NUMERO : 425

DATA : 10/12/2012

A P P U N T I

STUDENTE : Arlotta

MATERIA : Fisica I+ esercitazioni
Prof. Agnello

METROLOGIA

PASSI PER MISURARE UNA GRANDEZZA FISICA

1) occorre avere una grandezza fisica da misurare
2) definire una <u>procedura</u> per effettuare la misura
3) avere lo <u>strumento</u> adeguato
4) analisi del risultato

COS'È UNA GRANDEZZA FISICA?

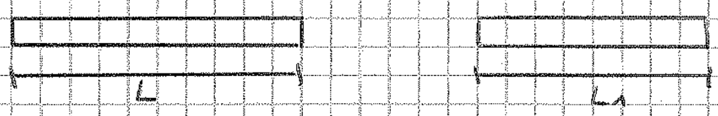
È un ente suscettibile di determinazione quantitativa, cioè di misurazione.

COS'È UNA PROCEDURA?

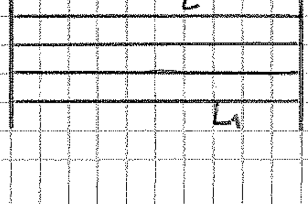
È un metodo attraverso il quale è possibile fare un confronto tra due grandezze fisiche della stessa specie. Deve contenere la "DEFINIZIONE OPERATIVA" che consiste di tre elementi:

1) criterio di confronto
2) criterio di somma
3) scelta dell'unità di misura

<u>CRITERIO del CONFRONTO</u>: metodo (anche solo concettuale) attraverso il quale è possibile definire in modo inequivocabile quando due grandezze fisiche della stessa specie sono uguali.

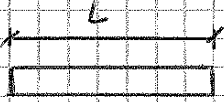


$L \overset{?}{=} L_1 \rightarrow$ Quando l'estremo destro di L coincide con quello destro di L_1 (idem l'estremo sinistro)



FATTORI di CONVERSIONE

$$1 \text{ in} \stackrel{?}{=} \text{cm}$$



Uso $[L_1]$ come unità di misura, quindi L misurerà

$$L = l_1[L_1]$$

Uso un'altra unità di misura, $[L_2]$ e L misurerà

$$L = l_2[L_2]$$

$$l_1[L_1] = l_2[L_2]$$

$$\frac{[L_1]}{[L_2]} = \frac{l_1}{l_2} \quad \text{fattore di conversione}$$

$$1 \text{ in} = 2{,}54 \text{ cm}$$

$$100 \text{ in} = 100 \cdot (1 \text{ in}) = 254 \text{ cm} = 254\,(10^{-2})\text{ m} = 2{,}54 \text{ m}$$

MISURE DIRETTE e INDIRETTE

- Nelle misure **DIRETTE**, la grandezza fisica in esame viene misurata tramite un confronto diretto con una grandezza fisica della stessa specie.
- Nelle misure **INDIRETTE**, la grandezza fisica in esame viene determinata tramite la misura diretta di altre grandezze fisiche da cui dipende tramite una legge.

ESEMPIO: velocità media scalare

$$v = \frac{L}{T}$$ dove L è la distanza percorsa da un oggetto in un tempo T

Grandezza "SUPPLEMENTARE" $\begin{cases} \text{radiante -rad- (adimensionato)} \\ \text{angolo solido in steradiante -sr-} \end{cases}$

METRO: viene definito come 1/40'000'000 del meridiano terrestre;
distanza percorsa dalla luce nel vuoto in 1/299'792'458 di secondo;
1983, 17° Conferenza dei pesi e delle misure, barra di platino-iridio come campione.

CHILOGRAMMO: massa di un particolare cilindro di altezza e diametro pari a 0,039 m di una lega di platino-iridio (90-10) - 1901;
conservato in determinate condizioni

SECONDO: viene definito come la durata di 9'192'631'770 periodi della radiazione corrispondente alla transizione tra due livelli dello stato fondamentale dell'atomo di cesio-133.

L'ANALISI del RISULTATO

$L = l[L]$ $M = m[M]$ in generale $\rightarrow X = x[X]$

meglio $X \cong x[X]$, definendo quindi una misura indicativa

Per una misura scientifica, una misura indicativa non è adeguata

$X = x + \Delta x\ [x]$ Δx = affidabilità della misura (errore)

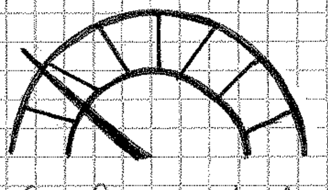
TEORIA dell'ERRORE: da cosa dipende Δx?

1) accuratezza nella misura
2) errore strumentale
3) errore sistematico
4) errore accidentale

L'ACCURATEZZA dipende ed esclusivamente dall'operatore, che deve avere a fondo la grandezza fisica.

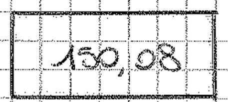
L'ERRORE STRUMENTALE dipende dallo strumento, che può essere:

ANALOGICO



Scala graduata con indicatore

DIGITALE



display

ε = sensibilità dello strumento; la più piccola variazione della grandezza fisica che lo strumento riesce a segnalare

• Ho un'intensità $I = 181{,}0100$ A, lo strumento digitale segna 181,01. La corrente varia 181,010.. 181,012.. fino a 181,02 A e lo strumento segna

$\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$ media aritmetica

$x_{max} - x_{min} < \varepsilon_m \longrightarrow X = \overline{x} \pm \varepsilon_m + \varepsilon_{sist}\ [x]$

$x_{max} - x_{min} > \varepsilon_m \longrightarrow$ 10 misure non bastano

$\hookrightarrow 10^2 \dots 10^3$ misure

DEVIANZA

$$D = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(x_i - \overline{x})}_{\text{scarto}}{}^2$$

VARIANZA TEORICA $\sigma x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2$

VARIANZA EMPIRICA $\sigma x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2$

SCARTO QUADRATICO MEDIO (o STANDARD) $= \sqrt{\sigma x^2}$

empirica o teorica!

$$\boxed{X = \overline{x} \pm \sigma x \pm \varepsilon_{sist}\ [x]}$$

Se n è grande, σx empirica e σx teorica hanno una differenza piccola.

Se n è piccola, σx empirica e σx teorica sono diverse (una grande differenza)

Si può migliorare la valutazione di $\overline{x}$ e σx?

$n, N \to \infty$

- probabilità che la misura cada nella i-esima parte di Δx

$$p(x_n < x < x_{n+1}) \cong \frac{n_i}{n} = f_i$$

- probabilità che la misura cada nell'intervallo $x_n - x_J$

$$p(x_n < x < x_J) \cong \sum_{i=J}^{n} \frac{n_i}{n} = \sum_{i=J}^{n} f_i$$

- probabilità che la misura cada nel range $x_{max} - x_{min}$

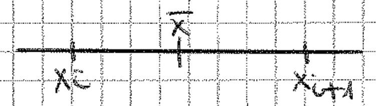
$$p(x_{min} < x < x_{max}) = \frac{n_1 + n_2 + \dots + n_N}{n} =$$

$$\sum_{i=1}^{N} f_i = 1$$

CONDIZIONE di NORMALIZZAZIONE della FREQUENZA RELATIVA

$n, N \to \infty$

$$\Delta x = \frac{x_{max} - x_{min}}{n} \qquad \lim_{n, N \to \infty} \Delta x = dx$$



- $$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \cong \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} n_i \bar{x}_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{n_i}{n} \bar{x}_i = \sum_{i=1}^{N} f_i \bar{x}_i$$

- $$\sigma_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \cong \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} n_i (\bar{x}_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{n_i}{n} (\bar{x}_i - \bar{x})^2$$

$$= \sum_{i=1}^{N} f_i (\bar{x}_i - \bar{x})^2$$

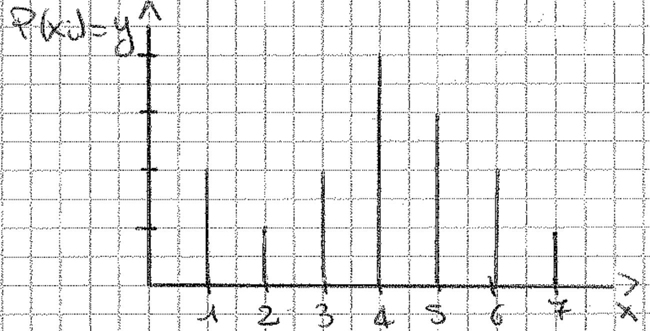
- $$\sigma_x \cong \sqrt{\sum_{i=1}^{N} f_i (\bar{x}_i - \bar{x})^2}$$

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{N} f_i \, \bar{x}_i = \int_{-\infty}^{\infty} x \, P(x) \, dx$$

$$\sigma_x^2 = \sum_{i=1}^{N} f_i (\bar{x}_i - \bar{x})^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2 \, P(x) \, dx$$

$$\sigma_x = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} f_i (\bar{x}_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^2 \, P(x) \, dx}$$

FUNZIONE di DISTRIBUZIONE di GRANDEZZA CHE VARIA IN MODO DISCRETO $P(x_i)$



- probabilità che la misura sia $x_i \rightarrow P(x_i)$
- probabilità che la misura assuma valori tra x_j e x_n

$$\sum_{i=j}^{N} P(x_i)$$

- probabilità che la misura assuma tutti i valori possibili, avendo N (finiti o infiniti)

$$\boxed{\sum_{i=1}^{N} P(x_i) = 1}$$

CONDIZIONE di NORMALIZZAZIONE della DISTRIBUZIONE DISCRETA

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, P(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx =$$

pongo $t = x - \mu$, $dt = dx$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(t+\mu)}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \cdot e^{-t^2/2\sigma^2}\, dt =$$

$$= \underline{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \cdot e^{-t^2/2\sigma^2}\, dt} + \mu \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-t^2/2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, dt$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{\sqrt{2}\,\sigma}\, e^{-\left(t/\sqrt{2}\sigma\right)^2}\, dt =$$ studio il primo pezzo

$$\left[d\left(t/\sqrt{2}\sigma\right) = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\, dt \right]$$

$$= \frac{\sqrt{2}\,\sigma}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{\sqrt{2}\sigma}\, e^{-\left(t/\sqrt{2}\sigma\right)^2}\, d\left(t/\sqrt{2}\sigma\right) =$$

$$\left[z = t/\sqrt{2}\sigma \qquad d\left(\frac{t}{\sqrt{2}\sigma}\right) = dz \right]$$

$$= \frac{\sqrt{2}\,\sigma}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} z e^{-z^2}\, dz =$$

$$\left[\begin{aligned} &\frac{d}{dx}\left(e^{-z^2}\right) = e^{-z^2} \cdot (-2z) = -2z e^{-z^2} \\ &\frac{d}{dx}\left(z e^{-z^2}\right) = -\frac{1}{2} \frac{d}{dx}\left(e^{-z^2}\right) \end{aligned} \right.$$

$$= \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{t}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2 e^{-(t/\sqrt{2}\sigma)^2} d\left(\frac{t}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$

$z = t/\sqrt{2}\sigma$

$$= \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 \cdot e^{-z^2} dz$$

$$\frac{\cancel{2}\sigma^2}{\cancel{\sqrt{\pi}}} \cdot \frac{\cancel{\sqrt{\pi}}}{\cancel{2}} = \sigma^2$$

$$\boxed{\sigma_x^2 = \sigma^2}$$

$$p(\mu-\sigma < x < \mu+\sigma) = \int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} G(x)_{\mu\sigma}\, dx \cong 0,67 \longrightarrow 67\%$$

$$p(\mu-2\sigma < x < \mu+2\sigma) = \int_{\mu-2\sigma}^{\mu+2\sigma} G(x)_{\mu\sigma}\, dx \cong 0,95 \longrightarrow 95\%$$

$$p(\mu-3\sigma < x < \mu+3\sigma) = \int_{\mu-3\sigma}^{\mu+3\sigma} G(x)_{\mu\sigma}\, dx \cong 0,9997 \longrightarrow 99,97\%$$

FUNZIONE di DISTRIBUZIONE di POISSON

È la funzione di distribuzione di "variabile" discreta; individua la probabilità di avere ν conteggi, quando il numero dei conteggi più probabile è μ.

$$P(\nu)_\mu = e^{-\mu} \cdot \frac{\mu^\nu}{\nu!} \qquad \text{normalizzata}$$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} P(\nu)_\mu = 1$$

$$\sigma x^2 = \sum_{i=0}^{\infty} (x_i - \bar{x})^2 P(x_i)$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu - \bar{x})^2 e^{-\mu} \frac{\mu^\nu}{\nu!} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu^2 + \mu^2 - 2\mu\nu) e^{-\mu} \frac{\mu^\nu}{\nu!}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \nu^2 e^{-\mu} \frac{\mu^\nu}{\nu!} + \sum_{\nu=0}^{\infty} \mu^2 e^{-\mu} \frac{\mu^\nu}{\nu!} - 2\mu \sum_{\nu=0}^{\infty} \nu e^{-\mu} \frac{\mu^\nu}{\nu!}$$

$$= e^{-\mu} \sum_{\nu=0}^{\infty} \nu^2 \frac{\mu^\nu}{\nu!} + \mu^2 - 2\mu \cdot \mu$$

$$\boxtimes \; = e^{-\mu} \sum_{\nu=0}^{\infty} \nu^2 \frac{\mu^\nu}{\nu!} = e^{-\mu}\left(0 + \frac{\mu}{1!} + 2\frac{\mu^2}{1!} + 3\frac{\mu^3}{2!} + 4\frac{\mu^4}{3!} + \dots\right)$$

studio della prima "parte"

$$= e^{-\mu}\left[\mu\left(1 + 2\frac{\mu}{1!} + 3\frac{\mu^2}{2!} + 4\frac{\mu^3}{3!} + \dots\right)\right]$$

lo separo in due Σ

$$= e^{-\mu}\left\{\mu\left[\left(1 + \frac{\mu}{1!} + \frac{\mu^2}{2!} + \frac{\mu^3}{3!} + \dots\right) + \left(\frac{\mu}{1!} + 2\frac{\mu^2}{2!} + 3\frac{\mu^3}{3!} + \dots\right)\right]\right\}$$

$$= e^{-\mu}\left\{\mu\left[e^{\mu} + \mu\left(1 + \frac{\mu}{1!} + \frac{\mu^2}{2!} + \frac{\mu^3}{3!} + \dots\right)\right]\right\}$$

