



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO : 427

DATA : 10/12/2012

A P P U N T I

STUDENTE : Arlotta

MATERIA : Meccanica delle Macchine + eserc.

Prof. Eula_Gastaldi

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

Teorema 1. Sia r un vettore posizione, rotante nel piano, di versore $\vec{\lambda}$ e con velocità angolare $\omega \vec{k}$, allora si ha

$$\frac{d(r\vec{\lambda})}{dt} = \omega \vec{k} \wedge r\vec{\lambda} \quad (1)$$

Dimostrazione. Si osservi innanzitutto che, per la linearità della derivata, possiamo considerare $r = \omega = 1$, senza perdere di generalità, poiché questi, in quanto costanti, si possono semplicemente portar fuori dalla derivazione. Per definizione il vettore velocità angolare \vec{k} risulta ortogonale al piano definito dal vettore posizione $\vec{\lambda}$ e da quello velocità $\frac{d(\vec{\lambda})}{dt}$.

Ora, essendo $\vec{\lambda}$ un versore, si ha

$$\vec{\lambda} \cdot \vec{\lambda} = 1, \quad (2)$$

derivando ambo i membri dell'espressione precedente otteniamo

$$\frac{d(\vec{\lambda})}{dt} \cdot \vec{\lambda} + \vec{\lambda} \cdot \frac{d(\vec{\lambda})}{dt} = 0,$$

ovvero

$$\frac{d(\vec{\lambda})}{dt} \cdot \vec{\lambda} = 0. \quad (3)$$

Per definizione di velocità angolare si ha poi

$$\vec{k} = \vec{\lambda} \wedge \frac{d(\vec{\lambda})}{dt}. \quad (4)$$

Ricordando allora le proprietà dei prodotti misti si avrà

$$\vec{k} \wedge \vec{\lambda} = \vec{\lambda} \wedge \frac{d(\vec{\lambda})}{dt} \wedge \vec{\lambda} = (\vec{\lambda} \cdot \vec{\lambda}) \wedge \frac{d(\vec{\lambda})}{dt} - \left(\vec{\lambda} \cdot \frac{d(\vec{\lambda})}{dt} \right) \wedge \vec{\lambda}$$

Ma, per la (2) e la (3), si ha

$$\vec{k} \wedge \vec{\lambda} = \frac{d(\vec{\lambda})}{dt},$$

ovvero la tesi. □

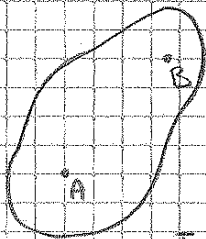
- Proiezioni del secondo vettore - $r\omega \sin \omega t$
 $r\omega \cos \omega t$

NOTA Le derivate prima di $r\omega \cos \omega t$ e $-r\omega \sin \omega t$; quella di $r\omega \sin \omega t$ e $r\omega \cos \omega t$.

$$\frac{d(\vec{r} \cdot \vec{l})}{dt} = r\omega \vec{l}$$

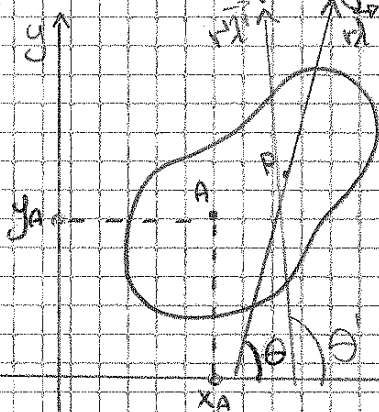
$$\begin{aligned} \text{ma ho definito } \vec{\mu} &= \vec{K} \wedge \vec{l} \\ &= r\omega (\vec{K} \wedge \vec{l}) \\ &= \omega \vec{K} \wedge r\vec{l} \end{aligned}$$

CINEMATICA DEL CORPO RIGIDO



In un corpo rigido, la distanza tra due punti fissati rimane costante (l'unica eccezione è rappresentata dalla molla)

I Gradi di Libertà (GdL) sono il minimo numero di parametri indipendenti necessari a descrivere il sistema. Nel piano, un corpo rigido ha 3 gradi di libertà.



Posso determinare la posizione di A con (x_A, y_A) ma con questo non ho determinato la posizione di tutto il corpo: può ancora ruotare attorno ad A.

Prendo una retta da cui ricavo la coordinata angolare θ

$$\text{GdL} \begin{cases} x_A \\ y_A \\ \theta \end{cases}$$

$\vec{v}_A = \vec{v}_B$ IDENTITÀ delle VELOCITÀ LINEARI

in modulo, direzione e verso

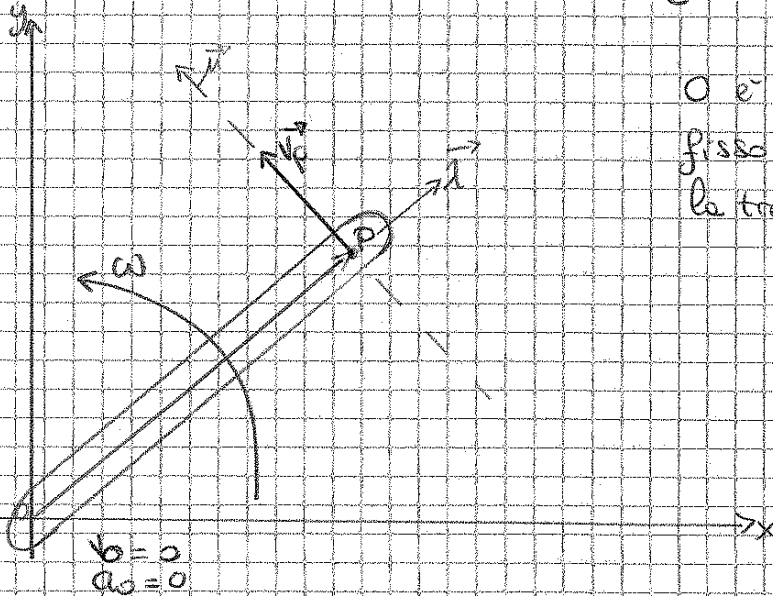
$\vec{a}_A = \vec{a}_B$ IDENTITÀ delle ACCELERAZIONI

in modulo, direzione e verso

2° PROPRIETÀ

Le velocità si misurano in $[m/s]$, le accelerazioni in $[m/s^2]$.

MOTO ROTATORIO intorno ad un asse fisso

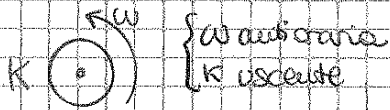


O è un punto fisso ed impedisce la traslazione

$\vec{P-O}$ = costante
nota vettoriale

Calcolatore $\rightarrow r \hat{i}$

$$\vec{v}_P = \frac{d(\vec{P-O})}{dt} = \frac{d(r \hat{i})}{dt} = \underbrace{\frac{dr}{dt}}_{\phi} \hat{i} + r \frac{d\hat{i}}{dt}$$



{ omega costante
K costante

r è un segmento costante

(i-hat è un vettore rotante)

$$= r \frac{d\hat{i}}{dt} = r [\omega \vec{k} \wedge \hat{i}]$$

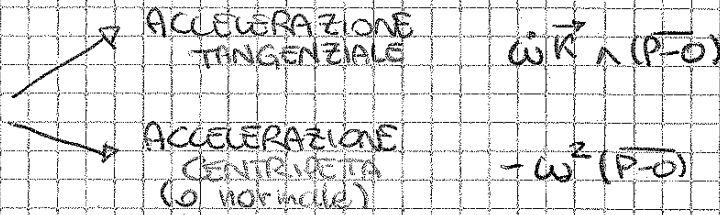
$\vec{\omega} \perp \hat{i}$

$$= r \omega [\vec{k} \wedge \hat{i}] = r \omega \hat{j}$$

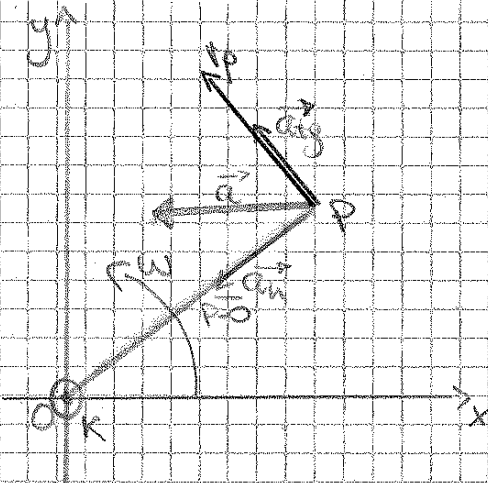
$\vec{v}_P \perp (\vec{P-O})$

$$= \omega \vec{k} \wedge (r \hat{i}) = \omega \vec{k} \wedge (\vec{P-O})$$

VELOCITÀ LINEARE = VELOCITÀ ANGOLARE \wedge VETTORE POSIZIONE



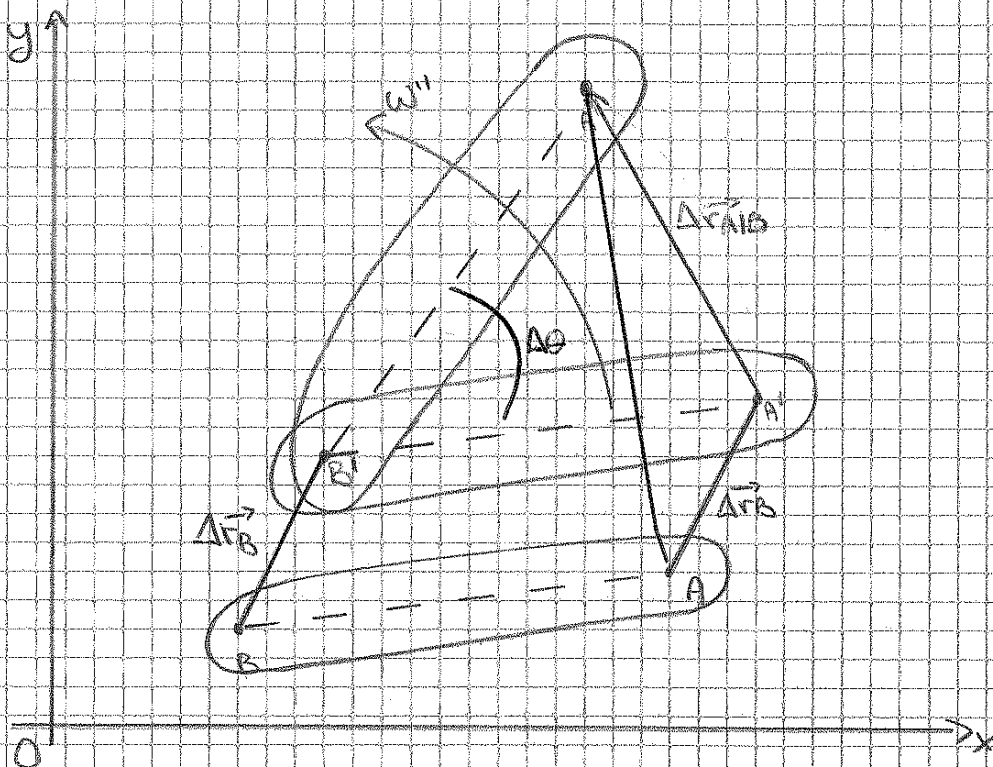
Perché l'accelerazione centripeta è negativa? Il vettore $(\vec{P}-\vec{O})$ va da O a P mentre l'accelerazione centripeta 'riporta' verso il centro; quindi sono discorde.



- l'accelerazione tangenziale è perpendicolare a $(\vec{P}-\vec{O})$
- l'accelerazione centripeta è, per definizione, diretta verso il centro

Se ω è costante, l'accelerazione tangenziale è costante.

MOTO ROTOTRASLATORIO (moto piano generico)

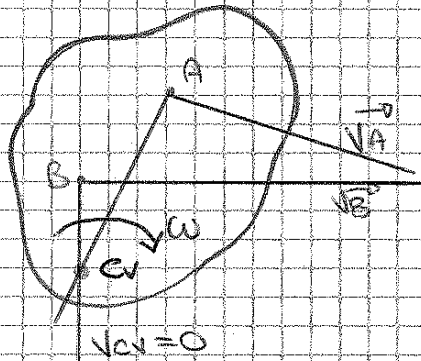


CENTRO DI ISTANTANEA ROTAZIONE (C.I.)

$$\begin{cases} v_{C.I.} = 0 \\ a_{C.I.} \neq 0 \end{cases}$$

Il fatto che la velocità sia nulla, non implica che lo sia anche l'accelerazione.

■ $\vec{v}_A \times \vec{v}_B$ (con basta definire la direzione del C.I.)



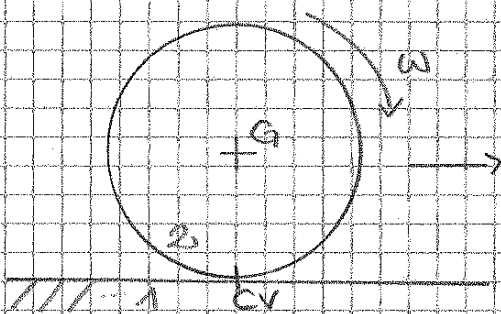
Tracciamo le perpendicolari alle direzioni delle velocità dei due punti.

$$\begin{aligned} \vec{v}_A &= \vec{v}_{C.I.} + \vec{v}_{A/C.I.} \\ &= \vec{v}_{C.I.} + \omega \vec{r} \wedge (\vec{A} - \vec{C.I.}) \\ &= \omega \vec{r} \wedge (\vec{A} - \vec{C.I.}) \end{aligned}$$

$$\vec{v}_A \perp (\vec{A} - \vec{C.I.})$$

$$\begin{aligned} \vec{v}_B &= \vec{v}_{C.I.} + \vec{v}_{B/C.I.} \\ &= \vec{v}_{C.I.} + \omega \vec{r} \wedge (\vec{B} - \vec{C.I.}) \\ &= \omega \vec{r} \wedge (\vec{B} - \vec{C.I.}) \end{aligned}$$

$$\vec{v}_B \perp (\vec{B} - \vec{C.I.})$$



Ho un piano fisso (corpo 1) e uno mobile (corpo 2)

DEFINIZIONI

CATENA CINEMATICA: più corpi rigidi vincolati fra loro da coppie cinematiche (vincoli)

Poò essere

↳ **SEMPLICE** se i corpi rigidi hanno una o più coppie cinematiche ciascuno;

↳ **COMPOSTA** se esiste in essa almeno un corpo rigido con tre coppie cinematiche;

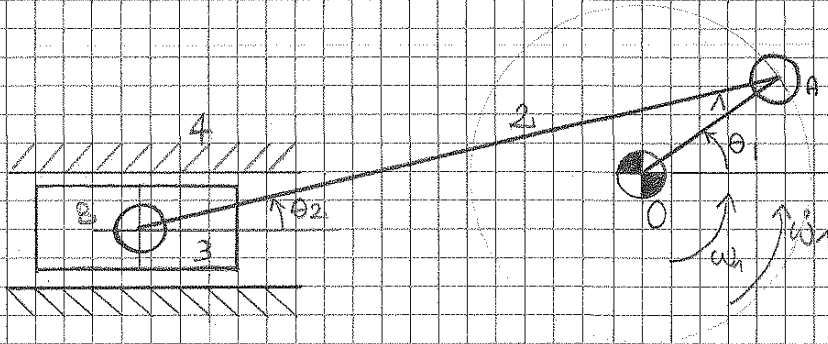
↳ **CHIUSA** se in ogni corpo rigido ha almeno due coppie cinematiche;

↳ **APERTA** se esiste un corpo rigido con una sola coppia cinematica.

