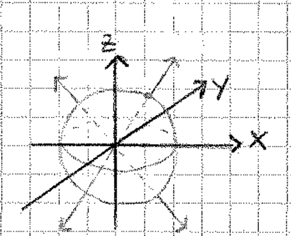
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = -xy + xy = 0 \Rightarrow$ i 2 vettori sono $\perp \Rightarrow \binom{x}{y}$ è tangente alla circonf.

ES.

$$\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{pmatrix}$$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \|\vec{x}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$\Rightarrow \vec{F}(x,y,z) = \frac{1}{\|\vec{x}\|} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$



CONTINUITÀ E LIMITI

$\vec{F}(\vec{x}): dom\vec{F} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ → funzione vettoriale

$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 : \forall \vec{x} \in dom\vec{F}, \; \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta \Rightarrow \|f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0)\| < \varepsilon$ DEF DI CONTINUITÀ DI $\vec{F}$ IN

$\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} \vec{F}(\vec{x}) = \vec{l} \qquad \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall \vec{x} \in dom\vec{F} \;\; 0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta \Rightarrow \|\vec{F}(\vec{x}) - \vec{l}\| < \varepsilon$

cioè x deve essere $\neq$ da x_0

F è continua in $x_0 \Leftrightarrow \lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} \vec{F}(\vec{x}) = \vec{F}(\vec{x}_0)$

SUPERFICI IN $\mathbb{R}^3$

$R \subseteq \mathbb{R}^2$ $\quad \vec{\sigma}: R \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ → superficie

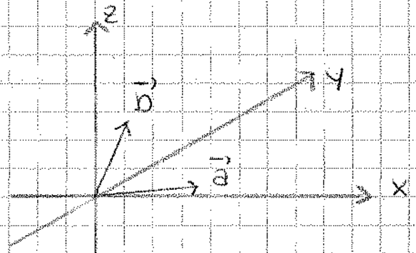
↳ regione

$\Sigma = \sigma(R) \subseteq \mathbb{R}^3$

↳ immagine = sostegno della superficie

CHIUSA ⟺ la regione $R \subseteq \mathbb{R}^2$ e' compatta (= chiusa e limitata)

ES. $\vec{a}$ e $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ l.i.



$\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{n}$ → vettore normale al piano su cui giacciono $\vec{a}$ e $\vec{b}$

generico punto

$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot (x, y, z) = 0$ → e' il piano ⊥ al vettore quello su cui giacciono $\vec{a}$ e

$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot (x, y, z) = c$ → e' un piano // al preced

$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$ → e' il piano // al p denti passanti x (x_0

eq. IMPLICITA/CARTESIANA di ∆ piani

Come si può interpretare una eq. ESPLICITA di una superficie in forma parametrica?

$z = f(x, y)$

Dall'es. $(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$

$n_1(x - x_0) + n_2(y - y_0) + n_3(z - z_0) = 0$

$z = \dots$ se $n_3 \neq 0$ eq. ESPLICITA

$z = f(x, y)$ superficie topografica

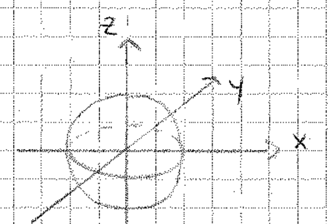
$$\vec{\sigma}(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x, y) \end{pmatrix}$$ eq. PARAMETRICA

eq. ESPLICITA

ES. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ eq. IMPLICITA

$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ $\quad z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$

↳ semisuperficie delle z positive



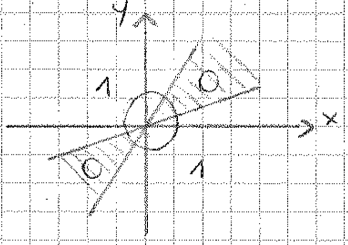
$\sigma(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$ eq. PARAMETRICA

DERIVATA DIREZIONALE lungo $\vec{v}$ nel punto $\vec{x}_0$: $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{x}_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{x}_0 + t\vec{v}) - f(x_0)}{t}$

misura la pendenza quando mi muovo lungo una direzione qualunque

OSS. La derivabilità di f non implica la continuità in più variabili.

ES.



$f'(x,y) = 0$ ovunque xchè la funzione è costante (vale

Nell'origine, x0, la funzione è discontinua xchè nell'intorn vale sia 0 che 1.

DIFFERENZIALE : f si dice differenziabile in $\vec{x}_0$ se esiste $\vec{\nabla} f$ e se $f(\vec{x}) = \underbrace{f(\vec{x}_0) + \vec{\nabla} f(\vec{x}_0)(\vec{x} - \vec{x}_0)}$ $o(\|\vec{x} - \vec{x}_0\|)$ $_{\vec{x} \to \vec{x}_0}$

$z = f(\vec{x}_0) + \vec{\nabla} f(\vec{x}_0) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0)$ è il piano tangente a grafico di $z = f(x,y)$ in $\vec{x}$

$df_{\vec{x}_0}(\Delta \vec{x}) = \vec{\nabla} f(\vec{x}_0) \cdot \Delta \vec{x}$

differenziale

$\Delta \vec{x} = \vec{x} - \vec{x}_0$

TEOREMI

cioè esiste il piano tangente

1. Se f è differenziabile in $\vec{x}_0$ $\Rightarrow$ f è continua in $\vec{x}_0$

2. Se f ha derivate parziali continue in un intorno di $\vec{x}_0$ (I_{x_0}) (si dice che f è di classe
$\Rightarrow$ f è differenziabile

3. Se f è differenziabile in $\vec{x}_0$ $\Rightarrow$ f ammette derivate direzionali lungo qualunque $\vec{v} \neq 0$
e si ha $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{x}_0) = \vec{\nabla} f(\vec{x}_0) \cdot \vec{v}$

4. prendo $\vec{v}$ tale che $\|\vec{v}\| = 1$

$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = \vec{\nabla} f \cdot \vec{v} = \|\vec{\nabla} f\| \cdot \underbrace{\|\vec{v}\|}_{1} \cdot \cos\alpha$ $\quad -1 \leq \cos\alpha \leq 1 \quad \Rightarrow -\|\vec{\nabla} f\| \leq \left|\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}\right| \leq \|\vec{\nabla} f\|$

def di prodotto scalare

è max quando $\cos\alpha = 1 \to \alpha = 0$

cioè: il $\vec{\nabla} f$ individua la direzione di max pendenza

$$(x_0, y_0)\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = (x_0, y_0)\begin{pmatrix} ax_0 + cy_0 \\ cx_0 + by_0 \end{pmatrix} = ax_0^2 + 2cx_0y_0 + by_0^2$$ → forma quadratica

oppure

$$\left[\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = ax_0^2 + 2cx_0y_0 + by_0^2$$

$z = ax_0^2 + 2cx_0y_0 + by_0^2$ → da fastidio

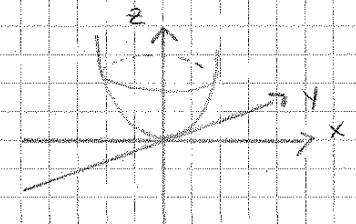
$Hf(x_0) \xrightarrow{\text{diagonalizzata}} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ → uso come assi coordinati quelli individuati dagli autovettori

$$(x_0, y_0)\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \lambda_1 x_0^2 + \lambda_2 y_0^2$$

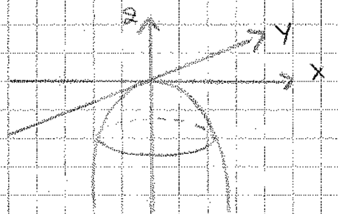
$z = \lambda_1 x_0^2 + \lambda_2 y_0^2$

paraboloide ellittico

se $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2$ →

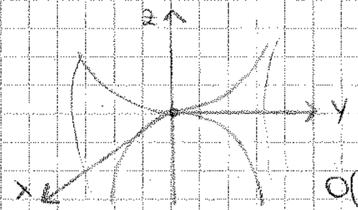


se $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ →



se $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ →

paraboloide iperbolico



O(0,0) p.to di s

mi consente un'approssimazione

FORMULA DI TAYLOR X FUNZIONI DI PIU' VARIABILI

1° ordine $f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \text{grad}\, f(\vec{x}_0) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) + \underset{\vec{x} \to \vec{x}_0}{o}(\|\vec{x} - \vec{x}_0\|)$ → approssimato al piano tange

2° ordine $f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \vec{\nabla} f(\vec{x}_0) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) + \frac{1}{2}(\vec{x} - \vec{x}_0)^T \cdot Hf(\vec{x}_0)(\vec{x} - \vec{x}_0) + \underset{\vec{x} \to \vec{x}_0}{o}(\|\vec{x} - \vec{x}_0\|^2)$

verticale

$\vec{x}_0$ e' un PUNTO CRITICO di $f(\vec{x}) \Leftrightarrow \vec{\nabla} f(\vec{x}_0) = \vec{0}$ (il piano tangente in x_0 e' orizzontale)

$\vec{x}_0$ e' un PUNTO DI MAX per $f(\vec{x}) \Leftrightarrow$ in un intorno di $\vec{x}_0$ $f(\vec{x}) \leq f(\vec{x}_0)$

$\vec{x}_0$ e' un PUNTO DI MIN per $f(\vec{x}) \Leftrightarrow$ in un intorno di $\vec{x}_0$ $f(\vec{x}) \geq f(\vec{x}_0)$

TEOREMA DI FERMAT

se $f(\vec{x}) \in C^1$ negli estremi (nei pti di max e min) si ha $\vec{\nabla} f = \vec{0}$

DIVERGENZA (CAMPI VETTORIALI) (2)

$\vec{F}: \text{dom}\vec{F} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$\boxed{\text{div}\vec{F} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}}$$

$$\int_V dx\,dy\,dz = \text{volume di } V$$

$V \to$ volume

$$\frac{d}{dt}\int_{V_t} dx\,dy\,dz = \int_{V_t} \text{div}\vec{F}\,dx\,dy\,dz$$

$V_t \to$ volume che dipende dal parametro t

$\Phi(t, \vec{x})$ traiettoria passanti per $\vec{x}$ al tempo $t = 0$

Traiettoria generata dal campo $\vec{F}$:

$$\begin{cases} \Phi' = F(\Phi) \\ \Phi(0, \vec{x}) = \vec{x} \end{cases} \rightsquigarrow \text{problema di Cauchy}$$

divergenza = come varia il volume sotto l'azione di un campo

se $\text{div}\vec{F} = 0 \Rightarrow$ non c'è variazione di volume

ROTORE (3)

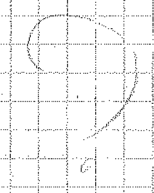
$\vec{F}: \text{dom}\vec{F} \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$\vec{F}$ derivabile

$$\boxed{\vec{\text{rot}}\,\vec{F} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ -\frac{\partial f_3}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \end{pmatrix}}$$

ES.

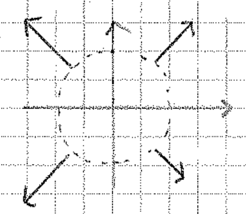
$$A = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta & 0 \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{Rotazione di un angolo } \vartheta \text{ intorno all'asse } z \text{ in senso antiorario}$$



$$\vec{\text{rot}}\,\vec{F}(\vec{x}) = \vec{\text{rot}}\,A\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\sin\vartheta \end{pmatrix}$$

ES.

$$F(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{ho un campo radiale}$$



$$\vec{\text{rot}}\,\vec{F}(\vec{x}) = 0$$

Es. $\vec{F}: dom\vec{F} \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$\boxed{\vec{F} = \vec{F}^{irrot} + \vec{F}^{sol}}$$

$\vec{rot}\,\vec{F}^{irr} = 0 \qquad div\,\vec{F}^{sol} = 0$

Sì, è sempre possibile (in modo non unico)

Es. $\vec{F}(\vec{x}) = B\vec{x}$ $\qquad B = B^{simm} + B^{asimm}$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ → ogni matrice si può scomporre in una matrice simmetrica e una antisimmetrica

la diagonale rimane lo stesso

$B^{simm} = \frac{1}{2}(B + B^t) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$ $\qquad rot(B^{simm}\vec{x}) = 0 \Rightarrow$ irrotazionale

$B^{asimm} = \frac{1}{2}(B - B^t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad div(B^{asm}\vec{x}) = 0 \Rightarrow$ solenoidale

Es. D: diagonale e con traccia nulla

$rot(D\vec{x}) = 0$

$div(D\vec{x}) = 0$

$$B = \underbrace{B^{simm} + D}_{\text{irrotazionale}} + \underbrace{B^{asimm} - D}_{\text{solenoidale}}$$

DERIVAZIONE DI FUNZIONE COMPOSTA

$\vec{f}: dom\vec{f} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$\vec{g}: dom\vec{g} \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$

$\vec{g}(\vec{f}(\vec{x})) = (g \circ f)(\vec{x})$

$g \circ f = h: dom\,h \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ $\qquad$ <= funzione composta

funzioni differenziabili nel loro dominio

$\vec{x}_0 \in dom\vec{f} \qquad y_0 = f(\vec{x}_0) \in dom\vec{g}$

$$\boxed{J\vec{h}(\vec{x}_0) = J(\vec{g} \circ \vec{f})(\vec{x}_0) = J\vec{g}(\vec{y}_0) \cdot J\vec{f}(\vec{x}_0) \quad \vec{y}_0 = \vec{f}(\vec{x}_0)}$$

<= REGOLA DELLA CATENA

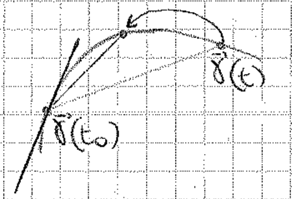
CURVE REGOLARI

curva

$\vec{\gamma}: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ I intervallo

$\vec{\gamma}$ e' curva **REGOLARE** se $\vec{\gamma} \in \mathcal{C}^1(I)$ e $\vec{\gamma}'(t) \neq 0$

$\vec{\gamma}$ e' **REGOLARE A TRATTI** se unione di un n° finito di int su cui $\vec{\gamma}$ e' regolare



$\lim_{t \to t_0} \frac{\vec{\gamma}(t) - \vec{\gamma}(t_0)}{t - t_0} = \vec{\gamma}'(t)$

=> vettore tangente alla curva

curva 1 $\vec{\gamma}: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ curva 2 $\vec{\delta}: J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

se esiste $\varphi: J \to I$ $\varphi \in \mathcal{C}^1(J)$ biettiva, $\varphi' \neq 0$

corrispond. biunivoca

CAMBIO DI PARAMETRIZZAZIONE (stesso sostegno)

Se $\vec{\delta} = \vec{\gamma} \circ \varphi$ => le curve $\vec{\gamma}$ e $\vec{\delta}$ sono **CONGRUENTI**

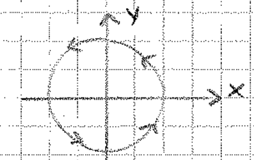
① Se, inoltre, $\varphi' > 0$ => sono **EQUIVALENTI**

② Se, inoltre, $\varphi' < 0$ => sono **ANTIEQUIVALENTI**

Questa classificazione definisce il verso di percorrenza.