è lo sviluppo di e^μ

$$= e^{-\mu}\left\{\mu\left[e^{\mu} + \mu e^{\mu}\right]\right\}$$

$$= e^{-\mu}\left[\mu(1+\mu)e^{\mu}\right] \quad \boxtimes$$

$$= e^{-\mu}\left[\mu(1+\mu)e^{\mu}\right] + \mu^2 - 2\mu^2$$

$$\mu + \cancel{\mu^2} + \mu^2 - 2\cancel{\mu^2} = \mu$$

$$\sigma x^2 = \mu$$

$$\sigma x = \sqrt{\mu}$$

MECCANICA

STUDIO del MOTO dei CORPI

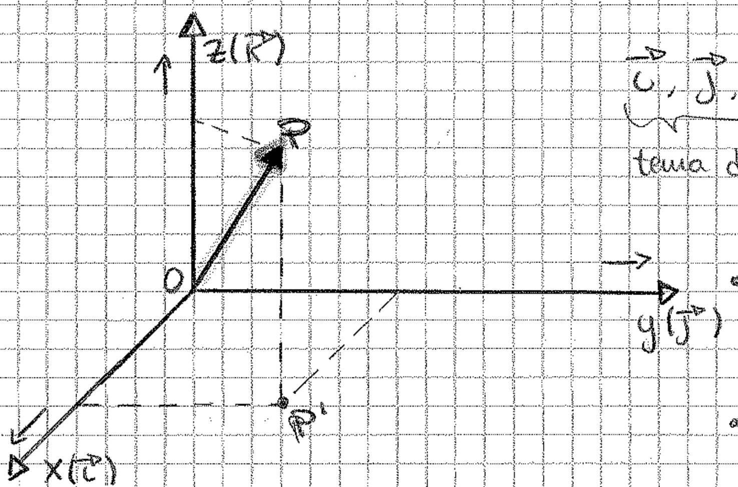
- CINEMATICA (non tiene conto delle cause che generano il moto)
- STATICA (equilibrio)
- DINAMICA (moto dei corpi in relazione alle cause)

CINEMATICA del CORPO PUNTIFORME (PUNTO MATERIALE)

- COSA SI INTENDE PER CORPO PUNTIFORME? Ha dimensioni trascurabili rispetto alle distanze percorse, rispetto al sistema in cui si muove e in più la velocità di rotazione su un asse del corpo stesso è trascurabile rispetto alla sua velocità di traslazione.

- Per conoscere il moto istante per istante, occorre avere un sistema di riferimento:
  - → cartesiano ortogonale
  - → cilindrico
  - → polare

→ SISTEMA di RIFERIMENTO CARTESIANO ORTOGONALE



$\underbrace{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}}_{\text{terna destra}}$ versori

- $\hat{i} \wedge \hat{j} = \hat{k}$ è ancora un vettore // z
- $\hat{i} \wedge \hat{k} = \hat{j}$ ($\vec{j}$ // y)
- $\hat{k} \wedge \hat{j} = i$ ($\vec{i}$ // x)

$$P-O = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = |P-O| = $$
$$= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

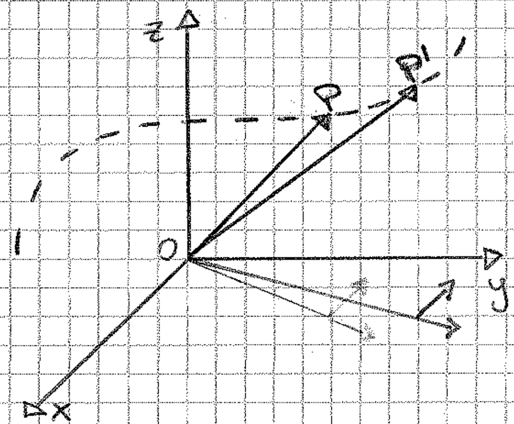
- proietto P sull' piano xy;
- unisco P' a O, la distanza è chiamata r (coordinata);
- l'angolo tra x e OP' è detto "anomalia" ed indicato con Θ.

versori $\vec{\lambda}$ direzione di crescita di r
$\vec{\mu}$ direzione di crescita di Θ
$\vec{K}$

$\hat{\lambda} \wedge \hat{\mu} = \hat{K}$ $\qquad (P-O) = r\hat{\lambda} + z\hat{K}$

$\hat{K} \wedge \hat{\imath} = \hat{\jmath}$ $\qquad |P-O| = \sqrt{r^2+z^2}$

$\hat{\jmath} \wedge \hat{K} = \hat{\mu}$

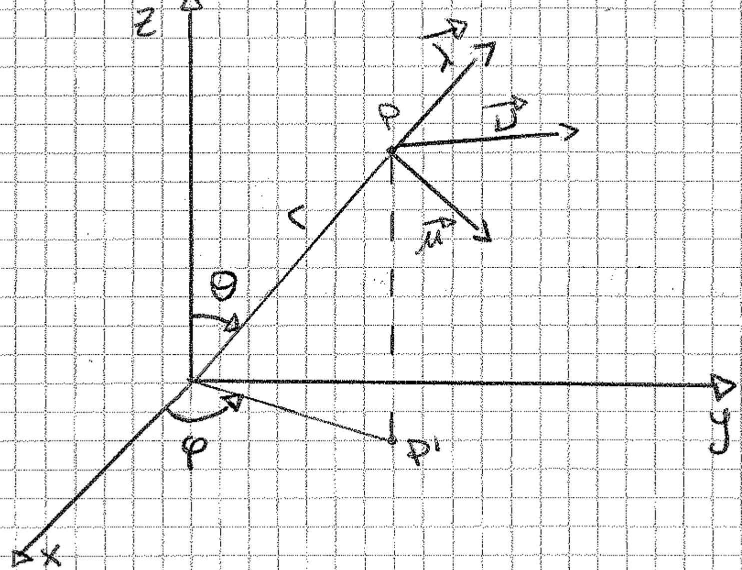


$P-O = r\hat{\lambda} + z\hat{K}$

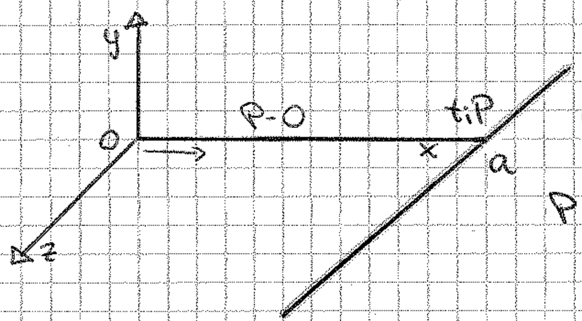
$P'O = r\hat{\lambda} + z_1\hat{K}$

tutto varia nel tempo $(r, \Theta, \mu, \lambda)$, tranne $\hat{K}$

→ SISTEMA di RIFERIMENTO POLARE



MOTO RETTILINEO



$$|P-O| = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$$

$$P-O = x(t)\vec{i}$$

$$x = x(t)$$

$$\vec{V}_m = \frac{(P'-O)(P-O)}{t'-t} = \frac{x'\hat{i} - x\hat{i}}{t'-t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{i}$$

$$\Delta x = x' - x = x'(t) - x(t)$$

direzione (e verso) $\vec{v}$ = direzione (e verso) $\hat{i}$, $\Delta x / \Delta t > 0$

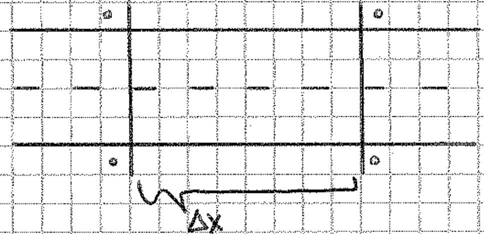
direzione (e verso) $\vec{v}$ = − direzione (e verso) $\hat{i}$, $\Delta x / \Delta t < 0$

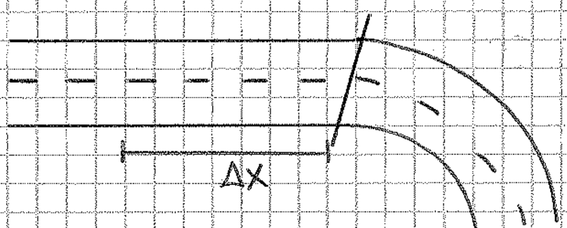
$$[\vec{v}] = \frac{[\Delta x]}{[\Delta t]} = \frac{m}{s}$$

- il versore $\hat{i}$ è adimensionato.

Velocità istantanea vettoriale

$$\vec{V}_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{i} \qquad V_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$





Voglio sapere la velocità del "mezzo" prima di entrare in curva?

Prendo $\Delta x \cong 50m$, ma è eccessivo; riduco $\Delta x \cong 1m$, poi $\Delta x \cong 1cm$ ...

È una velocità con Δx (e Δt) ridotto.

Accelerazione Istantanea Vettoriale

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{a_m} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \vec{i} = \frac{dv}{dt} i$$

$$\vec{a} = a \cdot \vec{i} = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{i}$$

$$a = \frac{dv}{dt}$$

$$v = \frac{dx}{dt} \qquad a = \frac{dv}{dt}$$

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} a \, dt \longrightarrow v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(t) \, dt'$$

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v \, dt \longrightarrow x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t) \, dt'$$

Per la cinematica, data l'accelerazione $a(t)$ occorre determinare la/le equazione/i parametrica/che

$$a(t) = a_0$$

$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a_0 \, dt' = v_0 + a_0 \int_{t_0}^{t} dt' =$$

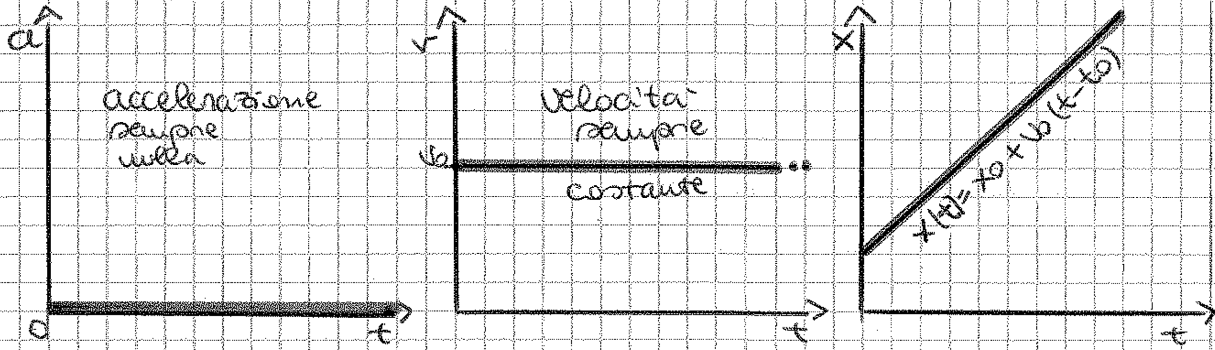
$$\boxed{v(t) = v_0 + a_0(t - t_0)}$$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} [v_0 + a_0(t - t_0)] \, dt' \qquad [z = t - t_0]$$

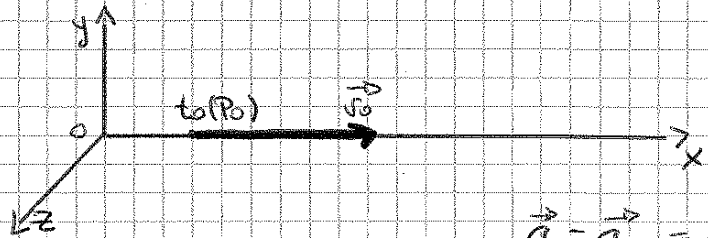
$$= x_0 + \int_{t_0}^{t} v_0 \, dt' + \int_{t_0}^{t} a_0(t - t_0) \, dt'$$

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v_0 \, dt'$$

$$\boxed{x(t) = x_0 + v_0(t-t_0)}$$



[redacted]



$$\vec{a} = \vec{a_0} = \text{costante}$$

$t = t_0$ $\quad x(t=t_0) = x_0$

$$v(t=t_0) = v_0 \cdot \vec{i}$$

$$a(t=t_0) = a_0 \vec{i}$$

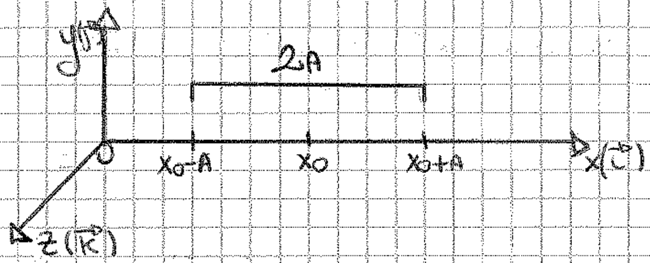
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \longrightarrow a = \frac{dv}{dt} = a_0$$

$$dv = a_0 \, dt \quad \Big\| \quad v = \frac{dx}{dt}$$

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} a_0 \, dt' \quad \Big| \quad \int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v \, dt'$$

$$v - v_0 = a_0(t-t_0) \quad \Big| \quad \int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} [v_0 + a_0(t-t_0)] \, dt'$$

$$\boxed{v(t) = v_0 + a_0(t-t_0)} \quad \Big| \quad \boxed{x(t) = x_0 + v_0(t-t_0) + \frac{a_0}{2}(t-t_0)^2}$$



$$x(t) = x_0 + A \sin(\omega t + \varphi)$$

$$P - O = x(t) \cdot \vec{i}$$

x_0 centro del moto armonico semplice
A ampiezza del moto armonico semplice
$\omega t + \varphi$ fase del moto armonico semplice
φ fase iniziale del moto armonico semplice
ω pulsazione quando $t = 0 \rightarrow \omega t + \varphi = \varphi$

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{i} = A\omega\cos(\omega t + \varphi)\vec{i} = v\vec{i}$$

$$\vec{a} = D(\vec{v})$$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{i} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi)\vec{i}$$