MECCANISMO: se esiste, nella catena, un corpo rigido fisso, detto telaio.

Con 0 GDL diventa una **STRUTTURA**

SISTEMA BIELLA-MANOVELLA



$n_1 = 1500 \text{ giri/min}$

$\omega_1 = 1000 \text{ rad/s}$

$OA = 0.21 \text{ m}$

$\theta_1 = 45^\circ$

$AB = 0.01 \text{ m}$

$\theta_2 = 30^\circ$

è una velocità, espressa
in giri al minuto.

COME SI CONVERTE? $\omega_1 = \frac{2\pi n_1}{60} = 157.08 \text{ rad/s}$

COME FUNZIONA?

- AO = è una manovella. Per come è disegnata, ha una cerniera fissa \odot : è una ROTAZIONE attorno ad un punto fisso (O)
- BA = biella. Ha la cerniera su A e quella su B MOBILI: ci sarà un MOTOPIANO GENERICO
- CORPO 3 = piede di biella. Scorre dentro ad una guida fissa, ci sarà una traslazione alternata sull'orizzontale. Perché alternata? Quando AO va tutto a sinistra, passandosi i primi due quadranti, la manovella tira indietro il piede.
- CORPO 2 = trasmette il moto ma non ha un movimento che viene dall'esterno.

2) AB AB = costante \rightarrow moto semplice

d.f.c. $\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{B/A}$
 $= \omega_1 \vec{K} \wedge (\vec{A}-\vec{O}) + \omega_2 \vec{K} \wedge (\vec{B}-\vec{A})$

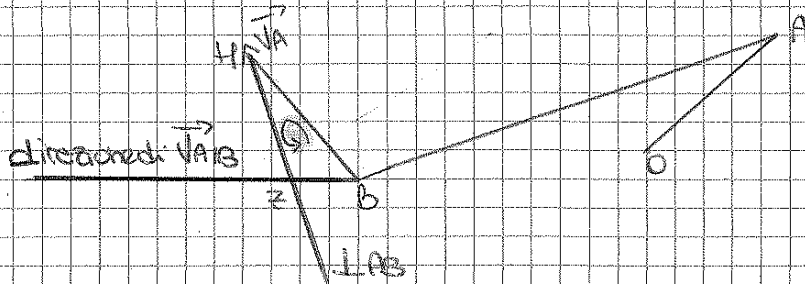
$\vec{V}_B = \omega_1 \vec{K} \wedge (\vec{A}-\vec{O}) + \omega_2 \vec{K} \wedge (\vec{B}-\vec{A})$

H	?	NOTA	$\omega_2(BA)$
D	orizzontale		$\perp(BA)$
V	?		?

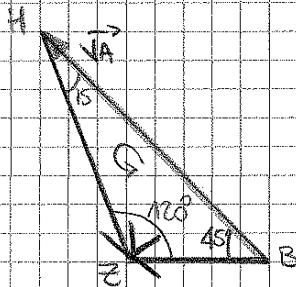
\rightarrow e' quella della GUIDA

CALCOLO dalle INCOGNITE

Passo 1): TRIANGOLO delle VELOCITA'



- 1) traccia \vec{V}_A su B, \perp a BA
 - 2) traccia \vec{V}_B direzione di \vec{V}_B da B
- \downarrow
 deflusso $\hat{B}H$



Dal teorema dei seni

$$\frac{V_B}{\sin 15} = \frac{V_A}{\sin 120^\circ}$$

$$V_B = 9,86 \text{ m/s}$$

$$\frac{V_{B/A}}{\sin 45^\circ} = \frac{V_A}{\sin 120^\circ}$$

$$V_{B/A} = 26,93 \text{ m/s}$$

CALCOLO delle ACCELERAZIONI

1) AO

$$\vec{a}_A = \vec{a}_O + \vec{a}_{AO|n} + \vec{a}_{AO|tg}$$

O è una
cuneia fissa $\rightarrow \begin{cases} \vec{v}_O = 0 \\ \vec{a}_O = 0 \end{cases}$

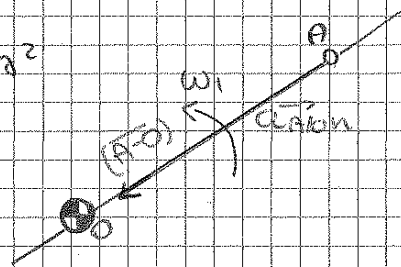
$$\vec{a}_A = \underbrace{-\omega_1^2 (A-O)}_{\vec{a}_{AO|n}} + \underbrace{\omega_1 \vec{k} \wedge (A-O)}_{\vec{a}_{AO|tg}}$$

$$\vec{a}_{AO|n} = -\omega_1^2 (A-O)$$

M	$\omega_1^2 (AO) = 5180,91 \text{ m/s}^2$
---	---

D	lungo AO
---	----------

V	da A verso O
---	--------------

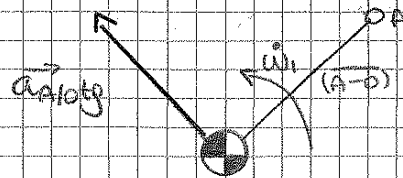


$$\vec{a}_{AO|tg} = \omega_1 \vec{k} \wedge (A-O)$$

M	$\omega_1 (AO) = 210 \text{ m/s}^2$
---	-------------------------------------

D	$\perp AO$
---	------------

V	$\omega_1 \uparrow$
---	---------------------



2) AB

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B|A}$$

$$= [\vec{a}_{AO|n} + \vec{a}_{AO|tg}] + [\vec{a}_{B|A|n} + \vec{a}_{B|A|tg}]$$

$$\vec{a}_{B|A|n} = -\omega_2^2 (B-A)$$

M	$\omega_2^2 (BA) = 1182,26 \text{ m/s}^2$
---	---

D	lungo AB
---	----------

V	da B verso A
---	--------------

AZO-42CA MEDS
P

$\vec{\omega}$ è costante \rightarrow è un'asta rigida che ruota attorno ad O fisso (moto semplice)

\vec{v}_P è costante \rightarrow il moto di P nella guida è una traslazione mentre il moto di P attorno ad O_1 è una rotazione \rightarrow Moto Composto

$$\begin{cases} \vec{v}_{pass} = \vec{v}_{rel} + \vec{v}_{tr} \\ \vec{a}_{pass} = \vec{a}_{rel} + \vec{a}_{tr} + \vec{a}_{co} \end{cases}$$

$2 \vec{\omega}_tr \times \vec{v}_{rel}$

GRADI di LIBERTÀ

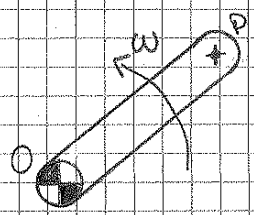
$$X = 3(m-1) - 2C_1 - C_2$$

$$\left. \begin{array}{l} m = 3 \\ C_1 = 2 \text{ (O, O}_1) \\ C_2 = 1 \text{ (P ha due} \\ \text{manovranti)} \end{array} \right\} x = 6 - 4 - 1 = 1 \text{ grado di libertà}$$

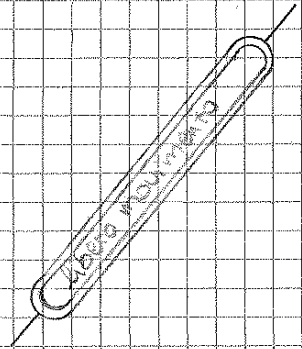
↓
1 motore

IDENTIFICAZIONE dei MOTI

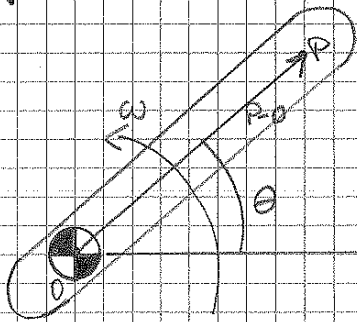
- 1) MOTO ASSOLUTO - è relativo al corpo ①
- da P si trasmette - riceve verso la manovella P_0
 - ROTAZIONE di P attorno ad O (fisso)



- 2) MOTO RELATIVO - è relativo al corpo ②
- il moto della guida all'interno del corpo
 - TRASLAZIONE di P lungo \vec{t}



VELOCITÀ



• Corpo P0

O è fisso $\begin{cases} v_0 = 0 \\ a_0 = 0 \end{cases}$

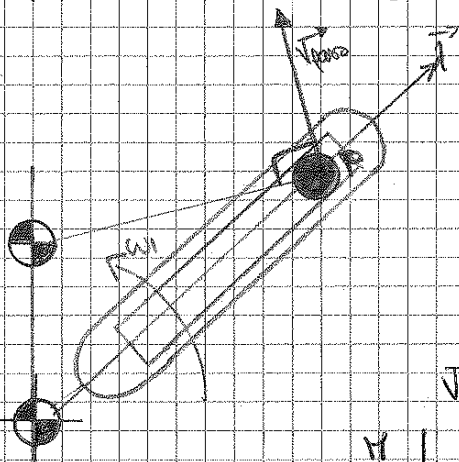
$$\vec{v}_{par0} = \vec{v}_0 + \vec{v}_{p/0}$$

$$\vec{v}_{par0} = \vec{v}_{p/0} = \omega \vec{r} \wedge (\vec{P}-\vec{O})$$

M | $\omega(t) = 4\pi, 1 \text{ m/s}$

D | $\perp PO$ v, ω e P_0 devono essere
 V | $\vec{\omega}$ *una stessa*

Ha una distribuzione triangolare con $\begin{cases} v=0 \text{ in } O \\ v=\text{max in } P \end{cases}$

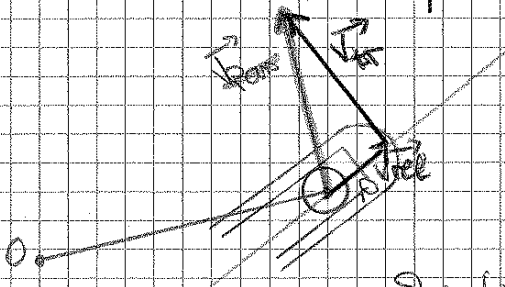


• Corpo 2

$$\vec{v}_{par} = \underbrace{\vec{v}_{vel}}_{\text{traslazione corpo 1}} + \underbrace{\vec{v}_{tr}}_{\text{rotazione attorno ad } O_1}$$

$$\vec{v}_{par} = \pm v_{vel} \vec{\lambda} + [v_{tr} + \omega_1 \vec{r} \wedge (\vec{P}-\vec{O}_1)] \vec{tr}$$

M	?	$\omega_1, P_1 = ?$ ($\omega_1 ?$)
D	lungo $\vec{\lambda}$	$\perp PO_1$
V	?	$\omega_1 \vec{r} \wedge (\vec{P})$



La relazione $\vec{v}_{par} = \vec{v}_k + \vec{v}_{tr}$
 un'fa decidere il verso
 di v_{tr}

Quindi il verso di $v_{vel} = \vec{\lambda}$ mentre
 quello di \vec{v}_{tr} e $\vec{\omega}$

$$\vec{a}_{pass} = -\omega^2 (\vec{P}-\vec{O})$$

M	$\omega^2 (P_0) = 7384,7 \text{ m/s}^2$	\vec{r} centripeta, da
D	lungo P_0	vers. il centro di
V	da P verso O	rotazione

2) Caso 2 Moto circolare

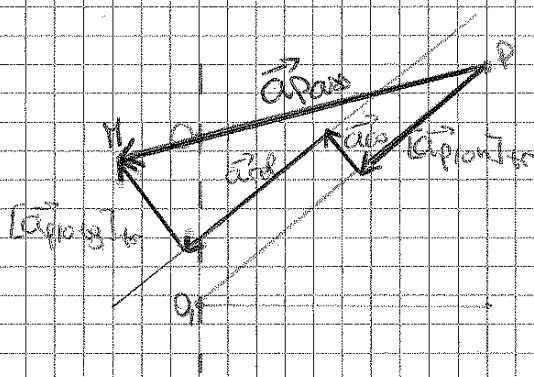
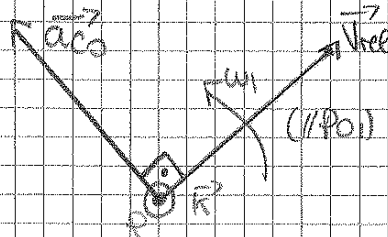
$$\vec{a}_{pass} = \vec{a}_{rel} + \vec{a}_{tr} + \vec{a}_{co}$$

$$\vec{a}_{p/on} = \vec{a}_{pass} = \pm a_{rel} \vec{x} + [\omega_1^2 (\vec{P}-\vec{O}_1) + \omega_1 \vec{k} \wedge (\vec{P}-\vec{O}_1)] + \frac{2\omega_1 \vec{k} \wedge \vec{v}_{rel}}{\omega_1}$$

$$\vec{a}_{p/on} = \vec{a}_{pass} = \pm a_{rel} \vec{x} + [-\omega_1^2 (\vec{P}-\vec{O}_1) + \omega_1 \vec{k} \wedge (\vec{P}-\vec{O}_1)] + 2\omega_1 \vec{k} \wedge \vec{v}_{rel}$$

M		?	$\omega_1^2 (P_0)$ (= 2388 m/s ²) // P_0	?	$2\omega_1 v_{rel} =$ 3528, 9 m/s ²
D	NOTA	lungo \vec{x}	$P \rightarrow O_1$	$\perp P_0$	$\perp v_{rel}$
V		?		ω_1 ?	

$$\vec{a}_{co} = 2\omega_1 \vec{k} \wedge \vec{v}_{rel}$$



Poligono delle accelerazioni

M = punto dove devo dividere il poligono
 da P verso \vec{a}_{pass}
 $[\vec{a}_{p/on}]_{tra}$ e $[\vec{a}_{co}]$
 \downarrow
 determino $[\vec{a}_{rel}]$ e
 $[\vec{a}_{p/on}]_{tr}$

ACCELERAZIONE di CORIOLIS

A causa della velocità relativa, cambia la posizione di P, ottengo un modulo della velocità di traslazione.
 A causa di $\omega_1 \vec{r}$, \vec{x} cambia direzione.