ES.

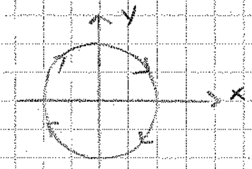
$\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ $0 \leq t \leq 2\pi$ X definire il verso guardo $\vec{\gamma}(0)$, poi $\vec{\gamma}(\frac{\pi}{2})$ ...



$\tau = -t \longrightarrow 2\pi \leq t \leq 0$

$\frac{d\tau}{dt} = -1$

$\vec{\gamma}(-\tau) = \vec{\delta}(\tau) = \begin{pmatrix} \cos(-t) \\ \sin(-t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$



→ verso opposto rispetto a prima

Lunghezza di un arco: $\vec{\gamma}: [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

$\vec{\gamma} \in \mathcal{C}^1$

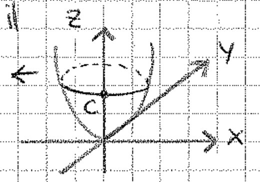
$l(\vec{\gamma}) = \int_a^b \|\vec{\gamma}'(t)\| \, dt$

Ascissa curvilinea

$\vec{s}(t) = \int_{t_0}^{t} \|\gamma'(\tau)\| \, d\tau$ ⇝ lunghezza della curva tra 2 p.ti

② $f(x,y)=0$ $\quad \underbrace{x^2+y^2}_{h(x,y)}=1$ $\quad h(x,y)=1$

A seconda di dove taglio il paraboloide, ottengo circonferenze di raggio diverso



$z=f(x,y)=c$ $\quad z=x^2+y^2$ PARABOLOIDE a sezione circolare

N.B. La descrizione implicita di una curva corrisponde a una curva di livello

Supponiamo di conoscere la curva di livello $f(x,y)=c$ e una descrizione parametrica della stessa curva $\vec{\gamma}(t)$ $t\in I$

Il sostegno di $\vec{\gamma}$ coincide con $f(x,y)=c$

$f(\gamma_1(t),\gamma_2(t))=c$

$\frac{d}{dt}f(\vec{\gamma}(t))=0 \Rightarrow \vec{\nabla}f\cdot\vec{\gamma}'(t)=0$ → Ho applicato la regola della catena

xchè f è una costante

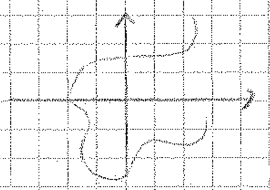
cioè

N.B. Il gradiente di $f(x,y)$ è ortogonale alle curve di livello $f(x,y)=c$

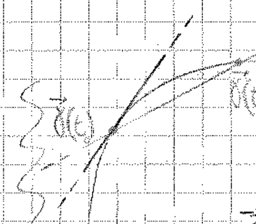
LEZIONE 3 $\qquad$ 21.10.2011

Es. $\vec{\gamma}(t)$ $t\in\mathbb{R}$ $\vec{\gamma}\in\mathbb{R}^2$

$\vec{\gamma}'(t)=\begin{pmatrix}\gamma_1'(t)\\ \gamma_2'(t)\end{pmatrix}$



1. $\vec{\gamma}(t)$ $\quad t\in I\subset\mathbb{R}$ $\quad \vec{\gamma}\in\mathbb{R}^2$ $\quad$ forma PARAMETRICA
2. $z=f(x,y)$ $\quad f(x,y)=c$ $\quad$ forma IMPLICITA
3. $y=\varphi(x)$ o $x=\Psi(y)$ $\quad$ forma ESPLICITA



retta SECANTE: $\vec{\gamma}(t_0)+\frac{\vec{\gamma}(t_0+\Delta t)-\vec{\gamma}(t_0)}{\Delta t}$

retta TANGENTE: $\vec{\gamma}(t_0)+\vec{\gamma}'(t_0)(t-t_0)$

eq. parametrica

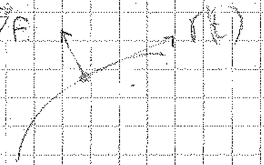
Ho fatto tendere $\vec{\gamma}(t_0+\Delta t)$ a $\vec{\gamma}($

2. $f(x,y)=c$ $\quad \vec{\gamma}(t)$ curva di livello

$f(\vec{\gamma}(t))=c$

$\frac{d}{dt}f(\vec{\gamma}(t))=0 \Rightarrow \vec{\nabla}_{x,y}f(x,y)\cdot\vec{\gamma}'(t)=0$ ⇝ il gradiente di f è ⊥ alla curva di livello

↳ ci dà la max pendenza ed è ⊥ alle curve di livello



3. $f(x,y)=c$

$\vec{\nabla}f\neq\vec{0}$ $\quad f\in C^1$ $\quad \Rightarrow$ è regolare

$\frac{\partial f}{\partial y}\neq0 \Rightarrow$ localmente $y=\varphi(x)$

$\frac{\partial f}{\partial x}\neq0 \Rightarrow$ localmente $x=\Psi(y)$

↳ spiegato nell'es dopo

SUPERFICI

① $\vec{\sigma}(u,v) = \begin{pmatrix} \sigma_1(u,v) \\ \sigma_2(u,v) \\ \sigma_3(u,v) \end{pmatrix}$ forma PARAMETRICA

x righe x colonne

$$\partial\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \nabla_{uv}\sigma_1 \\ \nabla_{uv}\sigma_2 \\ \nabla_{uv}\sigma_3 \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial u}, \frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial v} \right) = 3 \times 2$$

$$\vec{n} = \frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial u} \wedge \frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial v}$$

$\partial\vec{\sigma}$ ha rango 2 ⇝ $\frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial u}$ e $\frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial v}$ sono l.i.

$\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

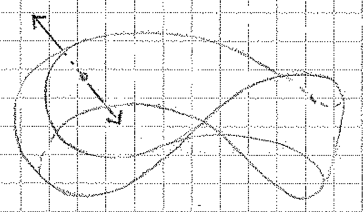
$(h,k) \to (u,v)$

biunivoca, Φ e Φ^{-1} continue : $\Phi \in C^1$, $\partial\Phi$ 2x2 di rango 2 < det > 0 / det < 0 ⇒ la superficie è ORIENTABILE

Esistono anche superfici NON ORIENTABILI (es. nastro di Möbius)

↓

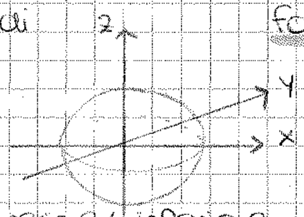
$\pm\vec{n}$ le curve, invece, sono sempre ORIENTABILI



② $w = f(x,y,z)$ superficie di livello forma IMPLICITA

$f(x,y,z) = c$ → $= 0$

Es. $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ ellissoide nello spazio



se $a=b=c$: sfera

$z = \pm\sqrt{\frac{1}{c}\left(1 - ax^2 - by^2\right)}$ superiore/inferiore ⇝ ho descritto LOCALMENTE la superficie

se $f \in C^1$ e $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) \neq 0$ esiste $\varphi(x,y)$: $z = \varphi(x,y)$ ⇝ si può esplicitare la superfic

⇝ forma ESPLICITA

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial\varphi(x_0,y_0)}{\partial x} &= -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)}{\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)} \\ \frac{\partial\varphi(x_0,y_0)}{\partial y} &= -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)}{\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)} \end{aligned}}$$

$f(x,y,\varphi(x,y)) = c$ ⇝ applico la REGOLA DELLA CATENA

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,\varphi(x,y)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,\varphi(x,y)) + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\varphi(x,y)) \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y) = \vec{\nabla}_{x,y,z} f \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x} \end{pmatrix} = 0 \qquad \frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,\varphi(x,y)) = \dots = \vec{\nabla}_{x,y,z} f \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} \end{pmatrix} = 0$$

$\tilde{\sigma}(x,y,\varphi(x,y))$ $\partial\tilde{\sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} \end{pmatrix}$ le colonne sono vettori tg alla superficie

$$\frac{\partial}{\partial (y,z)} \vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Supponiamo che abbia rango 2 ($\det \neq 0$)

$\Rightarrow$ localmente si può esprimere in modo esplicito la curva

$$\begin{cases} y = \varphi_1(x) \\ z = \varphi_2(x) \end{cases} \qquad \tilde{\gamma}(x) = \begin{pmatrix} x \\ \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \end{pmatrix}$$ forma ESPLICITA

↳ e' come se usassi come parametro x

$$\vec{F}(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x)) = \vec{c}$$

$$\frac{df_1}{dx}(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x)) = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y}\cdot \varphi_1'(x) + \frac{\partial f_1}{\partial z}\cdot \varphi_2'(x) = \vec{\nabla}_{x,y,z} f_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \varphi_1'(x) \\ \varphi_2'(x) \end{pmatrix}$$

$$\frac{df_2}{dx}(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x)) = \vec{\nabla}_{x,y,z} f_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \varphi_1'(x) \\ \varphi_2'(x) \end{pmatrix}$$

Noto $\vec{F}$ e $\vec{\nabla}_{x,y,z} f$ posso ricavare φ_1' e φ_2'

$$\tilde{\gamma}(x) = \begin{pmatrix} x \\ \gamma_1(x) \\ \gamma_2(x) \end{pmatrix} \qquad \tilde{\gamma}'(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma_1'(x) \\ \gamma_2'(x) \end{pmatrix}$$ vettore tg_t alla curva

$$\vec{F}(x,y,z) = \vec{c}$$

MASSIMI & MINIMI VINCOLATI

Premessa

$y = g(x) = x^2$

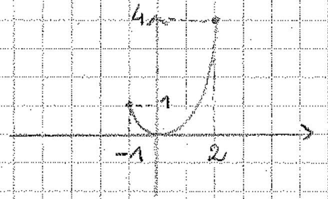
non ha max e ha un min in $x_0 = 0$

↳ ricerca di max e min liberi

la funzione che prima non aveva max, ora ne ha

$g(x) = x^2$ con il vincolo che $x \in [-1, 2]$

↓ sottoinsieme del dominio



$x_0 = 0$ pto di min

$x_1 = 2$ " " max globale

$x_2 = -1$ " " max locale per $x \in [-1, 1)$

↳ ricerca di max e min vincolati

Voglio spostare questa situazione nel caso BIDIMENSIONALE

Es. Cercare estremi di $z = g(x,y)$, $g \in C^1$ con il vincolo che (x,y) sodisfino l'eq. $f(x,y) = c$ ← forma implicita (2)
$(x,y) \in A \subseteq \mathbb{R}^2$, $f \in C^1$

N.B. Teniamo conto dell'osservazione precedente: "Negli estremi vincolati su una curva (non negli estremi della curva) il $\vec{\nabla}_{x,y} g$ e' $\perp$ alla curva", ma se la curva e' descritta in modo implicito $(f(x,y) = c)$ il $\vec{\nabla}_{x,y} f$ e' $\perp$ alla curva.

Cioe' $\boxed{\vec{\nabla}_{x,y} g = \lambda \vec{\nabla}_{x,y} f}$ $\rightsquigarrow$ g e f sono $\parallel$

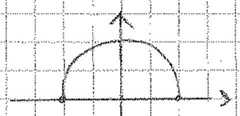
↳ f che descrive il vincolo $f(x,y) = c$

g funzione di cui cerco gli estremi

NB

$$\begin{cases} \vec{\nabla}_{x,y} g = \lambda \vec{\nabla}_{x,y} f \\ f(x,y) = c \qquad (x,y) \in A \end{cases}$$

Es. $g(x,y) = x^2 + xy + y^2$ con il vincolo $f(x,y) = x^2 + y^2 = 1 \quad y \geq 0$ ← forma implicita



$$\begin{cases} \vec{\nabla} g = \lambda \vec{\nabla} f \\ x^2 + y^2 = 1 \quad y \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y = \lambda \cdot 2x \\ x + 2y = \lambda \cdot 2y \\ x^2 + y^2 = 1 \quad y \geq 0 \end{cases}$$

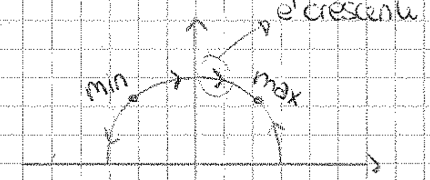
oss. $x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow (0,0)$ non sodisfa il vincolo
$y = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow$ " " " "
↳ così poi posso dividere per x e y

$$\begin{cases} \lambda = 1 + \frac{y}{2x} \\ \lambda = 1 + \frac{x}{2y} \end{cases} \Rightarrow \cancel{1} + \frac{y}{2x} = \cancel{1} + \frac{x}{2y} \Rightarrow \cancel{2}y^2 = \cancel{2}x^2$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \quad y \geq 0 \\ x^2 = y^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 + x^2 = 1 \qquad 2x^2 = 1 \qquad x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad y = (+)\frac{1}{\sqrt{2}}$$

x che' $y \geq 0$

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$



Se tra min e max non ci sono altri estremi, vuol dire che lì la funzione e' crescente.