- PERIODO E PULSAZIONE

$$x(t) = x(t+T)$$

$$\cancel{x_0} + \cancel{A}\sin(\omega t + \varphi) = \cancel{x_0} + \cancel{A}\sin[\omega(t+T) + \varphi]$$

$$\sin(\omega t + \varphi) = \sin[\omega(t+T) + \varphi]$$

$$\omega t + \varphi + 2\pi = [\omega(t+T) + \varphi]$$

$$\cancel{\omega t} + \cancel{\varphi} + 2\pi = \cancel{\omega t} + \omega T + \cancel{\varphi}$$

$$2\pi = \omega T \longrightarrow \boxed{T = 2\pi/\omega}$$

tenendo conto che $\nu = 1/T \longrightarrow \boxed{\nu = 2\pi\omega}$

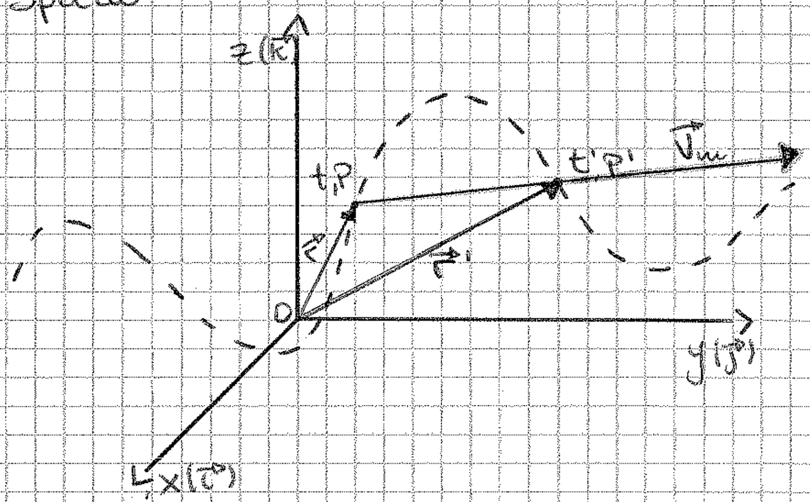
$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{i} = \dot{x}\vec{i}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}\vec{i} = \frac{d}{dt}(v)\vec{i} = \frac{d}{dt}\frac{dx}{dt}\vec{i} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} = \ddot{x}\vec{i}$$

$$\boxed{v = \dot{x}} \qquad \boxed{a = \ddot{x}}$$

MOTO CURVILINEO

È il moto più generale che un corpo può avere nello spazio



Velocità media vettoriale

vettore r (definito da P-O)

$$P - O = \vec{r}$$

$t' > t$: la nuova posizione è individuata da $P' - O = \vec{r}'$

Definiamo la velocità media vettoriale come

$$\vec{v}_m = \frac{(P'-O)-(P-O)}{t'-t} =$$

$$= \frac{\vec{r}' - \vec{r}}{t'-t} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

Velocità istantanea vettoriale

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{v}_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{v} = \frac{d(P-O)}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

la velocità è espressa come la derivata del vettore posizione fatta rispetto al tempo

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}[x\vec{i}] + \frac{d}{dt}[y\vec{j}] + \frac{d}{dt}[z\vec{k}]$$

$$= \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$$

$$\frac{dx}{dt} = v = \dot{x} \qquad \frac{dy}{dt} = v_y = \dot{y} \qquad \frac{dz}{dt} = v_z = \dot{z}$$

$$v = \sqrt{v_x + v_y + v_z}$$

<u>$\vec{v}$ in componenti di un sistema cilindrico</u>

$$P - O = r(t)\vec{\lambda}(t) + z(t)\vec{k}$$

$$\vec{v} = \frac{d(P-O)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[r(t)\vec{\lambda}(t)\right] + \frac{d}{dt}\left[z(t)\vec{k}\right] =$$

$$= \frac{d}{dt}\left[r\vec{\lambda}\right] + \frac{d}{dt}\left[z\vec{k}\right] =$$

$$= \frac{dr}{dt}\vec{\lambda} + \frac{d\vec{\lambda}}{dt}r + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

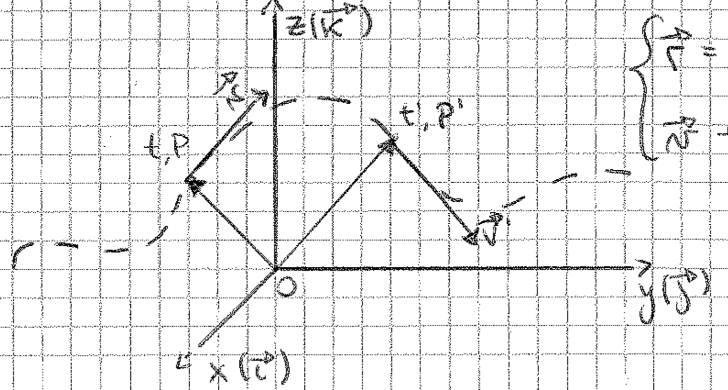
$$\frac{dr}{dt} = \dot{r} \qquad \frac{d\vec{\lambda}}{dt} = \dot{\vec{\lambda}} \qquad \frac{dz}{dt} = \dot{z}$$

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{\lambda} + \dot{\vec{\lambda}}r + \dot{z}\vec{k}$$

$$P - O = r(t)\cdot\vec{\lambda}(t)$$ <u>$\vec{v}$ in componenti polari</u>

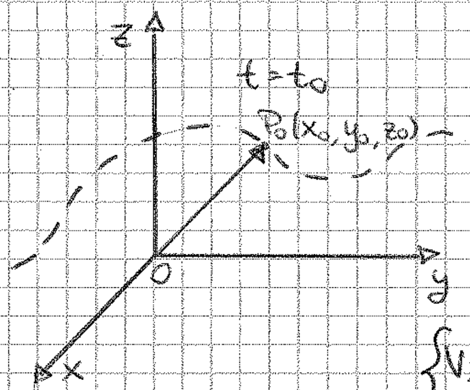
$$\vec{v} = \dot{r}\lambda + \dot{\vec{\lambda}}r$$

<u>Accelerazione Media Vettoriale</u>



$\begin{cases} \vec{r} = P - O \\ \vec{v} \text{ tangente alla traiettoria} \end{cases}$

$\begin{cases} \vec{r}' = P' - O \\ \vec{v}' \text{ velocità (tg)} \end{cases}$



$\rightarrow t = t_0$

$$\begin{cases} x(t=t_0) = x_0 \\ y(t=t_0) = y_0 \\ z(t=t_0) = z_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x(t=t_0) = v_{0x} \\ v_y(t=t_0) = v_{0y} \\ v_z(t=t_0) = v_{0z} \end{cases}$$

$$\vec{a} = \vec{a_0} = a_{0x}\vec{i} + a_{0y}\vec{j} + a_{0z}\vec{k}$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = a_{0x} \qquad a_y = \frac{dv_y}{dt} = a_{0y} \qquad a_z = \frac{dv_z}{dt} = a_{0z}$$

$$dv_x = a_{0x}\,dt \rightarrow \int_{v_{0x}}^{v_x} dv_x = \int_{t_0}^{t} a_{0x}\,dt' \rightarrow v_x(t) = v_{0x} + a_{0x}(t-t_0)$$

$$dv_y = a_{0y}\,dt \rightarrow \int_{v_{0y}}^{v_y} dv_y = \int_{t_0}^{t} a_{0y}\,dt' \rightarrow v_y(t) = v_{0y} + a_{0y}(t-t_0)$$

$$dv_z = a_{0z}\,dt \rightarrow \int_{v_{0z}}^{v_z} dv_z = \int_{t_0}^{t} a_{0z}\,dt' \rightarrow v_z(t) = v_{0z} + a_{0z}(t-t_0)$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v_{0x} + a_{0x}(t-t_0)$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = v_{0y} + a_{0y}(t-t_0)$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} = v_{0z} + a_{0z}(t-t_0)$$

- $dx = [v_{0x} + a_{0x}(t-t_0)]\,dt$

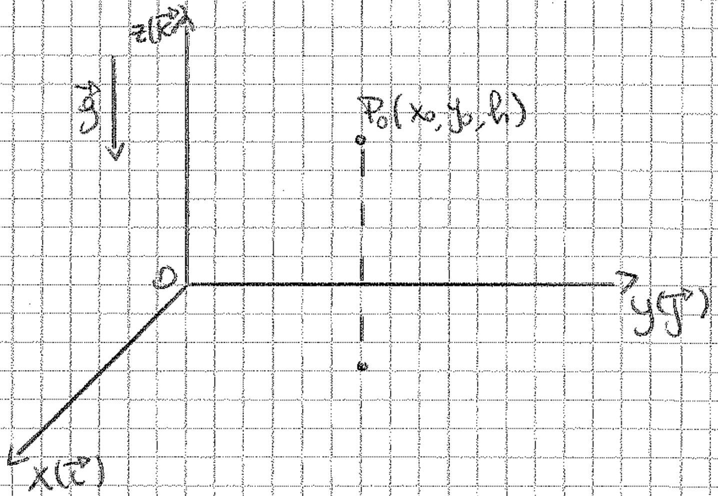
$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v_{0x} + a_{0x}(t-t_0)\,dt'$$

$\vec{g} \parallel \vec{z}$ ma di verso opposto $\vec{g} = -g\vec{k}$

$|g| \cong 9,81 \; m \cdot s^{-2}$ al livello del mare

$|g| \cong 9,83 \; m \cdot s^{-2}$ ai poli

$|g| \cong 9,73 \; m \cdot s^{-2}$ all'equatore



$t = 0$ $\begin{cases} x(t=0) = x_0 \\ y(t=0) = y_0 \\ z(t=0) = h \end{cases}$ $\begin{cases} v_x(t=0) = 0 \\ v_y(t=0) = 0 \\ v_z(t=0) = 0 \end{cases}$

$\vec{a} = -g\vec{k}$ costante

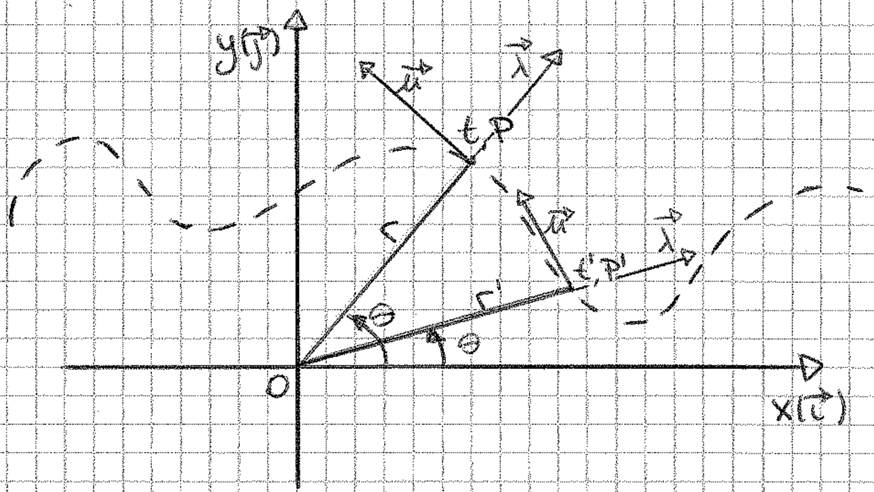
$a = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} = -g\vec{k}$

$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = 0 \\ a_z = -g \end{cases}$ mi aspetto che restino costanti

$a_x = 0 = \frac{dv_x}{dt} \longrightarrow v_x$ costante $= 0 = \frac{dx}{dt} \longrightarrow dx = 0\,dt$
$\downarrow$
$x = x_0$ costante

$a_y = 0 = \frac{dy}{dt} \longrightarrow v_y$ costante $= 0 = \frac{dy}{dt} \longrightarrow dy = 0\,dt$
$\downarrow$
$y = y_0$ costante

$\left.\begin{matrix} x = x_0 \\ y = y_0 \end{matrix}\right\}$ costanti $\rightarrow$ il corpo scende verticalmente



In un generico tempo t, il corpo si trova in P

$r = P - O$ componente polare piana

θ componente polare piana (angolo tra θ e x)

I <u>versori</u> sono

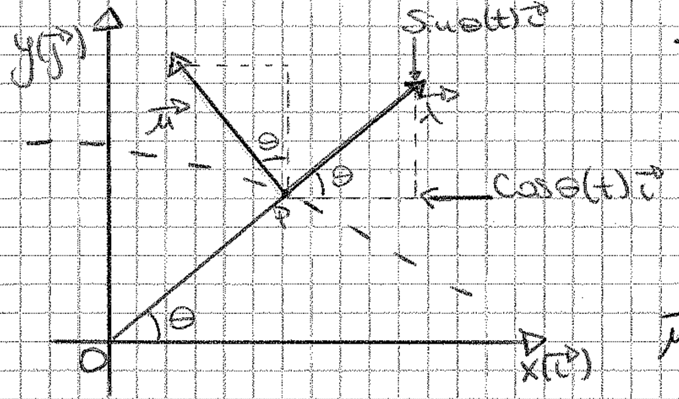
$\vec{\lambda}$ $(= r)$ verso di crescita di r

$\vec{\mu}$ $(\perp \vec{\lambda})$ verso di crescita di θ

$P - O = r\vec{\lambda}$ tutto dipende dal tempo

$$(P-O) = r\vec{\lambda} = r(t)\vec{\lambda}(t)$$

$$\vec{v} = \frac{d(P-O)}{dt}$$



$$\vec{\lambda} = |\lambda|\cos\theta(t)\vec{i} + |\lambda|\sin\theta(t)\vec{j}$$

$$|\lambda| = 1$$

$$= \cos\theta(t)\vec{i} + \sin\theta(t)\vec{j}$$

$$\vec{\mu} = |\mu|\sin\theta(t)(\vec{i}) + |\mu|\cos\theta(t)\vec{j}$$

$$|\mu| = 1$$

$$= -\sin\theta(t)\vec{i} + \cos\theta(t)\vec{j}$$

$$= \underbrace{(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{\lambda}}_{\text{radiale}} + \underbrace{(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{\mu}}_{\text{trasversa}}$$

