appunti
www.centroappunti.it
Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari
Tesi di laurea
Cartoleria e cancelleria
Stampa file e fotocopie
Print on demand
Rilegature

NUMERO : 426

DATA : 10/12/2012

APPUNTI

STUDENTE : Arlotta

MATERIA : Geometria
Prof. Tedeschi

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.
Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTI E NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.

$$\begin{cases} 2x - y + 4z + t = 1 \\ x + y - 2z + 5t = 0 \\ 5x - y + 6z + 7t = 2 \end{cases}$$

La soluzione sarà una quaterna di numeri a, b, c, d (valori delle incognite x, y, z, t) tali che le tre uguaglianze siano verificate.

$A = S = \{ \text{soluzioni} \} \subseteq \mathbb{R}^4$ $\qquad$ $B \subseteq \mathbb{R}^3$

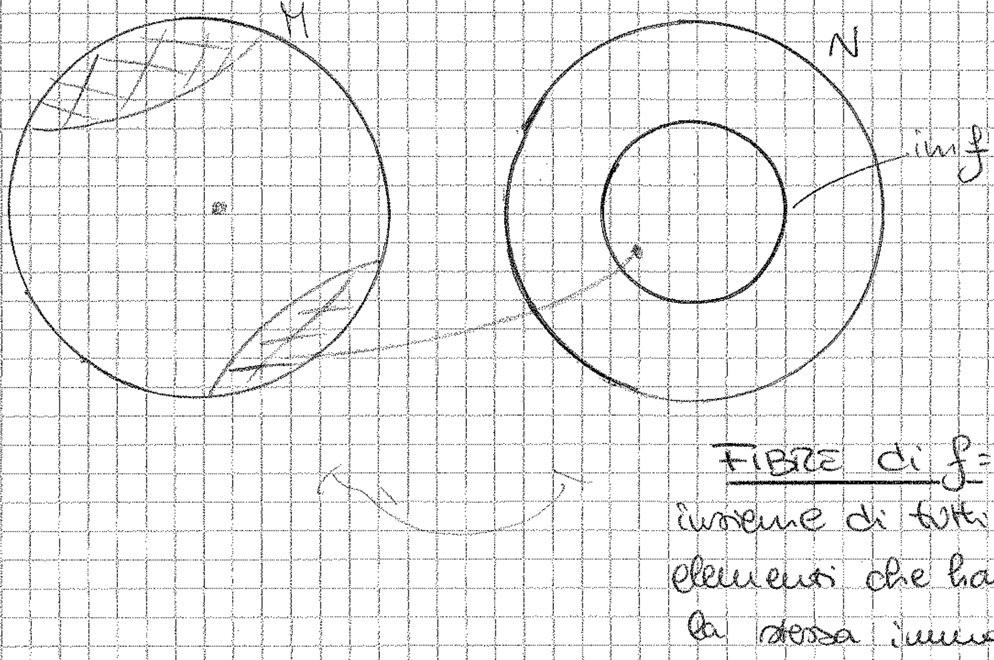
$$A = \begin{pmatrix} +2 & -1 & +4 & +1 \\ +1 & +1 & -2 & +5 \\ +5 & -1 & +6 & +7 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$f(x, y, z, t) = (2x - y + 4z + t,\ x + y - 2z + 5t,\ 5x - y + 6z + 7t)$

$f(x, y, t, t) \Rightarrow \quad x, y, z, t \in S?\ (1, 0, 2)$

Se $x, y, z, t \in S \rightarrow f(x, y, z, t) = B$



FIBRE di f = insieme di tutti gli elementi che hanno la stessa immagine

1) ho due soluzioni, (x, y, z, t) e (x', y', z', t').
la loro somma $(x+x', y+y', z+z', t+t')$
è ancora una soluzione?
: { per un sistema qualunque NO
{ per un sistema omogeneo: SI

2) Un multiplo della soluzione (x, y, z, t) è ancora una soluzione?
: { per un sistema qualunque: NO
{ per un sistema omogeneo: SI

3) $(0, 0, 0, 0)$ è una soluzione)
: { per un sistema qualunque NO
{ per un sistema omogeneo: SI

ESEMPI

1) $F : \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \}$

- $H : \{ f \text{ derivabili} \}$ $H \subset F$

H è un sottospazio di F?

1) la somma di due elementi di $H \in H$? SI
2) un multiplo di un elemento di $H \in H$? SI
3) $(0, 0, 0, 0)$ è derivabile? SI

H è un sottospazio di F!

- $K : \{ f \text{ crescenti} \}$ $K \subset F$

K è un sottospazio di F?

1) la somma di due elementi di $K \in K$? SI
2) un multiplo di un elemento di $K \in K$? NO

SPAZIO VETTORIALE

- $\mathbb{R}^n$ n qualunque, insieme dei numeri reali
- $\mathbb{C}^n$ n qualunque, insieme dei numeri complessi
- $\mathbb{F}$
- $\mathbb{R}[x]$ insieme dei polinomi a variabili x e coefficienti $\mathbb{R}$
- $\mathbb{C}[x]$ insieme dei polinomi a variabili x e coefficienti $\mathbb{C}$

All'interno sono possibili somma e moltiplicazione tra gli oggetti

- $V \times V \longrightarrow V$ per "x" si intende PRODOTTO CARTESIANO
  ad ogni coppia di oggetti viene associato un oggetto
- considero K un insieme di numeri
  $V \times K \longrightarrow V$

UNO SPAZIO VETTORIALE È TALE SE HA 8 PROPRIETÀ

1) $v, \omega \in V$ - commutativa -

$$v + \omega = \omega + v$$

2) $u, v, \omega \in V$ - associativa -

$$(v+\omega)+u = (\omega+u)+v$$

3) $\exists\ \underline{0} \in V$ - $\underline{0}$ vettore nullo -

$$\underline{0} + v = v$$

4) $\forall\ v \in V,\ \exists\ -v$ - opposto di v -

$$v + (-v) = \underline{0}$$

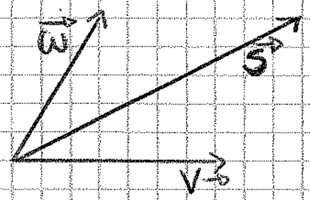
5) $\lambda \cdot (v + \omega) = \lambda v + \lambda \omega$

$$(\forall\ \lambda \in K,\ \forall\ \omega, v \in V)$$

6) $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda v + \mu v$

$$(\forall \mu, \lambda \in K,\ \forall\ v \in V)$$

- $V \longleftrightarrow \mathbb{R}^3$



$v_x,\ v_y,\ v_z$

$w_x,\ w_y,\ w_z$

$s = \vec{v} + \vec{w}$

le componenti di s saranno:

$s_x = v_x + w_x \qquad s_y = v_y + w_y \qquad s_z = v_z + w_z$

le operazioni si fanno in V come in $\mathbb{R}^3$

SOTTOSPAZI

$H \subset V$

per essere un SOTTOSPAZIO sono necessarie tre (quattro) proprietà:

1) $\forall h, k \in H \rightarrow h + k \in H$
2) $\forall h \in H, \forall \lambda \in H \longrightarrow h\lambda \in H$
3) $\underline{0} \in H$
[4) $\forall h \in H, \exists -h$ e deve $\in H$]

La numero (4) può essere inclusa in (2) considerando $\lambda = -1$

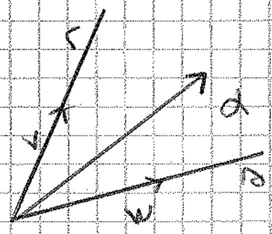
<u>ALCUNI ESEMPI</u>

- $H = \emptyset$
  la terza proprietà mi dice che questo sottospazio non esiste, perché deve contenere almeno il vettore nullo.

