NUMERO : 414

DATA : 02/11/2012

A P P U N T I

STUDENTE : Insana

MATERIA : Geometria + esercizi
Prof. Cumino

ricevimento: GIO 13.30-14.30 DIMAT 1528

Alessandra Insana

Geometria

GRECO - VALABREGA ed. LEVROTTO 2 volumi tutto 2009 CARLINO - TEDESCHI - VIOLA ed. ESCULAPIO
SANINI " "

15 marzo 2011

(ho preso appunti sui fogli) → con questo colore scrivo parti aggiuntive dal libro

16 marzo 2011

(ho preso appunti sui fogli)

18 marzo 2011

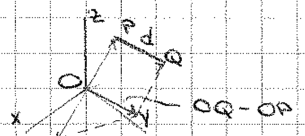
(ho preso appunti sui fogli)

22 marzo 2011

Geometria analitica

DA STUDIARE TUTTO

$R(O, x, y, z)$



distanza $d(P, Q)$

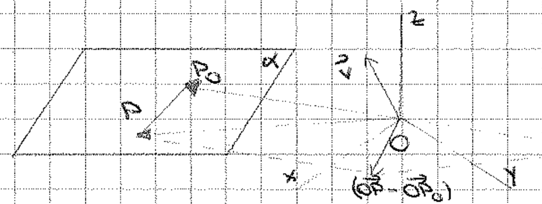
Penso al vettore $|\vec{OQ} - \vec{OP}| = |\vec{OQ} + (-\vec{OP})| = d(P, Q)$

$Q = (a, b, c)$ $\rightarrow |\vec{OQ} - \vec{OP}| = \sqrt{(a' - a)^2 + (b' - b)^2 + (c' - c)^2} = d(P, Q)$

$P = (a', b', c')$

PIANI

(1) α è il piano che passa per un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ortogonale al vettore $\vec{v} = (a, b, c)$



eqz. vettoriale di α

$P(x, y, z) \in$ al piano $\alpha \iff PP_0 \perp \vec{v} \iff (\vec{OP} - \vec{OP_0}) \perp \vec{v} \iff (\vec{OP} - \vec{OP_0}) \cdot \vec{v} = 0$

$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (a, b, c) = 0$

$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$

$ax + by + cz + \underbrace{(-ax_0 - by_0 - cz_0)}_{d} = 0$

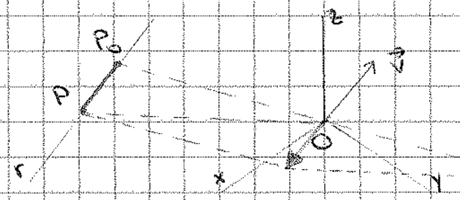
$\alpha: ax + by + cz + d = 0$ eqz. cartesiana di α

$\forall k \in \mathbb{R},\ k \neq 0 \Rightarrow kax + kby + kcz + kd = 0$ è lo stesso piano α, solo che $\vec{v}$ è moltiplicato per k → ottengo un vettore con la stessa direzione di v

Il piano ha diverse rappresentazioni ma è sempre lo stesso, solo che moltiplico per un coeff. non nullo.

RETTE nello spazio

① r passante per P_0, parallela a $\vec{v} = (\ell, m, n)$; $P_0(x_0, y_0, z_0)$



$P(x, y, z) \in r \iff$ il segmento P_0P è parallelo a $\vec{v} \iff (\vec{OP} - \vec{OP_0}) = t\vec{v}$ eqz. vettor. di r

per qualche $t \in \mathbb{R}$

In componenti: $\begin{cases} x - x_0 = \ell t \\ y - y_0 = mt \\ z - z_0 = nt \end{cases}$ eqz. parametriche di r

t = parametro

Esempio: determinare la retta r per $P_0(1, 0, 1)$ parallela a $\vec{v} = (1, 2, 3)$

$r: \begin{cases} x - 1 = t \\ y - 0 = 2t \\ z - 1 = 3t \end{cases}$ $Q \in r$ può essere ottenuto da $t = 0 \to Q(1, 0, 1)$, cioè P_0

Se $t = -1$ ottengo $(0, -2, -2)$

Al variare di t ottengo tutti i punti della retta

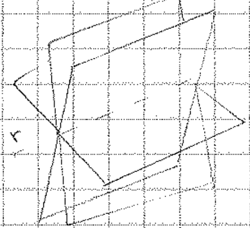
Rappresentazione cartesiana di r

Elimino t

$$\begin{cases} \dfrac{x - x_0}{\ell} = t \\ \dfrac{y - y_0}{m} = t \\ \dfrac{z - z_0}{n} = t \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{x - x_0}{\ell} = \dfrac{y - y_0}{m} \\ \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n} \end{cases}$$

Esempio

$$\begin{cases} \dfrac{x - 1}{1} = \dfrac{y - 0}{2} \\ \dfrac{y - 0}{2} = \dfrac{z - 1}{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - 2 - y = 0 & \leftarrow \text{piano} \\ 3y - 2(z - 1) = 0 & \leftarrow \text{piano} \end{cases}$$



Fascio proprio di piani

Altra forma

$$r: \begin{cases} \dfrac{x - 1}{1} = \dfrac{z - 1}{3} \to 3(x - 1) - (z - 1) = 0 \\ \dfrac{x - 1}{1} = \dfrac{y - 0}{2} \to 2(x - 1) - y = 0 \end{cases}$$

Retta per due punti:

P_0, P_1 punti distinti dello spazio
r è la retta che li contiene

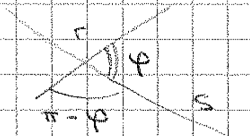
$$r: \begin{cases} x = t(x_1 - x_0) + x_0 \\ y = t(y_1 - y_0) + y_0 \\ z = t(z_1 - z_0) + z_0 \end{cases}$$ con $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e $P_1(x_1, y_1, z_1)$

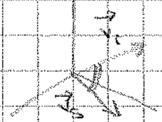
2

Angoli tra rette

$r: \begin{cases} x = 1 \\ y = -t \\ z = 1+t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 1+u \\ y = u \\ z = 2 \end{cases}$

Due rette dello spazio possono essere
- incidenti
- parallele
- sghembe





Def: $\hat{rs} = \widehat{\vec{v}_r \vec{v}_s}$ oppure $\pi - \widehat{\vec{v}_r \vec{v}_s}$

l'angolo tra due vettori è quello convesso

Come si calcola questo angolo?

Ricordo:

$$\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s = |\vec{v}_r||\vec{v}_s| \cos \widehat{\vec{v}_r \vec{v}_s} \Rightarrow \cos \widehat{\vec{v}_r \vec{v}_s} = \frac{\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s}{|\vec{v}_r||\vec{v}_s|}$$

Che relazione c'è tra $\cos\varphi$ e $\cos(\pi-\varphi)$? È solo un problema di segno:

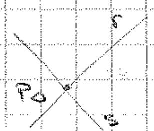
$$\cos \hat{rs} = \pm \cos \widehat{\vec{v}_r \vec{v}_s} = \pm \frac{\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s}{|\vec{v}_r||\vec{v}_s|}$$

$\vec{v}_r = (0,-1,1)$
$\vec{v}_s = (1,1,0)$

$$\cos \widehat{\vec{v}_r \vec{v}_s} = \frac{(0,-1,1)\cdot(1,1,0)}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}$$

$$\cos \hat{rs} = \mp \frac{1}{2} \rightarrow \hat{rs} = \frac{\pi}{3}, \pi - \frac{\pi}{3}$$

Esempio: Determinare una retta s per $P_0(1,0,1)$ ortogonale a $r: \begin{cases} x = 1 \\ y = -t \\ z = 1+t \end{cases}$



$s: \begin{cases} x = 1 + \ell u \\ y = 0 + mu \\ z = 1 + nu \end{cases} \qquad (\ell, m, n)\cdot(0,-1,1) = 0 \rightarrow m = n \quad \forall \ell, m \in \mathbb{R}$

Una retta s è

$s: \begin{cases} x = 1 + \pi u \\ y = 0 + 5u \\ z = 1 + 5u \end{cases}$

Angolo tra piani

Def: $\hat{\alpha\beta} = \widehat{\vec{n}_\alpha \vec{n}_\beta}$ oppure $\pi - \widehat{\vec{n}_\alpha \vec{n}_\beta}$

$\vec{n}_\alpha \perp \alpha$
$\vec{n}_\beta \perp \beta$

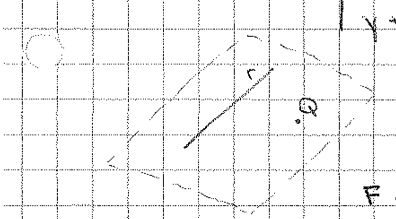
Esempio: $\alpha: -y + z - 1 = 0$
$\beta: x + y = 0$

$$\cos \hat{\alpha\beta} = \pm \frac{\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta}{|\vec{n}_\alpha||\vec{n}_\beta|} = \pm \frac{(0,-1,1)\cdot(1,1,0)}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \hat{\alpha\beta} = \frac{\pi}{3}, \pi - \frac{\pi}{3}$$

http//cantor.polito.it/didattica — 25 marzo 2014

Es.: Data $r: \begin{cases} x+2y=0 \\ y+z+1=0 \end{cases}$ e $Q(1,1,0) \notin r$ trovare α che contiene Q ed r.



considero il fascio proprio di asse r. Poi cerco l'unico piano che si ottiene imponendo il passaggio per Q.

$F: \gamma(x+2y) + \mu(y+z+1) = 0 \quad \forall \gamma, \mu \in \mathbb{R}$ non tutti nulli

F contiene $Q \rightarrow F \ni Q \iff \gamma(1+2) + \mu(1+1) = 0 \rightarrow 3\gamma + 2\mu = 0 \rightarrow \mu = -\frac{3}{2}\gamma$

Per trovare il piano α basta individuare γ e μ in modo che soddisfino questa relazione, per es. $\gamma = 12$ implica $\mu = -18$

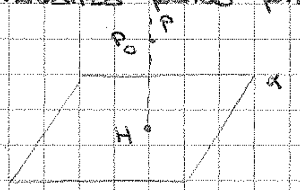
Così avrò $\alpha: \cancel{12}_{2}(x+2y) - \cancel{18}_{3}(y+z+1) = 0 \rightarrow 2x + y - 3z - 3 = 0$

Distanze

$P_0(x_0, y_0, z_0) \quad P_1(x_1, y_1, z_1)$

$$d(P_0, P_1) = \|(\vec{OP_0} - \vec{OP_1})\| = \sqrt{(x_0-x_1)^2 + (y_0-y_1)^2 + (z_0-z_1)^2}$$

- distanza punto-piano



$d(P_0, \alpha) = d(P_0, H)$
$H = \alpha \cap p$

esempio: Dato $\alpha: x+2y+z+1=0$ e $P_0(1,1,0) \notin \alpha$

$p: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+2t \\ z = 0+t \end{cases} \rightarrow (1+t) + 2(1+2t) + t + 1 = 4 + 6t = 0 \rightarrow t = -2/3$

Il punto H ha coordinate $(1/3, -1/3, -2/3)$. Quindi la distanza di P_0 da α sarà uguale alla distanza di P_0 da Q:

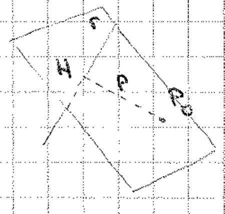
$$\sqrt{(1-1/3)^2 + (1+1/3)^2 + (0+2/3)^2} = \sqrt{4/9 + 16/9 + 4/9} = \frac{\sqrt{24}}{3}$$