BIELLA-MANOVELLA

Nel manovellismo di primo genere di figura, dove 1 è la manovella, 2 è la biella, 3 il piede di biella, 4 il telaio, si conoscono: la geometria, la velocità angolare $n_1 = 1500$ giri/min e l'accelerazione angolare $\dot{\omega}_1 = 1000$ rad/s² della manovella OA.

Nella configurazione di figura determinare:

- 1) i gradi di libertà del sistema;
- 2) la velocità v e l'accelerazione a del piede di biella B, in modulo-direzione-verso;
- 3) la velocità angolare ω_2 e l'accelerazione angolare $\dot{\omega}_2$ della biella AB, in modulo-direzione-verso.

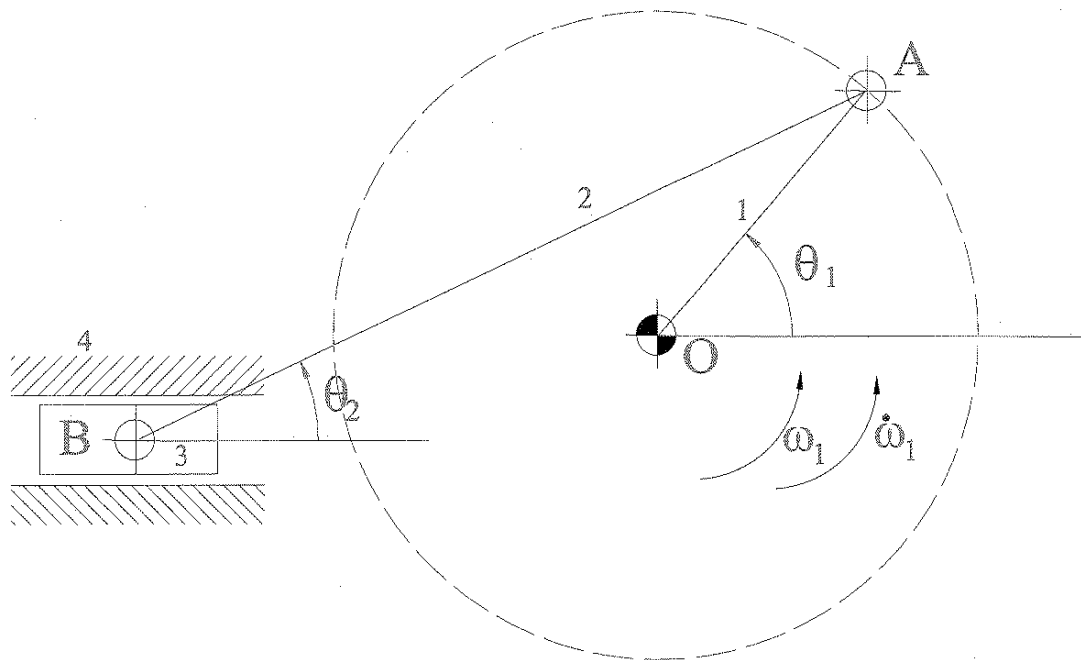
Dati:

OA = 0.21 m (manovella)

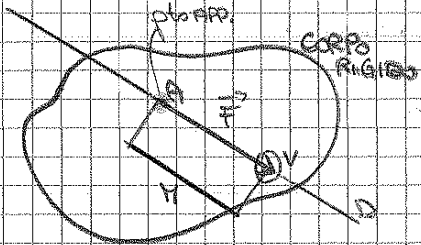
$\vartheta_1 = 45^\circ$

AB = 0.61 m (biella)

$\vartheta_2 = 30^\circ$

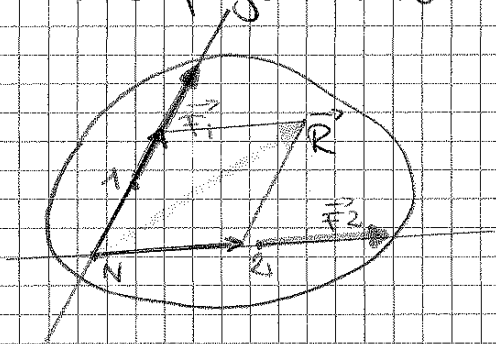


FORZA AZIONE che TENDE a FAR TRASLARE UN CORPO
 VETTORE DEFINITO in MODULO, DIREZIONE, VERSO e
 PUNTO d'APPLICAZIONE



Una forza può traslare lungo la
 sua retta d'azione

• Se compongo due FORZE //



Posso prolungare le rette d'azione
 fino ad incontrarle in N; le
 forze vengono traslate in N e
 con il metodo del parallelogramma
 si trova la risultante \vec{R} .

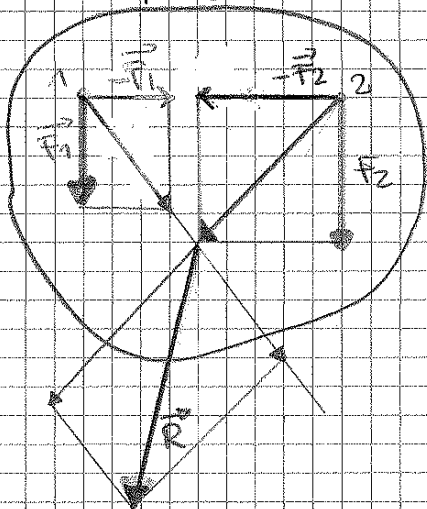
$$\vec{R} \equiv \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

↑
 risultante IDENTICA

Se il corpo non agiscono tre forze ma

$$\vec{R} \text{ oppure } \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \text{ (sono la stessa cosa)}$$

• Se compongo due FORZE //



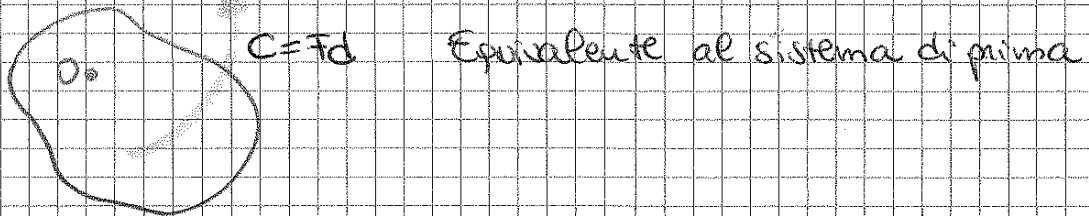
Se aggiungo una F e gliela
 sottraggo, il sistema non
 cambia.

Applico la regola del parallelogramma
 e trovo due R parziali.

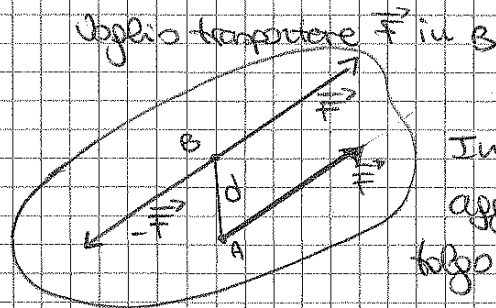
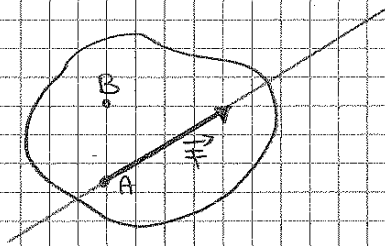
Le prolungo e trovo l'intersezione
 a cui applico nuovamente il
 metodo del parallelogramma.

$$\text{Trovo } \vec{R} = \vec{R}_1 + \vec{R}_2$$

- Solo rotazione
- $Fd \equiv$ Coppia di forze (dipende da F e dalla distanza d tra le forze)
- non dipende da $O \rightarrow$ VETTORE LIBERO

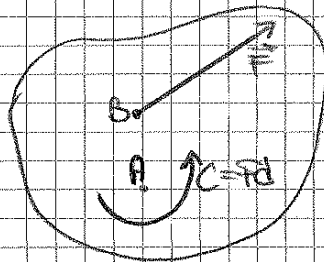


MOMENTO di TRASPORTO



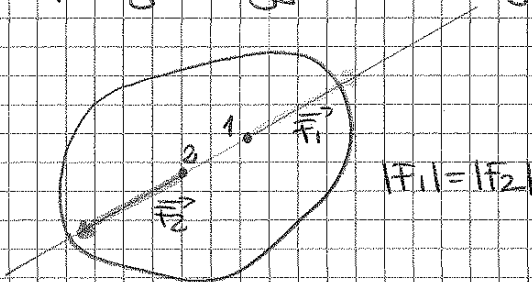
In B aggiungo e tolgo la stessa quantità

Ho portato la F in B ma devo aggiungere la coppia Fd (MOMENTO di TRASPORTO)



TRE REGOLE BASE degli EQUILIBRI

① Corpo rigido soggetto a due forze

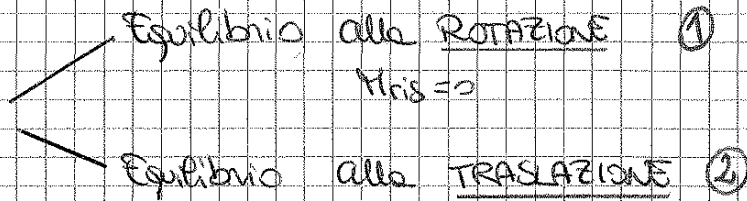


1) Equilibrio alla traslazione

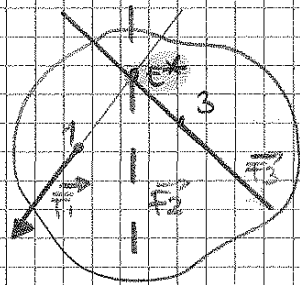
↓
forze uguali ed opposte ($\Sigma F = 0$)

2) Equilibrio alla rotazione

↓
forze sulla stessa retta d'azione ($\Sigma M = 0$)

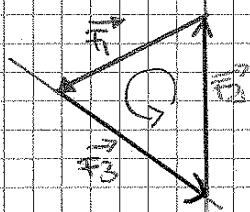


① Devono incontrarsi in un punto. Se eccoli, hanno $b=0$ e quindi $M=0$



* = punto di stella
Traz la direzione di F_3 con la retta tra 3 e E^* .

② Devono avere $\vec{R}=0 \rightarrow$ ricorso al triangolo delle forze.



F_1 uno da' il verso di percorrenza di F_2 e F_3

Per trovare il modulo passo oltre il teorema di Carnot, quello dei seni e di Pitagora.

TIPICI di FORZE

- 1) ESTERNE: si vedono anche sulla struttura assemblata (peso - inerzie, esistono comunque)
- 2) INTERNE: si vedono sulle parti del sistema (reazioni vincolari)

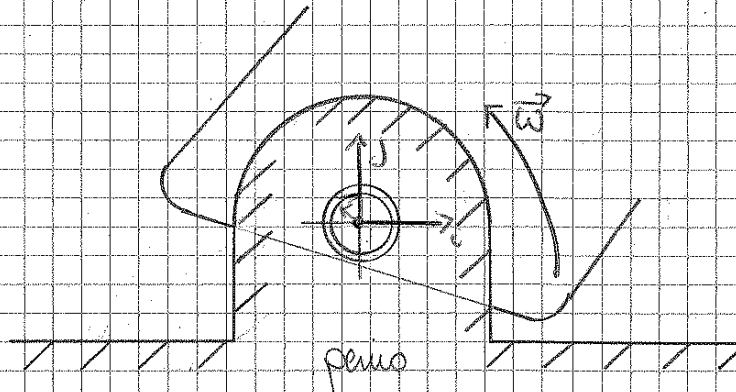
REAZIONI VINCOLARI

- 1) Forze ineguite in H, D, V ;
- 2) Forze interne;
- 3) Nascono nella direzione in cui il vincolo ostacola il moto;
- 4) Se il vincolo dipende dalla geometria del punto di contatto: si ottiene una COPPIA CINEMATICA;

Reazioni vincolari
 tra guida
 e PERNO
 (no attrito)

$\left\{ \begin{array}{l} R_x = 0 \\ R_y \neq 0 \\ H_i \neq 0 \end{array} \right\}$
 dove il vnto è possibile, $R \neq 0$
 dove il vnto è impedito, mostrano le
 relazioni vincolari
 alla direzione di scorrimento

2) COPPIA ROTOIDALE O CERNIERA



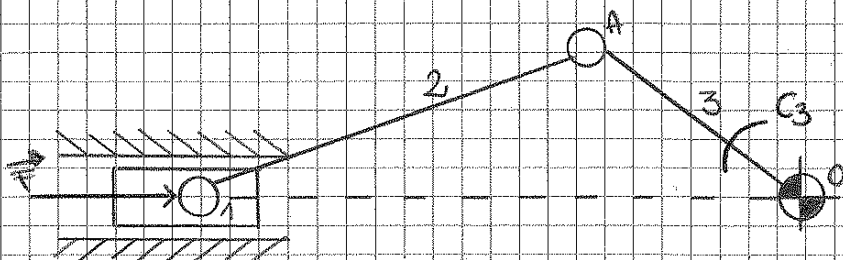
Non s' muove in nessuna direzione radiale; può ruotare attorno a K .

$$\left\{ \begin{array}{l} v_x = 0 \\ v_y = 0 \\ \omega_x \neq 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2 \text{ GdV} \\ 1 \text{ GdL} \end{array}$$

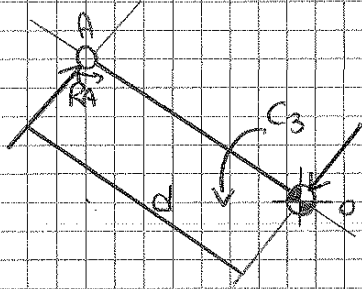
$$\left\{ \begin{array}{l} R_x \neq 0 \\ R_y \neq 0 \\ H = 0 \end{array} \right\} \text{COMPONENTI di REAZIONI VINCOLARI}$$

Un vincolo di cerniera piana
 lavora da' due componenti lavorando
 con le tre regole dell'equilibrio tra
 esse R risultante.