- $H \subset \mathbb{R}^3$
  $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x, y, z = 0\}$

$\longrightarrow H \supset r \;,\; \exists\, \omega \notin r,\ \omega \in H$

$s = \{ \lambda \omega / \lambda \in \mathbb{R} \} \subset H$



il vettore somma sta nel piano α

$\alpha \subset H$

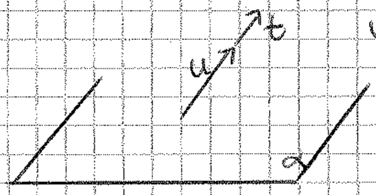
$H = \alpha$

$\longrightarrow \alpha \subset H$

$u < H$

$t = \{ \lambda u / \lambda \in \mathbb{R} \} \subset H$

$u \in \alpha$



$H = \mathbb{R}^3$

FIBRE

COMBINAZIONE LINEARE dei vettori: qualunque vettore che si possa ottenere dai vettori di V

$V = v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$

$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots a_n v_n \quad \in \mathbb{R}$

$\mathcal{L}(v_1, v_2, \ldots v_n)$

- $\mathbb{R}^3 \quad \mathcal{L}(v_1, v_2) \longrightarrow v_1$ e v_2 sono vettori generatori

  ↳ Se giacciono su rette diverse, ottengo un piano

  ↳ Se giacciono sulla stessa retta, ottengo una retta

- $\mathbb{R}[x] \supset \mathcal{L}(1, x, x^2)$

  $ax^2 + bx + c$ tipico polinomio di grado 2

  $\mathcal{L}(1, x, x^2) = \mathbb{R}_2[x]$

- $2, 2+x, 2-x, x^2$

↳ 2 è indipendente

↳ 2+x è indipendente

↳ 2−x è dipendente $\alpha \cdot 2 + \beta(2+x) = \beta x + 2\alpha + 2\beta$ $\begin{cases} \beta = -1 \\ \alpha = 2 \end{cases}$

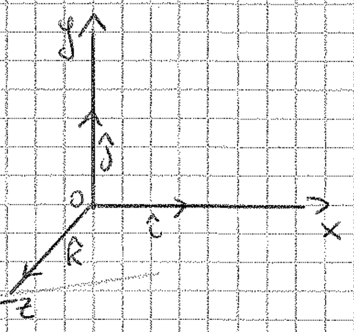
↳ x^2 è dipendente

Non sono linearmente indipendenti

! IL MASSIMO NUMERO di VETTORI LINEARMENTI INDIPENDENTI IN UNO SPAZIO → SPAZIO VETTORIALE !

$V \longleftrightarrow \mathbb{R}^3$

$V = V_x\hat{i} + V_y\hat{j} + V_z\hat{k}$



Supponiamo che in V:

1) tutti i vettori ∈ V siano combinabili linearmente $\mathcal{L}(v_1, v_2, \dots v_n) = V$

2) lo sono in modo unico

⬇

è una base dello spazio V

dimensioni = numero di vettori

- $\{2, 2-x, 2+x, 4x^2\}$

  $\mathbb{R}[x]$

- $(1\,0\,2)(1\,0\,3)(5\,0\,6)$ $\mathbb{R}^3$ no!

  il secondo elemento è sempre zero!

METODO degli SCARTI

$v_1, \dots v_n \qquad \mathcal{L}(v_1, \dots v_n) = V$

Se trovo un vettore che non è linearmente linearmente e lo tolgo → trovo sempre lo stesso spazio di vettore

$\mathbb{R}[x] \quad \{2, 2-x, 2+x, 4x^2\}$

$\mathcal{L}(2, 2-x, \underline{2+x}, \underline{4x^2})$

$2+x$ ↓ non è linearmente indipendente, lo tolgo

$4x^2$ ↳ è indipendente; lo tengo

$\{2, 2-x, 4x^2\}$ = base di $\mathbb{R}_{2}[x]$

2 → è il grado massimo

COMPLETAMENTO DI UN INSIEME CON UNA BASE

$\mathcal{L}(v_1, \dots v_n) \subset V$

prendo un'altra base di V $\{w_1 \dots w_p\}$

$$\mathcal{L}(\underbrace{v_1\ v_2 \dots v_n}_{\text{questi elementi sono già indipendenti (studiati prima)}}, \underbrace{w_1\ w_2 \dots w_p}_{\text{eliminerò qualche elemento}}) = V$$

ESEMPIO

- $\mathbb{R}^3$ $\underbrace{(2\,1\,1)\ (2\,1\,2)}_{\text{indipendenti}}$

completo la base con i tre versori

$(1\,0\,0)\ (0\,1\,0)\ (0\,0\,1)$

L indipendenti

$\Updownarrow$

$\underline{0}$ modo unico

Non possono esistere due basi in uno spazio vettoriale con diverso numero di elementi

DIMOSTRAZIONE

$V = \{v_1, v_2 \dots v_n\}$

$W = \{w_1\ w_2 \dots w_n\}$ sono due basi

$V < W$

Metto un elemento di w in V

$\{w_1\ v_1\ v_2 \dots v_n\}$ qualche elemento se ne va

Metto un altro elemento

$\{w_1\ w_2\ v_1\ v_2 \dots v_n\}$ continuo ad aggiungere elementi fino al punto in cui tutte le v se ne saranno andate e

$\{w_1,\ w_2 \dots w_p\}$ $p < n$ ASSURDO

DIMENSIONE di V: sarà uguale ad un certo numero di elementi, che costituiscono la base

- il massimo numero di elementi indipendenti
- il minimo numero di generatori
- un numero uguale per tutte le basi

dim V = n $\{v_1 \dots v_n\}$

→ devo controllare se generano e se sono indipendenti

se generano → potrei anche scartarne ma avrei un numero m (minore di n) elementi

se sono indipendenti → potrei aggiungerne ma avrei p (maggiore di n) elementi

$V \quad V_B \quad a_1 v_1 \quad a_2 v_2 \quad \dots \quad a_n v_n$

$W \quad W_B \quad b_1 w_1 \quad b_2 w_2 \quad \dots \quad b_n w_n$

$V+W \quad (V+W)_B \quad a_1 v_1 + b_1 w_1 + a_2 v_2 + b_2 w_2 + \dots + a_n v_n + b_n w_n$

- $\mathbb{R}_2[x]$ $\quad$ $\dim \mathbb{R}_2[x] = 3$

$\mathcal{B} = \{2, 2-x, 4x^2\}$

$(x^2+x)_B$ una terna di numeri

$1x^2 + x + 0 = a(2) + b(2-x) + c(4x^2)$

$$\begin{cases} 4c = 1 \longrightarrow c = 1/4 & \text{termine } x^2 \\ b = \mp 1 \longrightarrow b = \mp 1 & \text{termine in } x \\ 2a + 2b = 0 \longrightarrow a = \mp 1 & \text{termine noto} \end{cases}$$

C'è una ed una sola soluzione

$(x^2+x)_B = (\mp 1, \mp 1, 1/4)$ ho espresso (x^2+x) in base canonica ⊛

- $\mathbb{R}^3$ $\{(2 1 1)\ (1 2 0)\ (2 0 0)\}$

$V = (4 4 4) \qquad (4 4 4)_B$

$(4 4 4) = a(2 1 1) + b(1 2 0) + c(2 0 0)$

$$\begin{cases} 4 = 2a + b + 2c \\ 4 = a + 2b + \cancel{0c} \\ 4 = a + \cancel{0b} + \cancel{0c} \longrightarrow a = 4 \end{cases}$$

$b = 0$

$c = -2$

$(444)_B = (4, 0, -2)$

⊛ Se faccio il prodotto vettoriale tra la base e il nuovo elemento:

$2(-1) + (1)(2-x) + \frac{1}{\cancel{4}}(\cancel{4}x^2) \longrightarrow \cancel{2} - \cancel{2} + x + x^2$

$\longrightarrow x^2 + x$

SOMMARE DUE SOTTOSPAZI

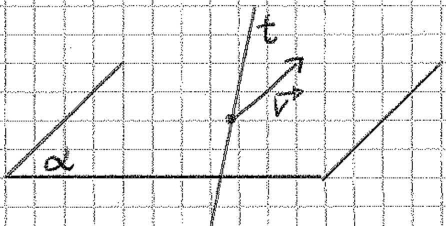
V spazio vettoriale

H, K sottospazi di V

$H+K$ vettori somma di un vettore K e uno H

$$= \{h + k / h \in H, k \in K\}$$

SOMMA DIRETTA



$\alpha \oplus t$ = ogni vettore di $\mathbb{R}^3$

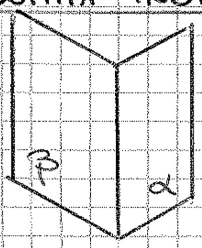
COSTRUZIONE $\vec{v}$

- un piano // α | non posso
- una retta // t | cambiare

nessun addendo

HO UN UNICO MODO!

SOMMA INDIRETTA



$\alpha + \beta$ = ogni vettore di $\mathbb{R}^3$

La somma non è diretta perché ho diversi modi di trovare gli addendi

SOMMA DIRETTA se e solo se si incontrano in un punto (il vettore $\underline{0}$)

↳ $\alpha + t$ si incontrano in un unico punto

↳ $\alpha + \beta$ si incontrano lungo una retta

BASE di α $\{v_1, v_2\}$

BASE di t $\{v_3\}$

base di $\underbrace{\alpha + t}_{\mathbb{R}^3}$? SI

v_1, v_2, v_3 generatori

$v_3 \notin \mathcal{L}(v_1, v_2)$

$\mathcal{L}(2\ 6,\ 4\ 12,\ 6\ 18) \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{matrix} 2 & \xrightarrow{\times 2} & \left\{\begin{matrix}4\\12\end{matrix}\right. & \left\{\begin{matrix}6\\18\end{matrix}\right. \\ 6 & \xrightarrow{\times 3} & & \end{matrix}$$

$(2\ 6) = 2(1\ 3)$

$(4\ 12) = 4(1\ 3)$

$(6\ 18) = 6(1\ 3)$

l'unico generatore è $(1\ 3)$

$\dim C = 1$

$$\boxed{\text{RANGO} = \dim C = \dim R}$$

MATRICE RIDOTTA

$H \subset \mathbb{R}^4$

$H = \mathcal{L}(v_1, v_2, \dots v_n)$ $\qquad \dim H = ?$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4,6}$$

Una matrice si dice RIDOTTA quando ogni riga (od ogni colonna) ha un elemento non-nullo seguito da elementi tutti nulli.