In generale: $P_0(x_0, y_0, z_0)$
$\alpha: ax + by + cz + d = 0$

$$d(P_0, H) = d(P_0, \alpha) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

- distanza punto-retta

RICORDA BENE



$d(P_0, r) = d(P_0, H)$
$H = r \cap \alpha$ con α che è il piano $\perp$ a r che passa per P_0

esempio: $r: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2t \\ z = 1-t \end{cases} \quad P_0(1,2,0) \notin r$

Matrici

$$\begin{pmatrix} 3 & i & \pi \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{\overset{\text{righe}}{4},\overset{\text{colonne}}{3}}$$

[senza virgola]

$M = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m,n}$ $\qquad \mathbb{K} = \begin{cases} \mathbb{R} \\ \mathbb{C} \end{cases}$

i: indice di riga, varia da 1 a m

j: indice di colonna, varia da 1 a n

$$M = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Operazioni

- somma

$A, B \in \mathbb{K}^{m,n}$

$A = (a_{ij}) \qquad B = (b_{ij})$

$A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \in \mathbb{K}^{m,n}$

esempio: 1) $A = (1, 2, 3) \in \mathbb{R}^{1,3}$ $\qquad A + B = (1, 3, 2)$

$B = (0, 1, -1) \in \mathbb{R}^{1,3}$

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$ $\qquad A+B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$

Proprietà

1) (commutativa) $A, B \in \mathbb{K}^{m,n}$
$A + B = B + A$
2) $(A+B)+C = A+(B+C)$
3) $\exists$ matrice nulla tale che $\forall A$, $A + 0 = A$. 0 ha i coefficienti nulli
4) $\forall A \neq 0$, $\exists -A$ tale che $A + (-A) = 0$

- PRODOTTO DI UNA MATRICE PER UN COEFF. DELLA MATRICE

$A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m,n}$, $\forall k \in \mathbb{K}$

$kA \underset{\text{def}}{=} (k a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m,n}$

esempio: $2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Proprietà

1) $\forall A \in \mathbb{K}^{m,n}$, $1A = A$
2) $\forall k, \ell$ $\quad k(\ell A) = (k\ell)A$
3) $k(A+B) = kA + kB$
4) $(k+\ell)A = kA + \ell A$

- PRODOTTO TRA MATRICI

esempio: $A = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}) \in \mathbb{K}^{1,n}$

$B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n,1}$

Def. $AB = (a_{11} \dots a_{1n}) \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} + \dots + a_{1n} b_{n1} \in \mathbb{K}^{1,1}$ modo complicato per dire che è un numero

riga per colonna

SISTEMI LINEARI

nomenclatura:

$ax = b$ EQZ LINEARE perché la x ha esponente 1
x INCOGNITA
$a, b \in \mathbb{K}$ COEFF.

Soluzioni? Casi:
1) $a \neq 0$ $x = b/a$ soluzione
2) $a = 0$ $b \neq 0$ $b = 0$ non c'è soluzione → l'eqz è incompatibile
3) $a = 0$ $b = 0$ $0 = 0$ infinite soluzioni → $\forall x \in \mathbb{K}$

$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b$ con $a_1, \dots, a_n, b \in \mathbb{K}$ $x_1, x_2 \dots x_n$ INCOGNITE
b TERMINE NOTO

Soluzioni? $c_1, c_2 \dots c_n \in \mathbb{K}$ tali che $a_1c_1 + a_2c_2 + \dots + a_nc_n = b$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$$ SISTEMA LINEARE IN 3 INCOGNITE x_1, x_2, x_3

Soluzione: (se c'è) c_1, c_2, c_3 tali che $\begin{cases} c_1 + c_2 - c_3 = 0 \\ c_1 - c_2 = 1 \end{cases}$

Risolvo: $\begin{cases} 1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 = 1 + x_2 \end{cases}$ $\begin{cases} x_3 = 2x_2 + 1 \\ x_1 = 1 + x_2 \end{cases}$ → soluzioni: $(1 + x_2, x_2, 2x_2 + 1)$

Posso attribuire a x_2 qualsiasi valore → non c'è una sola soluzione, ma ce n'è ∞^1 cioè dipendono da un'incognita libera.

<u>Def.</u> sistema lineare di m equazioni in n incognite a coeff. in $\mathbb{K}$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Definisco la matrice dei coefficienti: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots \\ a_{m1} & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{m,n}$

Oltre ad A servono $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

Sistema: AX riga per colonna → $AX = B$

$$AX = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots a_{2n}x_n \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} x_2 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n$$

COMBINAZIONE LINEARE DELLE COLONNE DI A a COEFF. LE INCOGNITE

Esempio: $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$ $A \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $B \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $X \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

matrice completa del sistema $(A \mid B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$

sistema incompatibile perché l'ultima equazione $0 = 1$ non è accettabile

esempio: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ → non ci sono soluzioni

Def. Dati $(A|B)$ e $(A'|B')$ due sistemi lineari qualsiasi nelle stesse incognite sono <u>equivalenti</u> quando hanno esattamente le stesse soluzioni

Operazioni elementari sulle eqz di $(A|B)$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \dots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_n \end{array}\right)$$

1) Scambio tra loro due eqz del sistema ⟺ scambio 2 righe della matrice completa

esempio $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right)$ $(A'|B') = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$ ⇒ $(A|B)$ equivalente a $(A'|B')$

2) Moltiplico un'eqz di $(A|B)$ per un coefficiente $k \in K$, $k \neq 0$

esempio: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right) \leftarrow -4$ $(A'|B') = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -8 & -8 & -4 \end{array}\right)$ ⇒ $(A'|B')$ è equivalente a $(A|B)$

3) Sommo ad un'eqz di $(A|B)$ un'altra eqz. del sistema moltiplicando per $k \in K$, $k \neq 0$.

esempio $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right)$ → $(1, 2, 3 | 0) + (-4)(1\ 2\ 2 | 1) = (-3\ -6\ -5 | -4)$

$(A'|B') = \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -6 & -5 & -4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right)$ questo sistema è equivalente a quello di partenza ma serve una dimostrazione

<u>Dim</u> $(A|B) = \left(\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \end{array}\right)$

$(A'|B') \leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + k(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n) = b_2 + kb_1 \end{cases}$ $R_2 \to R_2 + kR_1$

hp $(c_1, c_2, \dots c_n)$ soluzione di $(A|B)$

Sostituisco in $(A'|B')$

$\begin{cases} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \dots + a_{1n}c_n = b_1 & \text{OK} \\ (a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \dots) + k(a_{11}c_1 + \dots + a_{1n}c_n) = b_2 + kb_1 & \text{OK} \end{cases}$

⇒ le soluzioni di $(A|B)$ sono anche slz di $(A'|B')$

<u>Viceversa</u> <u>hp</u> $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ soluzione di $(A'|B')$

$\begin{cases} a_{11}k_1 + a_{12}k_2 + \dots a_{1n}k_n = b_1 & \text{OK} \\ (a_{21}k_1 + \dots + a_{2n}k_n) + \cancel{k}(\underbrace{\cancel{a_{11}k_1 + \dots + a_{1n}k_n}}_{b_1}) = b_2 + \cancel{kb_1} \end{cases}$

$\Rightarrow a_{21}k_1 + \dots + a_{2n}k_n = b_2$

7

1 aprile 2014

Esempio: $(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$ è compatibile?

Non è a scala. Cerco un sistema equivalente ridotto a scala con le operazioni elementari sulle righe di $(A|B)$

$R_2 \to R_3$ $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$ $R_3 \to R_3 - 2R_1$ $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) = (A'|B')$

qui il rango è 2, ma il rango della matrice completa è 3

$(A'|B')$ è incompatibile $\Leftrightarrow$ $(A|B)$ è incompatibile

Teorema Se $(A|B)$ è a scala e $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ ha tutti gli elementi della diagonale non nulli, allora $(A|B)$ è compatibile e ha 1 sola soluzione

Def. Data $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ a scala si dice <u>rango di A</u>, $rg(A)$ il numero delle righe non nulle di A

Esempio: $A = \begin{pmatrix} 0 & \boxed{2} & 3 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & \boxed{7} & 3 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{2} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 3 righe non nulle $\to$ rango$(A) = 3$

incognita a/p — incognita libera

R_1 e R_2 e R_3 sono le righe non nulle della matrice

$R_1 = (0, 2, 3, 0, 4, 6)$

$R_2 = (0, 0, 7, 3, 8, 1)$

$R_3 = (0, 0, 0, 0, 2, 4)$

$R_4 = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$ ...

Def Combinazione lineare di $R_1, R_2, \dots, R_n$ è l'espressione $a_1R_1 + a_2R_2 + \dots + a_nR_n$ con $a_i \in \mathbb{K}$

Esempio: ... una combinazione lineare di R_1, R_2, R_3: $a_1R_1 + a_2R_2 + a_3R_3 =$

$= (0, 2a_1, 3a_1, 0, 4a_1, 6a_1) + (0, 0, 7a_2, 3a_2, 8a_2, a_2) + (0, 0, 0, 0, 2a_3, 4a_3) =$

$= (0, 2a_1, 3a_1 + 7a_2, 3a_2, 4a_1 + 8a_2 + 2a_3, 6a_1 + a_2 + 4a_3)$ ...

Def. $R_1, R_2, \dots, R_n$ sono <u>LINEARMENTE DIPENDENTI</u> se uno di essi si può esprimere come combinazione lineare degli altri $\Leftrightarrow$ esistono coefficienti non tutti nulli tali che $a_1R_1 + a_2R_2 + \dots + a_nR_n = (0, 0, \dots, 0)$

Def. $R_1, R_2, \dots, R_n$ sono <u>LINEARMENTE INDIPENDENTI</u> se nessuno di essi è combinazione lineare degli altri $\Leftrightarrow$ $a_1R_1 + a_2R_2 + \dots + a_nR_n = (0, 0, \dots, 0)$ solo per $a_1 = a_2 = a_n = 0$

Esempio: ... $(0, 2a_1, 3a_1 + 7a_2, 3a_2, 4a_1 + 8a_2 + 2a_3, 6a_1 + a_2 + 4a_3) = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$

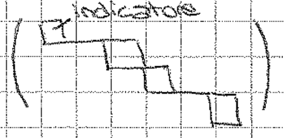
$$\begin{cases} 0 = 0 & \text{ok} \\ 2a_1 = 0 & a_1 = 0 \\ 3a_1 + 7a_2 = 0 & a_2 = 0 \\ 3a_2 = 0 & a_2 = 0 \\ 4a_1 + 8a_2 + 2a_3 = 0 & a_3 = 0 \\ 6a_1 + a_2 + 4a_3 = 0 & a_3 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = 0 \end{cases}$$ l'unica soluzione è quella banale

$\to$ R_1, R_2, R_3 sono linearmente indipendenti

5 aprile 2011

Data una matrice a scala

Prop.: 1) le righe non nulle sono lin. indip.
2) le colonne prive di indicatore sono lin. dipendenti da quelle che precedono



$\in \mathbb{K}^{m,n}$

3) le colonne con indicatore sono lin. indip.