→ Metto le frecce x rappresentare l'andam[ento] di g sulla curva vincolo

LEZIONE 4 28.10.2011

CALCOLO INTEGRALE PER FUNZIONI DI PIU' VARIABILI

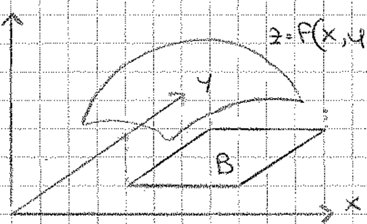
$f: B = [a,b] \times [c,d] \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ → f e' una funzione scalare

f limitato in B

→ rettangolo

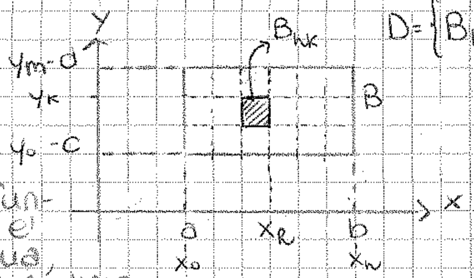
$C(f,B) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in B \text{ e } 0 \leq z \leq f(x,y) \text{ oppure } f(x,y) \leq z \leq 0\}$

Insieme



$z = f(x,y)$: superficie topografica

C : volume compreso tra la sup. topografica e il rettangolo B ⇒ CILINDROIDE



$D = \{B_{hk}\}$

$B_{hk} = [x_{h-1}, x_h] \times [y_{k-1}, y_k]$

→ Suddivido il rettangolo in tanti sottointervallini lungo x e y e ottengo tanti rettangolini

se la funzione e' continua e' il MINIMO

$m_{hk} = \inf_{(x,y) \in B_{hk}} f(x,y)$ → estremo inferiore

$M_{h,k} = \sup_{(x,y) \in B_{hk}} f(x,y)$ → estremo superiore

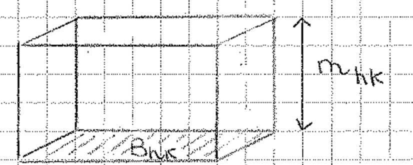
se la funzione e' continua, e' il MASSIMO

$|B_{hk}| = (x_h - x_{h-1})(y_k - y_{k-1})$

area del rettangolino B_{hk}

somma inferiore : $s(D,f) = \sum_{h=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} m_{hk} |B_{hk}|$

approssimazione dell' integrale x difetto

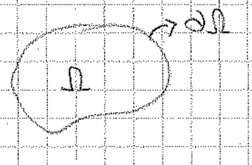


$$|\Omega| = \iint_B \chi_\Omega(x,y)\,dx\,dy$$

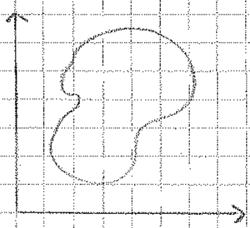
↳ volume del cilindro di base Ω e altezza 1 $\Rightarrow$ $|\Omega|$ e' la misura di Ω

TEOREMA

Un insieme limitato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ e' misurabile $\Leftrightarrow$ la sua frontiera $\partial\Omega$ ha misura nulla.



$\vec{\gamma} \in C^1$



$|\vec{\gamma}| = 0$

e' chiusa

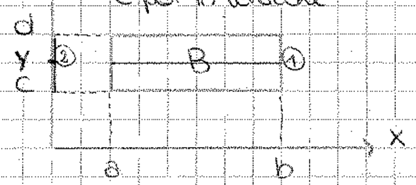
FORMULE DI RIDUZIONE (x rettangoli)

$B = [a,b] \times [c,d]$ f integrabile su B

$$\boxed{\iint_B f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \underbrace{\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)}_{g(y)} dy = \int_c^d g(y)\,dy}$$

(1) INTEGRALI PER ORIZZONTALI

integro in orizzontale e poi in verticale



Questa formula e' vera se:

- $\int_a^b f(x,y)\,dx$
- $\int_c^d g(y)\,dy$

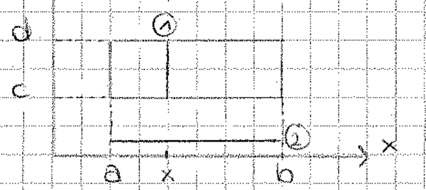
esistono finiti

$$\boxed{\iint_B f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \underbrace{\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)}_{h(x)} dx = \int_a^b h(x)\,dx}$$

(2) INTEGRALI PER VERTICALI

integro in verticale e poi in orizzontale

Stessa condizione di prima

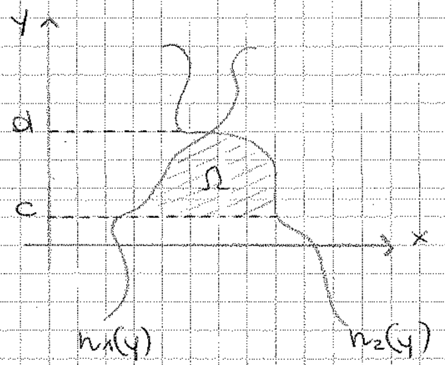


se sono valide le formule 1 e 2:

$$\boxed{\iint_B f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right) dx}$$

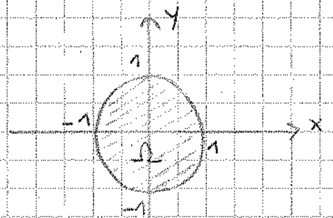
(3) TEOREMA DI INVERSIONE DELL'ORDINE D'INTEGRAZ[IONE] O TEOREMA DI GUIDO FUB[INI]

Def. Ω si dice ORIZZONTALMENTE CONVESSO (o semplice rispetto all'asse x) se
$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \le y \le d \text{ e } h_1(y) \le x \le h_2(y)\}$



Oss. Ci sono insiemi che sono sia ORIZZONTALMENTE che VERTICALMENTE CONVESSI.

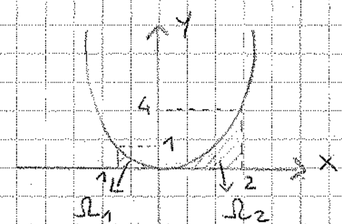
ES $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1\}$



VERT. CONV.: $-1 \le x \le 1$ e $-\sqrt{1-x^2} \le y \le +\sqrt{1-x^2}$

ORIZZ. CONV.: $-1 \le y \le 1$ e $-\sqrt{1-y^2} \le x \le +\sqrt{1-y^2}$

Oss.



$-1 \le x \le 2$ e $0 \le y \le x^2$ ⟹ VERT. CONV.

Non è orizzontalmente convesso, però si può esprimere Ω come l'unione di due insiem
Ω_1 e Ω_2 che sono orizzontalmente convessi. $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$

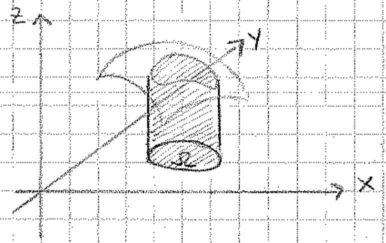
$\Omega_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le 1 \text{ e } -1 \le x \le -\sqrt{y}\}$

$\Omega_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le 4 \text{ e } \sqrt{y} \le x \le 2\}$

OSS. INTERPRETAZIONE DELL'INTEGRALE DOPPIO

1) VOLUME

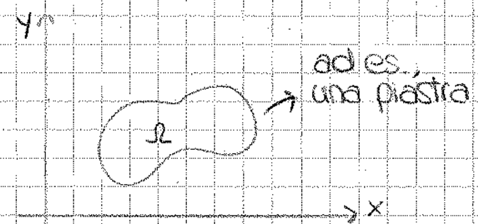
$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy \qquad f(x,y)\geq 0 \quad \leadsto$ volume del cilindro



2) MASSA TOTALE

Interpreto $f(x,y)$ come densità

$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy \quad \leadsto$ massa totale di Ω



PROPRIETÀ

1. LINEARITÀ

$$\iint_\Omega \left(a f(x,y) + b g(x,y)\right) dx\,dy = a\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy + b\iint_\Omega g(x,y)\,dx\,dy$$

2. POSITIVITÀ

Se $f(x,y)\geq 0 \Rightarrow \iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy \geq 0$

3. DEL CONFRONTO

Se $f(x,y)\leq g(x,y) \Rightarrow \iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy \leq \iint_\Omega g(x,y)\,dx\,dy$

$|a+b|\leq|a|+|b|$

4. DI MAGGIORAZIONE (disuguaglianza modulare o disuguaglianza triangolare)

$\left|\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy\right| \leq \iint_\Omega |f(x,y)|\,dx\,dy$

x che riguarda i valori assoluti

5. TEOREMA DELLA MEDIA

Def. MEDIA INTEGRALE: $\frac{1}{|\Omega|}\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy \quad \leadsto$ valor medio della funzione in Ω

$|\Omega| = \iint_\Omega dx\,dy$ L'area di un quadrilatero si calcola col prodotto esterno

$$\left|\begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} c \\ d \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ad-bc \end{pmatrix}\right| = |ad-bc| = |\det A| \rightsquigarrow \text{Area di } \Omega$$

Area di $\Omega' = 1 \Rightarrow |\Omega| = |\Omega'| \cdot |\det A|$ → misura il cambiamento dell'area

$$du\,dv = |\det A|\,dx\,dy$$

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

$$A(u,v) = \begin{pmatrix} au + cv \\ bu + dv \end{pmatrix}$$

$$\partial A(u,v) = A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

Sviluppo di Taylor

$$\Phi(u,v) = \Phi(u_0,v_0) + \partial\Phi(u_0,v_0)\begin{pmatrix} u-u_0 \\ v-v_0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\Omega'} f(\Phi_1(u,v), \Phi_2(u,v)) \cdot |\det \partial\Phi|\,du\,dv}$$

$$\Phi(u,v) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_1(u,v) \\ \Phi_2(u,v) \end{pmatrix}$$

$\Updownarrow$

$x = \Phi_1(u,v)$

$y = \Phi_2(u,v)$

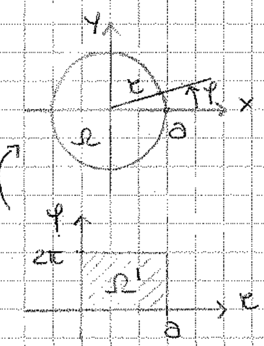
$\Rightarrow$ come in ANALISI 1: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt$

$x = \varphi(t)$

$\varphi(c) = a \quad \varphi(d) = b$

Es. $\iint_\Omega dx\,dy = ?$

$\Omega: x^2+y^2 \le a^2$



$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$ COORDINATE POLARI

$$|\det \partial\Phi| = \left|\det\begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}\right| = |r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi| = r$$

$$\iint_\Omega dx\,dy = \iint_{\Omega'} r\,dr\,d\varphi = \int_0^a\left(\int_0^{2\pi} r\,d\varphi\right)dr = \int_0^a [r\varphi]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\,dr = \int_0^a 2\pi r\,dr = \left[2\pi\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{r=a} = \pi a^2$$

somma superiore = $S = S(D,f) = \sum_{i,j,h} M_{ijh} \underbrace{(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})(z_h - z_{h-1})}_{\text{volume del parallelepipedo}}$

Se $\inf_D S(D,f) = \sup_D s(D,f)$ $\Rightarrow$ f è INTEGRABILE su B

$\Rightarrow$ tale valore è detto INTEGRALE TRIPLO di f su B ed è indicato con $\int_B f$, $\iiint_B f$, $\iiint_B f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$

INTEGRALI TRIPLI (su ∀ regione)

$\Omega \in \mathbb{R}^3$

Sia B un parallelepipedo che contiene $\Omega \subseteq B$ e sia $\chi_\Omega = \begin{cases} 1 & \text{se } (x,y,z) \in \Omega \\ 0 & \text{se } (x,y,z) \notin \Omega \end{cases}$

e la misura di Ω $|\Omega| = \iiint_B \chi_\Omega\, dx\,dy\,dz = \iiint_\Omega dx\,dy\,dz$

$\Rightarrow \iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_B \chi_\Omega(x,y,z)\, f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$

METODI DI RIDUZIONE PER FILI

(// all'asse x, y o z)

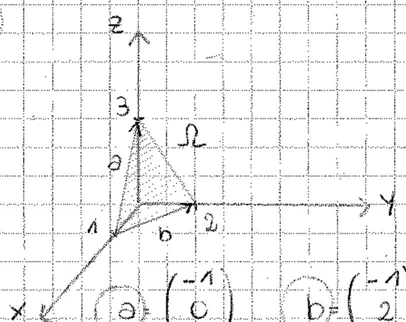
Def. $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ si dice SEMPLICE (o normale o convesso) rispetto all'asse x (o y o z)

$\Leftrightarrow$ è della forma $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (y,z) \in D_1 \subseteq \mathbb{R}^2 \text{ e } g_1(y,z) \le x \le h_1(y,z)\}$

$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,z) \in D_2 \subseteq \mathbb{R}^2 \text{ e } g_2(x,z) \le y \le h_2(x,z)\}$

$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \in D_3 \subseteq \mathbb{R}^2 \text{ e } g_3(x,y) \le z \le h_3(x,y)\}$

Es.



$\Omega : \begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ z \ge 0 \end{cases}$

$a = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\pm\, a \wedge b = \pm \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} i & j & k \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$

coordinate 3 − 1 coordinate 2 − 1

normale uscente $N = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

piano passante x (1,0,0) // a N

$6(x-1) + 3y + 2z = 0$

$6x + 3y + 2z = 6$ $\Rightarrow$ $\Omega : \begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ z \ge 0 \\ 6x + 3y + 2z \le 6 \end{cases}$ xchè l'origine sta sotto il piano

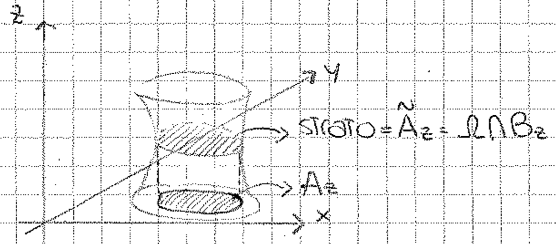
METODI DI RIDUZIONE PER STRATI

(// al piano (x,y), (y,z) o (x,z))

$\Omega \in \mathbb{R}^3$ la proiezione di Ω sull'asse z e' $[a,b]$

$\tilde{A}_z = \Omega \cap B_z$ A_z proiezione di $\tilde{A}_z$ nel piano (x,y)

B_z = piani // al piano (x,y) al livello z, cioe' $B_{z_0} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = z_0\}$

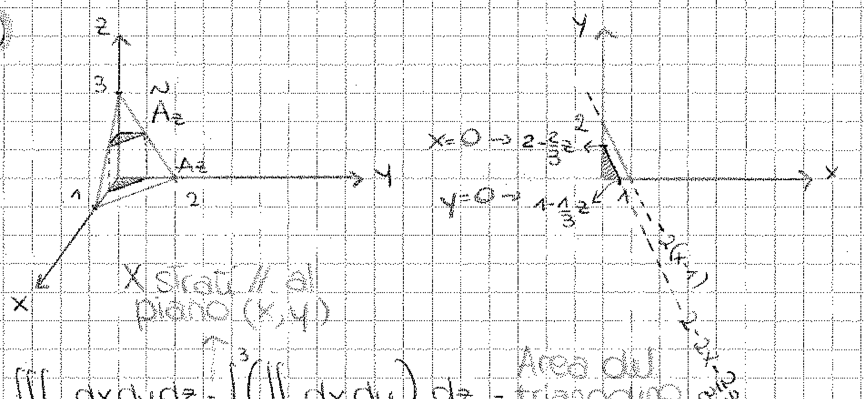


INTEGRALE x STRATI // A (x,y)

$$\boxed{\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b \left(\iint_{A_z} f(x,y,z)\,dx\,dy \right) dz}$$

ai prima

Es.