$a_r = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{\lambda}$ componente radiale

$a_t = (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{\mu}$ componente trasversa

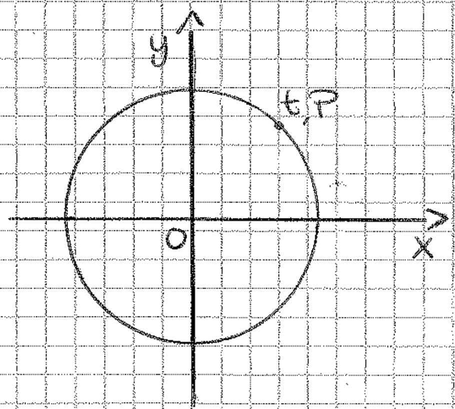
$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_t}$$

MOTO CIRCOLARE

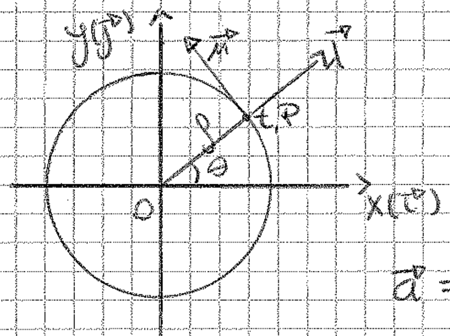
$(P-O) = x\vec{i} + y\vec{j}$

$v = \dfrac{d(P-O)}{dt} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j}$

$\vec{a} = \dfrac{dv}{dt} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j}$



VERSORI



$\vec{\lambda}$, $\vec{\mu}$ ($\perp\vec{\lambda}$, tg a ℓ)

$\vec{v} = \rho\dot{\theta}\vec{\mu}$ $\quad$ ρ = costante, raggio di ℓ

$\parallel \vec{\mu}$, tg a ℓ

$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{\lambda} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{\mu}$

il raggio è costante, se derivo $\dot{r} = \ddot{r} = 0$

$\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$ $\quad$ $\dot{\theta}$ = costante

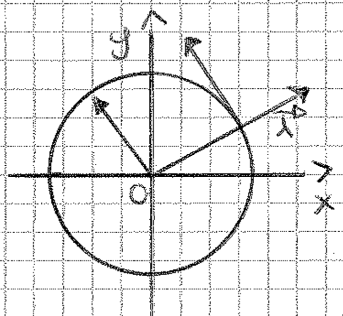
$$= \underbrace{\rho\dot{\theta}^2\vec{\lambda}}_{\text{radiale}} + \underbrace{\rho\ddot{\theta}\vec{\mu}}_{\text{tangenziale (trasversa)}}$$

$v = \rho\dot{\theta}$ = costante

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 45 di 296

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\mu}}{dt} \qquad \boxed{\vec{\alpha} = \ddot{\theta}\vec{k}}$$

$$\frac{d\vec{\lambda}}{dt} = \dot{\theta}\vec{\mu} \qquad \frac{d\vec{\mu}}{dt} = -\dot{\theta}\vec{\lambda}$$



Se θ varia, $\vec{\mu}$ ruota attorno all'asse z

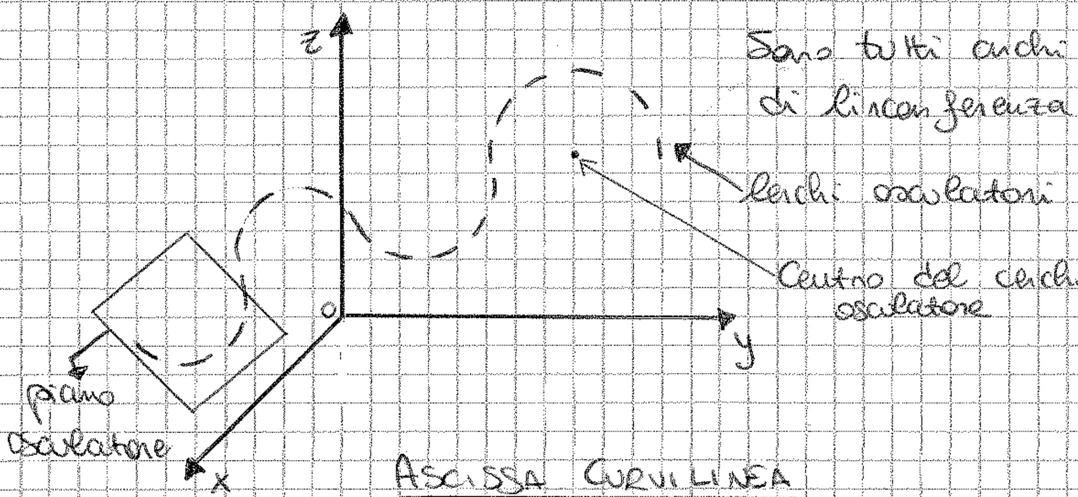
$$\frac{d\vec{\lambda}}{dt} = \underbrace{\dot{\theta}\vec{k}}_{\vec{\omega}} \wedge \vec{\lambda} = \vec{\omega} \wedge \vec{\lambda}$$

$$\frac{d\vec{\mu}}{dt} = -\dot{\theta}\vec{\lambda} = -\dot{\theta}\vec{\mu} \wedge \vec{k} = \theta k \wedge \vec{k} = \vec{\omega} \wedge \vec{\lambda}$$

$$\vec{\omega} \Rightarrow \quad \vec{v} = r\dot{\theta}\vec{\mu} = r\dot{\theta}\vec{k} \wedge \vec{\lambda} =$$

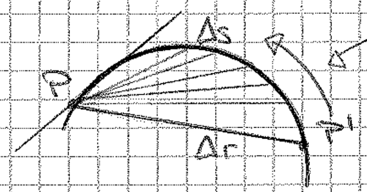
$$= \underbrace{\dot{\theta}\vec{k}}_{\vec{\omega}} \wedge \underbrace{(r\vec{\lambda})}_{P-O} = \boxed{\vec{\omega} \wedge (P-O)}$$

Componenti Intrinseche di Velocità ed Accelerazione



ASCISSA CURVILINEA

$s(t)$ = la distanza misurata sulla traiettoria tra il punto ed Ω



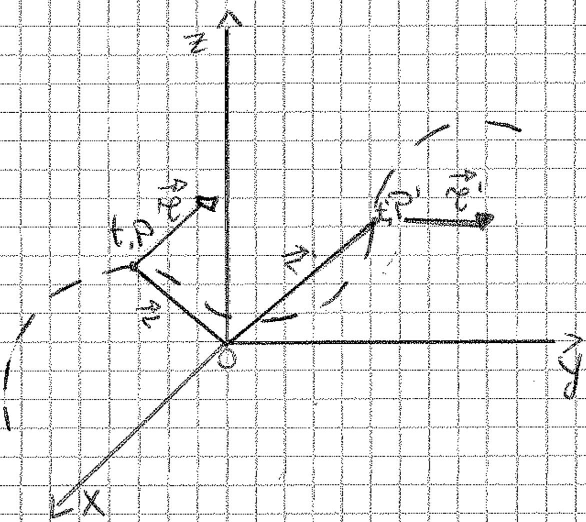
[P' quando $\Delta s \to 0$]

$$\lim_{\Delta s \to 0} \underbrace{\frac{|\Delta \vec r|}{|\Delta s|}}_{1} \vec\tau = \vec\tau$$

(sono tangenti e tendono a coincidere)

$$\boxed{\vec v = \dot s \frac{d\vec r}{dt} = \vec\tau \cdot \dot s}$$

la velocità è tangente al cerchio osculatore



P si sposta, t cresce. Essendo che P' ha la sua $\vec r\,'$ e la sua $\vec\tau\,'$,

$$\vec\tau = \vec\tau\,[s(t)]$$

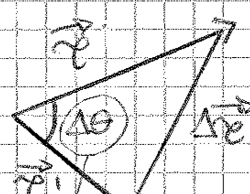
$$\vec a = \frac{d\vec v}{dt} = \ddot s \vec\tau \quad \dot s \frac{d\vec\tau}{dt} =$$

$$= \ddot s \vec\tau + \dot s \frac{d\vec\tau}{ds} \cdot \underbrace{\frac{ds}{dt}}_{\dot s} =$$

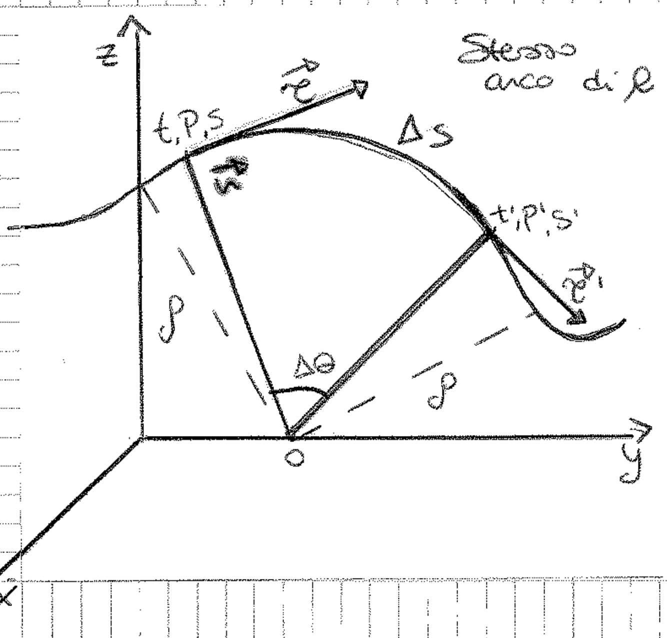
$$= \ddot s \vec\tau + \dot s^2 \frac{d\vec\tau}{dt}$$

$$\frac{d\vec\tau}{dt} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\vec\tau}{\Delta s}$$

$$\Delta s = s' - s = \rho\,\Delta\theta$$



$\vec\tau$ e $\vec\tau\,'$ sono tangenti alla traiettoria



$$\frac{d\vec{\lambda}}{dt} = \vec{\omega}^{(t)} \wedge \vec{\lambda}$$

$$\frac{d\vec{\mu}}{dt} = \vec{\omega}^{(t)} \wedge \vec{\mu}$$

$$\frac{d\vec{\nu}}{dt} = \vec{\omega}^{(t)} \wedge \vec{\nu}$$

- Prendo un generico punto P nel sistema di riferimento assoluto. Individuo le coordinate di P, tramite

$$P - O = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Nel sistema di riferimento relativo, le coordinate sono

$$P - \Omega = \xi\vec{\lambda} + \eta(\vec{\mu}) + \zeta(\vec{\nu})$$

$$\Omega - O = x_\Omega\vec{i} + y_\Omega\vec{j} + z_\Omega\vec{k}$$

$$\vec{V}_P = \frac{d(P-O)}{dt} \qquad (P-O) = (P-\Omega) + (\Omega - O)$$

$$= \frac{d[(P-\Omega)+(P-O)]}{dt}$$

$$= \frac{d}{dt}[\xi\vec{\lambda} + \eta\vec{\mu} + \zeta\vec{\nu}] + \frac{d}{dt}[x_\Omega\vec{i} + y_\Omega\vec{j} + z_\Omega\vec{k}]$$

$$= \underbrace{\left(\dot{\xi}\vec{\lambda} + \dot{\eta}\vec{\mu} + \dot{\zeta}\vec{\nu}\right)}_{\substack{\text{derivata dei coefficienti} \\ \downarrow \\ \text{la velocità P nel sistema di riferimento relativo } \vec{V}_P^{(r)}}} + \underbrace{\left(\xi\frac{d\vec{\lambda}}{dt} + \eta\frac{d\vec{\mu}}{dt} + \zeta\frac{d\vec{\nu}}{dt}\right)}_{\text{derivata dei vettori}} + \underbrace{\dot{x}_\Omega\vec{i} + \dot{y}_\Omega\vec{j} + \dot{z}_\Omega\vec{k}}_{\substack{\text{sarebbe la velocità del punto nel sistema di riferimento assoluto} \\ \vec{V}_\Omega}}$$

$$= \vec{V}_P^{(r)} + \vec{V}_\Omega + \left(\xi\underbrace{\frac{d\vec{\lambda}}{dt}}_{\vec{\omega}\wedge\vec{\lambda}} + \eta\underbrace{\frac{d\vec{\mu}}{dt}}_{\vec{\omega}\wedge\vec{\mu}} + \zeta\underbrace{\frac{d\vec{\nu}}{dt}}_{\vec{\omega}\wedge\vec{\nu}}\right)$$

$$= \vec{V}_P^{(r)} + \vec{V}_\Omega + \left[\xi(\vec{\omega}^{(t)}\wedge\vec{\lambda}) + \eta(\vec{\omega}^{(t)}\wedge\vec{\mu}) + \zeta(\vec{\omega}^{(t)}\wedge\vec{\nu})\right]$$

$$\boxed{= \vec{a}_P^{(r)} + \vec{a}_\Omega + 2\vec{\omega}^{(t)} \wedge \vec{v}_P^{(r)} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge (P-\Omega) + \vec{\omega}^{(t)} \wedge \left[\vec{\omega}^{(t)} \wedge (P-\Omega)\right]}$$

$$\vec{a}_P = \ddot{x}_\Omega \vec{i} + \ddot{y}_\Omega \vec{j} + \ddot{z}_\Omega \vec{k}$$ lega i due sistemi di riferimento

Accelerazione di Coriolis

$$\vec{a}_P^{(c)} = 2\vec{\omega}^{(t)} \wedge \vec{v}_P^{(t)}$$

Accelerazione di trascinamento

$$\vec{a}_P^{(t)} = \vec{a}_\Omega + \frac{d\vec{\omega}^{(t)}}{dt} \wedge (P-\Omega) + \vec{\omega}^{(t)} \wedge \left[\vec{\omega}^{(t)} \wedge (P-\Omega)\right]$$

$$\boxed{\vec{a}_P = \vec{a}_P^{(r)} + \vec{a}_P^{(c)} + \vec{a}_P^{(t)}}$$ (per elementi trascurabili rispetto alla velocità della luce)

Massa Relativa

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

dove m_0 = massa iniziale
v = velocità del corpo
c = velocità della luce

Se la velocità tende a c, la massa tende a infinito (impossibile)

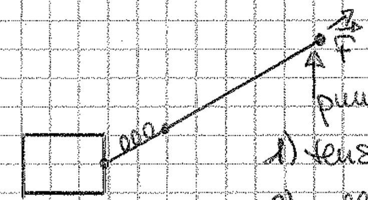
STATICA e DINAMICA

STATICA parte della meccanica che studia l'equilibrio dei corpi

DINAMICA studia la meccanica dei corpi in base alle cause che hanno generato il movimento

FORZE $\vec{F}$

Sono una grandezza fisica vettoriale e rappresentano l'azione che un ente compie su un altro.