ESEMPI

- $\mathbb{R}^4 \supset H = \mathcal{L}(1201,\ 1111,\ 1021))$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow R_1 \\ \leftarrow R_2 \\ \leftarrow R_3 \end{matrix}$$

Non trovo due zeri sotto a niente

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow$$ non nullo e 3 zeri (l'ordine non importa)

la ribalto $\longrightarrow$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$R_3 \Rightarrow R_3 - R_2$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$R_4 \Rightarrow R_4 - \frac{1}{2} R_2$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$

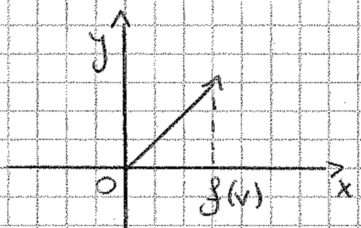
$R_4 \Rightarrow R_4 - 1/4 R_3$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ \underline{0 \quad 0 \quad 0} \end{pmatrix}$

$\dim H = 3$ (rango)

$= \{(0\ 0\ 4)\ (2\ -1\ 0)\ (0\ 2\ 0)\}$

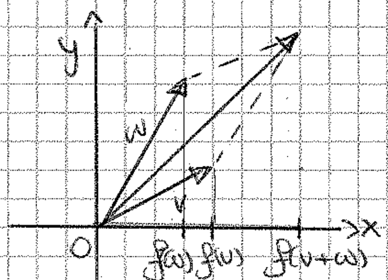
$= \{ 4x^2, 2-x, 2x \}$ generatori

- $f: \mathbb{R}_2 \longrightarrow \mathbb{R}_2$



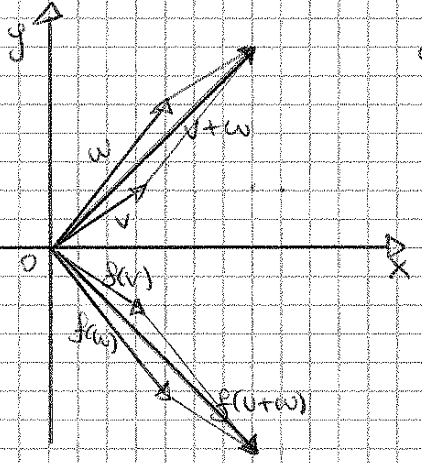
f(v) è la proiezione ortogonale a x

Prop 1:



- Sommo i due vettori e poi proietto $v+w \rightarrow f(v+w)$
- Proietto i vettori e poi sommo $f(v) + f(w) = f(v+w)$ ✓

- $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$



f è il simmetrico rispetto a x.

Posso sommare e poi fare il simmetrico, oppure prima i simmetrici e poi la somma, non cambia il risultato

- $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$f(xy) = (x\ 0\ y^2)$$

$$f[(xy)+(x'\ y')] = f[x+x', y+y'] = x+x', 0, \underbrace{(y+y')^2}$$

$$f(xy) + f(x'y') = (x,0,y^2)+(x',0,y'^2)$$

$$\neq$$

$$(x+x')\ (0+0) + \underbrace{(y^2+y'^2)}$$

non è un'applicazione lineare!

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 29 di 143

- $f: \mathbb{R}_4[x] \longrightarrow \mathbb{R}_3[x]$

  $f(P) = P''$

Im f partendo da un grado 4, troverò in $\mathbb{R}_3[x]$ elementi di grado 2.

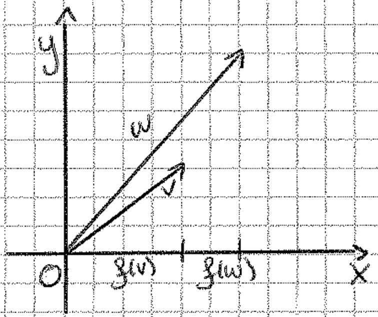
$\text{Im} f = \mathbb{R}_2[x] \subset \mathbb{R}_3[x]$ è un sottospazio

prendo una base $1 \quad x \quad x^2 \quad x^3 \quad x^4$ indipendenti

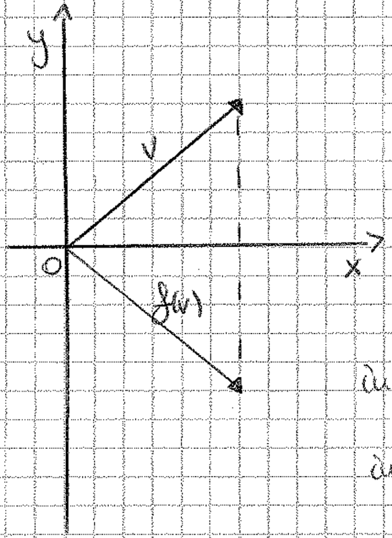
$\downarrow f$

$0 \quad 0 \quad \underline{2 \quad 6x \quad 12x^2}$ assolutamente non indipendenti

questi sono di grado diverso → sono i generatori dell'immagine

- 

Le immagini di v e w sono parallele, i vettori no.

- 

Quali vettori si possono ottenere come simmetriche di qualcun altro?

$\text{Im} f = \mathbb{R}^2$ (suriettiva)

indipendenti in partenza
↓
indipendenti all'arrivo

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 29 di 143

FIBRE e NUCLEI

$ax^2 + bx + c = \alpha(1) + \beta(1+x) + \gamma(x^2)$

$\alpha = c - b$

$\beta = b$ $\qquad f: \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$\gamma = a$ $\qquad f(1+x) = (2\ \ 3)$

base di $\mathbb{R}_2[x]$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 1+x & x^2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ (1\ 1) & (2\ 3) & (1\ 1) \end{array}$$

ho assegnato tutta l'appl. lineare:

$P \in \mathbb{R}_2[x] \qquad P = ax^2 + bx + c$

$f(P) = f[(c-b)\cdot 1 + b(1+x) + a(x^2)]$

$= (c-b)\, f(1) + b\, f(1+x) + a\, f(x^2)$

$= (c-b)(1\ 1) + b(2\ 3) + a(1\ 1)$

$= (c - b + 2b + a,\ c - b + 3b + a)$

$= (c + b + a,\ c + 2b + a)$ ogni polinomio è questa coppia

SECONDO METODO DI ASSEGNAZIONE di APPLICAZIONE LINEARE

$f: V \longrightarrow W$

$\mathcal{B}^n \qquad \mathcal{C}^m$

$V_{\mathcal{B}} = (x_1 \ldots x_n) \qquad f(V)_{\mathcal{C}} = (y_1 \ldots y_m)$

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_n x_n \\ \ldots \\ y_m = a_{1m}x_1 + \ldots + \ldots + a_{mn}x_n \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots & a_n \\ a_{21} & a_{22} \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1m} & a_{2n} & a_{mn} \end{pmatrix} = M$$

Si assegna una matrice all'applicazione lineare f rispetto alle basi $\mathcal{B}\,\mathcal{C}$

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \underbrace{0} & 0 \end{array}$$

$y_1 = 2x_3 - 4x_4$

$y_2 = 6x_4$

$y_3 = 3x_5$

$y_4 = 0$

componenti
del 4° vettore $(x^2+x^3)_e$ (rispetto a e)

$f(x^2+x^3) =$ la sua derivata seconda

$$\underset{(P')}{2x+3x^2} \longrightarrow \underset{(P'')}{2+6x}$$

$$2+6x = y_1 \cdot 1 + y_2(1+x) + y_3(4x^2) + y_4(x^3)$$

$2 = y_1 + y_2$	noto	$y_1 = 2-6 = -4$
$6x = y_2$	1°deg	$y_2 = 6$
$0 = 4y_3$	2°deg	$y_3 = 0$
$0 = y_4$	3°deg	$y_4 = 0$

è effettivamente la 4ª colonna!