$6x+3y+2z=6$

$z=0 \Rightarrow 6x+3y=6 \Rightarrow y=-2(x-1)$

$3y = 6-6x-2z \Rightarrow y = 2-2x-\frac{2}{3}z$

retta // alla precedente

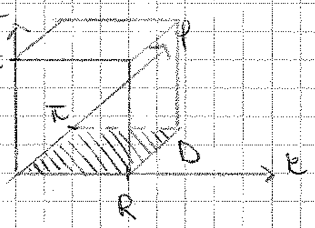
$$\iiint_\Omega dx\,dy\,dz = \int_0^3 \left(\iint_{A_z} dx\,dy \right) dz = \text{Area del triangolo}$$

$$= \int_0^3 \frac{1}{2}\left(2-\frac{2}{3}z\right)\left(1-\frac{1}{3}z\right) dz = \int_0^3 \left(1-\frac{1}{3}z\right)^2 dz = \int_0^3 1+\frac{1}{9}z^2-\frac{2}{3}z\,dz =$$

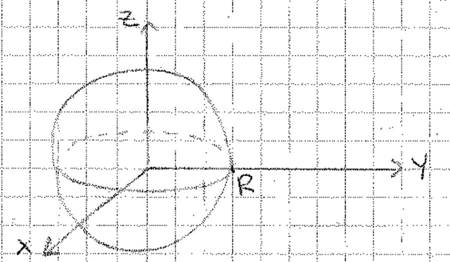
$$= \left[z + \frac{1}{27}z^3 - \frac{1}{3}z^2 \right]_{z=0}^{z=3} = \cancel{3}+1-\cancel{3} = 1$$

$x_G = \frac{1}{|\Omega|} \iiint_\Omega x\,dx\,dy\,dz$ ⟶ ascissa del baricentro

$I_z = \iiint_\Omega (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$ ⟶ momento di inerzia rispetto a z



$\vec{\Phi}$



Ω' è un parallelepipedo

x fili // a θ

sfera di raggio R

$$V = \iiint_\Omega dx\,dy\,dz = \iiint_{\Omega'} \underbrace{r^2 \sin\varphi}_{\det J\Phi}\, dr\, d\varphi\, d\theta = \iint_D r^2 \sin\varphi \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right) dr\, d\varphi = 2\pi \iint_D r^2 \sin\varphi\, dr\, d\varphi$$

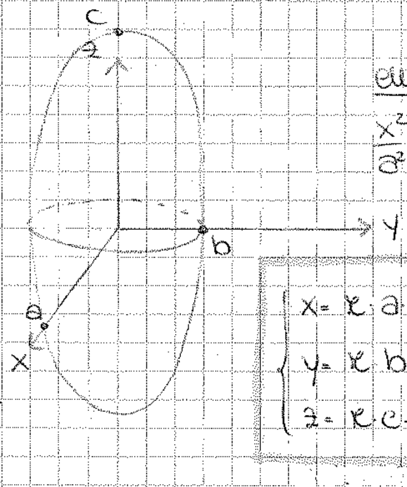
$$= 2\pi \int_0^{\pi} \sin\varphi\, d\varphi \int_0^R r^2\, dr = 2\pi \left[-\cos\varphi\right]_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} \cdot \left[\frac{r^3}{3}\right]_{r=0}^{r=R} =$$

$$= 2\pi \left[1+1\right] \cdot \left[\frac{R^3}{3}\right] = \frac{4}{3}\pi R^3$$

② COORDINATE ELLITTICHE

ES
$$|\det J\Phi| = \begin{vmatrix} a\sin\varphi\cos\theta & ar\cos\varphi\cos\theta & \dots \\ b\sin\varphi\cos\theta & br\cos\varphi\sin\theta & \dots \\ c\cos\varphi & -cr\sin\varphi & \dots \end{vmatrix} =$$

$$= (a \cdot b \cdot c) \cdot (r^2 \sin\varphi)$$



ellissoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$\begin{cases} x = r\, a \sin\varphi\cos\theta & 0 \le r \le \\ y = r\, b \cdot \sin\varphi\sin\theta & 0 \le \varphi \le \\ z = r\, c \cdot \cos\varphi & 0 \le \theta \le \end{cases}$$

$$V = \iiint_\Omega dx\,dy\,dz = \iiint_{\Omega'} (r^2 \sin\varphi)\, a\, b\, c\; dr\, d\varphi\, d\theta =$$

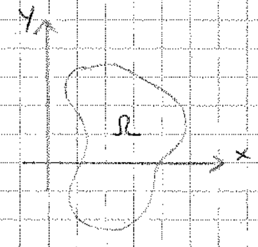
$$= abc \cdot 2\pi \cdot 2 \cdot \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1 = \frac{4}{3}\pi\, abc$$

$r^2\sin^2\varphi\cos^2\theta + r^2\sin^2\varphi\sin^2\theta + r^2\cos^2\varphi$

$= r^2\sin^2\varphi(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + \cos^2\varphi$

$= r^2$

MASSA, BARICENTRO & MOMENTI D'INERZIA NEL PIANO



$\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ regione limitata e regolare

$\mu : \mu(x,y)$ densità di massa di Ω

massa totale $= m = \iint_\Omega \mu(x,y)\, dx\, dy$

coordinate del baricentro: $x_B = \dfrac{1}{m} \iint_\Omega x \cdot \mu(x,y)\, dx\, dy$

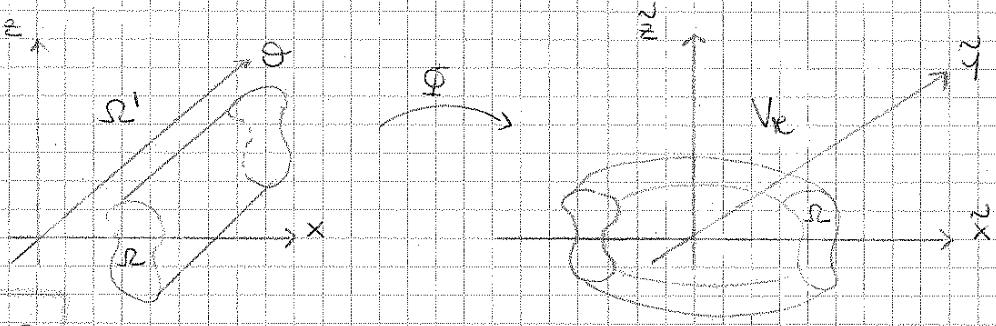
$y_B = \dfrac{1}{m} \iint_\Omega y \cdot \mu(x,y)\, dx\, dy$

$z_B = \dfrac{1}{m} \iint_\Omega z \cdot \mu(x,y)\, dx\, dy$

momenti di inerzia rispetto a r: $I_r = \iint_\Omega d_r^2(x,y) \cdot \mu(x,y)\, dx\, dy$

d_r = distanza del p.to (x,y) dalla retta r

Dim.



$$\boxed{\Phi : \begin{cases} \tilde{x} = x\cos\theta \\ \tilde{y} = x\sin\theta \\ \tilde{z} = z \end{cases}}$$

$$\boxed{|\det J\Phi| = \begin{vmatrix} \cos\theta & -x\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & x\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x\cos^2\theta + x\sin^2\theta = |x| = x} \quad x>0$$

$$\iiint_{V_E} d\tilde{x}\,d\tilde{y}\,d\tilde{z} = \iiint_{\Omega'} x\,dx\,d\theta\,dz = \iint_{\Omega}\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right) x\,dx\,dz = 2\pi\iint_{\Omega} x\,dx\,dz =$$

fili // a θ

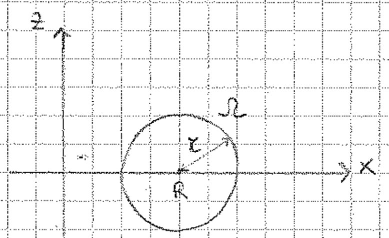
Non ho + l'integr. triplo, ma solo un integrale doppio

$$|\Omega| = \iint_{\Omega} dx\,dz \qquad = 2\pi \underbrace{\iint_{\Omega} x\,dx\,dz \frac{|\Omega|}{|\Omega|}}_{x_G} = \boxed{2\pi|\Omega|\,x_G}$$

Volume del solido di rotazione

(rotazione di Ω incluso nel piano (x,z) con x≥0 intorno all'asse z)

Es.



$0<r\leq R$

Rotazione attorno a z

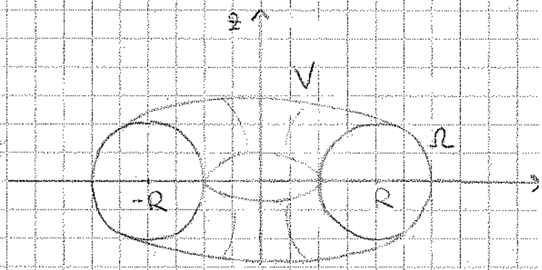


figura toroidale

$\Omega = \{(x,y) \subseteq \mathbb{R}^2 : (x-R)^2 + z^2 \leq r^2\}$ — R: il centro

V: solido di rotazione di Ω attorno a z

$$\iiint_V dx\,dy\,dz = 2\pi|\Omega|\,x_G = 2\pi\cdot\pi r^2\cdot R = 2\pi^2 r^2 R$$

LEZIONE 6 11.11.2011

INTEGRALI SU CURVE

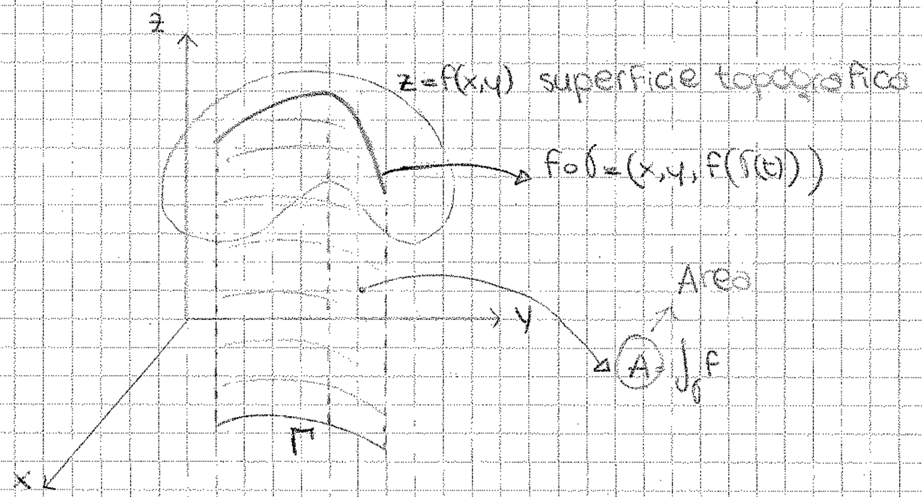
$\gamma: I=[a,b] \to \mathbb{R}^m$ $(m \geq 2)$ arco di curva regolare , $\Gamma = \gamma(I)$ sostegno di γ

$f: \mathrm{dom} f \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ definita almeno su Γ, cioè tale che $\Gamma \subseteq \mathrm{dom} f$

$f \circ \gamma = f(\gamma(t)) : [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua (a tratti) su $[a,b]$

Def. L'INTEGRALE CURVILINEO di f su γ è il n° $\boxed{\int_\gamma f = \int_a^b f(\vec{\gamma}(t)) \cdot \| \vec{\gamma}'(t) \| \, dt}$

ESSO è anche chiamato INTEGRALE CURVILINEO DI 1^ SPECIE



Γ = sostegno di $\vec{\gamma}$ = sostegno di $\vec{\delta}$ $(\vec{\delta} = \vec{\gamma} \circ \varphi)$

PROPOSIZIONE: Per ogni curva δ congruente a γ : $\int_\delta \vec{F} = \int_\gamma \vec{F}$

COROLLARIO: L'integrale curvilineo di una funzione NON cambia se all'arco di curva sostituiamo l'arco ad esso opposto $\int_\gamma \vec{F} = \int_{-\gamma} \vec{F}$ → Non dipende dall'orientamento

BARICENTRO & MOMENTI D'INERZIA DI UNA CURVA

μ = densità Γ: un filo

$m = \int_\Gamma \mu$

$I = \int_\Gamma d^2 \cdot \mu$ d = distanza di un p.to che sia sul sostegno di Γ da un p.to assegnato

$x_G = \frac{1}{m} \int_\Gamma x\mu$

$I_x = \int_\Gamma (y^2+z^2) \cdot \mu$

$y_G = \frac{1}{m} \int_\Gamma y\mu$

$I_y = \int_\Gamma (x^2+z^2) \cdot \mu$

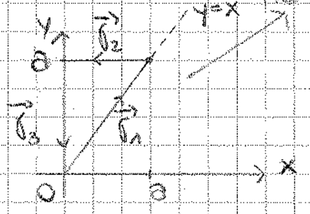
$z_G = \frac{1}{m} \int_\Gamma z\mu$

$I_z = \int_\Gamma (x^2+y^2) \cdot \mu$

ES. integrale di linea

$\vec{F}(x,y) = (x \cdot y, 1)$

Ho 3 curve



$\vec{\gamma}_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$ $\quad 0 \le t \le a$