Da 2) e 3) si deduce:

c_j senza indicatore $\rightarrow c_j = a_1 c_1 + a_2 c_2 + \dots + a_{j-1} c_{j-1}$

$a_1 c_1 + a_2 c_2 + \dots + a_{j-1} c_{j-1} - c_j = \mathbf{0}$ che è una matrice colonna con tutti zeri $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{m,1}$

I coefficienti sono $(a_1, a_2, \dots, a_{j-1}, -1) \rightarrow$ non sono tutti nulli

$a_1 c_1 + a_2 c_2 + \dots + a_{j-1} c_{j-1} - c_j + 0\, c_{j+1} + \dots + 0\, c_n = \mathbf{0}$

È una combinazione lineare di tutte le colonne della M a coefficienti: $(a_1, a_2, \dots, a_{j-1}, -1, 0, \dots, 0)$

Penso al sistema omogeneo $MX = 0$
$x_1 c_1 + x_2 c_2 + \dots + x_j c_j + \dots + x_n c_n = 0$

Interpretazione: una soluzione $(a_1, a_2, \dots a_n)$ di $MX=0$ è una n-upla di numeri tali che $a_1 c_1 + \dots + a_n c_n = 0$
Nelle nostre ipotesi una soluzione di $MX=0$ è $(a_1, a_2, \dots, a_{j-1}, -1, 0, \dots, 0)$

Data una matrice $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ qualsiasi, M e $M' \in \mathbb{K}^{m,n}$ siano due riduzioni a scala di A
I sistemi omogenei $AX = 0$, $MX = 0$, $M'X = 0$ sono equivalenti.
$\Rightarrow$ passando da M a M' non cambia la posizione degli indicatore
$\Rightarrow$ il numero degli indicatori è lo stesso in M e M'

Def.: Rango di una matrice ridotta a scala $\rightarrow$ numero righe non nulle = num. indicatori

$rg(M) = rg(M')$

$\Rightarrow$ Def. Si dice rango di A qualunque, il rango di una qualunque matrice M a scala, dedotta da A con operazioni elementari sulle righe.

Esempio: $(A|B) =$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -t & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1-t & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \in \mathbb{R}^{3,5}$$

Discutere la risolubilità al variare di t; se possibile, trovare le soluzioni.

t parametro reale

Riduco a scala $\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{2} & 1 & -t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1+t} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{array}\right)$ Caso $1+t \neq 0$ $rg(A) = 3$ $rg(A|B) = 3$

caso $t \neq -1$ risolvo $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - tx_3 + x_4 = 0 \\ (1+t)x_3 = 1 \\ x_4 = 1 \end{cases}$ $\begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{2}\left(-x_2 - 1 + \frac{t}{1+t}\right) \\ x_3 = \frac{1}{(1+t)} \\ x_4 = 1 \end{array}$ 9

$\rightarrow$ le soluzioni sono $\infty^1 \rightarrow \left(\frac{1}{2}\left(-x_2 - 1 + \frac{t}{t+1}\right), x_2, \frac{1}{1+t}, 1\right)$

Dato $AX=B$ sistema qualsiasi

Def: $AX=0$ sistema omogeneo associato a $AX=B$

Se conosco una soluzione particolare del sistema $AX=B$ posso costruire tutte le altre soluzioni risolvendo il sistema omogeneo associato

Sia $\bar{T} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ tale che $A\bar{T}=B$ la soluzione particolare

$A\bar{T} + A\bar{Y} = A(\bar{T}+\bar{Y}) = B+0 = B \Rightarrow \bar{T}+\bar{Y}$ è soluzione di $AX=B$

6 aprile 2011

esempio: $(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 0 & -3 \end{array}\right)$ Discuti risolubilità, trova le soluzioni e la relazione con le slz di $(A|0)$

Riduco a scala:

$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & 0 & -3 \end{array}\right)$ $R_2 \to 2R_2$

$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & -2 & 0 & -3 \end{array}\right)$ $R_2 \to R_2 - R_1$

$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{2} & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & \boxed{3} & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ $R_3 \to R_3 + R_2$

$rg(A|B) = 2 = rg(A)$ per il teorema di R.C. $\Rightarrow (A|B)$ compatibile

le soluzioni sono $\infty^{4-2} = \infty^2 \to$ dipendono da due parametri liberi

$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_4 = -1 \\ 3x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x_1 + \frac{2}{3}x_3 - \cancel{1} + 2x_4 = -\cancel{1} \to x_1 = -\frac{1}{3}x_3 - x_4 \\ x_2 = \frac{1}{3}(3 - 2x_3) = 1 - \frac{2}{3}x_3 \end{cases}$

$\to \left(-\frac{x_3}{3} - x_4;\ 1 - \frac{2}{3}x_3;\ x_3,\ x_4\right)$

si può non riportarla

Considero $(A|0) \to \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{2} & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \boxed{3} & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

soluzioni $\left(-\frac{x_3}{3} - x_4,\ -\frac{2}{3}x_3,\ x_3,\ x_4\right)$

La relazione tra le soluzioni è che sommandole ottengo un'altra slz di $AX=B$

$\left(-\frac{x_3}{3} - x_4,\ -\frac{2}{3}x_3 + 1,\ x_3,\ x_4\right) = \left(-\frac{x_4}{3} - x_4,\ -\frac{2}{3}x_3,\ x_3,\ x_4\right) + (0,1,0,0)$

$(0,1,0,0)$ dev'essere un'altra slz, infatti andando a sostituire soddisfa le eq.

Teorema di Cramer

Dato un sistema lineare a incognite scalari $(A|B)$ suppongo che $A \in K^{n,n}$ (quadrata) e che sia ~~qpa~~ invertibile

$AX = B \quad \exists!\, A^{-1} \quad A^{-1}(AX) = A^{-1}B$ ma con la proprietà

$$(A^{-1}A)X = A^{-1}B$$
$$IX = A^{-1}B$$
$$X = A^{-1}B$$

Esempio: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ Risolvere $AX = B$ dove $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Le due righe non devono essere proporzionali, così ho il rango max.

$\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d} \iff (c,d) \neq k(a,b) \iff ad - bc \neq 0 \iff$ determinante di $A \neq 0$

Cramer: $(A|B) = \left(\begin{array}{cc|c} a & b & b_1 \\ c & d & b_2 \end{array}\right)$ riduco a scala $\rightarrow$ $R_2 \rightarrow aR_2$, $R_1 \rightarrow cR_1$ $\rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} ac & bc & cb_1 \\ ac & ad & ab_2 \end{array}\right)$

$R_2 \rightarrow R_2 - R_1 \quad \left(\begin{array}{cc|c} ac & bc & cb_1 \\ 0 & ad-bc & ab_2 - cb_1 \end{array}\right)$

$$\begin{cases} ac\,x_1 + bc\,x_2 = cb_1 \\ (ad-bc)\,x_2 = ab_2 - cb_1 \end{cases} \qquad x_2 = \frac{b_2 a - b_1 c}{ad - bc} = \frac{\det\begin{pmatrix} a & b_1 \\ c & b_2 \end{pmatrix}}{\det(A)}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{ac}(cb_1 - bc\,x_2) = \frac{1}{a\cancel{c}}\left(\cancel{c}b_1 - b\cancel{c}\,\frac{\det\begin{pmatrix} a & b_1 \\ c & b_2 \end{pmatrix}}{\det(A)}\right) = \frac{1}{a}\left(\frac{(ad-\cancel{bc})b_1 - b(b_2 a - \cancel{b_1 c})}{(ad-bc)}\right) \\ x_2 = \frac{\det\begin{pmatrix} a & b_1 \\ c & b_2 \end{pmatrix}}{\det(A)} \end{cases}$$

$$= \frac{1}{\cancel{a}}\,\frac{\cancel{a}db_1 - \cancel{a}bb_2}{ad - bc} = \frac{\det\begin{pmatrix} b_1 & b \\ b_2 & d \end{pmatrix}}{\det(A)}$$

Spazi vettoriali $\mathbb{R}^n$

Esempi: 1) vettori dello spazio (e del piano) rispetto a un sistema di riferimento

$\vec{v} = (a_1, a_2, a_3)$

$\vec{w} = (a_1, a_2)$

2) matrice riga $(a_1, a_2 \ldots a_n) \in \mathbb{R}^{1,n}$, matrice colonna $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n,1}$

Def.: Spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n = \{(a_1, a_2, \ldots a_n),\ a_i \in \mathbb{R}\}$ n-uple ordinate di numeri reali si dicono vettori

- somma $(a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$
- prodotto per un numero reale $k(a_1, a_2 \ldots a_n) = (ka_1, ka_2, \ldots, ka_n)$

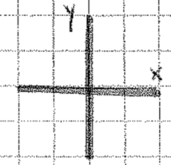
con le seguenti proprietà:

1) $\forall \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n \quad \vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$
2) $\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^n, \quad \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$
3) $\exists \vec{0} = (0, \ldots, 0)$ tale che $\forall \vec{v}$, $\vec{0} + \vec{v} = \vec{v}$
4) $\forall \vec{v} \neq \vec{0}$, $\exists -\vec{v}$, $\vec{v} + (-\vec{v}) = 0$
5) $\forall k, l \in \mathbb{R} \quad k(l\vec{v}) = (kl)\vec{v}$
6) $1\vec{v} = \vec{v}$
7) $(l + k)\vec{v} = l\vec{v} + k\vec{v}$
8) $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$

11

Non faccio l'altra verifica $\rightarrow$ U non è sottospazio vettoriale

$xy = 0 \iff$ $x=0$ oppure $y=0$



Sono gli assi

③ $T = \{(x,y) \mid x \geq 0,\ y \geq 0\}$ T è sottospazio di $\mathbb{R}^2$?

① $T \neq \emptyset$ per es. $(3,4) \in T$

② $\vec{v}_1 = (x_1, y_1) \in T$

$\vec{v}_2 = (x_2, y_2) \in T$

$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2) \in T$

③ $\vec{v} = (x, y)$

$k\vec{v} = (kx, ky) \notin T$ in generale

basta scegliere $k<0$

Come si costruiscono i sottospazi? $\mathbb{R}^n$, fisso $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \dots \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$

fisso $a_1, a_2 \dots a_k \in \mathbb{R}$

$a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \dots + a_k\vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$ <u>combinazione lineare</u> di $\vec{v}_1, \dots \vec{v}_k$

<u>Def</u>: $\mathcal{L}(\vec{v}_1, \vec{v}_2 \dots \vec{v}_k) = \{$tutte le comb. lineari di $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \dots \vec{v}_k\}$ è il sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ <u>generato</u> da $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \dots \vec{v}_k$

<u>Prop</u>: $\mathcal{L}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots \vec{v}_k)$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$

<u>Dim</u>: ① per es. $v_1 \in \mathcal{L} \rightarrow 1\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + \dots + 0\vec{v}_k$

② $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathcal{L}$

$\vec{v}_1 = a_1\vec{v}_1 + \dots + a_k\vec{v}_k$

$\vec{v}_2 = b_1\vec{v}_1 + \dots + b_k\vec{v}_k$

$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (a_1 + b_1)\vec{v}_1 + (a_2 + b_2)\vec{v}_2 + (a_k + b_k)\vec{v}_n$ (si può fare perché siamo in $\mathbb{R}^n$)

e questo $\in \mathcal{L}$ perché è una comb. lineare

③ $\vec{v}_1 = a_1\vec{v}_1 + \dots + a_k\vec{v}_k$, $k \in \mathbb{R}$

$kv_1 = (ka_1)\vec{v}_1 + \dots + (ka_k)\vec{v}_k$ e $\in \mathcal{L}$ perché è una comb. lineare

Esempio: $\mathbb{R}^5$, $\vec{v}_1 = (1,2,3,4,5)$

$\vec{v}_2 = (1,0,-1,0,-1)$

$\mathcal{L}(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \{a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2,\ \forall a_1, a_2 \in \mathbb{R}\} = \{(a_1 + a_2,\ 2a_1,\ 3a_1 - a_2,\ 4a_1,\ 5a_1 - a_2)\}$

Esempio: Data $M \in \mathbb{R}^{m,n}$ penso a $Mx = 0$ sistema lineare omogeneo nelle incognite $x_1, x_2, \dots x_n$

L'insieme S delle soluzioni di $Mx = 0$ è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$

① $S \neq \emptyset$ perché c'è almeno la sol banale

② $\bar{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ $\bar{y} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in S \Rightarrow \bar{x} + \bar{y} \in S$

③ $\bar{x} \in S, \forall k \in \mathbb{R} \Rightarrow k\bar{x} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ \vdots \\ ka_n \end{pmatrix} \in S$ infatti $M(k\bar{x}) = k(M\bar{x}) = k[0] = 0$

$\Rightarrow k\bar{x} \in S$

Esempio: $\{M \in \mathbb{R}^{m,n}\} = V$

$V = \{M \in \mathbb{R}^{3,2}\}$ $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \longleftrightarrow (a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, a_{31}, a_{32})$

corrispondenza biunivoca $\mathbb{R}^{3,2} \leftrightarrow \mathbb{R}^6$

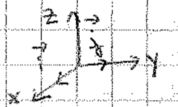
$$M + M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} \end{pmatrix} \longleftrightarrow (a_{11}+b_{11},\ a_{12}+b_{12}, \dots a_{32}+b_{32})$$

Esempio:

1) $\mathbb{R}^3$, $(\vec{i}, \vec{j}) = \mathcal{B}$ Voglio verificare che $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ sono base di un
$(\vec{i}, \vec{i}+\vec{j}) = \mathcal{B}'$ sottospazio di $\mathbb{R}^3$ (quale?)