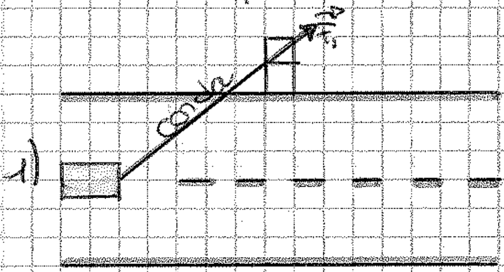


punto di applicazione della forza (azione)

1) tensione della corda (direzione e verso)
2) allungamento del modulo della molla
3) spostamento del baule (// alla corda)

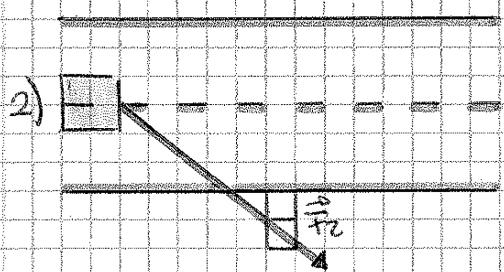
$$\underbrace{\vec{F_1}}_{\text{azione}} + \underbrace{\vec{F_2}}_{\text{azione}} = (x_1 + x_2), (y_1 + y_2) = \vec{F}$$

Il risultato è ancora un azione o è un vettore privo di significato fisico?



Supponiamo che ci sia una chiatta sull'acqua e un uomo sul bordo, che muovendosi parallelamente al bordo, trascini la chiatta tramite una corda.

Ad un certo punto la chiatta si arenerà sul bordo sinistro.

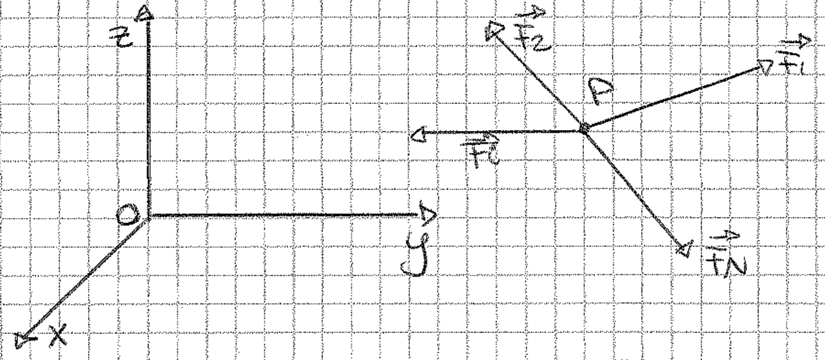


Questa volta, l'uomo trascina la chiatta camminando parallelo al bordo destro.

La chiatta si arenerà a destra.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 55 di 296

SOMMA di n FORZE CONCORRENTI



$$\boxed{\vec{R} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F_i}}$$

$$\vec{F_i} = F_{ix}\vec{i} + F_{iy}\vec{j} + F_{iz}\vec{k} \qquad (i = 1, 2, 3, \dots N)$$

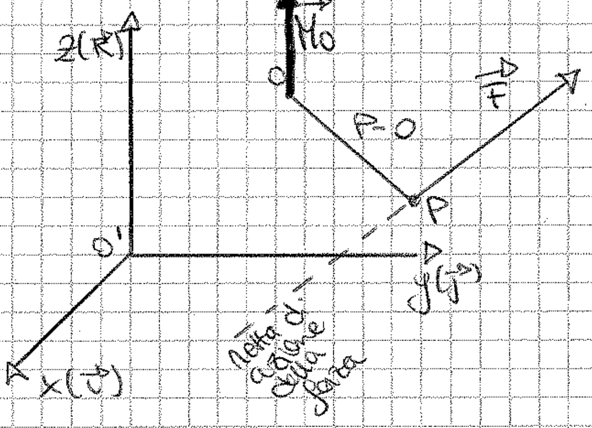
$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{N} (F_{ix}\vec{i} + F_{iy}\vec{j} + F_{iz}\vec{k})$$

$$= \sum_{i=1}^{N}(F_{ix}\vec{i}) + \sum_{i=1}^{N}(F_{iy}\vec{j}) + \sum_{i=1}^{N}(F_{iz}\vec{k})$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{N} F_{ix}\right)\vec{i} + \left(\sum_{i=1}^{N} F_{iy}\right)\vec{j} + \left(\sum_{i=1}^{N} F_{iz}\right)\vec{k}$$

$$|\vec{R}| = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{N} F_x\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{N} F_y\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{N} F_z\right)^2}$$

MOMENTO POLARE di UNA FORZA



Momento polare della forza $\vec{F}$ calcolata rispetto al punto O.

$$\vec{M_O} = (P-O) \wedge \vec{F}$$

$$\vec{M}_O = (P-O) \wedge \vec{F} =$$

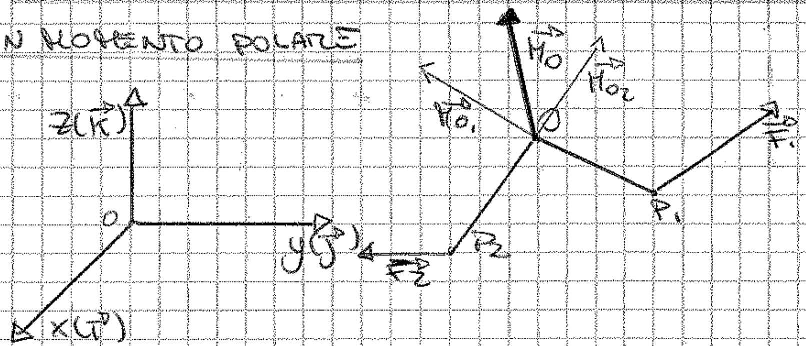
$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x-x_O & y-y_O & z-z_O \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} =$$

$$= [(y-y_O)F_z - (z-z_O)F_x]\,\vec{i} + [(z-z_O)F_x - (x-x_O)F_z]\,\vec{j} +$$

$$[(x-x_O)F_y - (y-y_O)F_x]\,\vec{k}$$

$$\begin{cases} M_{Ox} = (y-y_O)F_z - (z-z_O)F_x \\ M_{Oy} = (z-z_O)F_x - (x-x_O)F_z \\ M_{Oz} = (x-x_O)F_y - (y-y_O)F_x \end{cases}$$

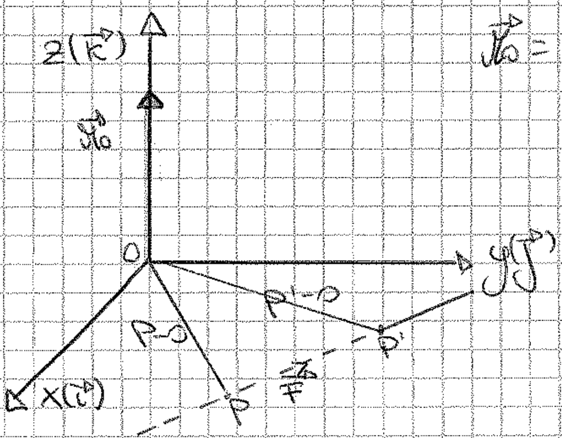
- I MOMENTI POLARI SI SOMMANO e IL RISULTATO e' UN MOMENTO POLARE



$$\vec{M}_{O1} = (P_1 - O) \wedge \vec{F}_1 \qquad \vec{M}_{O2} = (P_2 - O) \wedge \vec{F}_2$$

$$\vec{M}_{O1} + \vec{M}_{O2} = \vec{M}_O$$

- Spostando la forza sulla sua retta d'azione, IL MOMENTO POLARE NON CAMBIA



$$\vec{M}_O = (P-O) \wedge \vec{F}$$

La forza viene spostata da P a P'

$$\vec{M}_O' = (P'-O) \wedge \vec{F}$$

$\vec{M_O} = (P-O) \wedge \vec{F_2} = 0$

$\vec{M_O} = (P-O) \wedge \vec{F_3} =$

direzione $\perp$

verso rotazione di svitamento

modulo $|P-O|\,|F| \underbrace{\sin\theta}$

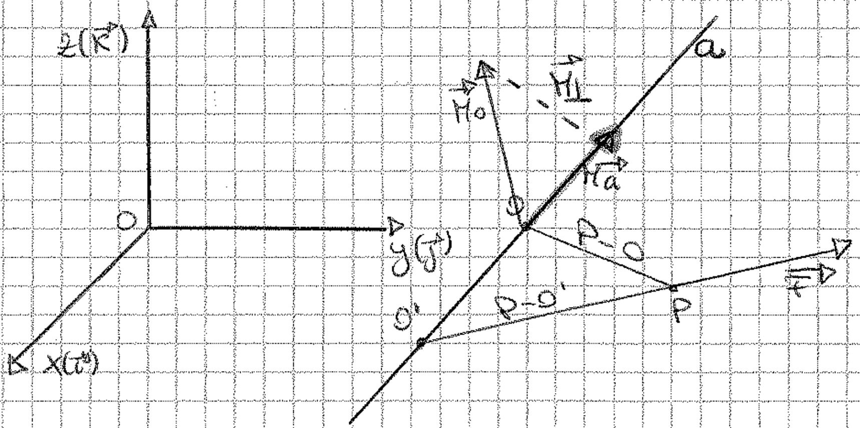
per avere la massima efficienza

$\theta = \pi/2 \longmapsto \sin\theta = 1 \longmapsto |P-O|\,|F|$

$F \perp (P-O)$

Sempre per ottenere una massima efficienza, posso aumentare $|P-O|$, mettendo P il più lontano possibile da O, il centro del bullone.

MOMENTO ASSIALE di una FORZA



$\vec{M_O} = (P-O) \wedge \vec{F} = \vec{M_a} + \vec{M_\perp}$

Momento assiale calcolato rispetto all'asse a

• Calcolo di nuovo il momento polare

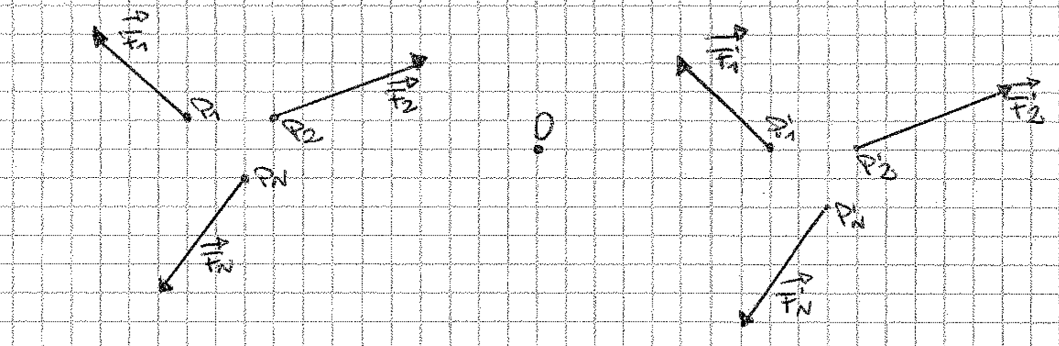
$\vec{M_{O'}} = (P-O') \wedge \vec{F} =$ $\qquad (P'-O) = (P-O) + (O-O')$

$= [(P-O) + (O-O')] \wedge \vec{F}$

$= \underbrace{(P-O) \wedge \vec{F}}_{\vec{M_O}} + \underbrace{(O-O') \wedge \vec{F}}$

$\vec{M_{O'}} = \vec{M_a} + \vec{M_\perp} + \vec{M'_\perp}$

il momento polare cambia nella componente $\perp$, ma $\vec{M_a}$ resta uguale.