$-\vec{\gamma}_2(t) = \begin{pmatrix} t \\ a \end{pmatrix}$ $\quad 0 \le t \le a$ ← in realtà: $a \le t \le 0$

$\vec{\gamma} = \vec{\gamma}_1 \cup \vec{\gamma}_2 \cup \vec{\gamma}_3$ $\qquad -\vec{\gamma}_3(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}$ $\quad 0 \le t \le a$ ← in realtà: $a \le t \le 0$

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot \vec{\tau} = \int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot \vec{\tau} - \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot \vec{\tau} - \int_{\gamma_3} \vec{F} \cdot \vec{\tau} =$$

$$= \int_0^a \begin{pmatrix} \overset{x \cdot y}{t^2} \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{\gamma}_1'} dt - \int_0^a \begin{pmatrix} at \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{\gamma}_2'} dt - \int_0^a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{\gamma}_3'} dt =$$

$$= \int_0^a t^2 + 1 \, dt - \int_0^a at \, dt - \int_0^a dt =$$

$$= \left[\frac{t^3}{3} + t \right]_0^a - \left[\frac{at^2}{2} \right]_0^a - \left[t \right]_0^a =$$

$$= \frac{a^3}{3} + \cancel{a} - \frac{a^3}{2} - \cancel{a} = -\frac{1}{6} a^3 + 0a$$

INTEGRALI SUPERFICIALI

regione

Sia $\vec{\sigma}: R \to \mathbb{R}^3$ (con $R \subseteq \mathbb{R}^2$) una calotta regolare avente sostegno Σ e dominio una regione compatta e misurabile R. Sia $\nu = \nu(u,v)$ il suo vettore normale nel punto $P = \vec{\sigma}(u,v)$. Sia poi $f: \text{dom} f \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una funzione definita almeno su Σ.
Supponiamo che la funzione composta $f \circ \vec{\sigma}$ sia generalmente continua su R.

$$\vec{\nu} = \pm \left(\frac{\partial \vec{\sigma}(u,v)}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{\sigma}(u,v)}{\partial v} \right)$$

Integrale doppio

Def. L'**INTEGRALE SUPERFICIALE** di f su $\vec{\sigma}$ è il n° $\boxed{\int_\sigma f = \int_R f(\vec{\sigma}(u,v)) \, \|\nu(u,v)\| \, du \, dv}$

norma del vettore normale

Non dipende dall'orientamento

PROPOSIZIONE: Sia $\vec{\sigma}: R \to \mathbb{R}^3$ una calotta regolare di sostegno Σ e sia f una funzione def su Σ tale che $f \circ \vec{\sigma}$ sia generalmente continua su R. Allora:

$$\int_{\tilde{\sigma}} f = \int_\sigma f \quad \text{x ogni } \tilde{\sigma} \text{ congruente a } \sigma.$$

INTEGRALI DI FLUSSO

Il flusso e' attraverso una superficie

Def Si dice **INTEGRALE DI FLUSSO** del campo $\vec{F} \in \mathbb{R}^3$ su σ l'integrale superficiale di $\vec{F}\cdot\vec{n}$ su σ cioe' $\underbrace{\int_\sigma \vec{F}\cdot\vec{n}}_{\text{componente normale del campo}}$, dove $\vec{\nu} = \pm\left(\frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial u} \wedge \frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial v}\right)$ e $\vec{n} = \frac{\nu}{\|\nu\|}$ versore normale a σ

$\vec{\sigma}: R \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$\vec{\sigma}(u,v)$

$$\boxed{\int_\sigma \vec{F}\cdot\vec{n} = \iint_R \underbrace{\vec{F}(\sigma_1(u,v), \sigma_2(u,v), \sigma_3(u,v)) \cdot \frac{\nu}{\|\nu\|}\,\|\nu\|}_{\text{Integrale superficiale}}\, du\, dv = \iint_R \vec{F}(\vec{\sigma}(u,v))\cdot\vec{\nu}\, du\, dv}$$

Es. $\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} y \\ -x \\ z \end{pmatrix}$ $\vec{n}$ vettore uscente dalla superficie della sfera di raggio r

$$\vec{\sigma}(\vartheta,\varphi) = \begin{pmatrix} r\sin\vartheta\cos\varphi \\ r\sin\vartheta\sin\varphi \\ r\cos\vartheta \end{pmatrix} \to \text{superficie della sfera}$$

$$\overbrace{\frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial\vartheta} \wedge \frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial\varphi}}^{\vec{\nu}} = \begin{pmatrix} r^2\sin^2\vartheta\cos\varphi \\ r^2\sin^2\vartheta\sin\varphi \\ r^2\sin\vartheta\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

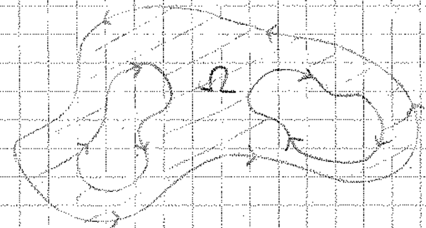
$$\iint_D \begin{pmatrix} r\sin\vartheta\sin\varphi \\ -r\sin\vartheta\cos\varphi \\ r\cos\vartheta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r^2\sin^2\vartheta\cos\varphi \\ r^2\sin^2\vartheta\sin\varphi \\ r^2\sin\vartheta\cos\vartheta \end{pmatrix} d\vartheta\, d\varphi = \iint_D \cancel{r^3\sin^3\vartheta\sin\varphi\cos\varphi} - \cancel{r^3\sin^3\vartheta\sin\varphi\cos\varphi}$$

$$+ r^3\sin\vartheta\cos^2\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi} r^3\sin\vartheta\cos^2\vartheta\, d\vartheta\right)d\varphi = 2\pi \cdot \int_0^{\pi} r^3\sin\vartheta\cos^2\vartheta\, d\vartheta$$

$$= -2\pi r^3\left[\frac{\cos^3\vartheta}{3}\right]_0^{\pi} = -2\pi r^3\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi r^3$$ volume sfera

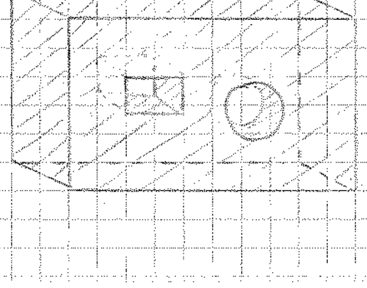
TEOREMI DI GAUSS, GREEN E STOKES

la sua frontiera e' un n° finito di archi di Jordan



Ω aperto limitato G-ammissibile in $\mathbb{R}^2$

Arco di Jordan = arco chiuso e semplice



Ω aperto limitato G-ammissibile in $\mathbb{R}^3$ =
$\Sigma = \partial\Omega$ e' l'unione di un n° finito Σ_k di super[ficie] a due a due disgiunte; ciascuna superficie de[ve] essere regolare, semplice, orientabile e chiusa

$$= \underset{\vec{\gamma}_1\cdot\vec{\gamma}_1'}{0} + \int_c^d \underset{\vec{\gamma}_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ f(\delta(y),y) \end{pmatrix}} \cdot \underset{\vec{\gamma}_2'}{\begin{pmatrix} \delta'(y) \\ 1 \end{pmatrix}} - \underset{\vec{\gamma}_3\cdot\vec{\gamma}_3'}{0} - \int_c^d \underset{\vec{\gamma}_4}{\begin{pmatrix} 0 \\ f(\gamma(y),y) \end{pmatrix}} \cdot \underset{\vec{\gamma}_4'}{\begin{pmatrix} \gamma'(y) \\ 1 \end{pmatrix}} dy =$$

$$= \int_c^d \left(f(\delta(y),y) - f(\gamma(y),y) \right) dy$$ che e' uguale al 1° membro

$$\Rightarrow \iint_\Omega \frac{\partial f_1}{\partial x}\, dx\, dy = \int_{\partial\Omega} f_1\, dy \quad ①$$

Allo stesso modo, posso dimostrare che: $\iint_\Omega \frac{\partial f_2}{\partial y}\, dx\, dy = -\int_{\partial\Omega} f_2\, dx$ ②

Sommando ① e ②:

$$\iint_\Omega \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y}\right) dx\, dy = \int_{\partial\Omega} f_1\, dy - f_2\, dx$$

$$\iint_\Omega \operatorname{div} \vec{F}\, dx\, dy = \int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} dy \\ -x \end{pmatrix}}_{\vec{n}} = \int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{n}$$ ← TEOREMA DELLA DIVERGEN[ZA] NEL PIANO

↓ GAUSS

In modo analogo, io posso dimostrare nello spazio:

$$\iiint_\Omega \underbrace{\operatorname{div} \vec{F}}_{\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}}\, dx\, dy\, dz = \int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{n}$$

$$\iint_\Omega \frac{\partial f_2}{\partial x}\, dx\, dy = \int_{\partial\Omega} f_2\, dy \quad ①$$

$$\iint_\Omega \frac{\partial f_1}{\partial y}\, dx\, dy = -\int_{\partial\Omega} f_1\, dx \quad ②$$

Facendo la differenza tra ① e ②:

$$\iint_\Omega \underbrace{\left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)}_{} dx\, dy = \int_{\partial\Omega} f_1\, dx + f_2\, dy = \int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}}_{\vec{\tau}}$$ ← TEOREMA DEL ROT[ORE] NEL PIANO

rot $\vec{F}$: rotore in 2 dimensioni (scalare)

↓ GREEN

LEZIONE 7 — 25.11.2011

CAMPI CONSERVATIVI E POTENZIALE

Def. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e $\vec{F}: \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale.
Un campo si dice **CONSERVATIVO** in Ω se esiste una funzione scalare $\varphi: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tale che $\vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\varphi$. La funzione φ si dice **POTENZIALE** del campo $\vec{F}$.

OSS. • $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix}$ e' conservativo $\Longleftrightarrow \exists\, \varphi(x,y)$ tale che $\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi(x,y)}{\partial x} = f_1 \\ \dfrac{\partial \varphi(x,y)}{\partial y} = f_2 \end{cases}$

sistema di eq. differenziali

$$\varphi = \int f_1(x,y)\,dx + c(y)$$

$c(y)$: costante additiva che dipende da y.

• $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = f_1(x,y,z) \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = f_2(x,y,z) \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial z} = f_3(x,y,z) \end{cases} \Rightarrow \int f_1(x,y,z)\,dx + c(y,z)$$

$c(y,z)$: costante additiva che dipende da y e z

Derivo rispetto a y ed eguaglio a f_2

TEOREMA: Sia $\vec{F}$ conservativo in $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, cioe' $\exists\, \varphi: \vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\varphi$ e sia $\vec{\gamma}: [a,b) \to \Omega$ un arco regolare (anche a tratti). Si ha:

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot \vec{\tau} = \varphi(\vec{\gamma}(b)) - \varphi(\vec{\gamma}(a))$$

Integrale di linea

Cioe': l'integrale di linea di un campo conservativo e' uguale alla differenza tra i valori del potenziale nei 2 estremi dell'arco

Dim.
$$\underbrace{\int_\gamma \vec{F} \cdot \vec{\tau} = \int_\gamma \overrightarrow{\text{grad}}_x\,\varphi \cdot \vec{\tau}}_{\text{siccome } \vec{F} \text{ e' conservativo}} = \int_a^b \underbrace{\overrightarrow{\text{grad}}_x\,\varphi(\vec{\gamma}(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t)}_{\text{Regola della catena: } \frac{d}{dt}\varphi(\vec{\gamma}(t))}\,dt =$$

$\vec{\gamma}'(t)$: $\vec{\tau}$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt}\varphi(\vec{\gamma}(t))\,dt = \varphi(\vec{\gamma}(b)) - \varphi(\vec{\gamma}(a))$$

Dim. (1)→(3)

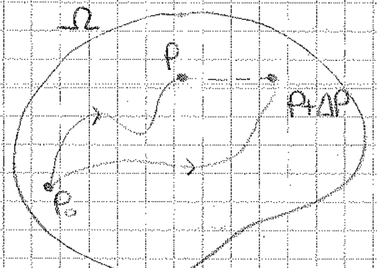
Perche' l'integrale di linea di un campo conservativo e' funzione dei pun e non del percorso.

Dim. (1)(2)

So che $\int_\gamma \vec{F} \cdot \vec{\tau} = \varphi(P) - \varphi(P_0)$ → Da (2)

$P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = f_1$ ← Voglio far vedere questo



$\Delta P = \Delta x_1$

Costruisco il rapporto incrementale:

$\frac{\varphi(P+\Delta P) - \varphi(P)}{\Delta P} =$ → Non dipende dal percorso $\begin{cases} P_0 \to P \to P+\Delta P \\ P_0 \to P+\Delta P \end{cases}$

Siccome mi muovo lungo x_1: $\vec{\tau} = (1, 0, 0, \dots, 0)$

$$= \int_0^{\Delta x_1} \frac{1}{\Delta x_1} f_1(x_1 + t, x_2, x_3, \dots, x_n)\, dt = f_1(x_1 + \bar{t}, x_2, x_3, \dots, x_n) \xrightarrow[\bar{t} \to 0]{\Delta x_1 \to 0} f_1(x_1, x_2, \dots$$

questa e' la media integrale di f su $\Delta x \Rightarrow \exists \bar{t} : 0 < \bar{t} < \Delta x_1$

Facendo lo stesso ragionamento x tutte le altre componenti, concludo che $\vec{grad}\, \varphi = \vec{F}$

TEOREMA:

Hp: $\begin{cases} \vec{F} \in \mathcal{C}^1(\Omega), \ \Omega \in \mathbb{R}^n \\ \vec{F} \text{ conservativo} \end{cases}$ ↗ continuo, con derivate parziali continue

Th: $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ con $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq n$

Oss. Se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$: $\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \Rightarrow \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \text{rot}\, \vec{F} = 0$

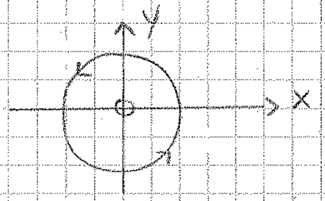
Se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ $\vec{rot}\, \vec{F} = \vec{0}$

Cioe': Un campo conservativo e' sempre irrotazionale

Dim. Se $\vec{F}$ e' conservativo $\Rightarrow \vec{F} = \vec{grad}\, \varphi$

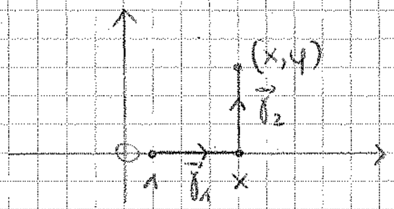
Ma so che $\vec{rot}\, \vec{grad}\, \varphi = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}^2$

Il mio campo $\vec{F}$ non e' definito nell'origine



$\Rightarrow$ Non posso applicare Green $\Rightarrow$ Non posso dire che il campo e' conservativo

Mi calcolo il potenziale in una regione che non contiene l'origine.