$\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ è ordinato, $\mathcal{L}(\vec{i}, \vec{j})$ di cui $\vec{i}$ e $\vec{j}$ sono generatori
$\vec{i}$ e $\vec{j}$ sono lin. indip.? Sì, perché sono i versori dell'asse x e y

$a\vec{i} + b\vec{j} = 0$
$a(1,0,0) + b(0,1,0) = 0$
$(a, b, 0) = 0 \iff$ a e b sono zero



Quindi ho verificato che $\mathcal{B}$ è una base di un sottospazio di $\mathbb{R}^3$, cioè il piano xy.

$\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ è base di $\mathcal{L}(\vec{i}, \vec{j})$ = piano(xy) $\leftrightarrow \mathbb{R}^2$

$\mathcal{B}' = (\vec{i}, \vec{i}+\vec{j})$ è base di $\mathcal{L}(\vec{i}, \vec{i}+\vec{j})$?
- $(\vec{i}, \vec{i}+\vec{j})$ sono generatori di $\mathcal{L}(\vec{i}, \vec{i}+\vec{j})$
- sono l.i.? $a\vec{i} + b(\vec{i}+\vec{j}) = \vec{0}$
$a(1,0,0) + b[(1,0,0) + (0,1,0)] = \vec{0}$
$(a,0,0) + (b,b,0) = 0$
$(a+b, b, 0) = 0$

$\begin{cases} a+b=0 \\ b=0 \\ 0=0 \end{cases} \to b=0,\ a=0 \to$ sono l.i.

$\Rightarrow \mathcal{B}'$ è una base di un sottospazio di $\mathbb{R}^3$, cioè il piano xy
$\mathcal{L}(\vec{i}, \vec{i}+\vec{j}) = \mathcal{L}(\vec{i}+\vec{j})$

Esempio: Una base di $\mathbb{R}^n$ è per esempio $\mathcal{B} = ((1,0,\dots,0),(0,1,0,\dots,0) \dots (0,\dots,0,1))$ insieme di n vettori
Sono le righe di $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$. Si dice base canonica di $\mathbb{R}^n$.

Verifico
1) generatori:
$\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{v} = (x_1, x_2, \dots x_n) = x_1(1,0,\dots,0) + x_2(0,1,0\dots0) + \dots + x_n(0,\dots,0,1)$
2) ok perché sono le righe non nulle di I_n che è ridotta a scala

Teorema Data $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \dots \vec{v}_k)$ base del sottospazio $V \subseteq \mathbb{R}^n$, ogni vettore $\vec{v} \in V$ si esprime in modo unico come comb. lineare dei vettori di $\mathcal{B}$

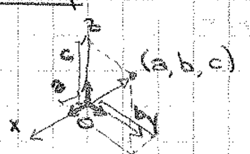
Dim: Suppongo $\vec{v} \in V$, $\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \dots + a_k\vec{v}_k = b_1\vec{v}_1 + b_2\vec{v}_2 + \dots + b_k\vec{v}_k$

$\vec{0} = \vec{v} - \vec{v} = (a_1 - b_1)\vec{v}_1 + (a_2 - b_2)\vec{v}_2 + \dots + (a_k - b_k)\vec{v}_k$

Siccome $\vec{v}_1, \dots \vec{v}_k$ sono l.i. $\Rightarrow a_1 - b_1 = 0, \dots, a_k - b_k = 0 \Rightarrow a_1 = b_1 \dots a_k = b_k$
I coeff. dei due modi di esprimere $\vec{v}$ devono essere gli stessi.

13 aprile 2011

Esempi



$\mathbb{R}^3$ Identifico punti con vettori applicati nell'origine
C'è una base privilegiata di $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$
$\to \mathcal{B} = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$
BASE CANONICA

$\Rightarrow (a,b,c) = a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1)$

Per il teorema a, b, c sono univocamente determinati

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 27 di 139

Costruisco $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{k1} & \dots & & a_{kn} \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \\ \vdots \\ \vec{v}_k \end{matrix}$ $\quad M \in \mathbb{R}^{k,n}$

V coincide con lo spazio delle righe di M, $R(M)$
Le operazioni elementari sulle righe non cambiano lo spazio delle righe, $R(M)$.
Riduco M a scala e ottengo M'

$M' = \begin{pmatrix} & & \\ 0 & & \\ 0 & & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$ $\quad rg(M)$ = numero di righe non nulle = numero di righe l.i.
$\rightarrow$ base di ~~R(M)~~ V = R(M)

Es: $V = \mathcal{L}((1,2,0,1),(2,4,0,1),(0,1,2,3),(1,1,2,0),(3,5,2,1))$.
sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato da 5 vettori

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{-1} & 2 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{4} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad rg(M) = 4$$

Una base di V è $\mathcal{B}$ = {righe non nulle di M'}

Teorema $V \subseteq \mathbb{R}^n$ sottospazio $\Rightarrow$ una base di V ha al più n elementi

Dim: $V = \{\vec{0}\}$ non esiste una base
$V \neq \{\vec{0}\} \rightarrow$ sicuramente esiste $\vec{v}_1 \in V, \vec{v}_1 \neq \vec{0}$

$\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \dots)$

- se $V = \mathcal{L}(\vec{v}_1)$, $\mathcal{B} = (\vec{v}_1)$
- se $V \neq \mathcal{L}(\vec{v}_1)$, $\exists \vec{v}_2 \overset{\neq 0}{\in} V$, $\vec{v}_2 \neq k\vec{v}_1 \Rightarrow \mathcal{B} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$

alla fine il procedimento termina perché è come se stessi costruendo una matrice con n colonne e non so quante righe. Se riduciamo a scala, il numero di righe $\underbrace{\text{l.i.}}_{\text{non nulle}}$ è = al numero di colonne con indicatore $\rightarrow$ sono al più n.
Il numero di righe non nulle non può essere > numero di colonne

Corollario Ogni base $V \subseteq \mathbb{R}^n$ sottospazio non nullo ha lo stesso numero di elementi

Def. si dice dimensione di V il numero degli elementi di una sua base.

Dim: Per assurdo suppongo $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \dots \vec{v}_k)$ e $\mathcal{B}' = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m)$ $\quad k < m$
basi diverse di V.
Costruisco M e M' inserendo i vettori dati nelle righe

$$M = \begin{pmatrix} - v_1 - \\ - v_2 - \\ \vdots \\ - v_k - \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k,n} \qquad M' = \begin{pmatrix} - v_1 - \\ - v_2 - \\ \vdots \\ - v_m - \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m,n}$$

Inserisco in M delle righe nulle in modo da avere m righe. M e M' hanno lo stesso spazio delle righe.
Faccio le operazioni elementari su M e M' che hanno lo stesso spazio delle righe e sono ridotte a scala.

Sottospazi di $\mathbb{R}^3$

$\{\vec{0}\}$	dim 0
rette per O	dim 1
piani per O	dim 2
$\mathbb{R}^3$	dim 3

Esempi

2) $V = \mathbb{R}^{2,3}$ $\quad M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \leftrightarrow (a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}) \in \mathbb{R}^6$

Cerco una base e penso alla base canonica di $\mathbb{R}^6$.

$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^6} = ((1,0,0,0,0,0), (0,1,0,0,0,0) \ldots (0,0,0,0,0,1))$

$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^{2,3}} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$

$\Rightarrow \dim \mathbb{R}^{2,3} = 6$

3) Trovare base e dimensione di $\mathcal{L}((1,2,1,0),(0,1,2,0),(1,3,3,0),(1,4,5,0)) \in \mathbb{R}^4$
Adopero il metodo di riduzione

$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix} \quad R(M) = \mathcal{L}(\_\_)$

Riduco a scala: $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ una base di $\mathcal{L}$ è $((1,2,1,0), (0,1,2,0))$

Questa è una possibile ~~dim~~ soluzione. Ma tutte le slz sono accomunate dal rango, cioè dal numero di righe non nulle, cioè dalla DIMENSIONE
Si potrebbe anche lavorare sulle colonne: nella matrice ridotta a scala il numero degli indicatori = numero righe non nulle = numero colonne lin. indip. = rango
Se interessa la dimensione posso considerare sia le righe sia le colonne.
Se interessa una base devo considerare le righe non nulle

Alternativa

$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ matrice trasposta di $M = {}^tM$

So che $rg(C) = rg(M) = \dim(\mathcal{L})$. Se riduco a scala trovo sempre il rango corretto, ma le righe non nulle non indicano la base. Bisognerebbe ridurre a scala per colonne

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 31 di 139

Si tratta di un sistema lineare omogeneo: 3 eqz e 4 incognite

$$\begin{pmatrix} +2 & -1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +2 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{2} & -1 & 0 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \infty^2 \text{ slz}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} x_1 = -2x_4 - x_3 \\ x_2 = -2x_3 \end{matrix} \quad \to (-x_3 - 2x_4; -2x_3, x_3, x_4)$$

Def: Si dice nucleo di f_A, $\ker f_A = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^n \mid f_A(\vec{v}) = \vec{0}_{\mathbb{R}^m}\}$

Es: $\ker f_A = \{(-x_3 - 2x_4, -2x_3, x_3, x_4)\} \ \forall x_3, x_4 \in \mathbb{R}$ sottospazio vett. di $\mathbb{R}^n$

$\dim \ker f_A = 2 = n - rg(A)$

Una base di $\ker f_A$ è $((-1,-2,1,0),(-2,0,0,1))$

Def: Una funzione è iniettiva quando $\forall p_1, p_2 \in A$, $f(p_1) = f(p_2) \Leftrightarrow p_1 = p_2$

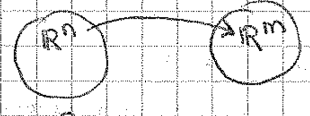
Teorema: $f_M: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è iniettiva $\Leftrightarrow \ker f_M = \{\vec{0}\}$

Dim: 1) hp: $\ker f_M = \{0\}$

Supponiamo per assurdo che esistano $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ distinti con la stessa immagine
$\to \vec{v}_1 \neq \vec{v}_2$ con $f_M(\vec{v}_1) = f_M(\vec{v}_2) \to f_M(\vec{v}_1) - f_M(\vec{v}_2) = 0 \to f_M(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = 0$ per linearità
Per def di nucleo $\vec{v}_1 - \vec{v}_2 \in \ker f_M$, ma il nucleo è fatto dal solo vettore nullo
$\to \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = 0 \to \vec{v}_1 = \vec{v}_2$

2) Viceversa hp: f_M iniettiva: $\forall \vec{v}_1, \vec{v}_2, f_M(\vec{v}_1) = f_M(\vec{v}_2) \Rightarrow \vec{v}_1 = \vec{v}_2$
$f_M(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = \vec{0}$ vuol dire $\vec{v}_1 - \vec{v}_2 \in \ker f_M$. Questo implica $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 \to \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{0}$
In $\ker f_M$ c'è solo il vettore nullo.