1) Scrivo la matrice mettendo le y_n nelle righe, le x_n nelle colonne

2) Consideriamo i singoli vettori della base di P, se ne fa la funzione, si trovano le componente dell'arrivo e si usano come colonne.

dim Im$f = 3$ — generatori delle immagini del vettore di partenza che ora sono le colonne della matrice

↓

spazio delle colonne

$\dim \operatorname{Im} f = \underbrace{3} \longrightarrow$ f è suriettiva

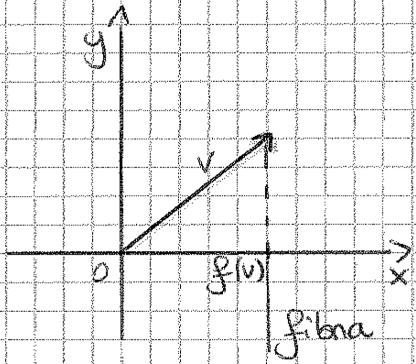
$\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$

$\dim \operatorname{Ker} f = 4 - 3 = 1 \neq 0$

non è iniettiva

ALTRE FIBRE

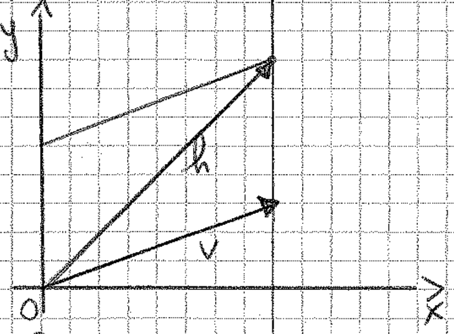
- $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$



asse y = Ker f

Ker f + v = tutti i vettori che si ottengono sommando $= \{h + v \,/\, h \in \operatorname{Ker} f\}$

h vettore laterale di Ker f, h sta sulla $\boxed{\text{fibra}}$



Sottospazio di dimensione 1 (traslato)

$f : V \longrightarrow W$

$v \in V \qquad \{\operatorname{Ker} f + v\} = f^{-1}(w)$ fibra di w

$f(v) = w$

$h + v \in \operatorname{Ker} f$

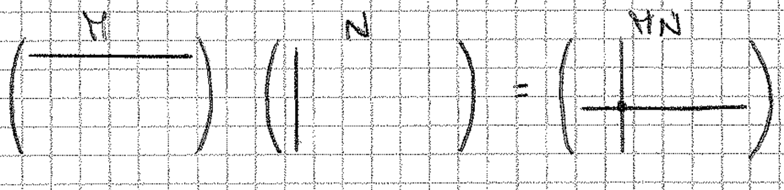
$f\{h + v\} = \underbrace{f(h)} + f(v)$ → è compreso in f(v)

Prodotto di Matrici

$M \in \mathbb{R}^{n,m}$

$N \in \mathbb{R}^{m,p}$

#M righe = #N colonne

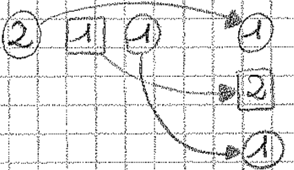


$$\underset{\in \mathbb{R}^{2,3}}{\overset{M}{\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&3\end{pmatrix}}} \cdot \underset{\in \mathbb{R}^{3,3}}{\overset{N}{\begin{pmatrix}1&1&1\\2&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}}}$$

#M righe = #N colonne

$MN \in \mathbb{R}^{2,3}$

1)



$2\cdot1+1\cdot2+1\cdot1 = 5$

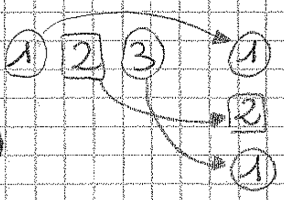
2)

$2\cdot1+1\cdot1+1\cdot1 = 4$

3)

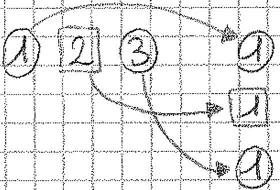
$2\cdot1+1\cdot1+1\cdot2 = 5$

4)



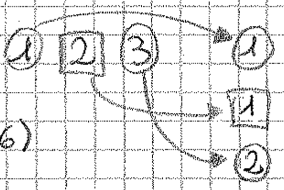
$1\cdot1+2\cdot2+3\cdot1 = 8$

5)



$1\cdot1+2\cdot1+3\cdot1 = 6$

6)



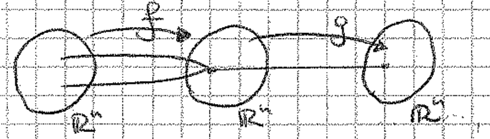
$1\cdot1+2\cdot1+3\ 2 = 9$

$$MN = \begin{pmatrix}5&4&5\\8&6&9\end{pmatrix}$$

3) $h \qquad \frac{1}{h} = h^{-1}$

$h \cdot h^{-1} = 1$

$M \qquad \exists\, M^{-1} / \; MM^{-1} = I = M^{-1}M$



Matrici di un applicazione lineare biunivoca

ESEMPIO #1

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

C'è M^{-1}?

rango = 2 (potrebbe avere M^{-1})

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M \cdot M^{-1} = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ a+c & b+d \end{pmatrix}$$

prodotto RxC

$$\begin{cases} a+2c = 1 \\ b+2d = 0 \\ a+c = 0 \\ b+d = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -1 \\ b = +2 \\ c = 1 \\ d = -1 \end{cases} \qquad M^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ESEMPIO #2

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

rango = 1 (non dovrebbe avere M^{-1})

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{matrix} a+2c & b+2d \\ a+2c & b+2d \end{matrix}$$

$$\begin{cases} a+2c = 1 \\ b+2d = 0 \\ a+2c = 0 \\ b+2d = 1 \end{cases}$$

assurdo!

TEOREMA di ROUCHÉ - CAPELLI

- Il sistema ha o no soluzione? $\Longleftrightarrow$ Quando $f^{-1}(B)$ non è vuota?

  $f^{-1}(B)$ non è vuota se e solo se $B \in \mathrm{Im} f$

  MATRICE COMPLETA $(A|B)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & & a_{2n} & b_2 \\ \dots & & \dots & \dots \\ a_{n1} & & a_{nn} & b_n \end{array}\right)$$

$\rho(A) = \rho(A|B)$?

Se $B \notin \mathrm{Im} f$ allora $\rho(A) < \rho(A|B)$

Se $B \in \mathrm{Im} f$ allora $\rho(A) = \rho(A|B)$

Il sistema ha soluzione se e solo se $\rho(A) = \rho(A|B)$

- Quante soluzioni ci sono? Una o tante?

  Se la funzione è iniettiva, le fibre ($f^{-1}(B)$) contengono un solo elemento (N.B= tutte le fibre hanno lo stesso numero di elementi).

  Affinché $f^{-1}(B)$ abbia un solo elemento, $\rho(A) = n$ (dimensione dell'immagine)

  Le equazioni vere di un sistema lineare sono uguali al rango della matrice completa, dove $\rho(A|B) = n$

- Cosa succede quando $\rho(A) < n$?

  Ker f ha dimensione $= p = n - \dim \mathrm{Im} f$

$$= n - \rho(A)$$

$$p > 0$$

La funzione non è iniettiva

$f^{-1}(B) = ?$

$f^{-1}(B) = \mathrm{Ker} f + v$

w = qualsiasi soluzione $\in f^{-1}(B)$

$w = h + v$ dove $h \in \mathrm{Ker} f$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 43 di 143

Possiamo dare valori a p incognite a patto che le colonne di queste incognite siano la combinazione lineare delle rimanenti

⤳ Sistema omogeneo associato

$AX=B$	$AX=0$	
$f^{-1}(B)$	$\text{Ker} f$	$f^{-1}(B)=\text{Ker} f+v$
Soluzione generale del sistema	Soluzione generale del sistema omogeneo associato	$v\in f^{-1}(B)$
		Soluzione particolare del sistema

Riducendo A|B le soluzioni non cambiano, i sistemi sono equivalenti

- $$\begin{cases} 3x+y-z=0 \\ x+y-3z=-5 \\ x+y=1 \end{cases} \qquad f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$$

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & +3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (A|B)=\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & -5 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

La funzione è $f(x,y,z)=(3x+y-z,\ x+y-3z,\ x+y)$

Soluzione $f^{-1}(B)$

$R_2 \longrightarrow R_2-3R_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 0 \\ -8 & -2 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$R_3 \longrightarrow R_3+1/2\,R_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 0 \\ -8 & -2 & 0 & -5 \\ -3 & 0 & 0 & -3/2 \end{array}\right) \qquad \rho(A)=\rho(A|B)=3$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 43 di 143

Le soluzioni sono

$\{1, -1-t, 0, t\}$ oppure $\{1, y, 0, 1-y\}$

La t può essere libera perchè togliendo la colonna relativa a questa incognita, $\rho(A)$ non varia

$$\begin{cases} 2x+y-z+t=0 \\ 3x+y+2z+t=0 \\ x+z=0 \end{cases}$$

Considerando il sistema omogeneo associato, ritrovo la stessa matrice ridotta con i termini noti tutti "0"

$$\begin{cases} 2x+y-z+t=0 \\ x+3z=0 \\ -2z=0 \end{cases}$$

$z=0$

$x=0$

$y=-t$ oppure $t=-y$

Le soluzioni: $\{0, y, 0, -y\}$

$\{0, -t, 0, t\}$

3 $$\begin{cases} v_1+2v_2=(1\,1\,1) \\ v_1+v_2=(1\,1\,1) \\ -v_1+v_2=(1\,1\,1) \end{cases}$$