$\vec{\gamma}_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \quad 1 \leq t \leq x \quad \vec{\gamma}_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{\gamma}_2(t) = \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \quad 0 \leq t \leq y \quad \vec{\gamma}_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} \vec{F} \cdot \vec{\tau} = \int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot \vec{\tau} + \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot \vec{\tau} = \int_1^x \vec{F}(t,0) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt + \int_0^y \vec{F}(x,t) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt =$$

$$= 0 + \int_0^y \frac{x}{x^2+t^2}\, dt = \int_0^y \frac{x}{x^2\left(1+\frac{t^2}{x^2}\right)}\, dt = \int_0^{y/x} \frac{1}{\cancel{x}(1+u^2)} \cdot \cancel{x}\, du =$$

$$= \left[\arctan u\right]_0^{y/x} = \left[\arctan \frac{t}{x}\right]_{t=0}^{t=y} =$$

$$\begin{cases} \frac{t}{x} = u \\ dt = x\, du \end{cases}$$

$$= \arctan \frac{y}{x} = \varphi(x,y)$$

Questo potenziale non e' definito per $x = 0$

$\Rightarrow \varphi(x,y)$ e' potenziale di $\vec{F}$ per $x \neq 0$

di prima

Es. Calcolare $\oint_\gamma \vec{F} \cdot \vec{\tau}$, con $\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

$$\int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \frac{-\sin t}{1} \\ \frac{\cos t}{1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)\, dt = \int_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi$$

$\hookrightarrow$ e' $\neq 0$

ES)

$$\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{y}{x^2}\sin\frac{y}{x} \\ \frac{1}{y} - \frac{1}{x}\sin\frac{y}{x} \\ -\frac{1}{z} \end{pmatrix}$$

Dov'e' conservativo?

Guardo dove $\vec{F}$ e' definito: non e' definito su $x=0$, $y=0$, $z=0$

Calcolo il $\vec{rot}\,\vec{F}$

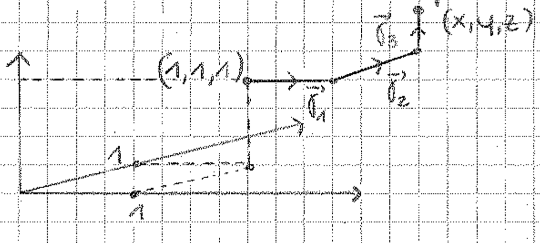
$$\vec{rot}\,\vec{F} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{y}{x^2}\sin\frac{y}{x} & \frac{1}{y}-\frac{1}{x}\sin\frac{y}{x} & -\frac{1}{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{1}{x^2}\sin\frac{y}{x} + \frac{y}{x^3}\cos\frac{y}{x}\right) - \left(\frac{1}{x^2}\sin\frac{y}{x} + \frac{y}{x^3}\cos\frac{y}{x}\right.$$

$\Rightarrow$ $\vec{F}$ e' irrotazionale $\Rightarrow$ in ogni ottante (regione semplicemente connessa
ha un potenziale

Ho 2 modi x calcolare il potenziale. Lo calcolo nell'ottante $x>0$, $y>0$, z

1°



$\vec{\gamma}_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad 1 \le t \le x$, $\vec{\gamma}_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{\gamma}_2(t) = \begin{pmatrix} x \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad 1 \le t \le y$, $\vec{\gamma}_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{\gamma}_3(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix}$ $\quad 1 \le t \le z$, $\vec{\gamma}_3' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\int_{\gamma_1\cup\gamma_2\cup\gamma_3} \vec{F}\cdot\vec{\tau} = \int_1^x f_1(t,1,1)\,dt + \int_1^y f_2(x,t,1)\,dt + \int_1^z f_3(x,y,t)\,dt = \int_1^x \frac{1}{t^2}\sin\frac{1}{t}\,dt + \int_1^y \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{x}\sin\right.$$

$$dt + \int_1^z -\frac{1}{t}\,dt = \left[\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right]_1^x + \left[\ln|t| + \cos\left(\frac{t}{x}\right)\right]_1^y + \left[-\ln|t|\right]_1^z =$$

↳ nel 1° ottan[te] posso togli[ere] i valori asso[luti]

$$= \cancel{\cos\left(\frac{1}{x}\right)} - \cos 1 + \ln(y) + \cos\left(\frac{y}{x}\right) - \cancel{\cos\left(\frac{1}{x}\right)} - \ln(z) =$$

$$= \cos\left(\frac{y}{x}\right) + \ln\left(\frac{y}{z}\right) - \cos 1$$

$$\varphi(x,y,z) = \cos\left(\frac{y}{x}\right) + \ln\left(\frac{y}{z}\right) + cost$$

TEOREMA: Se il campo $\vec{F}$ di classe C^1 e' irrotazionale in una regione D semplicemente connessa allora e' in tale regione conservativo. (cioe' ammette in D potenziale)

Ci sono pero' anche altre condizioni sufficienti che rendono un campo irrotazio nale conservativo.

TEOREMA: I campi radiali / centrali sono conservativi

Def $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $\qquad r = \|\vec{r}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

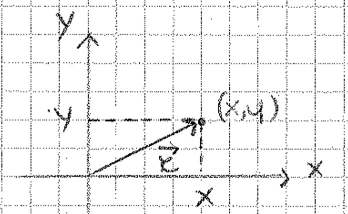
vettore

da' la distan
dall'origine

Un campo $\vec{F}(x,y,z)$ si dice RADIALE o CENTRALE se $\vec{F}(x,y,z) = g(\|\vec{r}\|)\,\vec{r} = g(r$
con $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

da' la direzio

Dim.



$$G(r) = \int r\, g(r)\, dr$$

$$\varphi(x,y,z) = G\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) \quad \text{e' il potenziale}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial G(r)}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = r\, g(r) \cdot \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \cancel{r}\, g(r) \cdot \underbrace{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}_{\cancel{r}} = g(r)$$

Regola della catena

$$\Rightarrow \operatorname{grad} \varphi(x,y,z) = g\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = g(r) \cdot \vec{r}$$

ES. Campo gravitazionale

$$\vec{F}(x,y,z) = -\frac{1}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^2} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\text{versore radiale } \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}} \qquad \|\vec{F}\| = \frac{1}{r^2}$$

$$g(r) = -\frac{1}{r^3}$$

$$\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} -\dfrac{x}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3} \\ -\dfrac{y}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3} \\ -\dfrac{z}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3} \end{pmatrix} = -\frac{1}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

OSS. Se la serie non rientra in uno dei primi 3 casi, cioè $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ è oscillante, ma $\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k| = +\infty$, dico anche che la serie DIVERGE IN VALORE ASSOLUTO

ES. $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$$

→ questa è una serie convergente

Prendo la ridotta: $$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} + \frac{1}{n(n+1)}$$
$$= \left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \dots + \left(\cancel{\frac{1}{n-1}} - \cancel{\frac{1}{n}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right)$$
$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

Faccio $n \to +\infty$: $\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 \Rightarrow$ la serie CONVERGE e la sua somma è 1

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1}$$ SERIE DI MENGOLI

ES. $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{n}{(n+1)!} + \dots$$

Prendo la ridotta: $$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{n}{(n+1)!} =$$
$$= \left(\frac{1}{1!} - \cancel{\frac{1}{2!}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2!}} - \cancel{\frac{1}{3!}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3!}} - \cancel{\frac{1}{4!}}\right) + \dots + \left(\cancel{\frac{1}{n!}} - \frac{1}{(n+1)!}\right) =$$
$$= 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

Faccio $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{(n+1)!}\right) = 1 \Rightarrow$ la serie CONVERGE e la sua somma è 1

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!} = 1}$$ SERIE DI BERNOULLI

ES. $$\sum_{n=1}^{+\infty} 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \quad (\text{dove } a_n = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}) = 1+1+1+\dots+1+\dots$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} 1 = n$$

$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} n = +\infty \Rightarrow$ la serie DIVERGE POSITIVAMENTE

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 1 = +\infty$$

CONDIZIONE NECESSARIA

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

$S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$

$S_1 = a_1$

$S_2 = a_1 + a_2 = S_1 + a_2$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = S_2 + a_3$

$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = S_3 + a_4$

...

$S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$

Da questo ricavo: $S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$

$S_n - S_{n-1} = a_n$

Se la serie converge a $l \in \mathbb{R}$: $S_n - S_{n-1} = a_n$

$$\begin{array}{ccccc} S_n & - & S_{n-1} & = & a_n \\ \downarrow{\scriptstyle n\to+\infty} & & \downarrow{\scriptstyle n\to+\infty} & & \downarrow{\scriptstyle n\to+\infty} \\ l & - & l & = & 0 \end{array}$$

Cioe': se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge allora $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ — CONDIZIONE NECESSARIA DI CONVERGENZA

E' intuitivo: se il limite mi deve venire finito, devo sommare addendi via via più piccoli.

Oss La condizione necessaria alla convergenza non e' sufficiente.

Cioe': $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge $\Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \;\not\Longrightarrow\; \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge

lo posso dimostrare fornendo un controesempio

Dim SERIE ARMONICA $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty}$

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots = +\infty$

$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$

ES SERIE GEOMETRICA DI RAGIONE $x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

$a_n = x^n$

se $|x| < 1$ $\lim_{n\to+\infty} x^n = 0$ $\Rightarrow$ e' soddisfatta la condizione necessaria

se $|x| > 1$ $\lim_{n\to+\infty} |x|^n = +\infty$ $\Rightarrow$ la serie non converge

se $x = 1$: $\sum_{n=0}^{+\infty} 1^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 1 = +\infty$ $\Rightarrow$ la serie diverge ?

se $x = -1$: $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$ $\Rightarrow$ la serie e' oscillante

Voglio essere piu' precisa nel caso $|x| < 1$:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} x^k = \underbrace{1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n}_{(n+1) \text{ addendi}} \leftarrow \text{PROGRESSIONE GEOMETRICA}$$

Prendo S_n e la moltiplico per $(1-x)$:

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n)(1-x) = \qquad x \neq 1$$

$$1 + \cancel{x} + \cancel{x^2} + \cancel{x^3} + \ldots + \cancel{x^n} - \cancel{x} - \cancel{x^2} - \cancel{x^3} - \cancel{x^4} - \ldots - x^{n+1} = 1 - x^{n+1}$$

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n) = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x}$$

$$S_n = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x}$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1 - x^{n+1}}{1-x} = \begin{cases} \frac{1}{1-x} : & \text{se } |x| < 1 \quad \text{la serie converge} \\ +\infty & \text{se } x > 1 \quad \text{la serie diverge positivame} \\ & \text{se } x < -1 \quad \text{la serie e' oscillante, ma diverge in valore assoluto} \end{cases}$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & \text{se } |x| < 1 \\ +\infty & \text{se } x \geq 1 \\ \text{oscilla} & \text{se } x \leq -1 \\ \text{diverge in valore assoluto} & \text{se } x < -1 \end{cases}}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 67 di 110

SERIE NUMERICHE A TERMINI POSITIVI

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \qquad a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}}$$

↳ o a "termini non negativi"

(Oss.) Se una serie avesse un n° finito di termini negativi, x vederne il comportamento posso sopprimere i termini negativi senza alterare il comportamento. In questo caso, si dice che la serie e' **DEFINITIVAMENTE A TERMINI POSIT**

(Oss) Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e' tale che $a_n \leq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ (e' a termini negativi), si studia il comportamento di $(-1)\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty}(-a_n)$, dove $(-a_n) \geq 0$, e non ne alteriamo il comportamento.

(Oss.) $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \quad a_n \geq 0 \Rightarrow$ la serie non puo' essere oscillante: o e' convergente e' divergente.