Def: Data $f_M: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ si dice immagine di f_M $\operatorname{Im} f_M = \{\vec{w} \in \mathbb{R}^m \mid \exists \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ con $f_M(\vec{v}) = \vec{w}\} \subseteq \mathbb{R}^m$



Es: $\operatorname{Im} f_A = \{\vec{w} \in \mathbb{R}^3 \mid \exists \vec{v} \in \mathbb{R}^4$ con $A\vec{v} = \vec{w}\}$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Osservazione
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$B_{canonica} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$$

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{4} x_i e_i$$

Inoltre $f_A(e_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \ldots$

$\forall i = 1,2,3,4$, $f_A(\vec{e}_i) = i$-esima colonna di $A = C_i$

16

20 aprile 2014

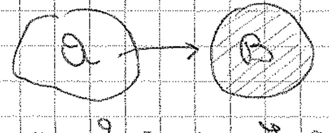
Riassunto

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,4}$

$f_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ appl. lineare $\qquad \ker f_A = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^4 \mid f_A(\vec{v}) = \vec{0}\}$

$\forall \vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix} ; f_A(\vec{v}) = A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix} \qquad \operatorname{Im} f_A = \{\vec{w} \in \mathbb{R}^3 \mid \exists \vec{v} \in \mathbb{R}^4, f_A(\vec{v}) = \vec{w}\}$

Def: $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ funzione suriettiva tra gli insiemi $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ se $\operatorname{Im} f = \mathcal{B}$



f_A è suriettiva? So che $\operatorname{Im} f_A = \mathcal{L}(c_1, c_2, c_3, c_4) = C(A)$

$\dim \operatorname{Im} f_A = \dim C(A) = rg(A) = 2 < 3! \Rightarrow \operatorname{Im} f_A \subsetneq \mathbb{R}^3$

$\to f_A$ non è suriettiva

$A \in \mathbb{R}^{m,n}, \; f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$\left.\begin{array}{l} \dim \operatorname{Im} f_A = rg(A) \\ \dim \ker f_A = n - rg(A) \end{array}\right\} \dim \operatorname{Im} f_A + \dim \ker f_A = n$ dim dello spazio di partenza

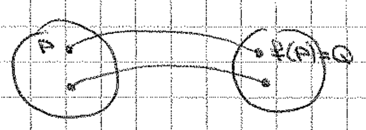
f_A è iniettiva $\Leftrightarrow \ker f_A = \{\vec{0}\} \Leftrightarrow \dim \ker f_A = 0$

f_A iniettiva $\Rightarrow \dim \operatorname{Im} f_A = n$

f_A suriettiva $\Rightarrow \dim \operatorname{Im} f_A = m \Rightarrow \dim \ker f_A = n - m$

f_A iniettiva + suriettiva $\Leftrightarrow f_A$ biiettiva $\Rightarrow m = n$

$f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ biiettiva tra insiemi



$\mathcal{A} \xrightarrow{f} \mathcal{B} \xrightarrow{f^{-1}} \mathcal{A}$ $\qquad f^{-1}$: funzione inversa di f (ma anche controimmagine)

$P \to f(P) = Q \qquad f^{-1}(Q) = \{$controimmagini di $Q\} = P$

Es (che non c'entra): date f e g definite da $f(x,y) = (2x+y, y, 0)$ e $g(u,v,t) = (u+2v, -u+t)$. Scrivere la matrice associata all'appl. lin. $g \circ f$

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \qquad f = f_A$ dove $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$f(x,y) = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$

$g(u,v,t) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \qquad g = g_B, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to g(u,v,t) = B\begin{pmatrix} u \\ v \\ t \end{pmatrix}$

Sono riuscita ad esprimere il risultato come $f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} + f\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix}$ → ho verificato la ①

Verifico la ②:

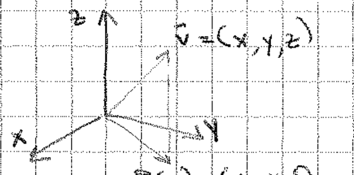
$$f\left[k\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\right] = f\begin{bmatrix}kx_1\\kx_2\\kx_3\end{bmatrix} = \begin{pmatrix}4kx_1+kx_3\\2kx_2+kx_3\end{pmatrix} = k\begin{pmatrix}4x_1+x_3\\2x_2+x_3\end{pmatrix} \rightarrow \text{ho verificato la ②}$$

$$\left.\begin{array}{l} f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix} \\ f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} \\ f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \end{array}\right\} M = \begin{pmatrix}4 & 0 & 1\\0 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

29 aprile 2011

Esempi:

1) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da proiezione ortogonale sul piano (xy). Trovare la matrice associata a f rispetto a $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$



$$\begin{array}{l} f(\vec{i}) = f(1,0,0) = (1,0,0) \\ f(\vec{j}) = f(0,1,0) = (0,1,0) \\ f(\vec{k}) = f(0,0,1) = (0,0,0) \end{array} \Rightarrow M = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Non è iniettiva perché il nucleo è fatto da tutti i vettori dell'asse z. Posso capirlo dal disegno o risolvendo il sistema lineare omogeneo così ottengo $(0,0,z)\ \forall z \in \mathbb{R} \rightarrow \ker f = \{(0,0,z)\}$ ∞^1 vettori.

È suriettiva? No perché l'immagine va a riempire solo il piano xy → $\operatorname{Im} f \subsetneq \mathbb{R}^3$ ($\operatorname{Im} f = \{$spazio delle colonne di $M\}$). Oppure potevo dire: $\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = n = 3$, $\dim \ker f = 1 \rightarrow \dim \operatorname{Im} f = 2 < 3$

2) $M = \begin{pmatrix}1 & -1 & m\\0 & m & -1\\-1 & 1 & 1+m\end{pmatrix}$ Per quali $m \in \mathbb{R}$ f_M è suriettiva, è un isomorfismo? $f_M^{-1}(0,0,-1)$ al variare di $m \in \mathbb{R}$?

$f_M\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\quad f_M(\vec{v}) = M\vec{v}$

f_M suriettiva $\Leftrightarrow \dim \operatorname{Im} f_M = 3$ ma $\dim \operatorname{Im} f_M = \operatorname{rg} M = ?$

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & m\\0 & m & -1\\-1 & 1 & 1+m\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -1 & m\\0 & m & -1\\0 & 0 & 1+2m\end{pmatrix}$$

se $m = 0$ $\operatorname{rg}_M = 2$
se $m = -\frac{1}{2}$ $\operatorname{rg}_M = 2$
se $m \neq 0, m \neq -\frac{1}{2}$ $\operatorname{rg}_M = 3 \rightarrow f_M$ SURIETTIVA

f_M è un ISOMORFISMO $\Leftrightarrow f_M$ è biettiva $\Leftrightarrow n = m \Leftrightarrow m \neq 0, -\frac{1}{2}$

$\underbrace{\dim \operatorname{Im} f_M}_{3} + \underbrace{\dim \ker f_M}_{0} = 3 \rightarrow$ è anche iniettiva

$f_M^{-1}(0,0,-1) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & m & 0\\0 & m & -1 & 0\\-1 & 1 & 1+m & -1\end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & m & 0\\0 & m & -1 & 0\\0 & 0 & 1+2m & -1\end{array}\right)$ se $m=0$ o $m = -\frac{1}{2}$ il sistema è incompatibile cioè non esistono controimmagini...

$Mv = \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$ $\quad v = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

sistema lineare nelle incognite x, y, z

... Altrimenti il sistema è risolto, $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A|B) = 3 \rightarrow$ ci sono ∞^0 sol, cioè 1 sol
→ c'è una sola controimmagine

② $\vec{v}_1 \_\_ \vec{v}_k$ sono lin. indip. quando $a_1\vec{v}_1 + \_\_ + a_k\vec{v}_k = \vec{0} \Leftrightarrow a_1 = a_2 = \_\_ = 0$

3 maggio 2011

Def. $U \subseteq V$ si dice **sottospazio** quando
① $U \neq \emptyset$
② $\vec{u}, \vec{v} \in U \Rightarrow \vec{u}+\vec{v} \in U$
③ $k \in \mathbb{K}, \vec{u} \in U \Rightarrow k\vec{u} \in U$

$\boxed{\text{Prop}}$ Dati $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m \in V$, $U = \mathcal{L}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m)$ è un sottospazio di V

Def. $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r)$ (insieme ordinato) si dice base del sottospazio $U \subseteq V$ quando
① $v_1, \dots, v_r$ lin. indip.
② " sono generatori di U, cioè $U = \mathcal{L}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r)$

Esempi

① $V = \mathbb{R}^{2,2}$, $\mathbb{R}$-spazio vettoriale
$S \subset V$; $S = \{M \in \mathbb{R}^{2,2} \mid {}^tM = M\}$ significa $a_{12} = a_{21}$

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ matrici simmetriche

(a) Voglio provare che è sottospazio di V
(b) Voglio trovare una base di S

(a) ① S non è vuoto; $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \in S$

② $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{12}+b_{12} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix} \in S$

③ $k\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{12} & ka_{22} \end{pmatrix} \in S$

S è un sottospazio

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in S \rightarrow$ primo elemento della base

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin S$ $\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in S$ ed è lin. indip. dalla precedente $\rightarrow$ secondo elemento della base

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \notin S$ $\quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in S$ ed è l.i. dalle precedenti $\rightarrow$ terzo elemento della base

Verifica

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = \underbrace{a_{11}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{22}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathcal{B}}$$

dim V = 3

Esempio:

$f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^{2,2}$

$(a_1, a_2, a_3, a_4) \longmapsto \begin{pmatrix} a_1+1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{pmatrix}$ è lineare? NO!

Data $f: U \to V$ appl. lineare tra $\mathbb{K}$ spazi vett.:

Def: Im f, Ker f, f iniettiva, f suriettiva, insieme delle controimmagini, f biiettiva, inversa di f

Esempio:

$D: \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ definita da $p(x) \longmapsto Dp(x) = p'(x)$
Verifico che D è lineare

① $D(p_1(x) + p_2(x)) = D(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3) =$
$= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + b_1 + 2b_2 x + 3b_3 x^2$ //
$D(p_1(x)) + D(p_2(x)) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + b_1 + 2b_2 x + 3b_3 x^2$

② $D(kp_1(x)) = ka_1 + 2ka_2 x + 3ka_3 x^2 = kD(p_1(x))$

$\Rightarrow$ D è lineare

matrice di D rispetto a $\mathcal{B} = (1, x, x^2, x^3)$

$$M_{\mathcal{B}} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ D(1) & D(x) & D(x^2) & D(x^3) \end{matrix} \end{array} \in \mathbb{R}^{4,4}$$

in componenti rispetto alla base data

$D(x) = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3$
$D(x^2) = 0 \cdot 1 + 2 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3$
$D(x^3) = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 3 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3$

4 maggio 2011

V $\mathbb{K}$-spazio vettoriale
$\mathcal{B}_V = (\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n)$ assegnata
Definisco $f: \mathbb{K}^n \to V$ applicazione lineare così:
$(a_1, a_2, \dots, a_n) \longmapsto (a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + \dots + a_n\bar{v}_n)$
$a_i \in \mathbb{K}$
È facile verificare che f è lineare
f è iniettiva, suriettiva?