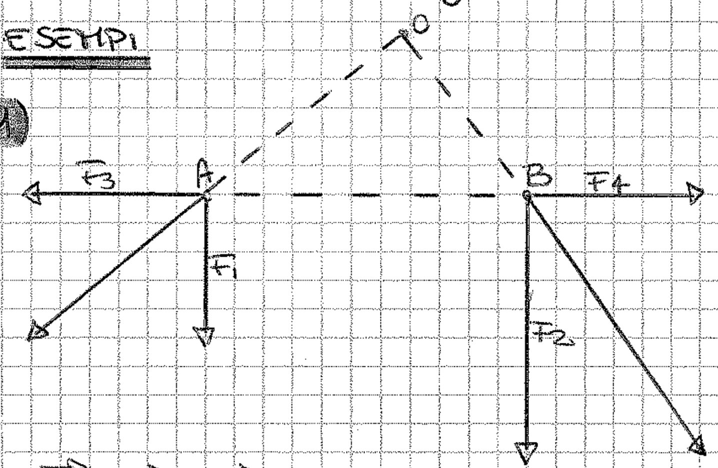
$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F_i} \qquad \vec{R'} = \sum_{j=1}^{N} \vec{F_j'}$$

$$\vec{M_O} = \sum_{i=1}^{N} (P_i - O) \wedge \vec{F_i} \qquad \vec{M_O'} = \sum_{j=1}^{N} (P_j - O) \wedge \vec{F_j}$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{R} = \vec{R'} \\ \vec{M_O} = \vec{M_O'} \end{array}\right\} \text{sistemi equivalenti}$$

ESEMPI

1



$\vec{F_3} + \vec{F_4} = 0$
uguali in modulo, opposti in direzione e verso

$$\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$$

$$\vec{R_1} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \underbrace{\vec{F_3} + \vec{F_4}}$$

$$\boxed{\vec{R} = \vec{R_1}}$$

$$\vec{M_O} = (A - O) \wedge \vec{F_1} + (B - O) \wedge \vec{F_2}$$

$$\vec{M_O'} = (A - O) \wedge \vec{F_1} + (B - O) \wedge \vec{F_2} + \underbrace{(A - O) \wedge \vec{F_3} + (B - O) \wedge \vec{F_4}}$$

$$[(A - O) + (B - O)] \wedge \vec{F_3}$$

$$[\cancel{(A - B)}] \wedge \vec{F_3} = 0$$

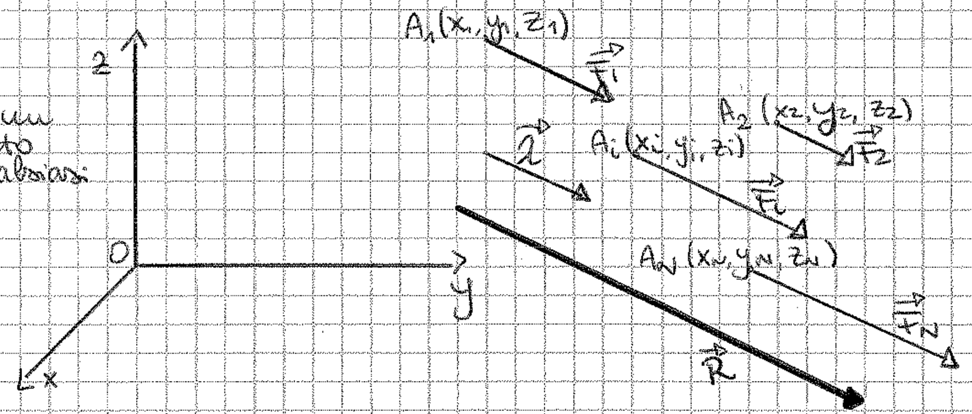
$$\boxed{\vec{M_O} = \vec{M_O'}}$$

$$|\vec{M_O}| = |A-B|\, F \sin\alpha$$
$$\rightsquigarrow |A-B| \sin\alpha = b$$
$$= b \cdot F$$

Il momento polare di una coppia di forze è un momento non applicato.

SOMMA di n FORZE PARALLELE

O è un punto qualsiasi



$\vec{\lambda}$ versore parallelo alle forze

$\vec{F_1} = F_1\vec{\lambda} \qquad \vec{F_2} = F_2\vec{\lambda} \qquad \vec{F_i} = F_i\vec{\lambda} \qquad \vec{F_N} = F_N\vec{\lambda}$

$$\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_i} + \vec{F_N}$$
$$= \sum_{i=1}^{N} (F_i \vec{\lambda})$$
$$= \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} F_i\right)}\vec{\lambda}$$
$$= R\vec{\lambda}$$

$\vec{R}$ è applicata in un punto $C\ (x_C, y_C, z_C)$

C = Centro delle forze parallele

Considero due sistemi (le N forze e la R), voglio dimostrare che sono uguali)

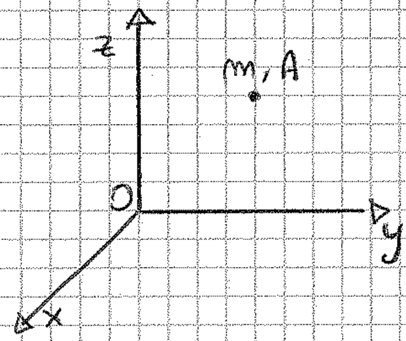
$$\vec{M_O} = (A_1 - O)\wedge\vec{F_1} + (A_2 - O)\wedge\vec{F_2} + \ldots + (A_i - O)\wedge\vec{F_i} + \ldots + (A_N - O)\wedge\vec{F_N}$$

$$(A_i - O) = x_i\vec{i} + y_i\vec{j} + z_i\vec{k} \qquad (i = 1, 2, \ldots, N)$$

$$\vec{M_O} = \sum_{i=1}^{N} (A_i - O)\wedge\vec{F_i} = \sum_{i=1}^{N} (x_i\vec{i} + y_i\vec{j} + z_i\vec{k})\wedge F_i\vec{\lambda}$$

FORZA PESO:

Tutti i corpi in prossimità della Terra cadono (verso il basso) verso il centro della terra con accelerazione $(-g\vec{k})$



xy piano orizzontale

z asse verticale

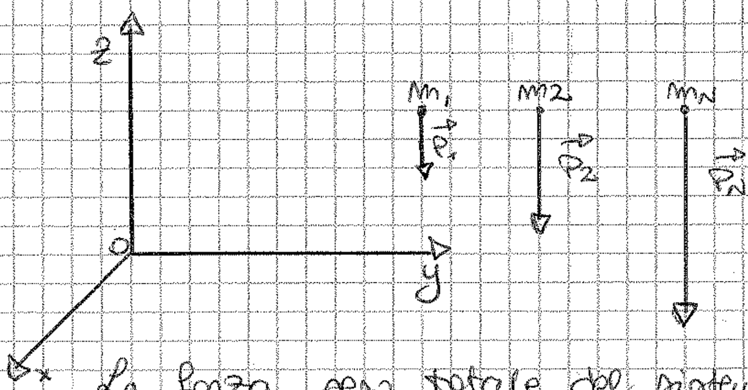
$$\vec{g} = -g\vec{k}$$

La massa m è soggetta ad una certa forza $\vec{P}$

$$\boxed{\vec{P} = m \cdot \vec{g}}$$

$$[P] = [m][g] = kg \cdot m \cdot s^{-2}$$

- Forza Peso Totale



La forza peso totale del sistema è la somma di tutte le forze peso

$$\vec{P}_{TOT} = \sum_{i=1}^{N} \vec{P}_i \qquad \vec{P}_i = m_i \vec{g}_i$$

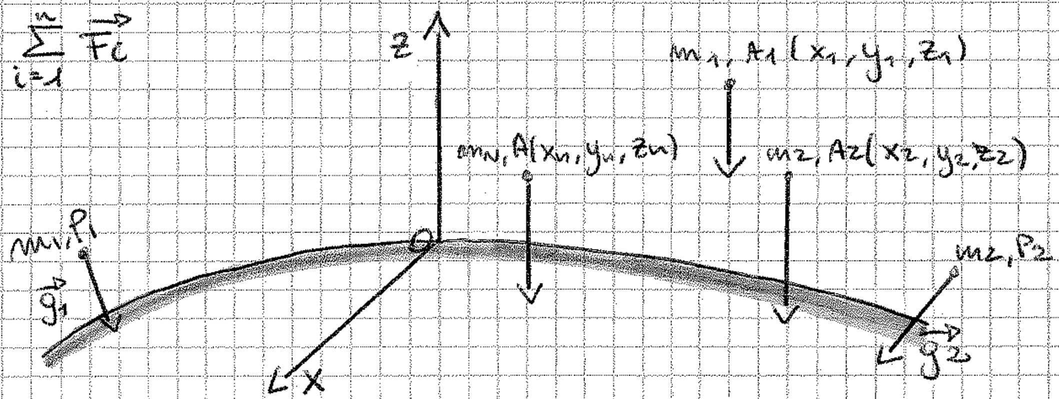
Se $\vec{g}_i = \vec{g}$ $\longmapsto$ $\vec{P}_i = m_i \vec{g}$

$$\vec{P}_{TOT} = \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} m_i\right)}_{M \text{ massa totale del sistema}} \vec{g} = M g$$

BARICENTRO di un SISTEMA di N masse puntiformi

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i F_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i} \qquad y_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i F_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i} \qquad z_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i F_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i}$$

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F_i}$$



$$\vec{P_1} = m_1 \vec{g_1}$$
$$\vec{P_2} = m_2 \vec{g_2}$$
$$\vdots$$
$$\vec{P_n} = m_n \vec{g_n}$$

$$\vec{P}_{tot} = P_1 + P_2 + \dots \vec{P_n} = \sum_{i=1}^{n} \vec{P_i} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{g_i}$$

è applicato al centro C

$C = G =$ **baricentro** (x_G, y_G, z_G)

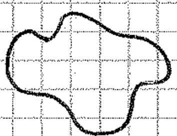
$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i P_i}{\sum_{i=1}^{n} P_i} \qquad y_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i P_i}{\sum_{i=1}^{n} P_i} \qquad z_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i P_i}{\sum_{i=1}^{n} P_i}$$

Supponiamo che adesso il volume non sia troppo esteso in altezza

$$\vec{g_i} = \vec{g}$$

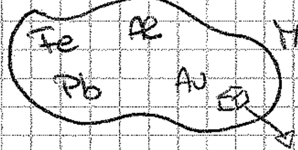
$$\vec{P}_{tot} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{g} = \sum_{i=1}^{n} m_i (\vec{g}) = M\vec{g}$$

DENSITÀ VOLUMICA DI MASSA (ρ)

Fe  M_{Fe}, V_{Fe} $\qquad \rho_{Fe} = \frac{M_{Fe}}{V_{Fe}} \Longrightarrow 7{,}8\ kg/dm^3$

Al  M_{Al}, V_{Al} $\qquad \rho_{Al} = \frac{M_{Al}}{V_{Al}} \Longrightarrow 2{,}7\ kg/dm^3$

$$[\rho] = \frac{[M]}{[V]} = \frac{kg}{m^3}$$



M, V $\qquad \rho_M = \frac{M}{V}$

$\Delta v, \Delta m$ $\qquad \rho_m = \frac{\Delta m}{\Delta v}$

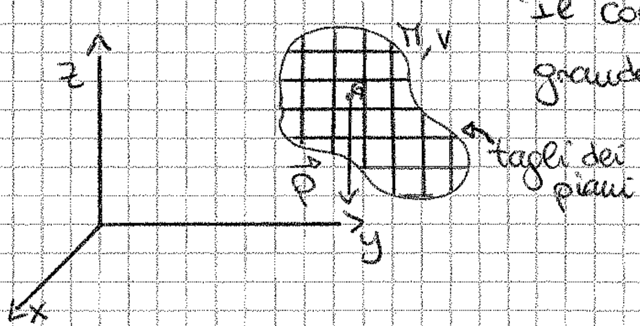
Densità puntuale $\Delta v \to 0$

$$\rho(x,y,z) = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta v} = \frac{dm}{dv}$$

$$dm = \rho(x,y,z)\, dv$$

BARICENTRO di un CORPO RIGIDO.

Cosa si intende per corpo rigido? È un corpo indeformabile, presi P_1 e P_2 dentro il corpo la distanza che li separa rimane costante nel tempo. Nella realtà ciò che vi si avvicina di più sono i CORPI SOLIDI (comunque deformabili)



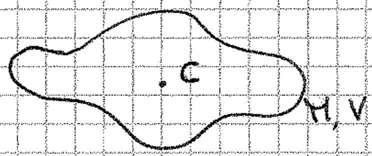
Il corpo non è troppo grande, $\vec{g}$ è uniforme

(tagli a passo costante)

CENTRO DI MASSA DI UN CORPO RIGIDO

Corpo piccolo o enorme.

$C\ (x_c, y_c, z_c)$



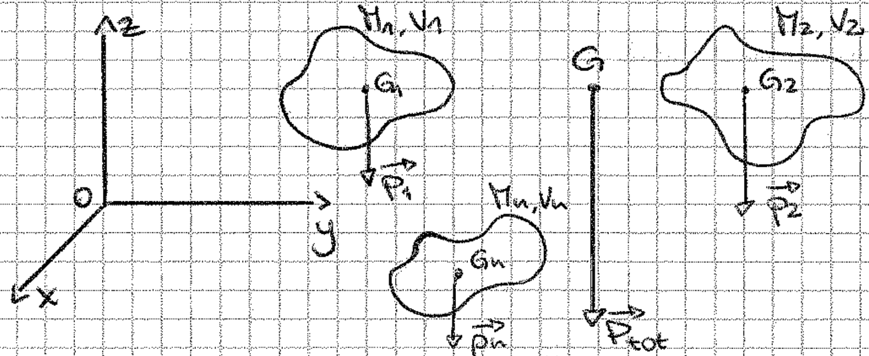
$$x_c = \frac{1}{M}\int_M x\, dm$$

$$y_c = \frac{1}{M}\int_M y\, dm$$

$$z_c = \frac{1}{M}\int z\, dm$$

Centro di massa diverso dal baricentro.

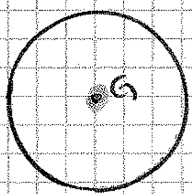
BARICENTRO dei BARICENTRI



$\vec{P_i} = M_i \vec{g}$

$\vec{P}_{tot} = \sum_{i=1}^{n} \vec{P_i} = \sum_{i=1}^{n} M \vec{g} = M_{tot} \vec{g}$

$$\boxed{x_G = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} x_{G_i} M_i} \qquad \boxed{y_G = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} y_{G_i} M_i} \qquad \boxed{z_G = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} z_{G_i} M_i}$$

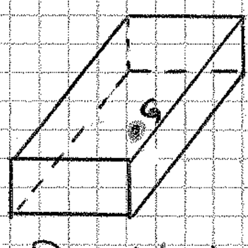


Sfera di materiale (ρ = costante)

G = centro della sfera

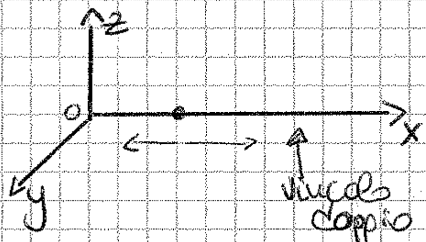
Cilindro di materiale omogeneo

G = lungo l'asse, centro del cilindro



Parallelepipedo omogeneo

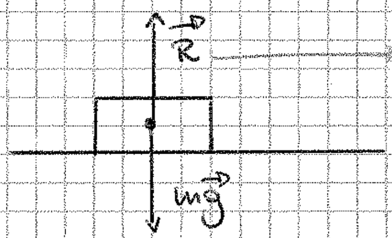
G = centro geometrico



Si può muovere solo lungo l'asse x; ha un grado di libertà

Nessun grado di libertà ⟶ vincolo triplo

Il vincolo è rappresentato dalle <u>reazioni vincolari</u>



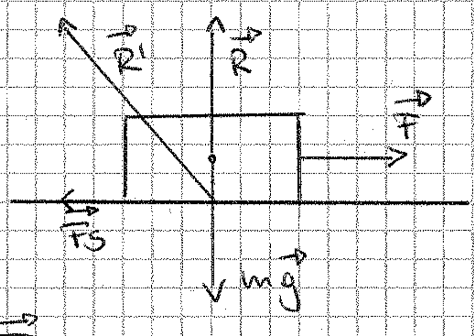
$\vec{R}$ ⟶ reazione del piano d'appoggio

- Forze di volume ⇒ dovute al materiale
- Forze di contatto ⟶ trasmesse al corpo tramite contatto

$\vec{R} = -m\vec{g}$ $\vec{R} + m\vec{g} = 0$

Condizione necessaria e sufficiente affinché un corpo puntiforme sia in equilibrio è che la risultante $\vec{R}$ di tutte le forze attive, passive e vincolari sia nulla.