EQUILIBRIO STATICO di BIELLA-MANIBELLA



(no pesi,
 no attriti)



Applico la 2° regola
 Due forze R_A e R_O : le loro
 rette d'azione devono essere
 parallele, opposte e uguali in
 modulo.

Se $R_A - R_O$ gira in senso orario, C_3 sarà
 antiorario.

$C_3 = R_A d$ [non è detto che $d = A_0$]

QUADRILATERO ARTICOLATO

(no attriti,
 no pesi)

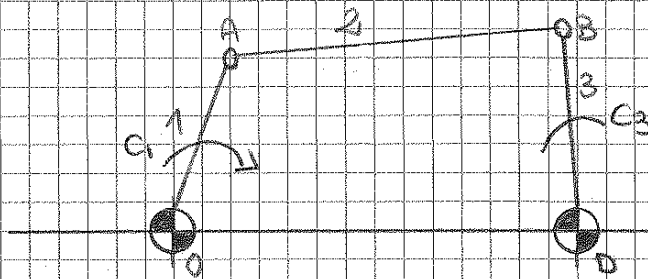
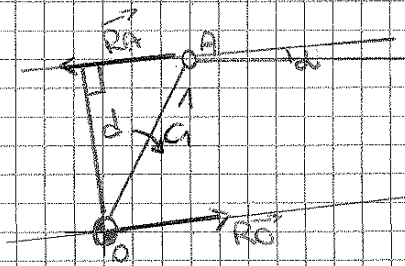


Diagramma di Corpo Libero



Applico la seconda regola

$C_1 = R_A d$

$R_A - R_O$ è antiorario perché
 C_1 è orario.



Applico la prima regola.

È un'asta scissa, soggetta
 a \vec{R}_A e \vec{R}_B
 $|\vec{R}_A| = |\vec{R}_B|$

Per il verso di \vec{R}_B applico il principio di
 azione e reazione.

\vec{R}_A deve opporsi a T_1 e T_2 facendo l'equilibrio alla traslazione verticale (in modulo):

$$R_A = T_1 + T_2$$

Definendo R_1 il raggio del corpo 1, l'equilibrio alla rotazione:

$$T_1 R_1 - T_2 R_1 = 0$$

poiché girano in senso opposto ma con lo stesso braccio;

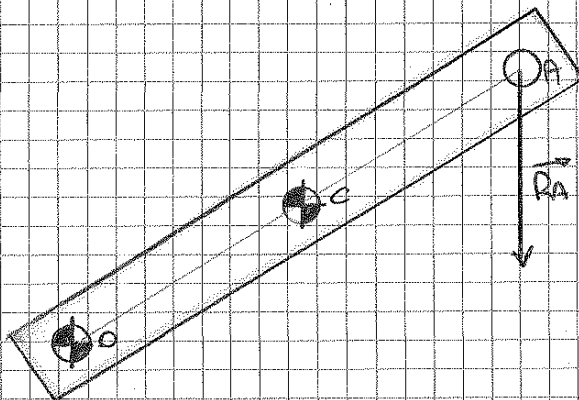
$$T_1 = T_2$$

$$R_A = 2T_1$$

Sono forze parallele, il punto E^* va a infinito: non posso costruire il triangolo delle forze.

Il corpo 2 illustra nella seconda regola, \vec{R}_B è parallelo a T_2 , opposta, applicata in B, con $|R_B| = |T_2|$. Se R_B e T_2 generano una coppia antioraria, C dovrà opporsi per avere risultante nulla:

$$C = T_2 R_2 = R_2 R_B$$



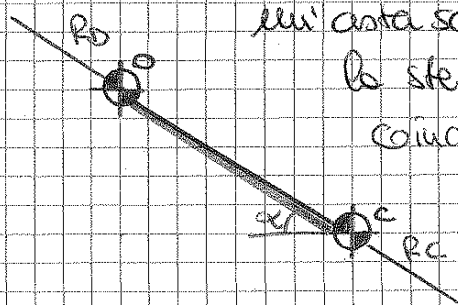
Il corpo 3 ha tre forze

risultanti: R_A (trasmessa dal corpo 1), R_C ed R_O

Ricade nella terza regola.

Travando o R_C o R_O , posso ricavare E^* e la direzione 'mancaute'. Di O so solo che $\sum v_0 = 0$
 $\sum a_0 = 0$

Ricavo R_O dal corpo 4. C è la cerniera tra corpo 3 e corpo 4. Quest'ultimo ricade nella prima regola, C è sull'asta scivolo. R_C ed R_O devono avere la stessa retta d'azione: in questo caso coincide con l'asta (non è sempre così!).



Non ho H e V delle R ma posso immaginare che $|R_C| = |R_O|$

LEGGI di NEWTON (o della dinamica)

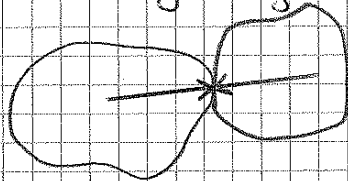
① Una particella resta a riposo o in moto rettilineo uniforme se la risultante delle forze applicate ad essa è $\vec{e} = 0$

② L'accelerazione di una particella è proporzionale alla somma di tutte le forze esterne applicate.

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_{est\ i} = m \cdot \vec{a}$$

m = massa della particella [kg]: rappresenta la resistenza o l'inerzia della particella a modificare la sua velocità lineare [m/s]

③ Principio di azione e reazione: due corpi a contatto si scambiano forze uguali e opposte.



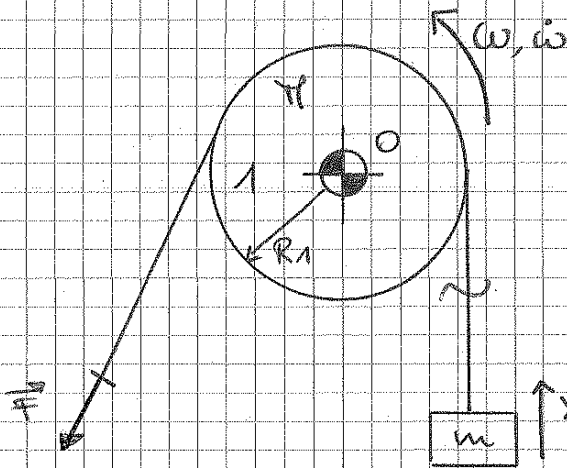
Se ho un corpo rigido, la seconda legge dice che la somma di tutte le forze esterne è proporzionale alla massa \cdot accelerazione del baricentro.

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_{est\ i} = m \cdot \vec{a}_G \quad a_G = \text{accelerazione lineare}$$

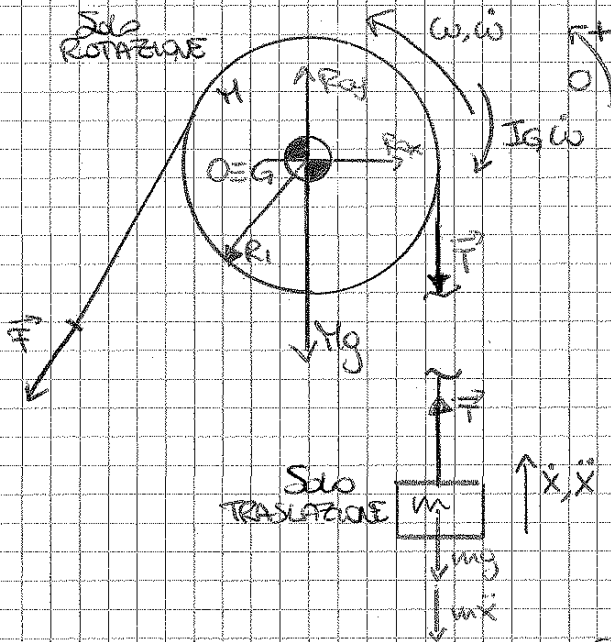
$$\sum_{i=1}^n \vec{\tau}_{est\ i} = I_G \cdot \vec{\omega} \quad \omega = \text{accelerazione angolare}$$

momento di inerzia
baricentrico del corpo rigido [kgm²]
" "
rappresenta l'inerzia
del corpo rigido a variare
la velocità angolare.

PULEGGIA



ω sarà una forza peso, e un corpo che trasla, non avrà una coppia di inerzia ma solo una forza $m\ddot{x}$.



La fine va in traslazione, ho solo una T che mi scambra per la Ter a legge di Newton.

La puleggia ha una forza peso, e incomincia in O (barricentro). Ha solo rotazione (corpo rigido attorno a O): c'è solo la coppia di inerzia. $I_G \ddot{\omega}$ deve essere opposta a α .

Corpo 1: $a_G = 0$

- \vec{i}) $-F \cos \alpha + R_{ox} = 0$
- \vec{j}) $R_{oy} - Mg - T - F \sin \alpha = 0$
- \odot) $-TR_1 + R_1 F - I_G \ddot{\omega} = 0$

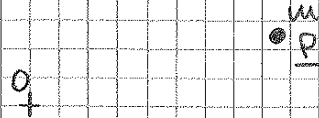
MOMENTO DI INERZIA

COPPIA DI INERZIA BARICENTRICA $I_G \vec{\omega}$

I_G = momento di inerzia di massa [kgm^2]

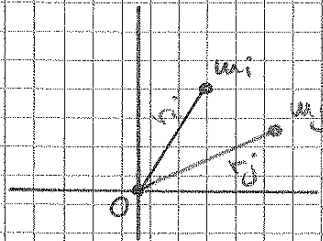
I_A = momento di inerzia di area [m^4]

$$I_O = m \cdot |\vec{PO}|^2$$



a) Sistemi DISCRETI

$$I_O = \sum_{i=1}^n r_i^2 m_i$$

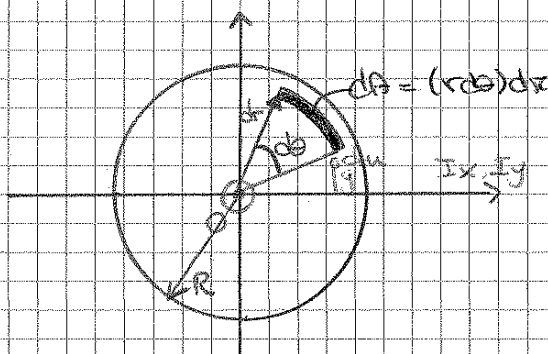


b) Sistemi CONTINUI

$$I_O = \int_V r^2 dm = \int_V r^2 [\rho dv]$$

ρ = densità del corpo = $\frac{dm}{dv}$

DISCO OMOGENEO



R = raggio

h = spessore

$$0 \leq r \leq R$$

O è la traccia del 3° asse (K^z uscente)

Il momento di inerzia assiale del disco è I_O

$$\begin{aligned} I_O &= \int_V r^2 dm = \int_V r^2 [\rho dv] = \rho \int_V r^2 dv = \\ &= \rho \int_A r^2 [h dA] = \rho h \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta = \rho h \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta = \\ &= \rho h [2\pi] \left[\frac{R^4}{4} \right] = \rho h \pi \frac{R^4}{2} = \underbrace{[\rho h \pi R^2]}_{M_A} \frac{R^2}{2} = \frac{MR^2}{2} \end{aligned}$$

$$\ddot{y} = \dot{\omega} r \wedge (\overline{G-O}) \quad \dot{y} = \omega (G_O)$$

accelerazione
tangenziale
di G

$$m \dot{y} (G_O) = \underline{\dot{\omega} m (G_O)^2} \oplus$$

Coppia totale che agisce sulla sbarretta

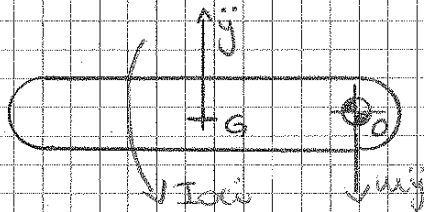
$$[I_G + m(G_O)^2] \dot{\omega} \Rightarrow I_O \dot{\omega}$$



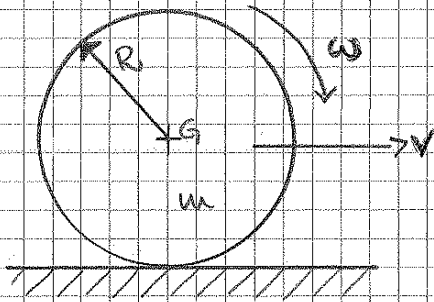
TEOREMA
di
HUYGENS

$$I_O = I_G + m(G_O)^2$$

mi dà il trasporto
del momento di
inerzia fuori dal
baricentro



ENERGIA CINETICA



$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} I_G \omega^2$$

$$\text{con } I_G = \frac{m R^2}{2}$$

Se c'è un vettore libero ω
va sempre considerato

LAVORO di una FORZA ELASTICA

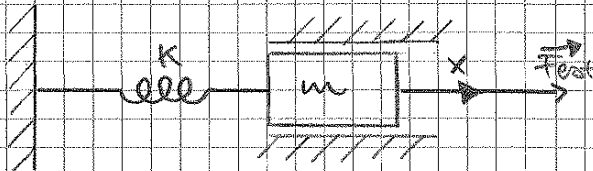
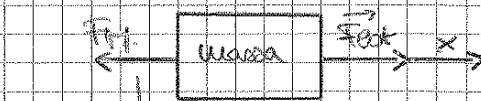


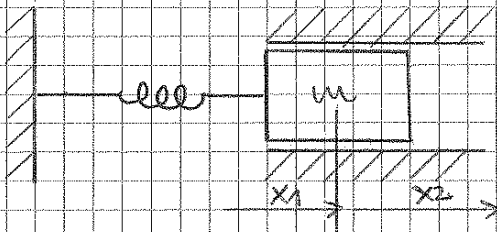
Diagramma di corpo libero della massa



opposta
allo spostamento

$$F_{re} = -Kx$$

rigidezza della molla; dipende dal
materiale; si misura in [N/m]



$$L_{F_{el}} = \int_{x_1}^{x_2} \vec{F}_{el} \cdot d\vec{x} = \int_{x_1}^{x_2} (-Kx) dx = -\frac{1}{2} K(x_2^2 - x_1^2)$$

elimino 'x' perché sono
sulla stessa direzione

↓ perché?