1) $\operatorname{Ker} f = \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n \mid \underbrace{f(a_1, \dots, a_n) = \bar{0}_V}_{a_1\bar{v}_1 + \dots + a_n\bar{v}_n = \bar{0}_V}\} \Leftrightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Ker} f = (0, \dots, 0)$

$\Rightarrow$ f è INIETTIVA

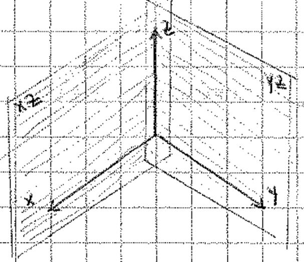
2) generico vettore di V è $\bar{v} = a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + \dots + a_n\bar{v}_n$ per def. di base

$\Rightarrow \bar{v} = f(a_1, \dots, a_n)$ per def di f $\to$ f è SURIETTIVA

$\Rightarrow f$ è un ISOMORFISMO $\Rightarrow \mathbb{K}^n \cong V$ ma dipende dalla base

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 41 di 139

Esempio $V = \mathbb{R}^3$ $U = \{(x,y,z) \mid x=0\}$ $W = \{(x,y,z) \mid y=0\}$



$U \cap W = \{(x,y,z) \mid x=0, y=0\}$ asse z

Dimostro che è un sottospazio:

① $U \cap W \neq \emptyset$ perché almeno $\{\vec{0}\} \in U, \in W$

② $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in U \cap W$

$\vec{v}_1 \in U, \vec{v}_2 \in U \Rightarrow \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \in U$
$\vec{v}_1 \in W, \vec{v}_2 \in W \Rightarrow \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \in W$ $\Rightarrow \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \in U \cap W$

③ $\vec{v}_1 \in U \cap V$ $\vec{v}_1 \in U$ $k\vec{v}_1 \in U$ $\Rightarrow k\vec{v}_1 \in U \cap W$
$\vec{v}_1 \in W$ $k\vec{v}_2 \in W$

$U \cup W$ è sottospazio? In generale no

Esempio $V = \mathbb{R}^3$ come prima
Non è un sottospazio, perché è evidente che non è chiuso rispetto alla somma.

Ci sono dei casi in cui $U \cup W$ è sottospazio: $U \subseteq W \Rightarrow U \cup W = W$ $\vee$ $W \subseteq U \Rightarrow U \cup W = U$

Def: Sottospazio SOMMA di U e W
$U + W = \{\vec{v} \in V \mid v = \vec{u} + \vec{w}$ al variare di $\vec{u} \in U$ e $\vec{w} \in W\}$
Dim: ... (è un sottospazio) ...

Osservazione $U + W$ è il minimo sottospazio che contiene $U \cup W$

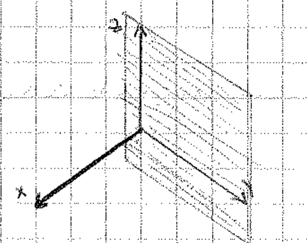
Esempio $V = \mathbb{R}^3$ $\dim(U \cap W) = 1$ $\dim(U + W) = 3$
$\dim U = 2$, $\dim W = 2$
$\dim U + \dim W = \dim(U \cap W) + \dim(U + W)$

Teorema V $\mathbb{K}$-spazio vett. di dimensione finita, U, W sottospazio allora vale la Formula di GRASSMAN: $\dim U + \dim W = \dim(U \cap W) + \dim(U + W)$

Caso particolare di $U + W$

Def $U + W$ si dice somma diretta quando $U \cap W = \{\vec{0}\}$

Esempio: nell'esempio di prima non ho una somma diretta
Considero $V = \mathbb{R}^3$ $U = \{(x,y,z) \mid x=0\}$ $\Rightarrow$ piano yz $W = \{(x,y,z) \mid y=0, z=0\}$ $\Rightarrow$ asse x



$U + W = \{(x,y,z) \mid (x,y,z) = (0,y,z) + (x,0,0)\} = \mathbb{R}^3$

ma $U \cap W = \{(0,0,0)\} \Rightarrow U + W$ SOMMA DIRETTA $\Rightarrow U \oplus W$

Formula di Grassman: $\dim U + \dim W = 0 + \dim(U + W)$

Teorema Se $U + V = U \oplus W$ allora ogni vettore $\vec{v} \in U \oplus W$ si scrive in modo unico come $\vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$, $\vec{u} \in U$, $\vec{w} \in W$
Dim: per assurdo suppongo di avere $\vec{v} = \vec{u} + \vec{w} = \vec{u}' + \vec{w}'$
$v - v = \vec{0} = (\vec{u} + \vec{w}) - (\vec{u}' + \vec{w}') \rightarrow \vec{0} = \underbrace{(\vec{u} - \vec{u}')}_{\in U} + \underbrace{(\vec{w} - \vec{w}')}_{\in W}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 43 di 139

Esempio: Trovare le componenti di $\vec{v} = (3,1)$ rispetto a B' (con i dati di prima)

$X = PX'$ ma non mi serve

$P^{-1}X = X'$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{cases} x_1 = (-1/2, 1) \\ x_2 = (1/2, 0) \end{cases} \rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}+1 \\ 3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

Dato anche W $\mathbb{K}$-spazio vett. e $f: V \to W$ lineare,
data B_W e B'_W,
sia M_f la matrice associata a f rispetto a B_V e B_W
sia M'_f la matrice associata a f rispetto a B'_V e B'_W
Voglio mettere in relazione M e M'.

$\forall \vec{v} \in V$, $\vec{v} = X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ rispetto a B_V

$f(\vec{v}) = M_f X \in W$

$\boxed{M_f X = Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ vettori immagine rispetto a B_W

Sia Q la matrice di passaggio tra B_W e B'_W e P la matrice di passaggio tra B_V e B'_V

$$\boxed{\begin{array}{ll} X = PX' & \text{in } V \\ Y = QY' & \text{in } W \end{array}}$$

So che $M'_f X' = Y'$ rispetto a B'_V e B'_W

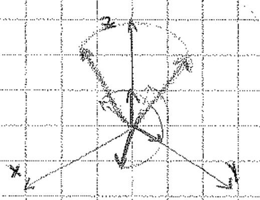
$$M_f X = Y \Rightarrow M_f PX' = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{matrice del cambio} \\ \text{di base} \rightarrow \text{invertibile}}}{Q}Y' \Rightarrow Q^{-1}M_f PX' = Q^{-1}QY' \Rightarrow \boxed{(Q^{-1}M_f P)X' = Y'}$$

Allora $M'_f = Q^{-1}M_f P$

Corollario: se ho un endomorfismo $f: V \to V$ e ho M_f matrice associata a f rispetto a B_V, se P è matrice di passaggio tra B_V e B'_V, la matrice di f rispetto a B'_V è $M'_f = P^{-1}M_f P$

Considero $f: V \to V$, V $\mathbb{R}$-spazio vettoriale

$V = \mathbb{R}^3$ $f: V \to V$ definito da rotazione dei vettori attorno all'asse z di $\pi/2$



$B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$
$f(\vec{i}) = -\vec{i}$
$f(\vec{j}) = -\vec{j}$
$f(\vec{k}) = \vec{k}$

$$M_f = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\exists$ vettori $\vec{v}$ tali che $f(\vec{v})$ ha la stessa direzione
$\exists$ vettori $\vec{v}$ tali che $f(\vec{v})$ ha direzione diversa

Osservazione: tutti i vettori non nulli sull'asse y (0, y) sono autovettori con autovalore 0.

Se $f: V \to V$, $V_k = \{\vec{v} \in V \mid f(\vec{v}) = k\vec{v}\} \subseteq V$, $k \in \mathbb{K}$

$V_k = \{$autovettori relativi a $k\} \cup \{\vec{0}\}$

Prop. V_k è sottospazio di V e si dice autospazio relativo a k

(Nell'esempio di prima V_0 = vettori dell'asse y = Ker f
In generale V_0 = Ker f quando l'endomorfismo f non è iniettivo.
f iniettivo $\Rightarrow$ Ker $f = \{\vec{0}\}$)

Dim: ① V_k non è vuoto perchè $\{\vec{0}\} \in V_k$ per def.
② $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V_k \Rightarrow f(\vec{v}_1) = k(\vec{v}_1)$ e $f(\vec{v}_2) = k(\vec{v}_2)$
$\boxed{f(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = f(\vec{v}_1) + f(\vec{v}_2) = k(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)} \to \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \in V_k$ per def. di V_k

③ $v_1 \in V_k \Rightarrow f(\vec{v}_1) = k\vec{v}_1$
$\forall m \in \mathbb{K}$ $\boxed{f(m\vec{v}_1) = mf(\vec{v}_1) = mk\vec{v}_1 = (mk)\vec{v}_1 = k(m\vec{v}_1)} \to mv_1 \in V_k$ per def. di V_k

$\to V_k$ è sottospazio

Esempio (che non c'entra)
$V = C^\infty(\mathbb{R}) = \{$funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabili di qualsiasi ordine$\}$ è $\mathbb{R}$-spazio vett.
Definisco l'endomorfismo $V \to V$ definito da $D(f) = f' = \frac{df}{dx}$ $\forall f \in V$
Trovare $f \in V$, $f \neq 0$ (non identicamente nulla), tale che $f' = kf$
$f = e^{kx}$ autovettori di D

$f: V \to V$, V $\mathbb{K}$-spazio vett.