$v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$

$\rho(A)=\rho(A|B)$

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} \multicolumn{2}{c|}{A} & \multicolumn{3}{c}{B} \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$\rho(A)=2$ (due colonne non proporzionali)

$R_2 \longrightarrow R_2-R_1$ e $R_3 \longrightarrow R_3-R_1$

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\rho(A|B)=3$

$\rho(A) \neq \rho(A|B)$

nessuna soluzione

SISTEMI LINEARI

DETERMINANTE

$A \in \mathbb{R}^{n,n}$

$0 \leq \rho(A) \leq n$

$\rho(A) = n$ c'è una sola soluzione

$\rho(A) < n$ ci sono più soluzioni (f non è biunivoca né invertibile)

$$\det A \begin{cases} = 0 \longrightarrow \rho(A) < n \\ \neq 0 \longrightarrow \rho(A) = n \end{cases}$$

! $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ $R_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} R_1$ $(a_{11} \neq 0)$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}}(a_{12}) \end{pmatrix} \quad \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11}}$$

$$\boxed{\det A = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

TEOREMA di LAPLACE

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ \boxed{0 \quad 0 \quad 1 \quad 1} \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \leftarrow$$

Per calcolare il determinante scelgo la seconda riga. Quindi non la tengo mai in considerazione.

$$= \ominus \underline{\underline{0}} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \oplus \underline{\underline{0}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \ominus \underline{\underline{1}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \oplus \underline{\underline{1}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

Non considero C_1 Non considero C_2 Non considero C_3 Non considero C_4

Per i segni faccio la somma degli indici $\begin{cases} \text{pari} \rightarrow + \\ \text{dispari} \rightarrow - \end{cases}$

0 posto 2,1 = 3 $\ominus$

0 posto 2,2 = 4 $\oplus$

1 posto 2,3 = 5 $\ominus$ 1 posto 2,4 = 6 $\oplus$

PROBLEMI di ALGEBRA LINEARE

Matrici simili = due matrici di una stessa funzione scritte a partire da basi diverse

$f: \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$ endomorfismo da n a n

B = base canonica   C = base qualsiasi

$M_f^{B,B}$ confrontata con $M_f^{C,C}$ (hanno lo stesso rango)

ESEMPIO

$\mathbb{R}^2$ $B = \{i, j\}$ $v_B = x, y$

$C = \{I, J\}$ $v_C = X, Y$

$I = (a, b)$ $J = (c, d)$

$$V = XI + YJ = X(ai + bj) + Y(ci + dj) =$$
$$= i\underbrace{(aX + cY)}_{x} + j\underbrace{(bX + dY)}_{y}$$

$$\begin{cases} x = aX + cY \\ y = bX + dY \end{cases}$$

Calcolare è ricavare le componenti della base canonica a partire da quella della base non canonica

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}}_{\substack{\text{matrice di} \\ \text{passaggio} = P}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Esiste P^{-1} perché il rango è dato da colonne linearmente indipendenti $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & \dots & \\ & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X'} = A \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X} \qquad X' = AX$$

Le soluzioni sono n-uple di funzioni $\{[C^{\infty}(\mathbb{R})]^n\}$

È un sottospazio con dimensione n

Matrice DIAGONALE → con questa matrice si riesce a risolvere il sistema

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & a_{22} & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x_1(t) = a_{11}\, x_1(t) \\ x_2(t) = a_{22}\, x_2(t) \\ \dots \quad \dots \\ x_n(t) = a_{nn}\, x_n(t) \end{cases}$$

Diventano equazioni staccate tra di loro

$x_1 = C^{a_{11} x}$ e così via

se $a_{2,2} = 0$ allora $x_2 = C_i$

DIAGONALIZZABILE → matrice simile ad una matrice diagonale

$$\underbrace{B}_{\text{diagonale}} = P^{-1} \underbrace{A}_{\text{diagonalizzabile}} P$$

(Si può risolvere anche con queste matrici)

$$X' = AX \qquad B = P^{-1}AP$$

$$P^{-1} \underset{\uparrow}{X} = \underset{\nearrow}{Z} \qquad X = PZ$$

una colonna

Il sottospazio ha dimensione 2, sono state trovate tutte le soluzioni.

A È DIAGONALIZZABILE? Prima pensiamo a quale endomorfismo ha questa matrice rispetto alla base canonica M_f^{BB}. Poi pensiamo ad un'altra base $C = \{v_1, v_2 \dots v_n\}$, tale che la matrice dell'endomorfismo costruita rispetto alla base C sia simile ad A ($M_f^{CC} = (\ddots^{0}) = B$). Abbiamo quindi trovato una matrice diagonale e possiamo costruire la matrice P mettendo in colonna la base C

$$P = \left(\underset{\overset{\downarrow}{v_1}}{\vdots} \quad \underset{\overset{\downarrow}{v_2}}{\vdots} \quad \underset{\overset{\downarrow}{v_n}}{\vdots} \right)$$

SISTEMI DIFFERENZIALI

$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ endomorfismo

$A = M_f^{B,B}$ $\qquad \underset{\text{base}}{C}$ $\qquad B = M_f^{CC}$ diagonale

P ha per colonne i vettori di C

$$C = \{ v_1, v_2, \dots, v_n \}$$

$$M_f^{CC} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \ \lambda_n \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ f(v_1)_C & f(v_2)_C & f(v_n)_C \end{array} \end{array}$$

$f(v_1)C = \lambda_1 \ 0 \ 0 \ 0 \dots 0 \longrightarrow f(v_1) = \lambda_1 v_1$

$f(v_2)C = 0 \ \lambda_2 \ 0 \ 0 \dots 0 \longrightarrow f(v_2) = \lambda_2 v_2$

$\dots$

$f(v_n)C = 0 \ 0 \ 0 \ 0 \dots \lambda_n \longrightarrow f(v_n) = \lambda_n v_n$

La matrice diventa diagonale solo se la base è formata da vettori (AUTOVETTORI) che hanno come immagine un loro multiplo.

$f : \mathbb{R}^4[x] \longrightarrow \mathbb{R}^3[x]$

$f(p) = p''$ non è un endomorfismo

$f : \mathbb{R}^4[x] \longrightarrow \mathbb{R}^4[x]$

$f(p) = p''$ questo sì!

$\mathrm{Ker} f = \mathbb{R}^1[x] = \underbrace{V_0}_{\text{l'unico autospazio}}$ non esistono altri autovalori

Non troviamo 5 vettori linearmente indipendenti

ESEMPIO

$f : C^\infty(\mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R})$

$f(p) = p''$

$f(e^{kt}) = k^2 e^{kt}$ qualunque numero positivo è un autovalore di questa f

METODO per TROVARE gli AUTOVALORI

$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

λ è un certo autovalore

$V_\lambda = ?$ $f(v) = \underbrace{\lambda v}_{\text{autovettore}}$ $f(v) - \lambda v = 0$

Cerchiamo una nuova f che sia

$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$f_\lambda(v) = f(v) - \lambda v$

$V_\lambda = \mathrm{Ker} f_\lambda$

$$A - \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \; \lambda_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}}_{\text{matrice di } f_\lambda}$$

Uso la matrice di f_λ per realizzare un sistema omogeneo e trovo il nucleo Ker f.

Cerchiamo gli autovettori

$V_4 = ? \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \qquad \rho = 1$

$\text{Ker} f = V_4$

$\begin{cases} -3x + 3y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases} \qquad V_4 = \{(k,k)\}$ retta bisettrice 1° e 3° quadrante

$f(k,k) = (4k, 4k) = 4(k,k)$

$V_{-1} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \rho = 1 \qquad V_{-1} = \text{Ker} f$

$\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases} \qquad V_{-1} = \{(3k, -2k)\}$

$f(3k, -2k) = (-3k, 2k) = -1(3k, -2k)$

Base $C = \{(1,1), (3,-2)\}$

$M_f^{C,C} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = B$ gli autovalori sono sulla diagonale

$f(1,1) = (4,4)$

$f(1,1)_C = 4, 0$ coefficienti per cui moltiplico i vettori della base C per ottenere le $f(v)$

B diagonale simile ad A

$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 59 di 143

AUTOVALORI e AUTOSPAZI

- $P \in \mathbb{C}_n[T]$ n radici complesse

$$P = a_n (T-\underbrace{\lambda_1}_{\text{autovalori}})^{m_1} (T-\lambda_2)^{m_2} \dots (T-\lambda_p)^{m_p}$$

$$p \le n \qquad \underbrace{\Sigma m_i}_{\text{molteplicità}} = n$$

- $P \in \mathbb{R}_n[T]$ gli autovalori possono essere strettamente $< n$

dim $V_{\lambda_i} \le m_{\lambda_i}$

Cambiando base e matrice dell'endomorfismo il polinomio caratteristico non cambia. Il polinomio caratteristico è legato all'endomorfismo.