ΔE_c è legato a Δv e $\Delta \omega$
e coinvolgono le accelera-
zioni

$$\Delta E_c \rightarrow \begin{matrix} \Delta v & \rightarrow & \dot{x} \\ \Delta \omega & \rightarrow & \dot{\omega} \end{matrix}$$

↑ lavoro delle
azioni vincolari

ΔE_{pot} è legato al
lavoro delle
forze peso

L_i è il lavoro delle forze interne ed è legato agli attriti

grandezze di
Stato

$$\Delta E_c = \left[\frac{1}{2} m v_G^2 + I_G \omega^2 \right]_f - \left[\frac{1}{2} m v_G^2 + I_G \omega^2 \right]_i$$

$$\Delta E_{pot} = \left[\frac{1}{2} k (x_2^2 - x_1^2) \right]_f - \left[\frac{1}{2} k (x_2^2 - x_1^2) \right]_i$$

$$\Delta E_{pot} = [mgz_2]_f - [mgz_1]_i = mgh$$

In un sistema ideale e senza attriti esterni

$$L_{ext} = 0 \quad L_i = 0$$

$$\left\{ \Delta E_c + \Delta E_{pot} + \Delta E_{pot} = 0 \right\} \text{ PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA}$$

QUANTITÀ di MOTO

a) per una particella di massa m e velocità \vec{v}

$$\vec{Q} = m \cdot \vec{v} \quad [kg \cdot m/s]$$

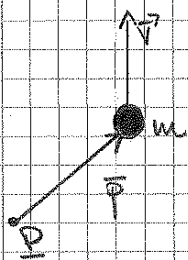
quantità di moto

b) per più masse o corpi estesi

$$\vec{Q} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = m \cdot \vec{v}_G$$

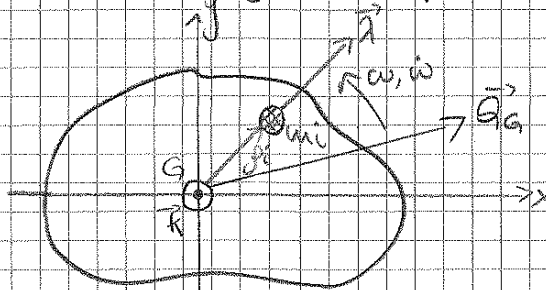
dove \vec{v}_G è la velocità del baricentro

MOMENTO della QUANTITÀ di MOTO



$$\vec{K}_P = \vec{r} \wedge \vec{Q} = \hat{p} \wedge (m \vec{v})$$

o momento della quantità di moto di un corpo rigido nel piano



$$\vec{K}_G = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i \wedge (m_i \vec{v}_i)$$

$$= \sum_{i=1}^n \vec{p}_i \wedge m_i [\omega \vec{r} \wedge \vec{p}_i]$$

$$= \sum_{i=1}^n (p_i^2 m_i) \omega [\vec{r} \wedge [\vec{r} \wedge \vec{p}_i]] =$$

$$= \sum_{i=1}^n \underbrace{(p_i^2 m_i)}_{I_G} \omega \vec{r}$$

$$\left\{ \vec{p}_i = \frac{d(\vec{p}_i \vec{r})}{dt} = \omega \vec{r} \wedge (\vec{p}_i \vec{r}) \right\}$$

$$\begin{cases} \vec{F}_{\text{CG}} = -m\vec{a}_G = -\frac{d\vec{p}_G}{dt} \\ \vec{M}_{\text{CG}} = -I_G\vec{\omega} = -\frac{d\vec{K}_G}{dt} \end{cases}$$

a) Ci sono casi dove, avendo la risultante delle forze esterne, posso avere la conservazione della quantità di moto.

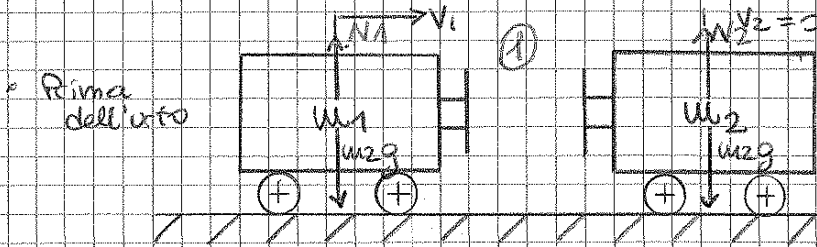
Se $\sum_{i=1}^n \vec{F}_{\text{est } i} = 0$, o non ci sono forze esterne o sono in equilibrio.

$\frac{d\vec{p}_G}{dt} = 0 \rightarrow \vec{p}_G = \text{costante}$ teorema della conservazione della quantità di moto

b) Se $\sum_{i=1}^n \vec{M}_{\text{est } i} = 0$, o non ci sono momenti esterni o sono in equilibrio.

$\frac{d\vec{K}_G}{dt} = 0 \rightarrow \vec{K}_G = \text{costante}$ teorema della conservazione del momento della quantità di moto

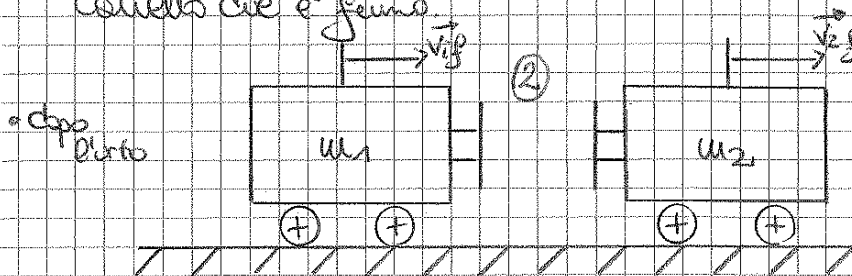
URTO ELASTICO non esiste dissipazione di energia



Camelli con respingenti, dotati di massa e quindi soggetti

Il camello 1 ha una velocità $v_1 \neq 0$, mentre il camello due è fermo.

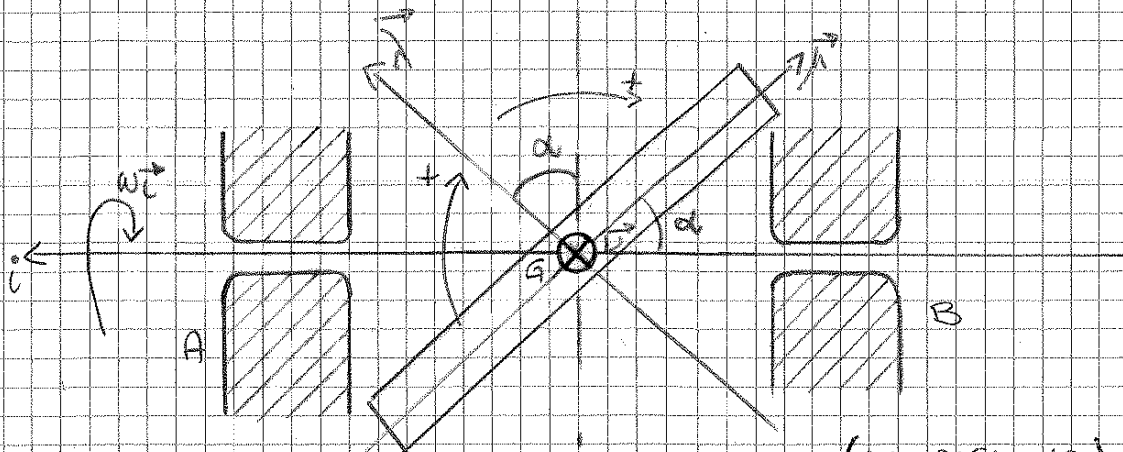
a forza peso e reazione del terreno.



I camelli restano separati ma entrambi

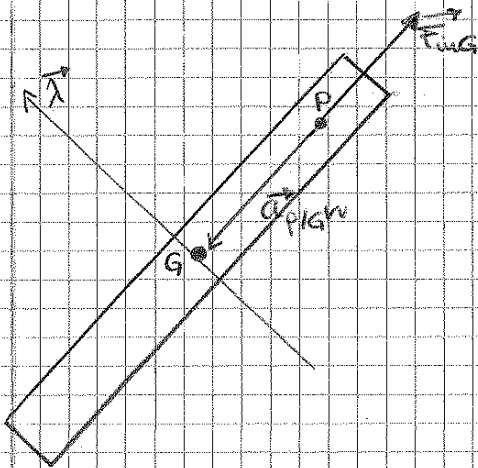
sono dotati di velocità.

ROTORE INCLINATO



Disco inclinato rispetto all'orizzontale di α , ruota attorno ad i . L'inclinazione si mantiene costante lungo la rotazione, idem la frequenza.

$$\left(\begin{array}{l} \omega = \text{costante} \\ \alpha = \text{costante} \end{array} \right)$$



La forza \vec{F}_{inG} , che nasce per contrastare l'accelerazione centripeta è la FORZA DI INERZIA CENTRIFUGA, a velocità costante

$$\vec{F}_{inG} = m (\omega^2) \underbrace{(\vec{G}-\vec{G})}_{\phi}$$

massa equivalente rispetto al punto di rotazione

Se concentro la massa in G e G è vincolo del rotore, il contributo della forza centrifuga si elimina. Un corpo rigido che ruota attorno ad asse che non è quello d'inerzia, fa nascere una coppia di inerzia.

TERNA CENTRALE di INERZIA

- Centrata in G
- assi principali di inerzia (I_{max}, I_{min})
- assi di simmetria (cui aiuta a trovare la geometria del sistema)

asse rotore: \vec{A} (rispetto a \vec{A} , il rotore è assialsimmetrico)

assi d'inerziali: \vec{p} e \vec{D}

$$= (\omega \sin \alpha) \vec{I}_1 \vec{\lambda} - (\omega \cos \alpha) \vec{I}_2 \vec{\lambda} =$$

$$= \omega \cos \alpha \vec{D}$$

$$\frac{d\vec{U}}{dt} = \omega \vec{I}_1 \vec{\mu} =$$

$$= (\omega \sin \alpha) \vec{I}_1 \vec{\mu} - (\omega \cos \alpha) \vec{I}_2 \vec{\mu} =$$

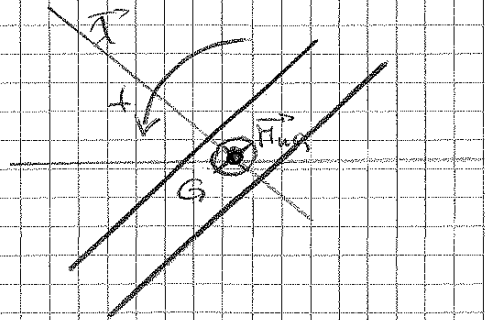
$$= \omega \sin \alpha \vec{D}$$

$$\frac{d\vec{K}G}{dt} = \frac{I_\lambda}{2 I_y} (\omega \sin \alpha) (\omega \cos \alpha) \vec{D} - \frac{I_x}{2} (\omega \cos \alpha) (\omega \sin \alpha) \vec{D}$$

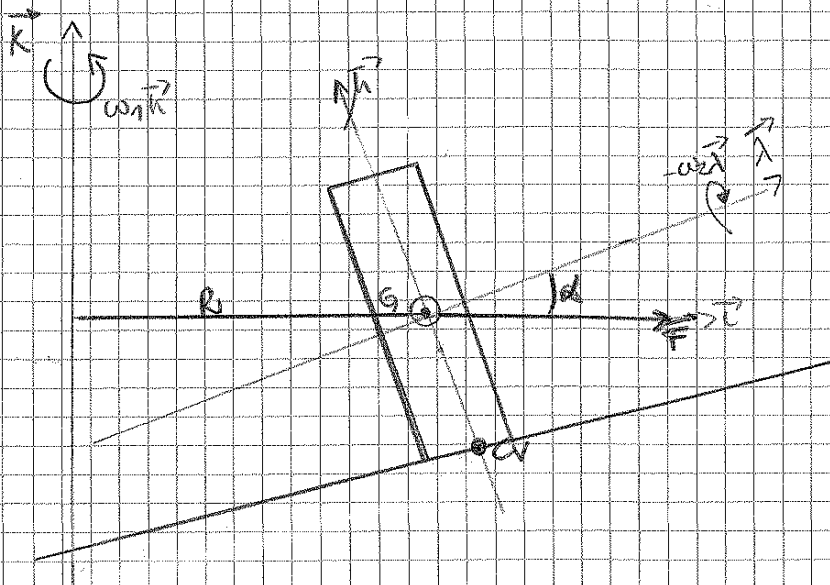
$$= \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha \left(\frac{I_\lambda}{2} \right) \vec{D}$$

$$\vec{M}^{HG} = -\frac{d\vec{K}G}{dt} = -\omega^2 \sin \alpha \cos \alpha \left(\frac{I_\lambda}{2} \right) \vec{D}$$

Essendo uscente,
il vettore positivo e'
l'autocentro, tende
a ridurre il
disco.

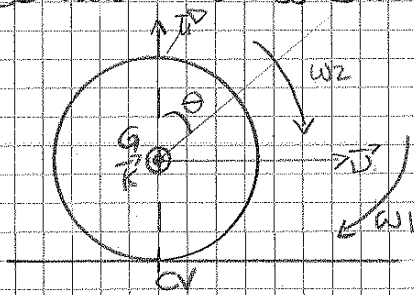


RUOTA di MOTO in CURVA



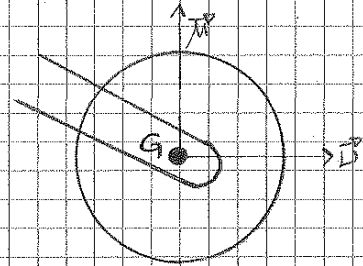
$\vec{\omega}$ tenuto

Se usassi $\vec{\omega}_{ass}$ come $\vec{\omega}_{tenue}$, ci sarebbe un angolo θ da



tenere in considerazione, gli assi, oltre a ruotare su se stessi, lo fanno di rotazione $\vec{\omega}_2$. Ci sono posizioni successive di $\vec{\omega}_1$ e $\vec{\omega}_2$

La moto ha una forcella: P baricentro G e comune alla ruota e alla forcella. Anche $\vec{\omega}_1$ e $\vec{\omega}_2$ sono in comune. Questo mi autorizza ad utilizzare ω_1 .