Teorema Suppongo che $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ autovalori di f distinti tra loro, allora autovettori relativi a $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sono tra loro lin. indip.
Dim: caso r = 2 : $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ relativi a $\lambda_1 \neq \lambda_2$ autovalori
$f(\vec{v}_1) = \lambda_1 \vec{v}_1$
$f(\vec{v}_2) = \lambda_2 \vec{v}_2$ voglio dimostrare che $\vec{v}_1$ è l.i. da $\vec{v}_2$ cioè $x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 = \vec{0} \Leftrightarrow x_1 = x_2 = 0$
$\to f(x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2) = f(\vec{0})$
$x_1 f(\vec{v}_1) + x_2 f(\vec{v}_2) = \vec{0}$
$x_1 \lambda_1 \vec{v}_1 + x_2 \lambda_2 \vec{v}_2 = 0$
$x_1 \lambda_2 \vec{v}_1 + x_2 \lambda_2 \vec{v}_2 = \lambda_2 \vec{0} = \vec{0}$ (moltiplico $x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 = \vec{0}$ per λ_2)
sottraggo $\to x_1\vec{v}_1(\lambda_1 - \lambda_2) = \vec{0} \Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow x_2\vec{v}_2 = \vec{0} \Rightarrow x_2 = 0$

V $\mathbb{R}$-spazio vettoriale, dim V = n, $\mathcal{B}_V = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$, $f: V \to V$ endomorfismo; metodo analitico per trovare autovalori e autovettori
$f \leftrightarrow M$
$\forall \vec{v} \in V$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ rispetto a $\mathcal{B}$

$f(\vec{v}) = M\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$\vec{v}$ è autovettore $\Leftrightarrow \vec{v} \neq \vec{0}$ e $f(\vec{v}) = k\vec{v} \to M\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

è un sistema lineare omogeneo di n eq.ni in n incognite $M\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - k\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

(a) $\ker f = \{(2y, y)\}\ \forall y \in \mathbb{R}$ è un sottospazio di $\dim = 1$

$y(2,1)$

$f(2,1) = (0,0) \rightarrow f(\bar{e}_2) + 2f(\bar{e}_1) = (0,0) = \vec{0}$

(b) $f(1,1) = 2(1,1) = (2,2)$

$f(\bar{e}_1) + f(\bar{e}_2) = (2,2) = 2(e_1) + 2(e_2)$

$$\begin{cases} f(\bar{e}_2) + 2f(\bar{e}_1) = 0 \\ f(\bar{e}_1) + f(\bar{e}_2) = 2\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 \end{cases} \quad \begin{cases} f(\bar{e}_2) = -2f(\bar{e}_1) \\ -f(e_1) = (2e_1 + 2e_2) \end{cases} \quad \begin{cases} f(e_2) = 4e_1 + 4e_2 \\ f(\bar{e}_1) = -2e_1 - 2e_2 \end{cases}$$

$$\rightarrow M = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} = (\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ v_1, v_2 devono essere autovettori

$v_1 = (1,1)$ autovettore con $\lambda = 2$

$v_2 = (2,1)$ autovettore con $\lambda = 0$ (quando l'endomorfismo non è iniettivo il Ker comprende gli autovettori con $\lambda = 0$)

Sono l.i., lo vedo, ma l'avrei saputo anche dal teorema di ieri perché i due autovalori sono distinti.

$$\begin{aligned} f(\bar{v}_1) &= (2,2) = 2\bar{v}_1 + 0\bar{v}_2 \\ f(\bar{v}_2) &= (0,0) = 0\bar{v}_1 + 0\bar{v}_2 \end{aligned} \quad \rightarrow D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per trovare una matrice diagonale la base dev'essere formata da autovettori.

La matrice diagonalizzante è $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$X = PX'$

$D = P^{-1}MP$

DETERMINANTI $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ quadrata

Se $n = 1$ $A = a$ $\qquad$ $n = 2$ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Def. $\det(A) = a$ $\qquad$ $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

$n = 3$
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$\forall n \quad \det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} (-1)^{\operatorname{sgn} \sigma}$$

S_n = permutazioni su n elementi sono $n!$

Teorema (di Laplace)

Prima di enunciarlo considero $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \\ \cdots & & & \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} \end{pmatrix}$

Def complemento algebrico di a_{ij} è $(-1)^{i+j} \cdot \det$(matrice che si ottiene cancellando l'i-esima riga e la j-esima colonna)

Ottengo una matrice che è sempre quadrata, ma ha una riga e una colonna in meno.

Es: $A = \begin{pmatrix} 1 & \cancel{0} & 3 \\ \cancel{2} & \cancel{3} & \cancel{0} \\ 0 & \cancel{1} & 1 \end{pmatrix}$ $\quad (-1)^{2+2} \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$ = complemento algebrico di a_{22}

A_{22}

autovettori

$\underline{\lambda=0}$ $V_0 = \ker f$

sistema omogeneo $\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} -2x_1+4x_2=0 \\ 0=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 2x_2 \\ 0=0 \end{cases}$

$V_0 = \{(2x_2, x_2)\} \ \forall x_2 \in \mathbb{R}$

$= \{(0,0)\} \cup \{\text{autovettori di } \lambda=0\}$

$\dim V_0 = 1 = n - rg(M) = 2-1=1$

$\underline{\lambda=2}$ $\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} 4x_2 = 4x_1 \\ -2x_1+2x_2=0 \end{cases}$ $\begin{matrix} x_1 = x_2 \\ x_1 = x_2 \end{matrix}$ $\rightarrow \{(x_2, x_2)\} = V_2 \ \forall x_2 \in \mathbb{R}$

$= \{(0,0)\} \cup \{\text{autovettori di } \lambda=2\}$

$\dim V_2 = 2 - rg(M-2I) = 2-1=1$

Osservo: $\lambda=0, \vec{v}_1 = (2,1) \in V_0$ $\quad \vec{v}_1, \vec{v}_2$ lin. indip.

$\lambda=2, \vec{v}_2 = (\pi,\pi) \in V_2$

$\mathcal{B}'_{\mathbb{R}^2} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2) \Rightarrow M_f^{\mathcal{B}',\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Esempio: $f: \underset{\mathcal{B}}{\mathbb{R}^3} \to \underset{\mathcal{B}}{\mathbb{R}^3}$ $\quad M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ Trovare autovalori e autovettori di f e dire se f è diagonalizzabile

$\det(M-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(\lambda^2 \cancel{+1}) = 0 \rightarrow \lambda=2$ (ci sarebbero $\lambda = \pm i$ ma stiamo lavorando su $\mathbb{R}$)

V_2 = soluzioni del sistema omogeneo $(M-2I)$

$(M-2I) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 = 2x_2 \end{cases}$ $\begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{matrix}$

$V_2 = \{(0,0,x_3)\} \ \forall x_3 \in \mathbb{R}$ $\quad \dim V_2 = 1$

$\exists$ una base di $\mathbb{R}^3$ fatta di autovettori di f? NO perché il max numero di vettori l.i. che riesco a trovare è $1 < 3 \rightarrow f$ non è diagonalizzabile, non è semplice

Ricordo: $f: V \to V$ si dice diagonalizzabile se $\exists\, \mathcal{B}_V$ formata da autovettori

Prop: V-$\mathbb{R}$ spazio vett, $\dim V = n$; se $\exists\, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ autovalori distinti di f allora esistono $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ autovettori di f relativi a $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ che sono l.i.
$\mathcal{B}_V = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n) \rightarrow f$ è semplice (diagonalizzabile)

$M_f^{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ $\quad \forall i = 1, \dots, n, \quad \dim V_{\lambda_i} = 1$

la matrice ha per diagonale gli n autovalori

11 maggio 2011

Esempio

$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$ è simmetrica

Voglio diagonalizzare M e trovare una base diagonalizzante.

$M = M_f^{\mathcal{B},\mathcal{B}}$, $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

Cerco autovalori e autovettori.

autovalori: $p(\lambda) = \det(M - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 = 4 + \lambda^2 - 4\lambda - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3$

$\lambda = 1$ radici distinte e reali $\to$ sono autovalori
$\lambda = 3$

Posso già dire che è diagonalizzabile perché $m(\lambda) = 1$ e $1 \leq \dim V_1 \leq molt(1)$
e $1 \leq \dim V_3 \leq molt(3) \to \dim V_1 = \dim V_3 = 1$

$V_1 \cap V_3 = \{\vec{0}\} \Rightarrow V_1 + V_3 = \mathbb{R}^2$ per la formula di Grassman

$\exists$ sicuramente una base di $\mathbb{R}_2$ formata da autovettori costruita così: $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} = \mathcal{B}_{V_1} \cup \mathcal{B}_{V_2}$

$V_1: \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad x = -y \to (-y, y) \to V_1 = \{(-y, y)\}\ \forall y \in \mathbb{R}$

Una base di V_1 è $(-1, 1)$

$V_3: \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad x = y \to (y, y) \to V_3 = \{(y, y)\}\ \forall y \in \mathbb{R}$

Una base di V_3 è $(1, 1)$

Quindi la base diagonalizzante è $((-1, 1), (1, 1))$

Una matrice diagonale per f è $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Osservo che $(-1, 1) \cdot (1, 1) = -1 + 1 = 0$ Quindi sono ortogonali tra loro
Posso perfezionare la domanda e chiedere di trovare una base diagonalizzante di $\mathbb{R}^2$ fatta da versori ortogonali

$\mathcal{B}'_{\mathbb{R}^2} = \left(\frac{(-1, 1)}{\sqrt{2}}, \frac{(1, 1)}{\sqrt{2}} \right)$ base ortonormale

$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = P^{-1} M P$ con $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$

! Attenzione all'ordine degli autovalori e all'ordine degli autovettori nella base !

Data $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Prop. Tutti gli autovalori sono reali.

Cerchiamo gli autovalori: $\det\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}^2 =$

$= a_{11}a_{22} - a_{11}\lambda - a_{22}\lambda + \lambda^2 - a_{12}^2 = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}^2$

Teorema: In $\mathbb{R}^n$ con prodotto scalare, data $S \in \mathbb{R}^{n,n}$ simmetrica, esiste una base ortonormale formata da autovettori di S.

Def: Una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^n$ è ortonormale quando i vettori di $\mathcal{B}$ sono versori a due a due ortogonali.

Def: $\vec{v}$ è un versore quando $\sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}} = 1$, $\|\vec{v}\| = 1$ (si parla di NORMA e non più di modulo)

Esempio: $S = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile? Si, simmetrica reale.
Trovare base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori e la matrice P.

autovalori: $p(\lambda) = (4-\lambda)((3-\lambda)^2 - 1) = (4-\lambda)(9+\lambda^2-6\lambda-1) = (4-\lambda)(\lambda^2-6\lambda+8) =$
$= (4-\lambda)(\lambda-4)(\lambda-2) = -(\lambda-4)^2(\lambda-2)$

$\lambda = 2$ $\quad m(2) = 1$ $\quad$ per il teorema $\dim V_2 = 1$ e $\dim V_4 = 2$
$\lambda = 4$ $\quad m(4) = 2$

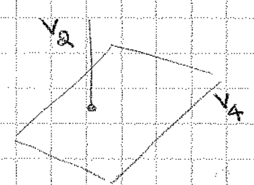
$V_2: \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{matrix} x = 0 \\ y = -z \end{matrix}$ $\rightarrow (0, -z, z) \rightarrow V_2 = \{(0, -z, z)\} \; \forall z \in \mathbb{R}$

$V_4: \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow (x, z, z) \rightarrow V_4 = \{(x, z, z)\} \; \forall x, z \in \mathbb{R}$

$\mathcal{B}_{V_2} = (\overbrace{(0, -1, 1)}^{\text{non è un versore}})$ $\quad \|(0,-1,1)\| = \sqrt{(0,-1,1)\cdot(0,-1,1)} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \rightarrow \mathcal{B}'_{V_2} = \left(\left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$

$\mathcal{B}_{V_4} = (\underbrace{(1,0,0)}_{\text{è un versore}}, \underbrace{(0,1,1)}_{\text{non è un versore}}) \rightarrow \mathcal{B}'_{V_4} = \left((1,0,0), \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$ base ortonormale di V_4

Una base ortonormale di $\mathbb{R}_3$ è $\left(\left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), (1,0,0), \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$



$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

18 maggio 2011

Teorema Data $M \in \mathbb{R}^{n,n}$ simmetrica e dato $\mathbb{R}^n$ con prodotto scalare

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (x_1 \dots x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

1. M è diagonalizzabile
2. $\exists$ base ortonormale $\left\{\begin{matrix} \text{vettori } \perp \\ \text{versori} \end{matrix}\right.$

$\Rightarrow D = P^{-1} M P$ diagonale dove P ha per colonne i vettori di $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$

Nell'es. $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} M P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

$\quad \downarrow \; \lambda = 2 \qquad \downarrow \; \lambda = 4 \qquad \downarrow \; \lambda = 4$

Nelle colonne di P trovo i vettori di una base ortonormale

$\det P = \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1 \Rightarrow$ è una matrice del tipo del 1° caso

Tutte le matrici di passaggio associate a rotazione di un angolo θ nel piano sono del tipo $P = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ e viceversa se $P = \begin{pmatrix} p & -r \\ r & p \end{pmatrix}$ P è la matrice di passaggio di una rotazione nel piano di un certo angolo.