- λ $\quad V_\lambda \quad$ dim $V_\lambda = p$

$\{v_1 \dots v_p\}$ base di V_λ

$\{v_1 \dots v_p, w_{p+1}, \dots w_n\}$ base di $\mathbb{R}^n = D$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \lambda & 0 & 0 & \dots & \\ 0 & \lambda & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & & \\ \dots & \dots & \dots & \lambda & \\ \hline 0 & & & & \\ 0 & & & 0 & \end{array}\right) \text{p colonne}$$

$f(v_1)_D \quad f(v_2)_D$

Cerchiamo la matrice M_f^{DD}

$f(v_1)_D = \lambda v_1$

$f(v_2)_D = \lambda v_2$

$$\left|\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda - t & & & \\ & \lambda - t & & \\ & & \ddots & \\ & & \lambda - t & \\ \hline & & & \end{array}\right)\right| = \underbrace{(\lambda-t)(\lambda-t)\cdots(\lambda-t)}_{\text{la molteplicità di } \lambda \text{ è almeno } p} Q(t)$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 59 di 143

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 61 di 143

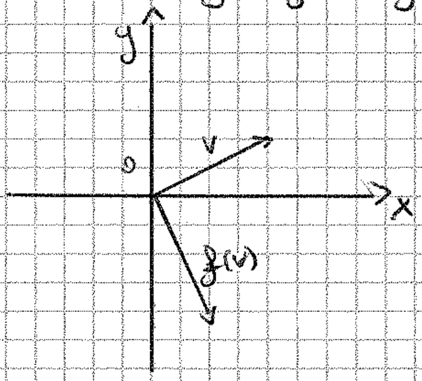
$A \in \mathbb{C}^{2,2}$ $\exists$ $B \in \mathbb{C}^{22} / B = P^{-1}AP$

$\mathbb{C}^{22} > \mathbb{R}^{22}$ non c'è soluzione in $\mathbb{R}$ ma magari
c'è in $\mathbb{C}$

$$\begin{pmatrix} 0-t & 1 \\ -1 & 0-t \end{pmatrix}$$

(t^2+1) polinomio caratteristico
non ha autovalori in $\mathbb{R}$, non è diagonale

$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$f(x,y) = (y,-x)$



ruota di 90° in senso orario

$t = i$ $\quad$ $t = -i$

V_i $\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}$ $\quad \rho = 1$ righe multiple tra loro

$$\begin{cases} -ix + y = 0 \\ (-x - iy = 0) \end{cases}$$

$y = ix$ $\qquad$ (x, ix) autospazio di V_i

V_{-i} $\begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix}$ $\quad \rho = 1$

$(x, -ix)$ autospazio di V_{-i}

$B = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = M_1^{CC}$ $\qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$ $\qquad \mathcal{C} = \{(1\,1), (1\,1)\}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 61 di 143

$h = \pm 1 \qquad t = -h$

$$V_{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \rho = 1$$

$\dim V_{-1} = 1 < m$

non è un endomorfismo semplice

CARATTERISTICHE dei VETTORI in SPAZI VETTORIALI

Spazio vettoriale $= \mathbb{R}^n$

$v \cdot w = |v||w| \cos(v, w)$

$v^2 = v \cdot v = |v||v| \cos(v, v) = |v|^2$ $\qquad |v| = \sqrt{v \cdot v}$

Definizione di prodotto scalare in $\mathbb{R}^n$

$v = (a_1, a_2, \dots, a_n)$

$w = (b_1, b_2, \dots, b_n)$

$v \cdot w = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$

$v \perp w$ se e solo se $v \cdot w = 0$

Definizione di lunghezza di un vettore in $\mathbb{R}^n$

$|v| = \sqrt{v \cdot v} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$

Versore = vettore di modulo 1

Lo spazio $\mathbb{R}^n$ con queste operazioni si chiama $\mathbb{R}^n$ EUCLIDEO

Base di $\mathbb{R}^n = \{v_1, \dots, v_n\}$ vettori ortonormali = tutti di modulo 1 e a due a due ortogonali

$$P = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = {}^tP$$

$|P| = -\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = -1$

Se il determinante è $= 1$ i versori sono orientati correttamente (MATRICE ORTOGONALE SPECIALE).
Metodo usato per capire l'orientamento dei versori dati

ESEMPIO

Prendiamo H sottospazio di $\mathbb{R}^n$
Sottospazio ortogonale ad H? $H^{\perp}$

$$H^{\perp} = \{ v / \underset{\overset{\|}{0}}{v \cdot w} \quad \forall w \in H \}$$

tutti i vettori ortogonali a tutti i vettori dell sottospazio

Si può dire anche come vettore ortogonale a tutti i vettori di una base di H

H $\dim H = p$

$\{v_1, \dots, v_p\}$ = base di H

$v_1 = (a_{11}, a_{12} \dots, a_{1n})$
$v_2 \ (a_{21}, a_{22}, \dots a_{2n})$
$\dots$
$v_p = (a_{p1}, a_{p2}, \dots, a_{pn})$

$v = (x_1, x_2, \dots x_n)$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \dots + a_{1n}x_n = 0$$
$$\dots$$
$$a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \dots \dots + a_{pn}x_p = 0$$

le x sono le soluzioni del sistema omogeneo.
~~Il rango del sistema è p la dimensione del sottospazio ortogonale è n-p.~~

FORME QUADRATICA

$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ forme = funzioni

n^2 monomi di secondo grado

$$f(v) = a_{11}x_1^2 + 2a_{1,2}x_1x_2 + 2a_{1,3}x_1x_3 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n + a_{22}x_2^2 + 2a_{2,3}x_2x_3 + \dots + 2a_{2n}x_2x_n + \dots + a_{nn}x_n^2$$

$V = (x_1, x_2, \dots, x_n) = X$

$$A = \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & & x_n & \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & x_1 \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} & x_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ & & & a_{nn} & x_n \end{array} = \text{Matrice Simmetrica}$$

Le matrici reali simmetriche sono sempre diagonalizzabili. Gli autospazi di queste matrici sono a due a de ortogonali. ESISTE UNA BASE ORTONORMALE FORMATA DA DUE VETTORI DI QUESTA MATRICE.

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ \dots \quad \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{pmatrix}$$

$X^t AX$ = un numero, ottengo la precedente $f(v)$

$$f(v) = {}^tXAX$$

- Che segno assume $f(v)$?

$$f(x,y,z) = 2x^2 + 2xy + y^2 + z^2 = x^2 + (x+y)^2 + z^2$$

↳ è sempre positiva, si annulla nell'origine.

$$\boxed{f(v) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2}$$

forma canonica della forma quadratica
(l'importante sono i segni)

ESEMPIO

$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad f(x,y,z) = -3x^2 + 2\sqrt{2}xz - 2z^2$

$$A = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc} x & y & z \\ -3 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \end{array}\right)\begin{array}{c} \\ x \\ y \\ z \end{array} \longrightarrow \begin{vmatrix} -3-t & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & -t & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & -2-t \end{vmatrix} =$$

$$= -t\left[(-3-t)(-2-t)-2\right] = -t\left(t^2+5t+4\right)$$

$$3 \text{ autovalori} \begin{array}{l} \nearrow 1 \text{ nullo} \\ \searrow 2 \text{ negativi} \end{array} \Big\} \text{ SEMIDEFINITA NEGATIVA}$$

$$\begin{cases} t_1 = 0 \\ t_2 = -4 \\ t_3 = -1 \end{cases}$$

$\exists\ C = \{I, J, K\}$ con coordinate X, Y, Z

La forma quadratica con la nuova base sarà

$$f(v) = 0X^2 - 4Y^2 - Z^2$$

Cerchiamo la base ortonormale

$$V_0 \begin{pmatrix} -3 & 0 & \sqrt{2} \\ \cancel{0 \quad 0 \quad 0} \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \end{pmatrix} \rho(V_0) = 2 \quad \begin{cases} -3x + \sqrt{2}z = 0 \\ \sqrt{2}x - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Soluzione

$\{(0, y, 0)\}$

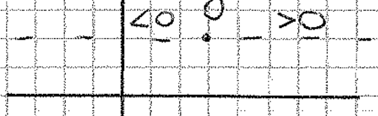
Base $= \{(0,1,0)\}$ è un versore

FUNZIONI A PIÙ VARIABILI

DERIVATE PARZIALI

$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(xy) = x^2 - y^2$

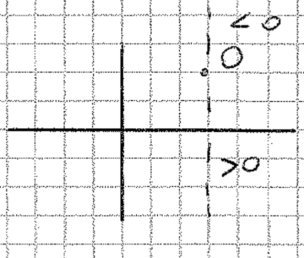


$P=(1,1)$

$f(P)=0$

$(y=1)$

Bisogna definire un punto e una direzione per stabilire se la funzione cresce o decresce.