$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}_G}{dt} &= I_2 [\omega_1 \sin \alpha - \omega_2] (-\omega_1 \cos \alpha \vec{D}) + \frac{I_1}{2} [\omega_1 \cos \alpha] (\omega_1 \sin \alpha \vec{D}) = \\ &= -I_2 \omega_1^2 \sin \alpha \cos \alpha \vec{D} + I_1 \omega_1 \omega_2 \cos \alpha \vec{D} + \frac{I_1}{2} \omega_1^2 \sin \alpha \cos \alpha \vec{D} \\ &= -\frac{I_2}{2} \omega_1^2 \sin \alpha \cos \alpha \vec{D} + I_1 \omega_2 \omega_1 \cos \alpha \vec{D} \end{aligned}$$

$$\vec{r}_{G/G} = -\frac{d\vec{r}_G}{dt} = \frac{I_2}{2} \omega_1^2 \sin \alpha \cos \alpha \vec{D} - I_1 \omega_2 \omega_1 \cos \alpha \vec{D}$$

$$\vec{F}_{G/G} = \underbrace{(m)}_{\text{massa della ruota}} (\vec{\omega} \cdot \vec{r}) \vec{D}$$

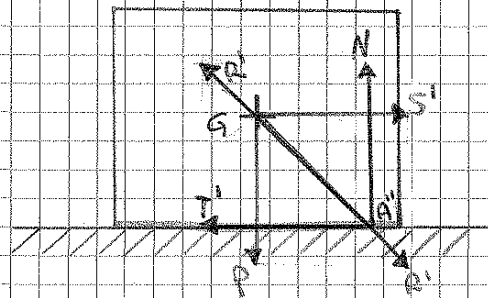
Esiste una forza \oplus che tende a tirare il veicolo verso l'esterno.

da lì passa \textcircled{Q} , che deve creare con \textcircled{P} una risultante uguale ed opposta a quella creata da \textcircled{P} ed \textcircled{S} .

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{+} \\ \uparrow + \end{array} \quad \begin{array}{l} S = T \\ N = P \end{array}$$

$$|R_1| = |R_1|$$

Se aumento S ($\textcircled{S'} > S$), anche T dovrà aumentare ($\textcircled{T'} > T$) e il punto A' si sposterà in avanti (A''): o la cassa è più estesa e A'' va fuori (la cassa si ribalta) o riesce a vincere la resistenza prima di portare A'' fuori (la cassa si muove).



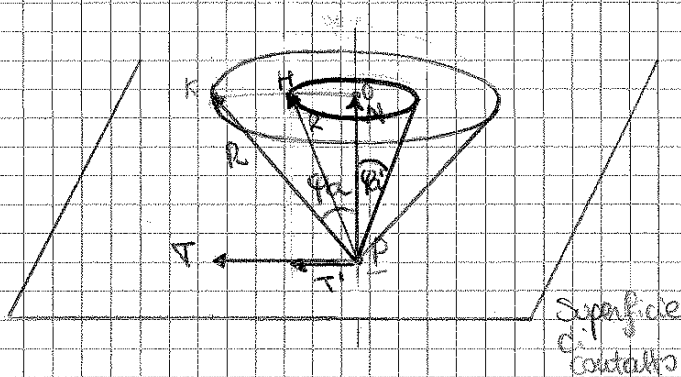
MODELLO MATEMATICO per l'ATTRITO di ADERENZA

$$T \leq f_a N$$

dove f_a è il coefficiente di attrito di aderenza.

Tutto dipende dallo stato delle superfici e dalla natura dei corpi a contatto.

MODELLO GEOMETRICO per l'ATTRITO di ADERENZA

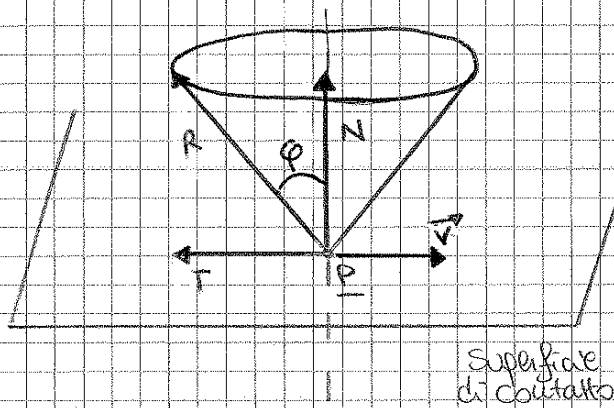


Si pensa un caso di aderenza. L'angolo compreso tra l'asse del cono ed R è detto angolo di aderenza $\textcircled{\phi_a}$

$T = f_a N$ è una generatrice del cono

$T_{lim} =$ forza di aderenza limite oltre cui c'è scivolamento.

MODELLO GEOMETRICO dell' ATRITO di STRISCIAMENTO



R è la generatrice del cono di aderenza

$T = fN$ $f = \text{costante}$

Non è più una disuguaglianza ma un'uguaglianza stretta.

Dal cono ricavato che φ è l'angolo tra N e R

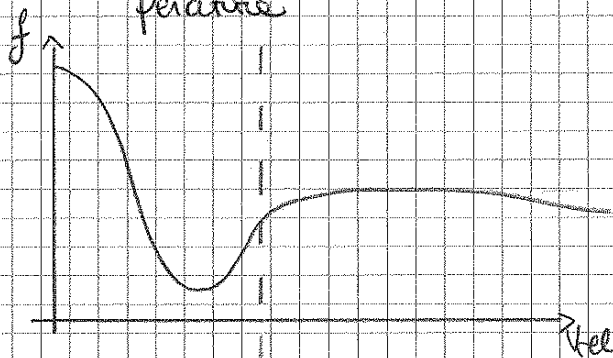
$T = (\text{tg} \varphi) (N)$
 $\boxed{\text{tg} \varphi = f}$

φ angolo di aderenza.

• $T \leq f_a N$ aderenza
 $\text{tg} \varphi_a = f_a$

$T = fN$ strisciamento cassa \rightarrow 1 GdL
 $\text{tg} \varphi = f$
 $f_a > f$ (f e f_a costanti)

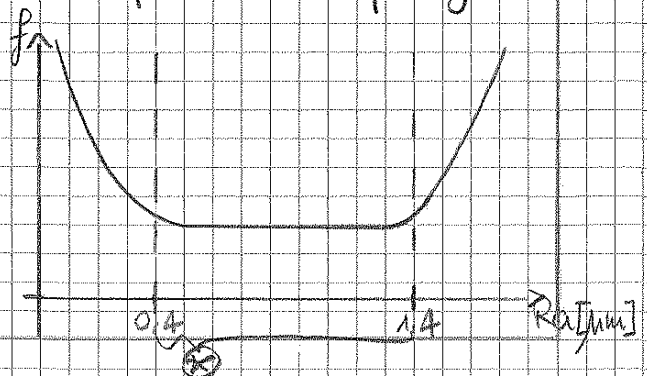
Dove c'è attrito, si manifesta calore; f varia con la temperatura



All'aumentare della vel. fra i due corpi, f aumenta.

STICK SLIP

(un po' striscia e un po' si ferma)



⊗ Campo di rugosità dove conviene andare a lavorare

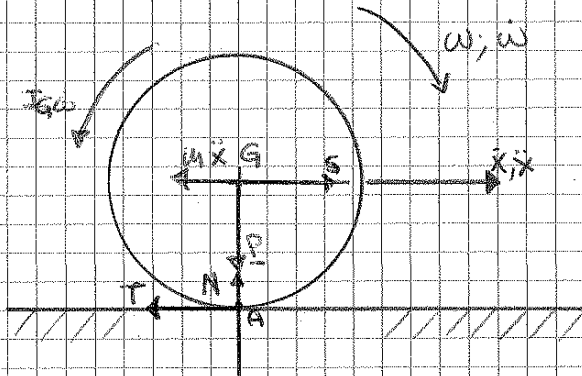
Se trovo che $T > f_a N$ non c'è aderenza, non c'è puro rotolamento. \ddot{x} non è legata alla accelerazione angolare

$$\ddot{x} \neq r\ddot{\omega}$$

C'è strisciamento \rightarrow 2 GdL

Come ④ usavo $T = f_a N$

RUOTA CONDOTTA



Se la ruota è caduta ci sarà una forza ⑤, ma questo non esclude il puro rotolamento. T è opposta al moto del rullo.

$$\begin{cases} \textcircled{1} \uparrow N = P \\ \textcircled{2} \rightarrow S - T = m\ddot{x} = 0 \\ \textcircled{3} \downarrow G \downarrow I_G \ddot{\omega} - T r = 0 \end{cases}$$

Ci sono 3 equazioni e 4 incognite

Ipotesi che sia un puro rotolamento \rightarrow 1 GdL

$$A = C_v$$

$$\textcircled{4} \dot{x} = r\dot{\omega}$$

$$T \leq f_a N$$

Se $T > f_a N$, $\ddot{x} \neq r\ddot{\omega}$



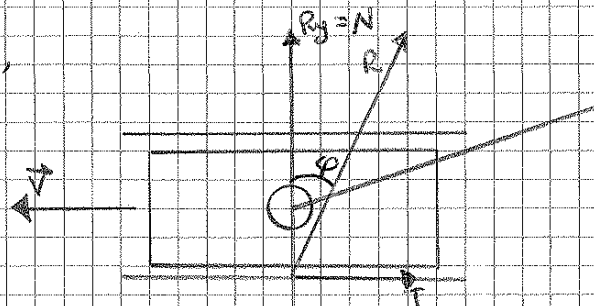
la ruota ha 2 GdL

La ④ serve $T = f_a N$.

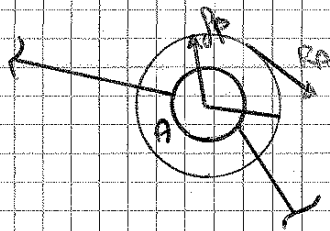
LAVORANDO CON GLI ATTRITI,

I VINCOLI NON SONO

PIÙ IDEALI.



CONSEGUENZE dell'ATTRITO AL FERNO per la REAZIONE VINCOLARE di UNA CERNIERA

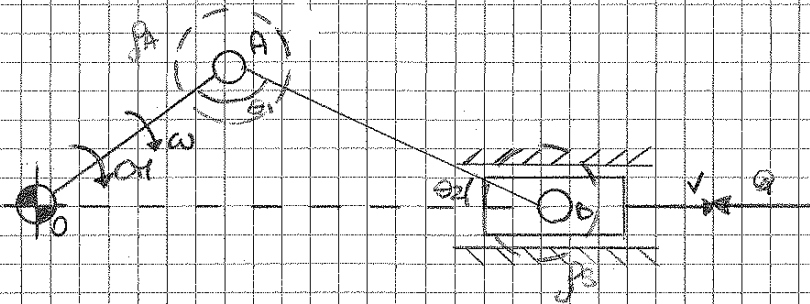


$$f_f = \mu_f \sin \varphi_f$$

\vec{R}_A = risultante delle reazioni vincolari in A

- ① \vec{R}_A dovrà essere sempre tangente al cerchio di attrito al punto;
 - ② \vec{R}_A è anche una reazione di attrito; deve essere opposta al moto in cui è coinvolta la cerniera (qui è opposta a ω);
 - ③ \vec{R}_A deve rispettare l'equilibrio dei corpi in cui è coinvolta
- ! \vec{R}_A non è più applicata nel centro della cerniera

ESEMPIO 1



Quando AO ruota in senso orario, θ_1 aumenta e θ_2 diminuisce; il meccanismo si allunga lungo l'asse orizzontale

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_1 \uparrow \\ \theta_2 \downarrow \\ \text{AB asta scaria } \} 3^{\text{a}} \text{ condizione} \end{array} \right.$$

Il corpo ② è un'asta scanda, quindi ha due forze risultanti. Devono essere dirette lungo la congiungente, tangenziali a p e rispettando l'equilibrio.

Con la tangente riesco a tenere

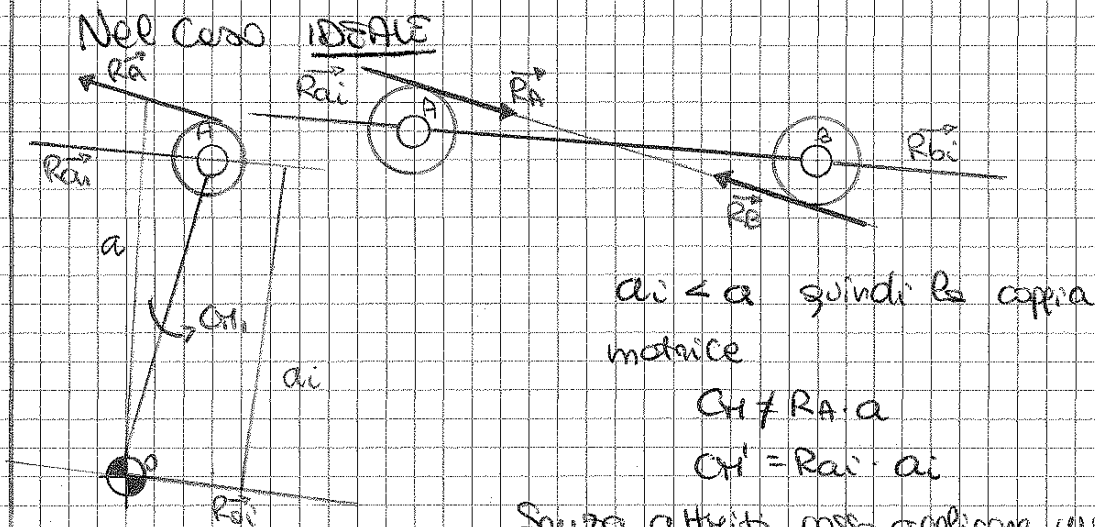
- $\left. \begin{array}{l} RA \text{ e } RB \text{ opposte} \\ RA \text{ opposta } Q_1 \\ RB \text{ opposta } Q_2 \end{array} \right\}$

RA sul corpo ① segue il principio di azione e reazione: RA e R_0 devono essere parallele e formare una coppia opposta a Q_1 .

Determinato a come braccio, $C_M = RA \cdot a$

RB sul corpo 2 segue il principio di azione e reazione: RB e R_0 devono essere parallele e formare una coppia opposta a Q_2 .