VINCOLO LISCIO



$\vec{R} + m\vec{g} = 0$

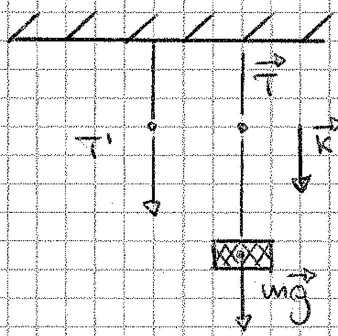
$\vec{R} + m\vec{g} + \vec{F} + \vec{F_S} = 0$

⇝ $\vec{F_S}$ è una reazione del vincolo

⇝ $\vec{R'}$ è la reazione vincolare totale (ha due componenti)

⇝ $\vec{R'} = \vec{R} + \vec{F_S}$ Nei vincoli lisci $\vec{F_S}$ e l'attrito non ci sono, quindi $\vec{R} = \vec{R'}$

Aumentano le tensioni intermolecolari



$\vec{T} + \vec{T'} = 0$ se $\vec{T'} \neq -\vec{T}$ la fune si rompe

Fune di massa trascurabile

$\vec{T} + m\vec{g} = 0$ (somma vettoriale)

$\vec{T} = -m\vec{g}$

$\vec{T} = -T\vec{k}$

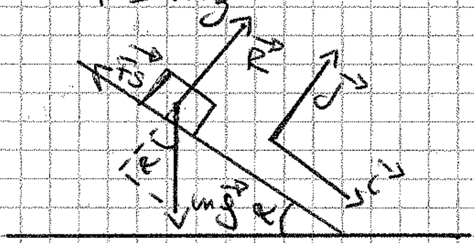
$m\vec{g} = mg\,\vec{k}$

$-T\vec{k} + mg\,\vec{k} = 0$

$\vec{k}\,(-T\vec{k} + mg\,\vec{k}) = 0$

$-T + mg = 0$

$T = mg$



Vogliamo sapere dopo quale α il corpo scivola.

$\vec{R} + m\vec{g} + \vec{F_s} = 0$ equilibrio

α quando $\vec{F_s}$ è massimo

$\vec{R} = R\vec{j}$ $\qquad m\vec{g} = mg\sin\alpha\,\vec{i} - mg\cos\alpha\,\vec{j}$

$\vec{F_s} = -f_s\, mg\cos\alpha\,\vec{i}$

$R\vec{j} + mg\sin\alpha\,\vec{i} - mg\cos\alpha\,\vec{j} - f_s\, mg\cos\alpha\,\vec{i} = 0$

$\cdot\vec{i})$ $mg\sin\alpha - f_s\, mg\cos\alpha = 0$

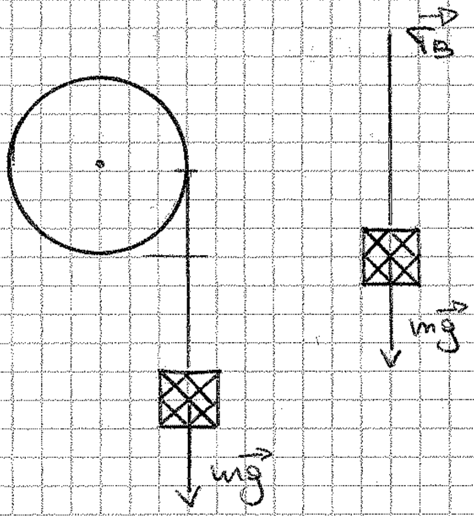
$\cdot\vec{j})$ $R - mg\cos\alpha = 0$

$R = mg\cos\alpha$

$\cancel{mg}\sin\alpha = f_s\,\cancel{mg}\cos\alpha$

$tg\,\alpha = f_s$

$\alpha_{lim} = arc\,tg\,(f_s)$



$$\vec{T_B} + m\vec{g} = 0$$

$$T_B\vec{j} + mg\vec{j} = 0$$

$$T_B - mg = 0$$

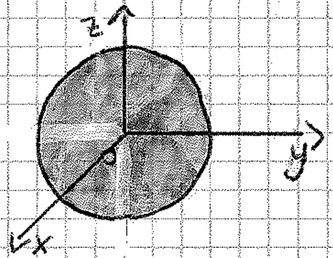
$$T_B = mg$$

$$-T_a\vec{i} + T_B\vec{j} - Mg\vec{j} + R_x\vec{i} + R_y\vec{j} = 0$$

• $\vec{i}$) $-T_a + R_x = 0$ $\quad R_x = T_a = mg$

• $\vec{j}$) $-T_B - Mg + R_x = 0$ $\quad R_y = T_B + Mg = mg + Mg$

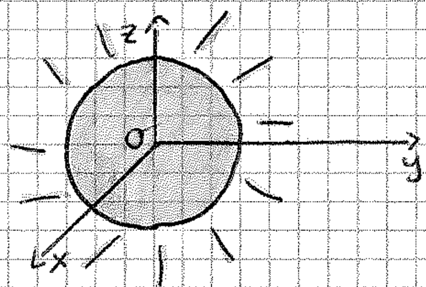
Sistema Geocentrico [più inerziale del precedente]



O = centro della Terra

assi lungo le stelle fisse

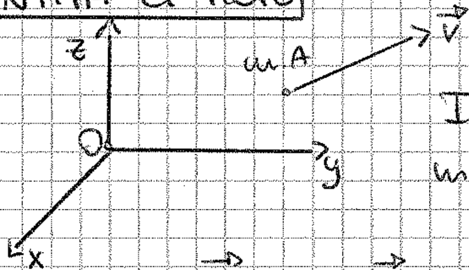
Sistema Eliocentrico [più inerziale del geocentrico]



O = centro del sole

Moto solidale al sistema solare (ma anche il sole ha un suo moto)

QUANTITÀ di MOTO



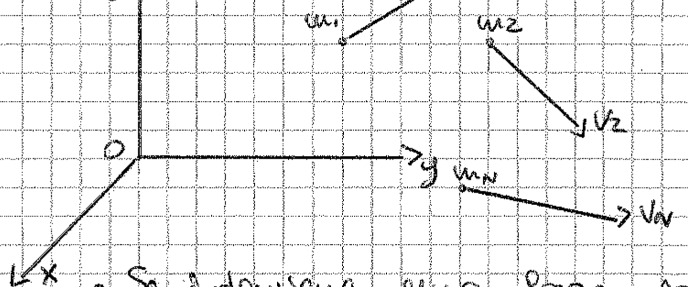
Il corpo puntiforme di massa m si muove a velocità $\vec{v}$

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

$$[p] = [m] \cdot [v]$$

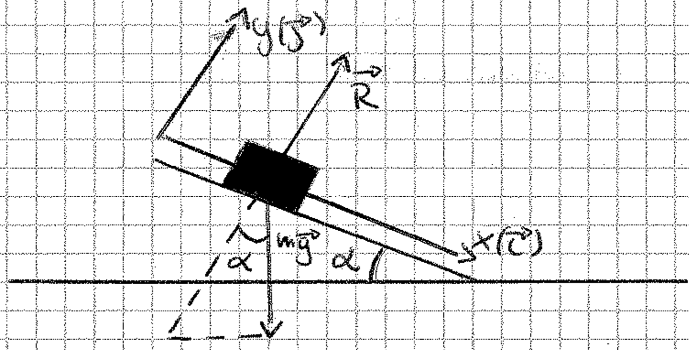
$$= kg \cdot \frac{m}{s^2}$$

→ Quantità di moto totale



$$\left.\begin{array}{l} \vec{p_1} = m_1 \vec{v_1} \\ \vec{p_2} = m_2 \vec{v_2} \\ \vec{p_N} = m_N \vec{v_N} \end{array}\right\} \vec{P}_{tot} = \vec{p_1} + \vec{p_2} + \ldots + \vec{p_N} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p_i}$$

• Se interviene una forza, si modificano la velocità e la quantità di moto



Supponendo nullo l'attrito, valutare l'accelerazione $\vec{a}$.

Forze di contatto
↳ reazione vincolare (superficie di appoggio)
$\vec{R} \perp$ alla superficie

Forza di volume
↳ forza peso $m\vec{g}$

$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$

$\vec{R} + m\vec{g} = m \cdot \vec{a}$

$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ $\qquad a_y = 0$ e $a_z = 0$

Posso scrivere i vari elementi in un altro modo

$\vec{a} = a_x \vec{i}$

$\vec{R} = R\vec{j}$

$m\vec{g} = mg \sin\alpha \, \vec{i} - mg \cos\alpha \, \vec{j}$

$R\vec{j} + mg \sin\alpha \, \vec{i} - mg\cos\alpha \, \vec{j} = ma_x \vec{i} + ma_y \vec{j} + ma_z \vec{k}$

- moltiplico per $\vec{i}$

  $\cancel{m}g \sin\alpha = \cancel{m}a_x$

- moltiplico per $\vec{j}$

  $R - mg\cos\alpha = ma_y$

- moltiplico per $\vec{k}$

  $0 = ma_z$

$$\begin{cases} a_x = g \sin\alpha \\ a_y = 0 \\ a_z = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{a = g \sin\alpha}$$

(c'è il concetto fisico di reazione vincolare)

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 83 di 296

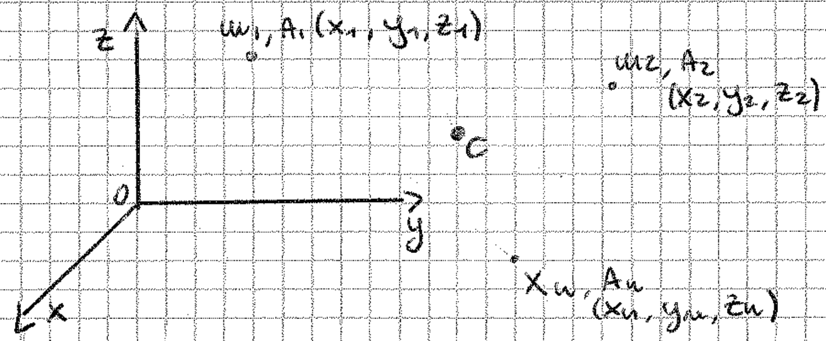
$$\frac{d}{dt}\underbrace{(p_1 + p_2 + \dots + p_N)}_{\sum_{i=1}^{N} \vec{p_i} = p_{tot}} = 0$$

$$\frac{d\vec{p_{tot}}}{dt} = 0 \qquad \underline{p_{tot} \text{ è costante}}$$

La quantità di moto totale di un sistema isolato di n corpi puntiformi è costante.

$$\boxed{\text{CENTRO di MASSA}}$$

Sistema di n masse



m_1 in un istante t_1

$$V_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$$

m_2 si muove di una velocità $V_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$

m_N si muove di una velocità $V_N = x_N\vec{i} + y_N\vec{j} + z_N\vec{k}$

C è il centro di massa e M è la massa totale del sistema.

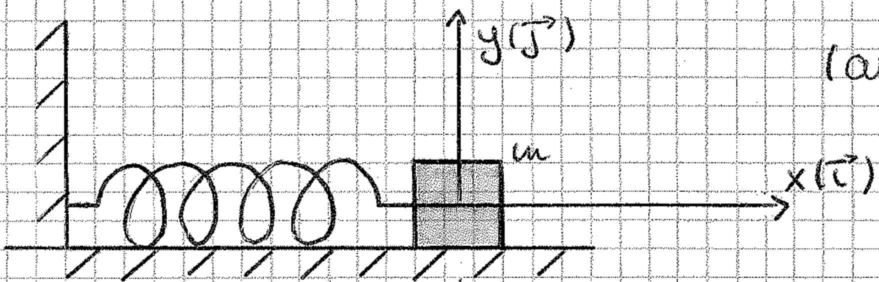
$$C\,(x_c, y_c, z_c)$$

$$x_c = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i x_i \qquad z_c = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i z_i$$

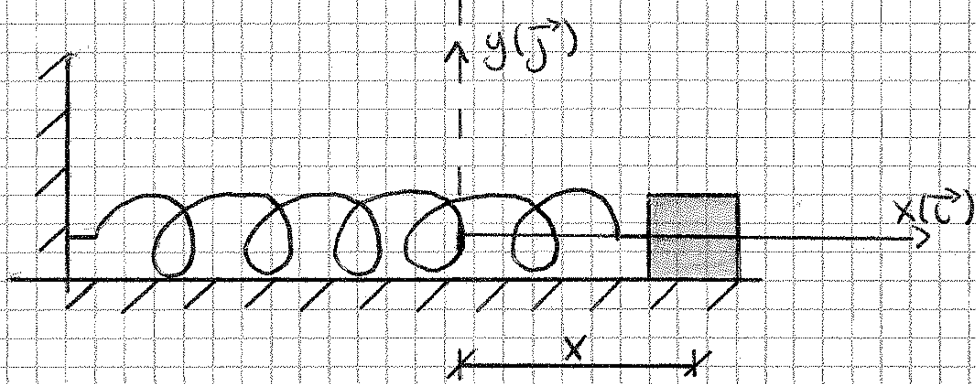
$$y_c = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i y_i$$