$f(P)=0$

$(x=1)$

Se fissiamo una delle due incognite possiamo eseguire una derivata parziale

$f'(xy) = 2x$ (tengo y fissata, si chiama derivata parziale rispetto a x)

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$ $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y$

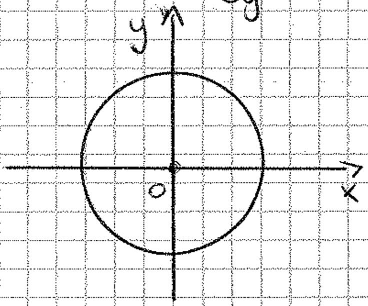
La $\frac{\partial f}{\partial x^P} = +2$ ci dice che la funzione cresce lungo la direzione di aumento delle coordinate di x.

$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ n variabili $n^2 = \#$ di possibili derivate seconde

$f(x_1, x_2, \ldots x_n)$

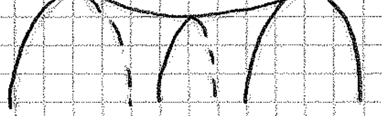
$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ derivata seconda (prima rispetto a x e poi rispetto a y)

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$ $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y$ solo in O sono nulle entrambe



Non posso concludere nulla, né massimo né minimo

O è un punto di sella



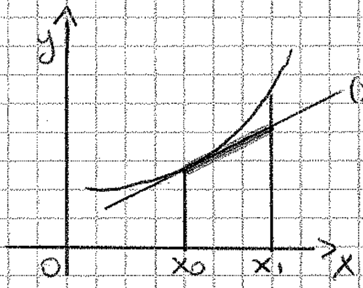
PUNTI di STAZIONARIETÀ

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}P, \frac{\partial f}{\partial x_2}P, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}P\right)$$ vettori di $\mathbb{R}^n$

$\Downarrow$

gradiente della funzione ∇f

TAYLOR



$f(x_1) - f(x_0)$

~ Valutare l'incremento dividendo in infinitesimi ~

$$= \underbrace{\boxed{f'(x_0)}\,\boxed{(x_1 - x_0)}}_{\text{infinitesimo di 1° ordine}} + \underbrace{\frac{1}{2} f''(x_0)(x_1 - x_0)^2}_{\text{infinitesimo di 2° ordine}} + \dots$$

tangente trigonometrica

incremento della funzione

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}P & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}P & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}P \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}P & \cdots & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_n}P \end{vmatrix}$$

n^2 elementi

MATRICE HESSIANA della funzione $H_P(f) \in \mathbb{R}^{n,n}$

ESEMPIO

- $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(xy) = xy + \frac{4}{x} + \frac{2}{y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y - \frac{4}{x^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x + \frac{2}{y^2}$$

$$y - \frac{4}{x^2} = 0 \qquad x + \frac{2}{y^2} = 0$$

$$y = 4/x^2 \longrightarrow x - 2 \cdot \frac{x^4}{16} = 0$$

$$x - \frac{x^4}{8} = 0$$

$x = 0$ no!

Non appartiene al dominio

$$x(1 - x^3/8) = 0$$

$x = 0$ $\quad$ $x = 2$

$x = 2 \longrightarrow y = 1$ punto stazionario $(2;1) = B$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{8}{x^3} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1 \qquad \underbrace{y}_{} - \frac{4}{x^2}$$

derivo solo questo

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 1 \qquad \underbrace{x}_{} - \frac{2}{y^2} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{4}{y^3}$$

derivo solo questo

$$\left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{8}} & -\frac{1}{\sqrt{8}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{8}} & \frac{1}{\sqrt{8}} & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array}$$

$D_1 \quad 4x^3+4xy^2-y$

$D_2 \quad 4x^2y+4y^3-x$

$D_3 \quad 2z$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2+4y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 8xy-1 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 8xy-1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 0 \quad (z \text{ non compare}) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4x^2+12y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2$$

$H_{P_1}(f)$ derivate in O

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-T} \begin{pmatrix} -T & -1 & 0 \\ -1 & -T & 0 \\ 0 & 0 & 2-T \end{pmatrix} = (T^2-1)(\ \ -T)$$

$$T = \begin{cases} 1 \\ -1 \\ 2 \end{cases}$$

due punti di sella positivi e uno negativo

forma quadratica non definita

$g(x\,y) = x^2 + y^3$

$\frac{\partial g}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = 3y^2$ nulle in 0

$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 2$

$H_0(g) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} = 0$

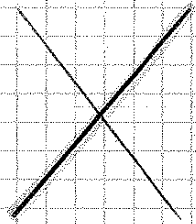
$g^*(x,y) = x^2 + \omega$

$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 6y$

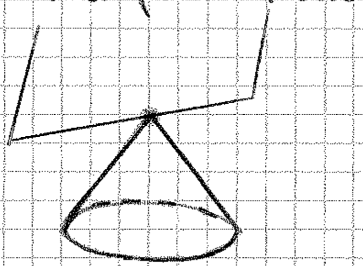
Ho la stessa matrice hessiana ma un punto di sella: se prendo $y \geq 0 \rightarrow y^3 \geq 0$ ma per $y \leq 0 \longrightarrow y^3 \leq 0$!

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 81 di 143

Parabola degenere: ottengo due rette incidenti



Ellisse degenere: ottengo due rette complesse coniugate e un punto reale



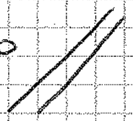
IPERBOLE DEGENERE $(ax+by+c)(a'x+b'y+c')=0$ (2° grado)

PARABOLA DEGENERE $(ax+by+c)^2=0$

ELLISSE DEGENERE $(ax^2+by^2)=0$

$(x^2+y^2=0)$

$(ax+by+c)(ax+by+c')=0$



unione di rette parallele

È ottenuta da un cono con il vertice lontanissimo, assimilabile ad un cilindro. (Parabola degenere)

TUTTE LE CURVE di EQUAZIONE di 2° grado POSSONO ESSERE OTTENUTE dal TAGLIO di un CONO CON UN PIANO.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 81 di 143

$a = \sqrt{\frac{k}{a_{11}}}$ $b = \sqrt{\frac{k}{a_{22}}}$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$ IPERBOLE

Se $K = 0$

$$a_{11} x^2 - a_{22} y^2 = 0$$

$$(\sqrt{a_{11}}\, x + \sqrt{a_{22}}\, y)(\sqrt{a_{11}}\, x - \sqrt{a_{22}}\, y) = 0$$

Questa e' un' IPERBOLE DEGENERE

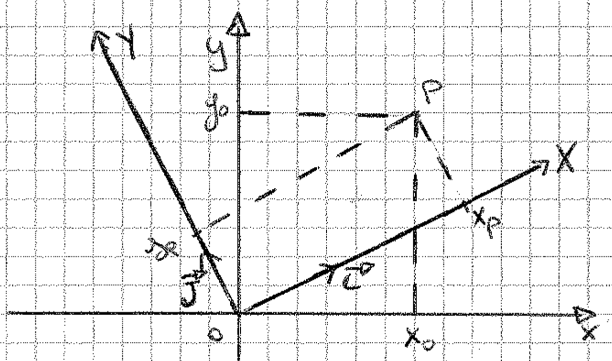
Iperbole = curva di livello di forma non definita

Adesso adottiamo una forma quadratica qualsiasi

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(xy) = a_{11} x^2 + 2a_{12} xy + a_{22} y^2 = K$$

$K > 0$



$f(P) = \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 = K$ Otteniamo un'ellisse ruotata rispetto ai vecchi assi

Trovare gli autovettori fornisce di quanto l'ellisse e' ruotata.

La nuova curva di livello è un'ellisse ruotata

La curva di livello di un polinomio di 2° grado che si ________ è un'iperbole o un'ellisse centrata in P e con gli assi opportunamente ruotati

Equazione Canonica

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 = \gamma$$

$$\gamma = -\frac{|B|}{|A|}$$

Dopo la diagonalizzazione $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

se $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ forma positiva o negativa

se $\lambda_1 \lambda_2 < 0$ forma non definita

$|A| > 0 \rightarrow$ ELLISSE

$|A| < 0 \rightarrow$ IPERBOLE

$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 = \gamma$ (definita o non definita)

$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma \end{pmatrix}$

$\gamma = 0$ la conica è degenere

$\gamma \neq 0$ la conica è "normale"

$\rho(B) = 3 \rightarrow$ conica non degenere

$\rho(B) < 3 \rightarrow$ conica degenere

ESEMPIO

$$5x^2 - 6xy + 5y^2 - 16 = 0$$

$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 \\ -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -16 \end{pmatrix}$

$|A| = (5 \cdot 5) - (-3 \cdot (-3)) = 25 - 9 = 16$

$|B| = -16 - 16$ $\rho(B) = 3$ ellisse degenere

$2x^2 - 6xy + xy - 3y^2 \longrightarrow 2x^2 - 5xy - 3y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$