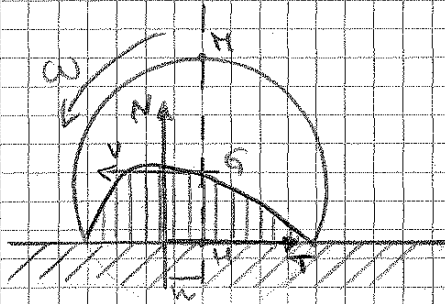
Determinato b come braccio, $C_R = RB \cdot b$



$C_M = RA \cdot a$

$C_M' = RA' \cdot a_i$

Senza attriti, posso applicare una coppia motrice più piccola.



$$G \dot{\omega} \quad N_u = T r$$

$$T = \left(\frac{W}{r} \right) N = \left(\frac{P}{f V} \right) N$$

Coefficiente di attrito viscoso

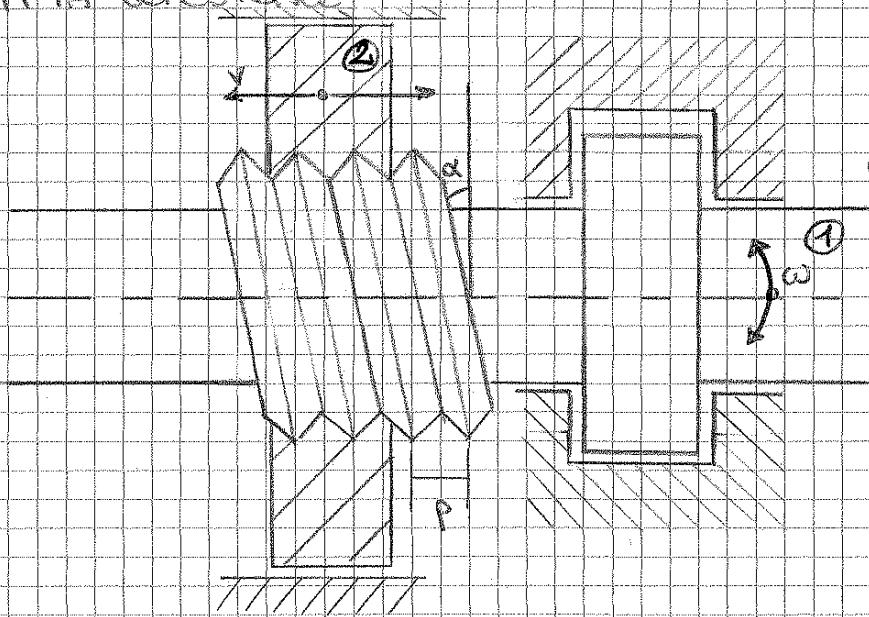
$GH < GM = r$ non valuto la variazione di raggio dovuta alla variazione di forma.

$$V_G = W \cdot GH$$

$$V_G' = W \cdot GM$$

SISTEMA VITE - MADREVITE

COPPIA ELICOIDALE



p passo della vite

① vite

② madre vite

α angolo di inclinazione del filetto

$$v = p/t$$

$$\omega = \frac{2\pi}{t}$$

Mentre la madre vite compie un passo, la vite deve aver fatto un giro completo.

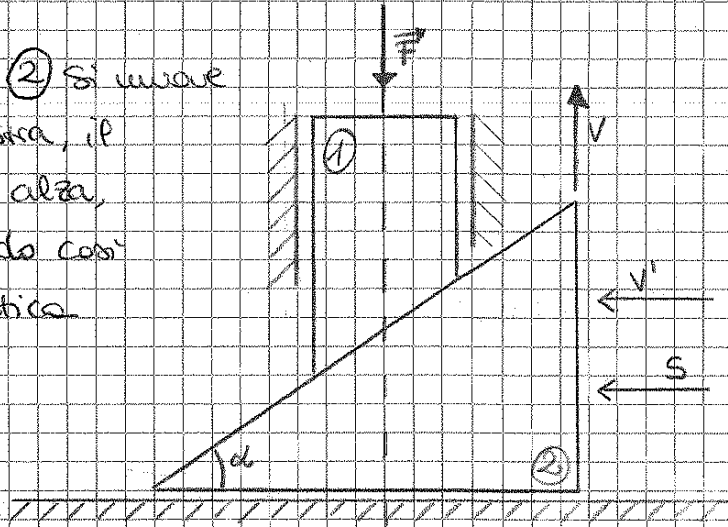
$$\left\{ \begin{array}{l} t = 2\pi/\omega \\ v = p / \frac{2\pi}{\omega} \\ v = \frac{p}{2\pi} (\omega) \end{array} \right.$$

METODO DEI CORPI EQUIVALENTI

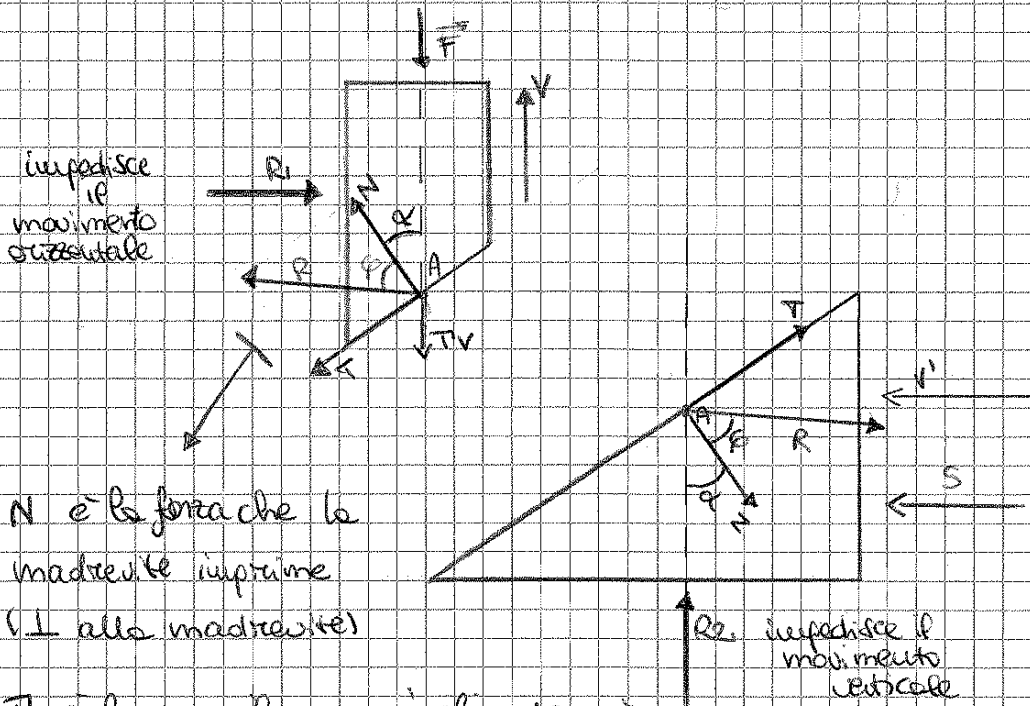
Si basa sullo sviluppo dell'elica del filetto sul piano.

Se il corpo ② si muove verso sinistra, il corpo ① si alza, rispettando così la cinematica originale.

$$S = \frac{c}{r}$$



Considero i vincoli privi di attrito

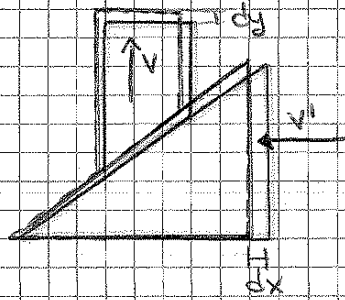


N è la forza che la madrete imprime (⊥ alla madrete)

T è lungo il piano inclinato, e' la componente di strisciamento

Il verso va stabilito in base al moto. Gli assegno il verso e lo ripeto sulla verticale (Tv): se e' opposta a V, e' il verso corretto.

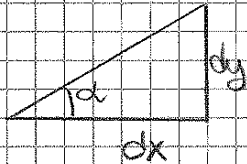
R è la risultante tra N e T, inclinata di φ (angolo tra N e R);



C'è una traslazione lungo x che genera traslazione lungo y, con in mezzo un piano inclinato

$$dy = dx \tan \alpha$$

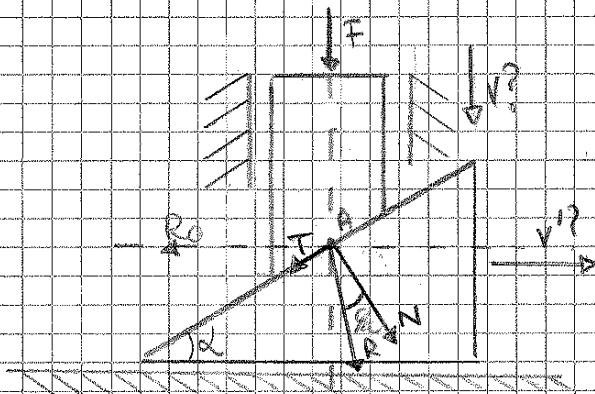
sono legati come i cateti di un triangolo rettangolo



$$v = v' \tan \alpha$$

$$\mu = \frac{\tan \alpha}{\tan(\alpha + \varphi)}$$

Se annullo S, il sistema per gravità può scendere da solo?
Dipende dalla geometria e dall'attrito presente.



- ① $\varphi > \alpha$
 $\hat{\varphi}_A$: R; N
 $\hat{\alpha}$: N; asse

il moto è IRREVERSIBILE
 $v = 0$

- ② $\varphi < \alpha$

$$T = f_a N$$

La componente R_0 produce uno sfilamento del aneo.

$v \neq 0$
 $v' \neq 0$

IL MOTO È REVERSIBILE! C'è strisciamento in discesa e senza controllo dall'esterno, l'attrito non è più di aderenza.

ATTRITI SU CONTATTI ESTESI

$$dN \Rightarrow p dA \quad \text{dove } p \text{ è la pressione di contatto}$$

Per l'analisi dei freni si possono usare due ipotesi:

- 1) Pressione uniforme
- 2) IPOTESI dell'USURA

Ipotesi dell'usura

Il volume di materiale asportato per attrito nell'unità di tempo è proporzionale al lavoro fatto dalle forze di attrito nella stessa unità di tempo.

$$dV = \delta dA \quad \delta = \frac{dh}{dt} = \text{Spessore del materiale asportato nell'unità di tempo}$$

$$= k \frac{d(\text{lavoro})}{dt}$$

$$\delta dA = k \frac{(dT \cdot ds)}{dt}$$

velocità relativa con cui i corpi strisciano

$$\delta dA = k \left[\int \underbrace{dN}_{dN = p dA} \right] v_{rel}$$

$$\delta dA = k [f \cdot p dA] v_{rel}$$

FRENI

a) a PATTINO $\left\{ \begin{array}{l} \text{ad accostamento RIGIDO} \\ \text{ad accostamento LIBERO} \end{array} \right.$

b) a CEPPO, TAMBURO $\left\{ \begin{array}{l} \text{ad accostamento RIGIDO} \\ \text{ad accostamento LIBERO} \end{array} \right.$

c) a DISCO $\left\{ \begin{array}{l} \text{ad accostamento RIGIDO} \\ \text{ad accostamento SEMIRIGIDO} \\ \text{ad accostamento LIBERO} \end{array} \right.$

Applico l'ipotesi dell'usura

$$\delta dA = k [f p dA] v_{rel}$$

δ non è costante

k è costante

f è costante

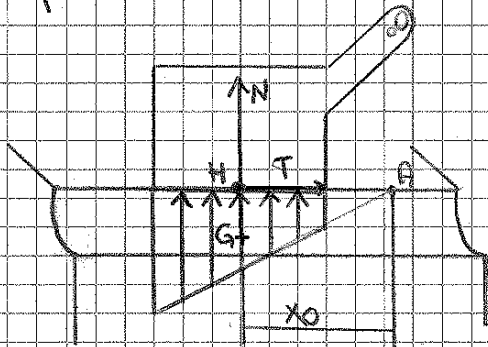
p è un'incognita

v velocità costante nella zona di contatto

$$p = k' \delta$$

k' coinvolge tutti i parametri costanti

Al diagramma di consumo, si sovrappone il diagramma di pressione (rivolto verso l'alto).

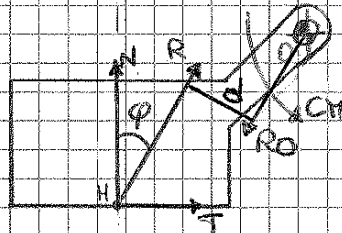


Posso trovare il baricentro del trapezio, la distanza da A a G .

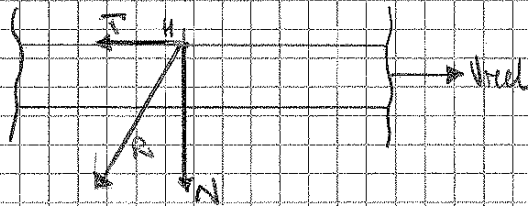
N risultante delle forze di pressione della zona di contatto

$$\int_A p dA = N$$

In H sono applicati sia T che N



È il nostro che si muove quindi disegno T di verso opposto alla velocità relativa e lo riporto sul partino per il principio di azione e reazione.



$$C = R_d$$

$$|R| = |R_0|$$

$$\vec{R} \parallel \vec{R}_0$$

$$|R| = |R_B|$$

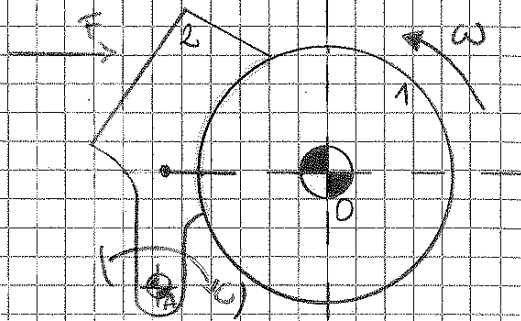
$$|R_B| = |R_O|$$

$$\vec{R}_B \parallel \vec{R}_O$$

$$\sum \vec{C} - \vec{R}_B d = 0$$

o FRENO a CEPPO-TAMBURO (accostamento RIGIDO)

a) ceppo singolo ed esterno



No ipotesi dell'usura

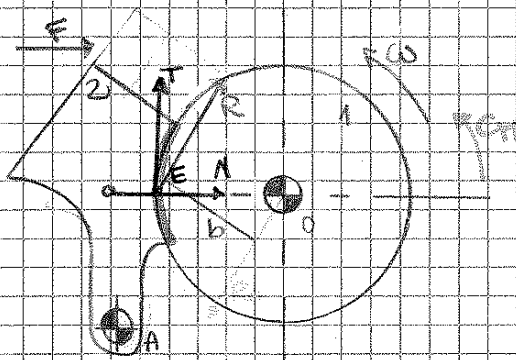
Zona di contatto

- 1 tamburo
- 2 ceppo (1 GDL)

Non dall'area del tamburo, anche se in settore angolare del tamburo,

facendo uscire le azioni

d'attrito che generano il momento frenante
Possiamo applicare o una Forza o una Coppia



Applico N e T a metà della zona di contatto.