(Dim)
$$\left.\begin{aligned} S_1 &= a_1 \geq 0 \\ S_2 &= S_1 + a_2 \\ S_3 &= S_2 + a_3 \\ S_4 &= S_3 + a_4 \\ &\dots \\ S_n &= S_{n-1} + a_n \end{aligned}\right\}$$

$S_1 \leq S_2 \leq S_3 \leq \dots \leq S_n \leq \dots$

Le ridotte sono una successione monotona crescente, quindi:

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \begin{cases} l \in \mathbb{R} \\ +\infty \end{cases}$$

CRITERI DI CONVERGENZA PER LE SERIE A TERMINI POSITIVI

① CRITERIO DEL CONFRONTO

$$\boxed{\left.\begin{aligned} &0 \leq a_n \leq b_n \\ &\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \text{ converge} \end{aligned}\right\} Hp \quad \Longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ converge}}$$

(Dim) $0 \leq a_n \leq b_n$. Scrivo le ridotte:

$$0 \leq A_n = \sum_{k=1}^{n} a_n \leq B_n = \sum_{k=1}^{n} b_n$$

Se so che $\lim_{n\to+\infty} B_n = B$ (→ converge) e $\lim_{n\to+\infty} 0 = 0 \Rightarrow A_n$ non diverg (puo' convergere o oscillare)

Ma se so che $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e' a termini positivi $\Rightarrow$ non puo' oscillare

$\Rightarrow 0 \leq A \leq B$, cioe' $\sum_{n=1}^{+\infty}$ converge

Dim) Def di limite: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 : n \geq n_0 \Rightarrow 0 < L - \varepsilon \leq \frac{a_n}{b_n} \leq L + \varepsilon$

$\Rightarrow 0 < (L-\varepsilon) b_n \leq a_n \leq (L+\varepsilon) b_n$

Se b_n e' convergente, applico il teorema del confronto a: $a_n \leq (L+\varepsilon) b_n$
Se b_n e' divergente, applico " " " " ": $(L-\varepsilon) b_n \leq a_n$

Es) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n^4+7n^3-2n^2+5}{2n^6+12n^5+4n-1}$

Divido tutto per $\frac{1}{n^2}$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{3n^4+7n^3-2n^2+5}{2n^6+12n^5+4n-1}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3n^6+7n^5-2n^4+5n^2}{2n^6+12n^5+4n-1} = \frac{3}{2} > 0$$

$\Rightarrow$ il comportamento e' lo stesso

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ so che converge $\Rightarrow$ anche $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n^4+7n^3-2n^2+5}{2n^6+12n^5+4n-1}$ converge

LEZIONE 9 — 9.12.2011

OSS. Se $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ (cioe' se $a_n = o(b_n)$ per $n\to+\infty$) $\Rightarrow 0 \leq a_n \leq \varepsilon b_n \ \forall n \geq n_0$

Quindi:
- se $\sum b_n$ converge $\Rightarrow \sum a_n$ converge
- se $\sum a_n$ diverge $\Rightarrow \sum b_n$ diverge

Se $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty \Rightarrow \exists M > 0 : 0 < M b_n \leq a_n$

Quindi:
- se $\sum a_n$ converge $\Rightarrow \sum b_n$ converge
- se $\sum b_n$ diverge $\Rightarrow \sum a_n$ diverge

3) CRITERIO DEL CONFRONTO CON UN INTEGRALE IMPROPRIO

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \quad a_n \geq 0$

$f(x)$ una funzione positiva ($f(x) \geq 0$) decrescente ($x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$) Hp
$f(n) = a_n$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e $\int^{+\infty} f(x)\,dx$ sono entrambi convergenti o entrambi divergenti

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \text{se } \alpha = 1: \lim_{b\to+\infty} [\log x]_1^b = +\infty \\ \text{se } \alpha \neq 1: \lim_{b\to+\infty} \left[\frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}\right]_1^b = \begin{cases} \text{se } \alpha > 1: \frac{1}{\alpha-1} \\ \text{se } \alpha < 1: +\infty \end{cases} \end{cases}$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} \text{se } \alpha \leq 1: \text{ diverge positivamente} \\ \text{se } \alpha > 1: \text{ converge a } \frac{1}{\alpha-1} \end{cases}}$$

ES. $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\log n}$

So che: $\displaystyle\frac{1}{n^\alpha} < \frac{1}{n\log n} < \frac{1}{n} \qquad \alpha > 1$

$\Rightarrow$ Qui il criterio del confronto fallisce

So che: $\displaystyle\sum_{\substack{n=1 \\ \alpha>1}}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge (serie armonica generalizzata)

$\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge (serie armonica)

Uso il criterio del confronto con un integrale improprio:

$f(x) = \dfrac{1}{x\log x}$ $\qquad f(x) \geq 0$, decrescente

$f(n) = a_n$

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\log x}\,dx = \int_{\log 2}^{+\infty} \frac{1}{t}\,dt = [\log t]_{\log 2}^{+\infty} \rightarrow \text{diverge}$$

$t = \log x$

$dt = \frac{1}{x}dx$

$\Rightarrow \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\log n}$ diverge

ES. $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\log^\beta n}$, $\beta > 0$

So che: $\displaystyle\frac{1}{n^\alpha} < \frac{1}{n\log^\beta n} < \frac{1}{n}$

$\Rightarrow$ Il criterio del confronto fallisce

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\log^\beta x}\,dx = \int_{\log 2}^{+\infty} 1/t^\beta\,dt = \begin{cases} \text{se } \beta > 1: \text{ converge} \\ \text{se } \beta \leq 1: \text{ diverge} \end{cases}$$

$t = \log x$; $dt = \frac{1}{x}dx$

ES $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$

$a_n = \frac{n!}{n^n}$

$a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{(n+1)!\, n^n}{(n+1)^{n+1}\, n!} = \frac{\cancel{(n+1)} \cdot \cancel{n!}\, n^n}{\cancel{(n+1)}(n+1)^n \cdot \cancel{n!}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{1+1/n}\right)^n = \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow \text{converge}$$

↑ limite fondamentale

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$ converge

Allora sicuramente la condizione necessaria e' soddisfatta:

$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$

ES $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^n}{n!}$

La condizione necessaria e' soddisfatta: $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^n}{n!} = 0$.

Ma la condizione necessaria non e' sufficiente.

Uso il criterio del rapporto:

$a_n = \frac{e^n}{n!}$

$a_{n+1} = \frac{e^{n+1}}{(n+1)!}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e^{n+1}\, n!}{(n+1)!\, e^n} = \frac{\cancel{e^n} \cdot e \cdot \cancel{n!}}{(n+1)\, \cancel{n!}\, \cancel{e^n}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{e}{n+1} = 0 < 1 \Rightarrow \text{converge}$$

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^n}{n!}$ converge

5 CRITERIO DELLA RADICE

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \quad a_n \geq 0$

Se esiste un numero $K<1$ tale che $\sqrt[n]{a_n} \leq K < 1 \quad \forall n \geq n_0$ allora la serie converge.

Se invece $\sqrt[n]{a_n} > 1 \quad \forall n \geq n_0$ allora la serie diverge

COROLLARIO

$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$

- se $l < 1$: la serie converge
- se $l > 1$: la serie diverge
- se $l = 1$: non si può concludere niente

Dim $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = l < 1$

$l-\varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < l+\varepsilon$ def. di limite

$l+\varepsilon < 1 \rightarrow a_n < (l+\varepsilon)^n$

$\sum_{n=n_0}^{+\infty} (l+\varepsilon)^n \rightarrow$ serie geometrica di ragione $r = l+\varepsilon < 1 \Rightarrow$ e' convergente

$\Rightarrow \sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ converge

Es. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5^{n+1}}{n^n}$

$a_n = \frac{5^n \cdot 5}{n^n}$

$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{5^n \cdot 5}{n^n}} = \frac{5}{n}\sqrt[n]{5}$

$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{5}{n}\sqrt[n]{5} = \lim_{n\to+\infty} \frac{5}{n} \cdot (5)^{1/n} = 0 < 1 \rightarrow$ converge

Es $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{n^2}$

$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{3^n}{n^2}} = \frac{3}{\sqrt[n]{n^2}} \xrightarrow{n\to+\infty} 3 > 1 \rightarrow$ diverge

So che $\sqrt[n]{n} = e^{\frac{1}{n}\log n} \xrightarrow{n\to+\infty} e^0 = 1$

Criterio del RAPPORTO:

$a_{n+1} = a_{2n}$

$a_n = a_{2n-1}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{2n}}{a_{2n-1}} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \cdot \cancel{2^n}}{\left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot \cancel{2^n}} = \frac{\cancel{\left(\frac{1}{3}\right)^n} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)}{\cancel{\left(\frac{1}{3}\right)^n}} = \frac{1}{3}$$

$a_{2n+1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \cdot 2^{n+1}$

$a_{2n} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \cdot 2^n$

$$\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = 2$$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ non esiste $\to$ una volta 1/3, una volta 2...

$\to$ il criterio fallisce: non posso concludere nulla

Oss. Il criterio della radice e' piu' forte del criterio del rapporto.
Tuttavia, se: $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \in [0,+\infty) \cup \{+\infty\} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$

Ma se $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$ non e' detto che $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ esista.

SERIE DI SEGNO QUALUNQUE

Def. Una serie si dice **DI SEGNO QUALUNQUE** se ha infiniti termini strettamente negativi e infiniti termini strettamente positivi

Oss. La condizione necessaria continua a essere valida:
se $\lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow$ la serie non converge

questa e' fatta di $m-n$ addendi

$\to$ Per la successione delle ridotte $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ vale la condizione di Cauchy:
per ogni $S_n \to S \in \mathbb{R} \iff \forall\varepsilon>0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall m,n > n_0,\ m>n \quad |S_m - S_n| < \varepsilon$

$|S_m - S_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{m-1} + a_m| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots + |a_{m-1}| + |a_m|$

da cui segue:

CRITERIO DI CONVERGENZA ASSOLUTA

$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ converge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge

Se una serie converge assolutamente, allora converge.

$\Rightarrow$ la serie converge e inoltre $|S - S_n| \leq |S_{n+1} - S_n| = a_{n+1}$

Questo mi da' una stima dell'errore che commetto approssimando S con S_n

Es $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n} + \dots$

1. $\lim_{n\to+\infty} |a_n| = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ converge assolutamente $\Rightarrow$ converge

2. $|a_{n+1}| \leq |a_n| = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$ termini decrescenti

$\Rightarrow$ converge : $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n} = S$

$\Rightarrow |S - S_n| = \left| S - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{k} \right| \leq \frac{1}{n+1}$

xche' gli a_n sono tutti > 0

xche' i termini sono decrescenti

Dim $S_1 = a_1 > 0$ | $S_2 = a_1 - a_2 > 0$ $\quad S_1 > S_2$

$S_3 = a_1 - a_2 + a_3 = S_1 - (a_2 - a_3)$ | $S_4 = S_2 + (a_3 - a_4)$

$S_5 = S_3 - a_4 + a_5 = S_3 - \underbrace{(a_4 - a_5)}_{>0}$ | $S_6 = S_4 + \underbrace{(a_5 - a_6)}_{>0}$

...

$S_{2n+1} = S_{2n-1} - (a_{2n} - a_{2n+1})$ | $S_{2n} = S_{2n-2} + (a_{2n-1} - a_{2n})$

$S_2 < S_4 < S_6 < \dots < S_{2n} < \dots\dots < S_{2n+1} < \dots < S_5 < S_3 < S_1$

S

$S_{2n+1} - S_{2n} = a_{2n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$S_{2n} < S < S_{2n+1}$

$|S - S_n| \leq |S_{n+1} - S_n| = a_{n+1}$

Es $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{-1}{2n+1} + \frac{1}{2n} + \dots$

$\rightarrow$ serie armonica a segni alterni con termini permutati

$\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$; $\frac{1}{2} > \frac{1}{5}$ $\rightarrow$ Non c'e' la decrescenza: il criterio non si puo' applicare

SERIE DI FUNZIONI

Def. Si dice SERIE DI FUNZIONI una serie della forma $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $f_n(x$
e' una funzione definita in $A \subseteq \mathbb{R}$ $\forall n$

Cioe': come termine della serie non ho piu' un numero, ma una funzione

Es $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$

$f_0(x) = 1$; $f_1(x) = x$; $f_2(x) = x^2$; $f_3(x) = x^3$ ...

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots$$

$\rightarrow$ Sembra alla serie geometrica di ragione r : $\sum_{n=0}^{+\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$ se $|r| <$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \begin{cases} \text{se } |x| < 1 : & \frac{1}{1-x} \\ \text{se } x \geq 1 : & \text{diverge} \\ \text{se } x \leq -1 : & \text{oscilla} \\ \text{se } x < -1 : & \text{diverge in valore assoluto} \end{cases}$$

Def Si dice che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ CONVERGE PUNTUALMENTE in $A \subseteq \mathbb{R}$ se $f_n(x)$ e' definita in A $\forall n \in \mathbb{N}$ e se, fissato $x_0 \in A$, la serie numerica $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x_0)$ converge

Es $\sum_{n=1}^{+\infty} x^n$ $\qquad A = (-1, 1)$; converge puntualmente $\forall x \in A$

Oss. $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ che converge in $A \subseteq \mathbb{R}$, per ogni $x \in A$ la somma della serie defin
una funzione $f(x)$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in A$$

Es. $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \qquad x \in (-1, 1)$

Es. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n-1)!}{x^2(x+1)^2(x+2)^2 \dots (x+n-1)^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1!}{x^2(x+1)^2} + \frac{2!}{x^2(x+1)^2(x+2)^2} + \dots + \frac{(n-1)!}{x^2(x+1)^2 \dots (x+n-}$

$f_1(x) = \frac{1}{x^2}$ $\quad x \neq 0$; $f_2(x) = \frac{1}{x^2(x+1)^2}$ $\quad x \neq 0, x \neq -1$; $f_3(x) = \frac{1}{x^2(x+1)^2(x+2)^2}$ $\quad x \neq 0, x$
$x \neq$

$\Rightarrow A = \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, -3, \dots\}$

La serie converge puntualmente per $x_0 \in A$?

Def. In un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ (di convergenza puntuale) x la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ si dice che la serie $\boxed{\text{CONVERGE UNIFORMEMENTE}}$ a $S(x)$ se $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n$

$$\sup_{x \in A} |S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$$

Es. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\arctan(nx) - \arctan(n-1)x\right)$

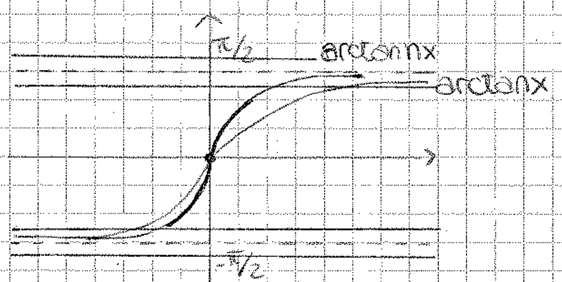
Devo ricordarmi che: $tg(\alpha+\beta) = \dfrac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha\, tg\beta}$

$f_n(x) = (\arctan(nx) - \arctan(n-1)x = \arctan \dfrac{x}{1+n(n-1)x^2}$?

$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$S_n(x) = \arctan x - \cancel{\arctan 0} + \arctan 2x - \cancel{\arctan x} + \arctan 3x - \cancel{\arctan 2x} + \dots$
$+ \arctan(n-1)x - \cancel{\arctan(n-2)x} + \arctan nx - \cancel{\arctan(n-1)x} = \arctan nx$

serie telescopica



$\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = \lim_{n\to+\infty} nx = \text{sgn}\, x \cdot \dfrac{\pi}{2}$

Intorno all'origine non c'è mai convergenza uniforme

$\varepsilon \ll \dfrac{\pi}{2} \qquad |S_n(x) - S(x)| = \left|\arctan x - \dfrac{\pi}{2} \text{sign}\, x\right| < \varepsilon \quad \leftarrow$ Non riesco ad ottenere questo ?