Il centro dell'iperbole è il punto in cui si incontrano gli asintoti

$$\begin{cases} 2x + y + 1 = 0 \\ x - 3y + 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} x &= 8/7 \\ y &= 3/7 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -5/2 & a_{13} \\ -5/2 & -3 & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2u - \frac{5}{2}v + a_{13} = 0 \\ -\frac{5}{2}u - 3v + a_{23} = 0 \end{cases} \qquad (uv)\left(\frac{2}{7}, \frac{3}{7}\right)$$

$$\begin{cases} \frac{4}{7} - \frac{15}{4} + a_{13} = 0 \\ -\frac{5}{7} \cdot \frac{9}{7} + a_{23} = 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} a_{13} &= 1/2 \\ a_{23} &= 2 \end{aligned}$$

$2x^2 - 5xy - 3y^2 + x + 4y + a_{33} = 0$

a_{33} deve soddisfare il punto $(2,0)$

$2 \cdot 4 - \cancel{5 \cdot 2 \cdot 0} - \cancel{3 \cdot 0^2} + 2 + \cancel{4 \cdot 0} + a_{33} = 0$

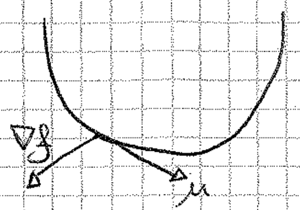
$8 + 2 + a_{33} = 0$

$a_{33} = -10$

$2x^2 - 5xy - 3y^2 + x + 4xy - 10 = 0$

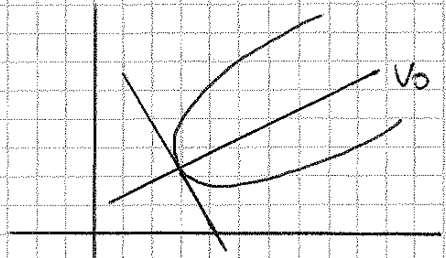
$f(xy) = 0$ $\qquad f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\frac{\partial f}{\partial u} = 0$



In ogni punto il gradiente è perpendicolare alla retta tangente nel punto alla curva stessa.

Posso trovare la retta tangente ad una curva in un punto



L'asse dell'autospazio è l'asse della parabola

In quale punto il gradiente della funzione in cui interceta l'asse della parabola con l'asse

$(2x-3y)^2$

$4x^2 - 12xy + 9y^2 - 5 = 0$

$A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 9 \end{pmatrix}$ $\qquad |A| = -36 + 36 = 0$

è una parabola

$B = \begin{pmatrix} 4 & -6 & -5/2 \\ -6 & 9 & 0 \\ -5/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad \rho(B) = 3$

parabola non degenere

$\begin{pmatrix} 4-T & -6 \\ -6 & 9-T \end{pmatrix} = (4-T)(9-T) - 36 = T^2 - 13T$

$= T(T-13) \qquad T = 0$

$T = 13$

le centro

$\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 9 \end{pmatrix}$ $\qquad 4x - 6y \qquad 2x - 3y = 0$

$\gamma = \sqrt{\frac{|B|}{\gamma}} = \sqrt{\frac{(5 \cdot 4)^2}{4 \cdot B}} \, x$

equazione canonica della parabola $\qquad \beta y = 2\gamma x$

$13y = \sqrt{x}$

$|B| = \frac{-\frac{5}{2}\left(\frac{45}{2}\right)}{16}$

$$\begin{cases} x = lt \\ y = mt \\ z = nt \end{cases} \qquad \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \qquad t \longrightarrow (x, y, z)$$

EQUAZIONI PARAMETRICHE (dipendono da un parametro "t"; descrivono i moti)

$(x, y, z) = tu + v_0$ retta qualunque è soluzione di questo sistema

$v_0 = (x_0, y_0, z_0)$

$$\begin{cases} x = lt + x_0 \\ y = mt + y_0 \\ z = \underbrace{nt}_{\text{direzione della retta}} + \underbrace{z_0}_{\text{punto per cui passa la retta}} \end{cases}$$

$l, m, n \rightarrow$ parametri direttori della retta

Sistema che indica una retta passante per un punto e // ad un vettore

ESEMPIO

$P = (2, 1, 3) \qquad \omega = (1, 1, -1)$

$$\begin{cases} x = t + 2 \\ y = t + 1 \\ z = \underbrace{-t}_{\omega} \underbrace{+3}_{P} \end{cases} \qquad t = x - 2 \qquad \begin{cases} x - y - 1 = 0 \rightarrow \text{equazione di un piano che contiene la retta} \\ x - z - 5 = 0 \rightarrow \text{(vedi sopra)} \end{cases}$$

Per scrivere le equazioni cartesiane servono due equazioni di piani

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} z = 2 - 3y \\ x = 1 - 2y \end{cases} \qquad (1-2y, y, 2-3y) \quad y = t$$

punti della retta

$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = t \\ z = 2 - 3t \end{cases} \qquad \omega(-2, 1, -3) \qquad P(1, 0, 2)$$

la retta è perpendicolare ai vettori perpendicolari ai piani

$v_1(2, 1, -1)$ e $v_2(1, 2, 0)$

$v_1 \wedge v_2 =$ retta soluzione

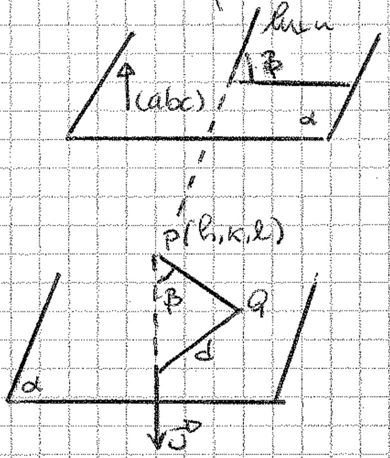
ANGOLO FRA DUE PIANI → formato dai vettori perpendicolari ai piani presi in esame

$v\ w = |v||w| \cos(vw)$

$$\cos(vw) = \frac{v \cdot w}{|v||w|}$$

ANGOLO FRA DUE RETTE → tra i vettori a cui sono paralleli

ANGOLO TRA UNA RETTA e UN PIANO → angolo tra la retta e la sua proiezione ortogonale sul piano



$$\beta = \arcsin \frac{(lmn)(abc)}{|(lmn)||(abc)|}$$

$|Q-P| = |(x_1-h,\ y_1-k,\ z_1-l)|$

u versore $\perp$ ad α

$(Q-P)\, u = \left| |Q-P| \cos(QP, u) \right| = d$

$ax+by+cz+d=0$ $\quad u = \frac{abc}{|abc|} = \frac{abc}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

$$(Q-P)\, u = \frac{|a(x_1-h)+b(y_1-k)+c(z_1-l)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = d$$

$$= \frac{|ax_1+by_1+cz_1-ah-bk-cl|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} =$$

$ax_1+by_1+cz_1+d=0$

$-d = ax_1+by_1+cz_1$

$$= \frac{|-ah-bk-cl-d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = 0$$

ESEMPIO $\quad P(1,1,1) \quad x+2y-1=0$

$$d = \frac{|1+2-1|}{\sqrt{1+4}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & b & c & -d \\ a' & b' & c' & -d' \\ a'' & b'' & c'' & -d'' \end{array}\right) \leftarrow l.d. \quad (a''\ b''\ c''\ -d'') =$$

$$\lambda(a\ b\ c\ -d) + \mu(a'\ b'\ c'\ -d')$$

∃ un piano per ogni $\frac{\lambda}{\mu}$

$$\frac{\lambda}{\mu}(ax+by+cz+d)+(a'x+b'y+c'z+d')=0$$

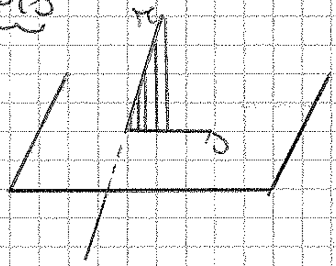
Nei fasci ci sono tanti oggetti quanti i numeri +1 (caso in cui $\mu=0$)

Chiedere a un fascio di piani di passare per un punto qualsiasi è una condizione che ci individua un solo piano.

FASCIO PROPRIO → piani ⋈

FASCIO IMPROPRIO → piani //

ESEMPIO



$$r: \begin{cases} x+y=0 \\ x-3z=0 \end{cases} \quad \text{(piani per } r\text{)}$$

s?

$\alpha = x+y-2z+1=0$

$$\lambda(x+y)+\mu(x-3z)=0$$

$$(1\ 1\ 2)(\lambda+\mu, \lambda, -3\mu)=0$$

$\downarrow$

vettore ⊥ ai piani

$$\lambda+\mu+\lambda+6\mu=0$$

$$2\lambda+7\mu=0$$

$$7(x+y)-2(x-3z)=0$$

$$5x+7y+6z=0$$

$$s: \begin{cases} 5x+7y+6z=0 \\ x+y-2z=0 \end{cases}$$