IP N e T sono a metà del ceppo e sulla periferia del tamburo

CH è l'azione motrice che fa muovere il tamburo; l'azione frenante è data da \vec{R} ed \vec{R}_O

(IP peso del ceppo è trascurabile)

$$M_{f_t} = Rb$$

(non è un equilibrio)

$$|R| = |R_O|$$

$$\vec{R} \parallel \vec{R}_O$$

①: tamburo

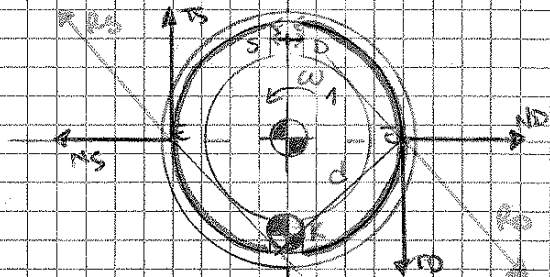
②: ceppi, uno a destra e uno a sinistra, hanno 1 Gdl l'uno

Applico una forza, o una coppia, da entrambe le parti

usando la stessa pressione, si generano le stesse N e le stesse D sulla mezzanina della zona di contatto.

Un ceppo viene caricato più dell'altro, a causa della rotazione: preme più a sinistra, si stacca un po' a destra.

c) De Ceppi Interni



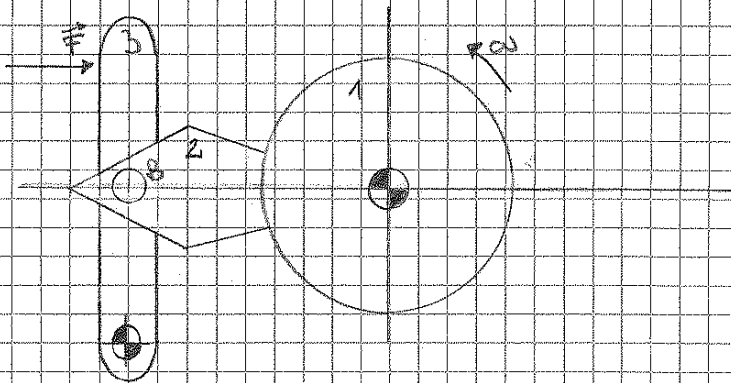
C'è un bordo sul quale premono i ceppi

Le azioni di freno sono le \oplus che premono i ceppi ai bordi; R_b ed R_r

generano una coppia opposta ad ω

$$M_f = (R_b + R_r) b = (T_s + T_d) r_f \quad (\text{non è un equilibrio})$$

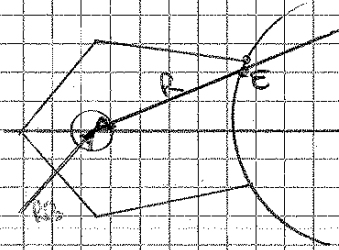
o TAMBURO ad accostamento LIBERO



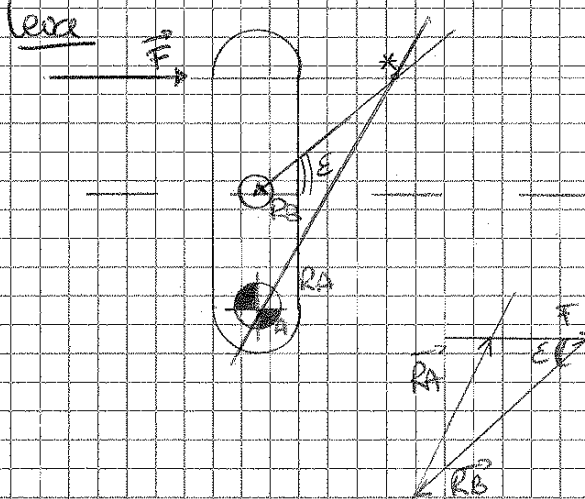
Il ceppo ha un 1 Gdl in più.

- ①: tamburo
- ②: ceppo
- ③: leva

Ceppo



leva

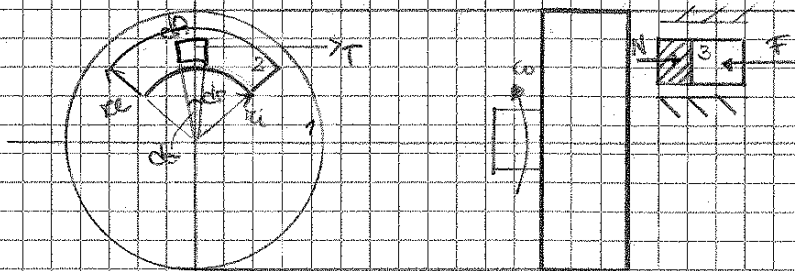


(trascurare il peso)

la leva è soggetta a tre forze: determinano la direzione di R_A dal punto X.

o FRENI a disco

- ad accostamento rigido
- ad accostamento semirigido
- ad accostamento libero

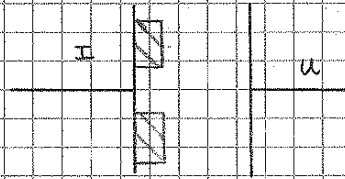


① : disco

② : pastiglia

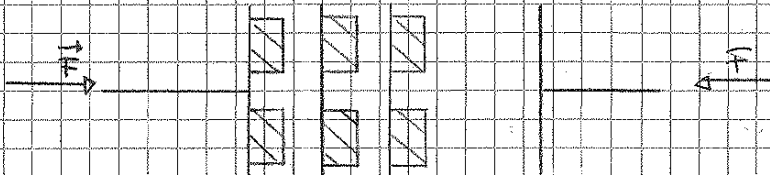
③ : guida prismatica che obbliga la pastiglia ad un solo verso di moto

$dA = r \cdot d\theta$ (settore circolare)



frizione piana con momento
 trascorso = $f F \left(\frac{\pi d u}{2} \right)$

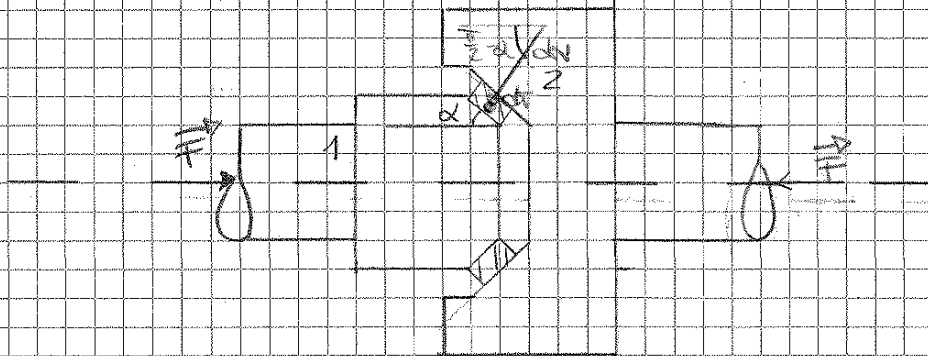
o FRIZIONE PIANA MULTIPLA



$$T_k = (n) f F \left(\frac{\pi d u}{2} \right)$$

numero delle superfici
 di contatto in strisciamento

o FRIZIONE CONICA



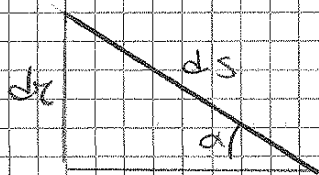
dN è perpendicolare alla superficie di contatto, se impangia
 ω uoce una dT entrante nel piano

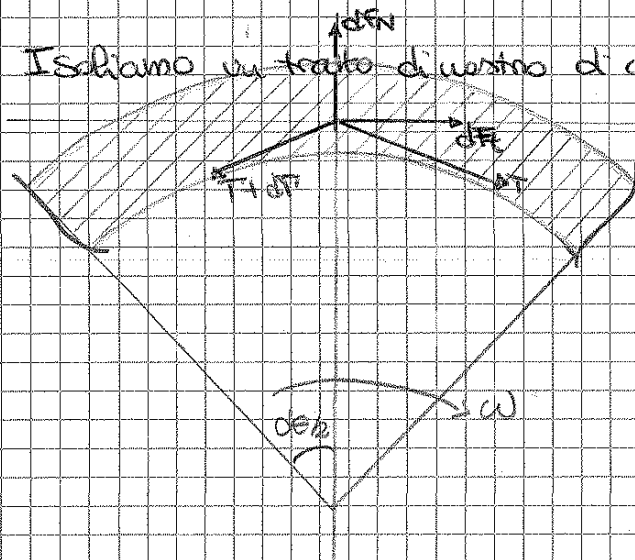
$$F = \int_A dN (\cos(\pi/2 - \alpha)) = \int_A \sin \alpha \, dN$$

$$dA = 2\pi r \, ds = 2\pi r \frac{dr}{\sin \alpha}$$

$$T_k = \frac{f}{\sin \alpha} F \left(\frac{\pi d u}{2} \right)$$

$$\frac{f}{\sin \alpha} = f' > f$$





Isoliamo un tratto di nastro di ampiezza ds

- dF_N dovuto al fatto che è il nastro e' premuto sul tamburo;
- T nel verso di ω , $T+dT$ nel verso opposto,

$$\begin{cases} \uparrow dF_N - (T+dT) \sin \frac{ds}{2} - T \sin \frac{ds}{2} = 0 \\ \rightarrow dF_t - (T+dT) \cos \frac{ds}{2} + T \cos \frac{ds}{2} = 0 \\ dF_t = \int dF_N \end{cases}$$

legge di attrito di stivsciamento

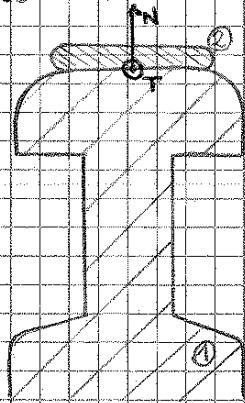
Considerando che $\begin{cases} \cos \frac{ds}{2} \approx 1 \\ \sin \frac{ds}{2} \approx \frac{ds}{2} \end{cases}$

$$\begin{cases} dF_N - T \frac{ds}{2} - \cancel{dT \frac{ds}{2}} - T \frac{ds}{2} = 0 \\ dF_t - T - dT + T = 0 \\ dF_t = \int dF_N \end{cases}$$

infinitesimo d'ordine superiore

$$\begin{cases} dF_N = 2T \frac{ds}{2} \\ dF_t = dT \\ dF_t = \int dF_N \rightarrow dT = \int dF_N \\ dT = \int T ds \end{cases}$$

o Cinghia PIANA

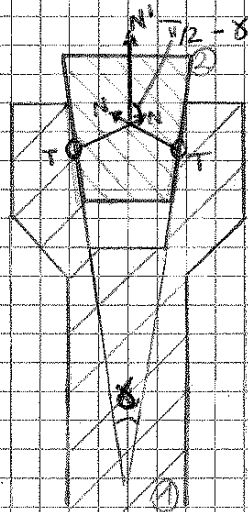


$$T = fN$$

la bombatura favorisce l'assettarsi naturale della cinghia, evita la scemellatura.

- ① puleggia
- ② cinghia

o Cinghia TRAPEZIA



- ① puleggia
- ② cinghia

La diversa sezione porta la cinghia ad impegnarsi sul lato.

Aumenta virtualmente la superficie di attrito.

Il vano viene scavato perché non c'è mai contatto tra fondo e cinghia.

Ho due T, usuali al disegno, e due N, che posso unire in una N' risultante.

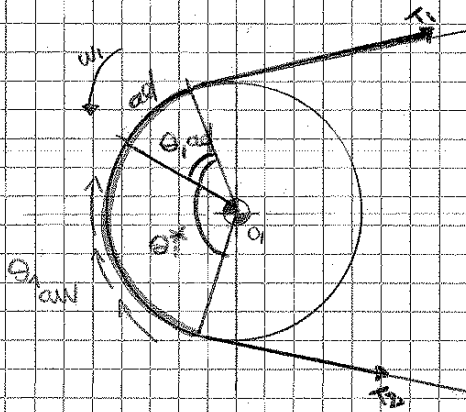
α = angolo di semiapertura della cinghia trapezia

$$N' = 2N \cos(\pi/2 - \alpha) = 2N \sin \alpha$$

$$T_{tot} = 2fN = 2f \frac{N'}{2 \sin \alpha} = \frac{f}{\sin \alpha} N'$$

la relazione tra N e T è cambiata, f' è maggiore di f (aumento del coefficiente d'attrito, si trasmette più coppia)

⑤ PARAMETRI D'ATIRITO



$T_1 > T_2$

$\theta_{1,\omega} = \theta_{1,ad} + \theta_1^*$
 aderenza slittamento

↑ aumenta e aumenta anche la velocità della cinghia

In aderenza, la velocità della cinghia è uguale alla velocità della ruota e vale $\omega_1 R_1$

$\frac{T_1 - qV^2}{T_2 - qV^2} = e^{f\theta_1^*}$ con θ_1^* di slittamento

⑥ PARAMETRI CINEMATICI

Essendo diversi i raggi, $\theta_1 \neq \theta_2$

In aderenza $v = \omega_1 R_1 = \omega_2 R_2$; si definisce il rapporto di TRASMISSIONE i

$\frac{\omega_1}{\omega_2} = i = \frac{R_2}{R_1}$

$v = v_0 \left(1 + \frac{1}{ES} \right)$

E = modulo di Young
 S = sezione trasversale

① $O_1 \rightarrow$ $C_1 - I_1 \omega_1 - (T_1 - T_2) R_1 = 0$
 motore inerzia resistente

② $O_2 \rightarrow$ $(T_1 - T_2) R_2 - C_2 - I_2 \omega_2 = 0$
 motore resistente inerzia

da resistente a motore perché di mezzo c'è una cinghia