OSCILLAZIONI

OSCILLAZIONI LIBERE



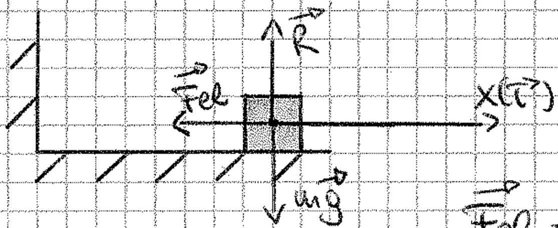
(assenza di attriti)



$t=0$ $\quad x(t=0)=x_0 \quad v_x(t=0)=0$

$y(t=0)=0 \quad v_y(t=0)=0$

$z(t=0)=0 \quad v_z(t=0)=0$



$\vec{R}$ $\perp$ alla superficie di contatto e bilancia $m\vec{g}$

$$\vec{F}el + \vec{R} + m\vec{g} = m \cdot \vec{a}$$

$$\vec{F}el = -kx \cdot \vec{i}$$

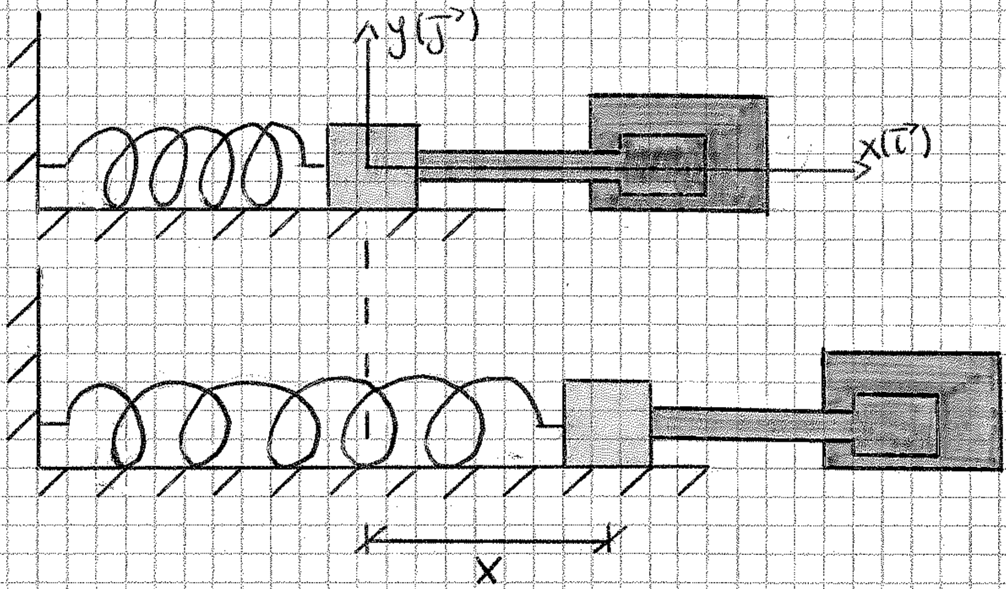
$$\vec{R} = R\vec{j} \qquad \vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

$$m\vec{g} = -mg\vec{j}$$

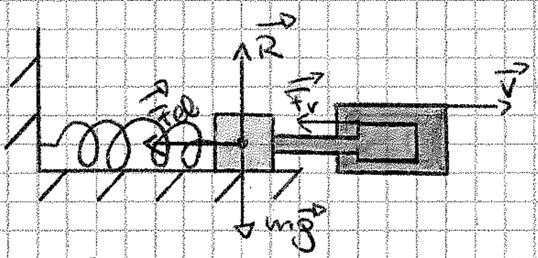
$$-kx \cdot \vec{i} + R\vec{j} - mg\vec{j} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k})\, m$$

- $\vec{i}$) $-kx = a_x \cdot m$
- $\vec{j}$) $R - mg = m\, a_y \longrightarrow R - mg = 0 \longrightarrow a_y = 0$
- $\vec{k}$) $0 = m \cdot a_z \longrightarrow a_z = 0$

OSCILLAZIONI SMORZATE



$t=0 \qquad x(t=0)=x_0 \qquad v_x(t=0)=0$



$$\vec{F}_{el} + \underbrace{m\vec{g} + \vec{R}}_{0} + \vec{F}_v = m\vec{a}$$

$$\vec{F}_{el} = -Kx\vec{i}$$
$$\vec{F}_v = -\beta\vec{v} = -\beta\dot{x}\vec{i}$$
$$\vec{a} = a_x\vec{i} = \ddot{x}\vec{i}$$

$$-Kx\vec{i} - \beta\dot{x}\vec{i} = \ddot{x}\vec{i}m$$

$\cdot\vec{i})\quad -Kx - \beta\dot{x} = \ddot{x}m$

$m\ddot{x} + Kx + \beta\dot{x} = 0$

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{\beta}{m}\dot{x} + \frac{K}{m}x = 0}$$

equazione differenziale omogenea a coefficienti costanti

$$x'(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) =$$
$$= C_1 A_1 e^{-\gamma t}(\cos\omega t + i \sin\omega t) + C_2 A_2 e^{-\gamma t}(\cos\omega t - i \sin\omega t) =$$
$$= \cos(\omega t)\left[C_1 A_1 + C_2 A_2\right] e^{-\gamma t} + i \sin(\omega t)\left[C_1 A_1 - C_2 A_2\right] e^{-\gamma t} =$$

$$\begin{cases} u(t) = (C_1 A_1 + C_2 A_2)\, e^{-\gamma t} \cos(\omega t) \\ v(t) = (C_1 A_1 - C_2 A_2)\, e^{-\gamma t} \sin(\omega t) \end{cases}$$

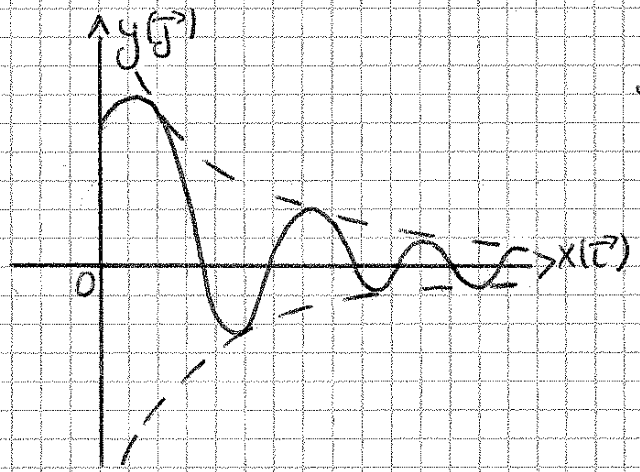
$$\boxed{x(t) = u(t) + i\, v(t)}$$

$$x(t) = A\, u(t) + B\, v(t)$$
$$= A\left[(C_1 A_1 + C_2 A_2) e^{-\gamma t} \cos(\omega t)\right] + B\left[(C_1 A_1 - C_2 A_2) e^{-\gamma t} \sin(\omega t)\right]$$

$$\begin{cases} A(C_1 A_1 + C_2 A_2) = \rho \sin\varphi \\ B(C_1 A_1 - C_2 A_2) = \rho \cos\varphi \end{cases}$$

$$= (\rho \sin\varphi) e^{-\gamma t} \cos(\omega t) + (\rho \cos\varphi) e^{-\gamma t} \sin(\omega t)$$
$$= \left[\rho \sin\varphi \cos(\omega t) + \rho \cos\varphi \sin(\omega t)\right] e^{-\gamma t}$$
$$= \rho e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\boxed{x(t) = \rho e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \varphi)}$$



L'ampiezza va a zero, dopo un t sufficientemente lungo il corpo si ferma.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 91 di 296

$$m\vec{g} = mg\cos\theta\,\vec{\lambda} - mg\sin\theta\,\vec{\mu} \qquad \vec{T} = -T\vec{\lambda}$$

$$T\vec{\lambda} + mg\cos\theta\,\vec{\lambda} - mg\sin\theta\,\vec{\mu} = -mr\dot{\theta}^2\vec{\lambda} + mr\ddot{\theta}\,\vec{\mu}$$

$\cdot\vec{\lambda})\quad T + mg\cos\theta = -mr\dot{\theta}^2$

$\cdot\vec{\mu})\quad -mg\sin\theta = mr\ddot{\theta}$

$T = mg\cos\theta + mr\dot{\theta}^2$ massimo nel punto più basso della traiettoria

$r\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0$

$\sin\theta \cong \theta$

$l\ddot{\theta} + g\theta = 0$

$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$

$\omega_0^2 = g/l$

$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$

$\theta(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi)$

$\theta(t=0) = \theta_0 = A\sin\varphi \qquad A = \theta_0$

$\dot{\theta}(t=0) = 0 = A\omega_0\cos\varphi \qquad \varphi = \pi/2$

$$\boxed{\theta(t) = \theta_0\sin(\omega_0 t + \pi/2)}$$

$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ Più grande è l, più sono lente le oscillazioni

$$\underbrace{\vec{R} + m\vec{g}}_{\phi} + \vec{F_s} + \vec{F_a} = 0$$

$$\vec{F_s} = f_s mg \vec{\lambda} = f_s mg \vec{i}$$

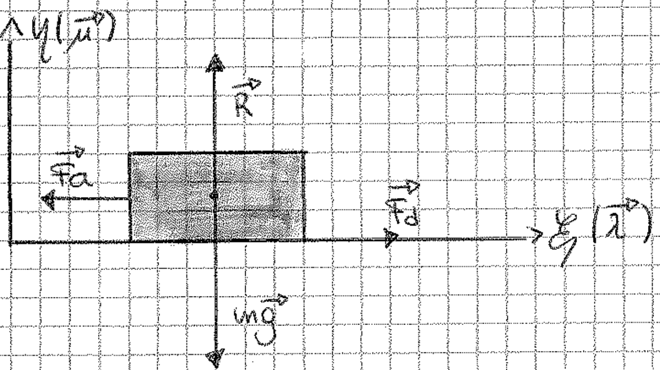
$$\vec{F_a} = m(-\vec{a}_{lim}) = -m a_{lim} \vec{i}$$

$$f_s mg \vec{i} - m a_{lim} \vec{i} = 0$$

$\cdot \vec{i})$ $f_s \cancel{m}g - \cancel{m} a_{lim} = 0 \longrightarrow a_{lim} = f_s g$

2) $t = 0$ $\begin{cases} x_b(t=0) = x_{\Omega 0} + \xi_{b0} \\ z_b(t=0) = z_{\Omega 0} \end{cases}$ $\begin{cases} \xi_b(t=0) = \xi_{b0} \\ \eta_b(t=0) = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} \dot{x}_b(t=0) = 0 \\ \dot{z}_b(t=0) = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \dot{\xi}_b(t=0) = 0 \\ \dot{\eta}_b(t=0) = 0 \end{cases}$



$$\vec{a} = a\vec{i} > \vec{a}_{lim}$$

$$\vec{F_a} + \underbrace{\vec{R} + m\vec{g}}_{\phi} + \vec{F_d} = m\vec{a}_b^{(r)}$$

$$\vec{F_a} = m(-a\vec{i}) = -ma\vec{i}$$

$$\vec{F_d} = f_d mg \underset{(\vec{\lambda})}{\vec{i}}$$

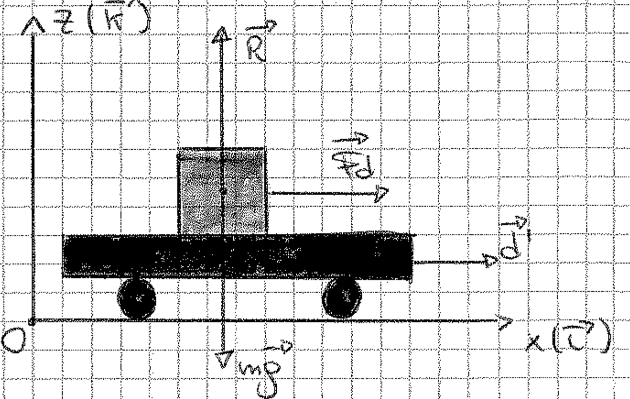
$$\vec{a_b} = \ddot{\xi}_b \vec{\lambda} + \ddot{\eta}_b \vec{\mu} = \ddot{\xi}_b \vec{i} + \ddot{\eta}_b \vec{k}$$

$$f_d mg \vec{i} - ma\vec{i} = m\ddot{\xi}_b \vec{i} + m\ddot{\eta}_b \vec{k}$$

$\cdot \vec{k})$ $0 = m\ddot{\eta}_b$ $\qquad \cdot \vec{i})$ $f_d mg - ma = m\ddot{\xi}_b$

$$\ddot{\xi} = f_d g - a$$

In questo caso avremmo potuto risolvere il sistema con il solo riferimento assoluto



$$\underbrace{\vec{R} + m\vec{g}}_{\phi} + \vec{F_d} = m\vec{a_b}$$

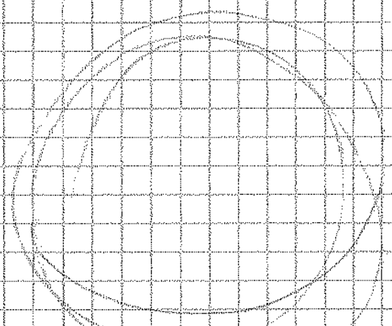
$$F_d = m\,\vec{a_b} \qquad \vec{F_d} = f_d g m \vec{i}$$

$$\vec{a_b} = \ddot{x}_b \vec{i} + \ddot{z}_b \vec{k}$$

$\cdot \vec{k})$ $\quad 0 = m\ddot{z}_b$

$\cdot \vec{i})$ $\quad \ddot{x}_b = f_d\, g$

FORZA CENTRIFUGA



è un tipo particolare di forza fittizia

$$\vec{v} = r\dot{\theta}\vec{\mu}$$

$$\vec{\omega} = \dot{\theta}$$

$$\vec{a} = -r\dot{\theta}^2\vec{\lambda} + r\ddot{\theta}\vec{\mu}$$

$V = r\dot{\theta} = $ costante

$$\vec{a} = -r\dot{\theta}^2\vec{\lambda}$$

$$\boxed{\vec{F_c} = m(-\vec{a}) = mr\dot{\theta}^2\vec{\lambda} = mr\omega^2\vec{\lambda}}$$