$\Rightarrow$ c'è la convergenza puntuale, ma non quella uniforme

Oss. Se la serie converge uniformemente in A, allora converge anche puntualmente. Ma non vale il viceversa.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 85 di 110

$$\int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt = \left[-\log(1-t)\right]_0^x = -\log(1-x)$$

DERIVAZIONE PER SERIE

$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = f(x)$ $\quad$ $f_n(x) \in C^1([a,b])$, cioè $f_n(x)$ continue con derivata continua in $[a,b]$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x) = g(x)$ $\quad$ converga uniformemente in $[a,b]$

Allora $f'(x) = g(x)$ in $[a,b]$

Oss. $\left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x)$

↳ f_n' deve essere continua e la serie deve convergere uniformemente

SERIE DI POTENZE

Una serie $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ si dice **SERIE DI POTENZE** se $f_n(x) = a_n(x-x_0)^n =$ $\qquad a_n, x_0 \in \mathbb{R}$

$= a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + \dots + a_n(x-x_0)^n + \dots$

a_n : **COEFFICIENTI**

x_0 : **CENTRO DELLA SERIE**

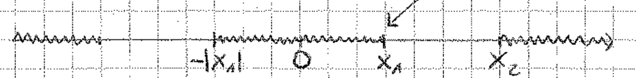
Se $x_0 = 0$: $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$

Es. $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ è una serie di potenze con $x_0 = 0$ e $a_n = 1$ $\forall n$

TEOREMA

Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ e supponiamo che converga in $x_1 \neq 0$, cioè $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_1^n$ converga.
Allora la serie converge $\forall x : |x| \leq |x_1|$.
E inoltre, se la serie non converge in un punto $x_2 \neq 0$ allora la serie non converge $\forall x$ $|x| > |x_2|$

Se converge in x_1, converge in $-x_1 \leq x \leq x_1$



se non converge in x_2, non converge in $x < -x_2$ e $x > x_2$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 87 di 110

Se $x = 1/2 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n \cdot (1/2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (\cancel{2} \cdot 1/\cancel{2})^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 1 = 1+1+1+1+\ldots \Rightarrow$ diverg

Se $x = -1/2 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n \cdot (-1/2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-\cancel{2} \cdot 1/\cancel{2})^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \Rightarrow$ oscilla

(2) CRITERIO DEL RAPPORTO

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \qquad a_n \neq 0 \quad \forall n$

Se $\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \ell$ con ℓ finito o infinito allora:

$$r = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} = \frac{1}{\ell} \qquad \left(\text{se } \ell = +\infty \Rightarrow \frac{1}{\ell} = 0\right)$$

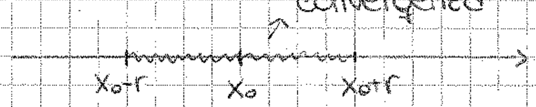
Dim. Si applica il criterio del rapporto alla serie numerica $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n x_0^n|$ con x_0 fissato

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1} \cdot x_0^{n+1}|}{|a_n \cdot x_0^n|} = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \cdot |x_0| \quad \text{converge se} < 1$$

$$\Rightarrow \text{converge se } |x_0| < \frac{1}{\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} = r$$

Oss. Se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$ chiamo $y = (x-x_0)$ e cerco r per $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n y^n$.

Trovato questo r si ha convergenza per $|y| < r$, cioe' per $|x-x_0| < r$ e non convergenza per $|y| > r$, cioe' per $|x-x_0| > r$



Es. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{n!} \cdot x^n$

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{3^n}{n!}} \right| = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{3^{n+1} \cdot n!}{3^n \cdot (n+1)!} \right| = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\cancel{3^n} \cdot 3 \cdot \cancel{n!}}{\cancel{3^n} \cdot (n+1) \cancel{n!}} \right| = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{3}{n+1} \right| = 0$$

$r = \frac{1}{\ell} = +\infty \Rightarrow$ la serie converge $\forall x \in \mathbb{R}$

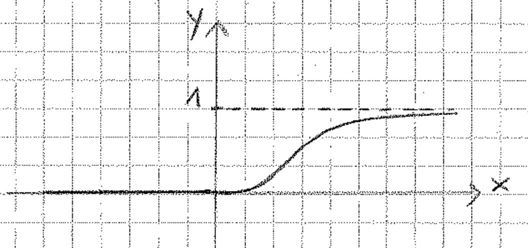
1. Se le derivate di $f(x)$ in x_0 "non crescono troppo", e cioè, per es.: $\exists L > 0 : |f^{(n)}(x_0)| \leq L^n \quad \forall n \geq 0$, allora la serie di Taylor converge $\forall x$

DIM. $$\left| \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n \right| \leq \underbrace{L^n \frac{(x-x_0)^n}{n!}}_{\text{serie di potenze con } r = \infty}$$

$\Rightarrow$ applicando il teorema del confronto, anche $\left| \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x-x_0)^n \right|$ converge

2. Se, x ipotesi, vale $|f^{(n)}(x)| \leq L^n \quad \forall n \geq 0 \quad \forall x \in (x_0 - a, x_0 + a)$, allora la serie di Taylor converge a $f(x)$

Es $$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$



$\rightarrow$ funzione che si raccorda nello zero con una tangente orizzontale
$\downarrow$
questo vale x tutte le derivate di $f(x)$

$f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ per $x > 0$ $\quad e^{-\frac{1}{x}} \xrightarrow{x \to 0^+} 0$

$f'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$ per $x > 0$ $\quad \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} \xrightarrow{x \to 0^+} 0$

$f''(x) = -\frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^4} e^{-\frac{1}{x}}$ per $x > 0$ $\quad f''(x) \xrightarrow{x \to 0^+} 0$

$\Rightarrow$ ho raccordo di tutte le derivate nel punto $x_0 = 0$

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(n)}(0)$$

$\Rightarrow$ lo sviluppo in serie di Taylor di $f(x)$ con $x_0 = 0$ (Mclaurin) è:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 0 \cdot x^n = 0 \neq f(x)$$

$\hookrightarrow$ Si è verificata 1, ma non 2

Es $f(x) = e^x$

$$f(0) = 1 = f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(n)}(0) = 1$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{n!}}_{a_n} x^n$$

Se $\alpha \in \mathbb{N}$ $(1+x)^\alpha$ e' un polinomio $\Rightarrow$ la serie di Taylor e' una somma finita
Da $n=\alpha$ in poi, tutti i termini della serie sono nulli.

Sono interessanti i casi: $\alpha=-1$, $\alpha=-2$, $\alpha=\frac{1}{2}$, $\alpha=-\frac{1}{2}$, $\alpha=\frac{1}{3}$, $\alpha=-\frac{1}{3}$

Es. $f(x)=\log(1+x)$

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n \qquad r=1$$

↳ e' la somma della serie di potenze

$$f(x)=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^n\,dt\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^x(-1)^n t^n\,dt\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left[(-1)^n\frac{1}{n+1}t^{n+1}\right]_0^x=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1}x$$

Es. $f(x)=\frac{x}{1-x^2}$ $\qquad x_0=0$

1. $\underline{1^\circ \text{ modo}}$: $f(x)=x\cdot\frac{1}{1-x^2}=x\sum_{n=0}^{+\infty}(x^2)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}x\cdot x^{2n}=\sum_{n=0}^{+\infty}x^{2n+1}$ $\quad |x|<1 \quad r$

2. $\underline{2^\circ \text{ modo}}$: $f(x)=\frac{x}{1-x^2}=\frac{-1/2}{1+x}+\frac{1/2}{1-x}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}x^n=$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2}\underbrace{(1-(-1)^n)}_{\text{per n pari e' 0}}x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}x^{2n+1} \qquad r=1$$

Es. $f(x)=\arctan x$ $\qquad x_0=0$

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-x^2)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n} \qquad r=1$$

↳ serie geometrica

$$f(x)=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^{2n}\right)dt=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^x(-1)^n t^{2n}\,dt=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=$$

$$=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\dots \qquad r=1$$

Es. $f(x)=\frac{2x}{(1-x^2)^2}$ $\qquad x_0=0$

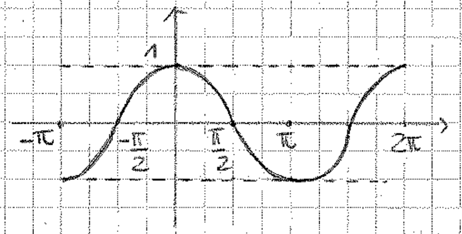
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x^2}\right)=\frac{2x}{(1-x^2)^2}$$

$$\Rightarrow \int_0^x\frac{2t}{(1-t^2)^2}\,dt=\frac{1}{1-x^2}-1=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(x^2)^n\right)-1=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}x^{2n}\right)-1=\sum_{n=1}^{+\infty}x^{2n}$$

$$\int_0^x f(t)\,dt=\sum_{n=1}^{+\infty}x^{2n}$$

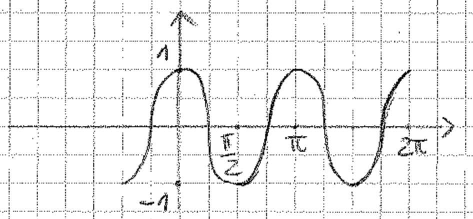
$$f(x)=\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{+\infty}x^{2n}=\sum_{n=1}^{+\infty}2n\,x^{2n-1} \qquad r=1$$

Prendo $\omega_0 = 1$ e disegno $\cos(\omega_0 x) = \cos x$



→ è una funzione periodica di $T = 2\pi$

Prendo $\omega_0 = 2$



→ raddoppiano le oscillazioni

ω_0 = FREQUENZA ANGOLARE = n° di oscillazioni in un intervallo largo 2π

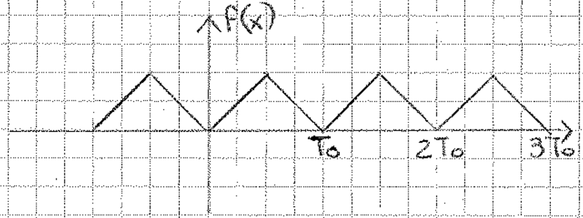
$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ = PERIODO

$f_0 = \frac{1}{T_0}$ = FREQUENZA = n° di oscillazioni in un segmento di ampiezza 1

$\cos(n\omega_0 x)$, $\sin(n\omega_0 x)$

$n\omega_0$ = è un multiplo della frequenza angolare

$\frac{2\pi}{n\omega_0} = \frac{1}{n} T_0$ = è un sottomultiplo del periodo T_0



Se $f(x)$ ha periodo $T_0 \Rightarrow f(x)$ ha anche periodo $2T_0$ o $3T_0$ o nT_0

Cioè: ogni multiplo del periodo T_0 è anch'esso periodo

Quando considero $\cos(n\omega_0 x)$ e $\sin(n\omega_0 x)$:

il loro periodo è: $T_0 = \frac{1}{n}\frac{2\pi}{\omega_0} \Rightarrow$ anche $\frac{2\pi}{\omega_0}$ è periodo

$\Rightarrow \cos(n\omega_0 x)$ e $\sin(n\omega_0 x)$ sono funzioni periodiche di periodo $\frac{2\pi}{\omega_0} = T_0 \ \forall n$

$\Rightarrow \cos\left(n \frac{2\pi}{b-a} x\right)$, $\sin\left(n \frac{2\pi}{b-a} x\right)$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{b-a}$ $\quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{b-a}} = b-a$

↗ Ho preso funzioni che hann
come periodo l'intervallo [a
su cui è definita f(x)

$\left(1, \cos(n\omega_0 x)\right) = 0$
$\left(1, \sin(n\omega_0 x)\right) = 0$ $\Rightarrow$ le costanti e le funzioni sin e cos sono $\perp$

② $\displaystyle\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \left(\cos(n\omega_0 x) \cdot \sin(n\omega_0 x)\right) dx = 0 \quad \forall n \Rightarrow \left(\cos(n\omega_0 x), \sin(n\omega_0 x)\right) = 0$

$\Rightarrow$ le funzioni cos e sin sono $\perp$

③ $\displaystyle\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \left(\cos(m\omega_0 x) \cdot \cos(n\omega_0 x)\right) dx = 0 \quad \forall n \neq m \Rightarrow \left(\cos(m\omega_0 x), \cos(n\omega_0 x)\right) = 0$

$\displaystyle\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \left(\sin(m\omega_0 x) \cdot \sin(n\omega_0 x)\right) dx = 0 \quad \forall n \neq m \Rightarrow \left(\sin(m\omega_0 x), \sin(n\omega_0 x)\right) = 0$

④ $\displaystyle\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \left(\cos(n\omega_0 x)\right)^2 dx = \frac{T_0}{2}$

$\displaystyle\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \left(\sin(n\omega_0 x)\right)^2 dx = \frac{T_0}{2}$

$\Rightarrow$ 1, $\cos(n\omega_0 x)$, $\sin(n\omega_0 x)$ sono a 2 a 2 ortogonali, tranne quando sono moltiplicati per se stessi:

$(1, 1) = T_0$
$\left(\cos(n\omega_0 x), \cos(n\omega_0 x)\right) = T_0/2$
$\left(\sin(n\omega_0 x), \sin(n\omega_0 x)\right) = T_0/2$

$\frac{1}{\sqrt{T_0}}$, $\sqrt{\frac{2}{T_0}} \cos(n\omega_0 x)$, $\sqrt{\frac{2}{T_0}} \sin(n\omega_0 x)$ sono vettori ortonormali

$\mathbb{R}^n$ $\overset{\text{versore}}{e_1}, e_2, e_3, \dots, e_n$ una base ortonormale

$u \in \mathbb{R}^n \quad (u, e_i) = a_i \qquad u = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot e_i$
↳ prodotto scalare di u con e_i
trovo le componenti di u

Voglio fare la stessa cosa con la mia funzione

$f(x)$ definita in $\left[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}\right) \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

$\left(f(x), \frac{1}{\sqrt{T_0}}\right)$ $\Rightarrow$ prodotto scalare della funzione con il versore

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 97 di 110