Def: Una matrice ortogonale P si dice speciale se $\det P = 1$

In generale data $P \in \mathbb{R}^{n,n}$ ortogonale calcolo $\det P$
Teorema (di BINET): date $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
So che ${}^TPP = I$
$\underbrace{\det({}^TPP)} = \det(I) = 1$
$\det({}^TP) \cdot \det(P) = 1$; $\det({}^TP) = \det(P)$

$\rightarrow (\det(P))^2 = 1 \rightarrow \det(P) = \pm 1$

$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ appl. lineare
$m = 1$
$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad M_f \in \mathbb{R}^{1,n}$ $\quad M_f = (a_{11}\ a_{12}\ \dots\ a_{1n})$

$$f(x_1, \dots, x_n) = M_f \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n$$

Def: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si dice forma lineare

Def: $q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funzione che si dice forma quadratica se $q(x_1, x_2 \dots x_n) =$
$= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \dots$

Esempio $q: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$q(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

È individuata univocamente da $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$$q(x_1, x_2) = \underbrace{(x_1, x_2) A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{= {}^T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}} = (x_1, x_2)\left[A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right] = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix} =$$
$$= a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{11}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

Es: $n = 3$ $\quad q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$q(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 =$$
$$= {}^T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Per studiare le forme quadratiche (segno di $q(x_1, x_2)$ al variare di $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$) diagonalizzo la forma quadratica

Es. Studiare segno di $q(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xz + 2yz$ e trovarne una forma canonica

$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}a_{21}xy + 2a_{13}a_{31}xz + 2a_{23}a_{32}yz$

NB: Si dice forma canonica di una forma quadratica $q(x_1, \ldots, x_n)$ l'espressione $\lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} p(\lambda) &= (1-\lambda)((1-\lambda)(2-\lambda)-1) + 1(0-(1-\lambda)) = \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 1) + \lambda - 1 = \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + \cancel{1} - \cancel{1}) = (1-\lambda)\lambda(\lambda-3) \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 \\ \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_3 &= 3 \end{aligned}\right\} \; q(x,y,z) \text{ è SEMIDEFINITA POSITIVA}$$

Una forma canonica è $q(x,y,z) = X^2 + 0Y^2 + 3Z^2 = X^2 + 3Z^2$

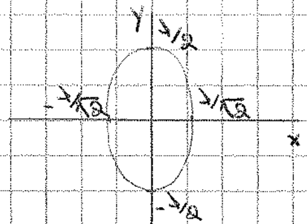
$q(x,y,z) = 0$ per $(0, Y, 0)$ $\forall Y \in \mathbb{R}$

Es.: Data $q(x,y) = 3x^2 + 2xy + 3y^2$ determinare i punti di $\mathbb{R}^2$ tali che $q(x,y) = 1$

La forma canonica di q è $q(x,y) = 2X^2 + 4Y^2$

Cerco i punti di coordinate (X,Y) tali che $2X^2 + 4Y^2 = 1$

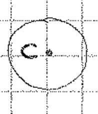
Si tratta di un'ellisse: $\dfrac{X^2}{1/2} + \dfrac{Y^2}{1/4} = 1$



CONICHE

- CIRCONFERENZA

Fissato $C(a,b)$, $r > 0$ è il luogo dei punti $P(x,y)$ del piano tali che $d(P,C) = r$
cioè $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$



$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ con x, y che hanno lo stesso coeff.

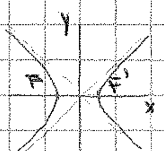
- ELLISSE

Fissati F e F' e un numero a, è il luogo dei punti del piano $P(x,y)$ tali che $d(P,F) + d(P,F') = 2a$

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ a, b semiassi

- IPERBOLE

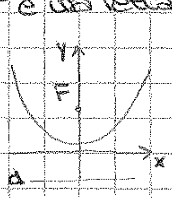
Fissati F e F', è il luogo dei punti $P(x,y)$ tali che $d(P,F) - d(P,F') = 2a$



$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

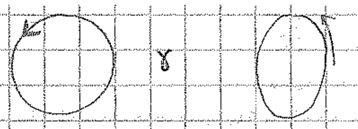
- PARABOLA

Fisso F e una retta d. Il luogo dei punti $P(x,y)$ tali che $d(P,F) = d(P,d)$



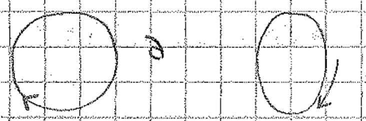
$x^2 = 2py$

Nel caso di γ per $t=0 \to \gamma(0)=(2,0)$
$t=\pi/2 \to \gamma(\pi/2)=(0,3)$
$t=\pi \to \gamma(\pi)=(-2,0)$



senso antiorario

Nel caso di ∂ per $t=0 \to \partial(0)=(2,0)$
$t=\pi/2 \to \partial(\pi/2)=(0,-3)$
$t=\pi \to \partial(\pi)=(-2,0)$



senso orario

C'è una differenza di orientamento

Def. Data $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ si dice sostegno di γ l'immagine $\gamma(t)$ al variare di $t\in[a,b]$
γ è la funzione $\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ detta parametrizzazione, t si dice parametro

Def. Data $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ $\lim_{t\to t_0 \in[a,b]}\gamma(t)=\vec{\ell}$ con $\vec{\ell}$ vettore di $\mathbb{R}^n$ $\Longleftrightarrow \lim_{t\to t_0}\underbrace{\|\gamma(t)-\vec{\ell}\|}_{\in\mathbb{R}}=0$

NB: $\|\vec{u}\|=\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}\geq 0$

Suppongo $\vec{\ell}=(\ell_1,\ell_2,\ell_3 \dots \ell_n)\in\mathbb{R}^n$

$\lim_{t\to t_0}\gamma(t)=\vec{\ell} \overset{*}{\Longleftrightarrow}$

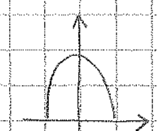
$*$ se $\gamma(t)=(x_1(t),x_2(t),\dots,x_n(t))$ allora $\forall i=1,\dots,n$ $\lim_{t\to t_0}x_i(t)=\ell_i$

Def. $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ si dice continua in $t_0\in[a,b]$ se $\forall i=1,\dots,n$, $x_i(t)$ è continua in t_0.
$x_i:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

Def. Si dice arco di curva continua in $\mathbb{R}^n$ una funzione $\gamma:I\to\mathbb{R}^n$, con $I\subseteq\mathbb{R}$ limitato e chiuso che sia continua.
L'arco si dice chiuso se dati $I=[a,b]$, $\gamma(a)=\gamma(b)$

Esempi: 1) l'ellisse $[0,2\pi]\xrightarrow{\gamma}(2\cos t, 3\sin t)$
$\gamma(0)=(2,0)$
$\gamma(2\pi)=(2,0)$ $\to$ chiuso

2) $[0,\pi]\to(2\cos t,3\sin t)$ non è chiuso



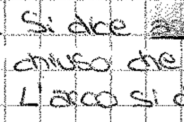
Def. Data $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ $\gamma'(t_0)=(x_1'(t_0),\dots,x_n'(t_0))$ con $x_i'(t_0)$ normale derivata.

Ripasso $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $t_0\in(a,b)$, $\lim_{h\to 0}\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}=f'(t_0)$

Esempi: 1) ellisse $[0,2\pi]\xrightarrow{\gamma}(2\cos t,3\sin t)$

$\gamma'(t)=(-2\sin t, 3\cos t)$ Qual è il significato geometrico?

(2)



segmento in $\mathbb{R}^n$
cerco rappr. parametrica dei punti del segmento

Se fossi in $\mathbb{R}^3$ mi serve un punto e un vettore parallelo
$\underset{\overrightarrow{OP}}{\downarrow}$ $\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}$ // retta

Eqz vettoriale: $\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OP}+(\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP})t$ con $t\in\mathbb{R}$

$\gamma(t)=\overrightarrow{OP}+(\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP})t$ $\quad\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ l'immagine è formata da tutti i punti della retta

Se cambio parametrizzazione $\delta(t) = (2\cos(-t), 3\sin(-t))$

$\delta'(t) = (2\sin(-t), -3\cos(-t)) = -\gamma'(t)$ rispetto a prima la direzione è la stessa, ma il verso è opposto.

La retta tg non dipende dalla parametrizzazione, mentre modulo e verso di $\gamma'(t)$ sì.

Esempi: $\gamma: [0,1] \to \mathbb{R}^3$

$\gamma(t) = (t, 2t, t^2)$ è regolare? Trovare retta tg in $\gamma(1/2)$

$\gamma'(t) = (1, 2, 2t) \ \forall t \neq \vec{0} \to$ è regolare

$\gamma'(1/2) = (1, 2, 1)$

retta tg = $\begin{cases} x = 1/2 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1/4 + t \end{cases}$

Il sostegno di γ è una curva piana.

Def: Una curva è piana se sta tutta in un piano. Per vedere se il sostegno è una curva piana considero il generico piano di $\mathbb{R}^3$ $ax + by + cz + d = 0$ e poi vi sostituisco le funzioni componenti. Cerco dei coefficienti a, b, c, d tali che l'espressione ottenuta valga $\forall t \in I$

$at + b(2t) + c(t^2) + d = 0$

$(a + 2b)t + ct^2 + d = 0$

$\begin{cases} a + 2b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} a = -2b \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases}$ $\to -2bx + by = 0 \to -2x + y = 0$

Ho trovato un preciso piano che contiene tutti i punti della curva sostegno.

Proprietà: Date $\gamma, \delta: I \to \mathbb{R}^n$ derivabili su I:

(1) $(\gamma + \delta)' = \gamma' + \delta'$

(2) $(k\gamma)' = k\gamma'$ $k \in \mathbb{R}$

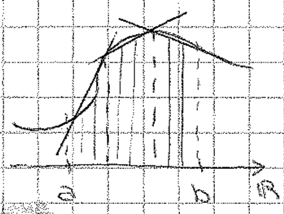
(3) data $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile $[\gamma(\varphi(t))]' = \gamma'(\varphi(t))\varphi'(t)$

(4) $(\gamma \cdot \delta)' = \gamma' \cdot \delta + \gamma \cdot \delta'$

Corollario: se $\gamma = \delta$ la (4) è $(\gamma \cdot \gamma)' = (\|\gamma\|^2)' = 2\gamma' \cdot \gamma$

se inoltre $\|\gamma\| =$ costante ottengo $(\|\gamma\|^2)' = \boxed{0 = 2\gamma' \cdot \gamma} \to \gamma \perp \gamma'$

Problema: trovare la lunghezza di un arco di curva regolare $\gamma: I \to \mathbb{R}^n$



Supponiamo che questo sia il sostegno

$\gamma: [a, b] \to \mathbb{R}^2$

Suddivido l'intervallo ab e considero una spezzata fatta da segmenti che uniscono le immagini dei punti della suddivisione. Aumentando le suddivisioni, migliora l'approssimazione. Al limite la secante diventa la tangente.

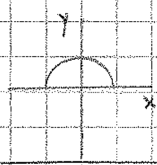
Def

Elemento d'arco $ds = \|\gamma'(t)\| dt$ o lunghezza d'arco elementare.

Def: La lunghezza d'arco di $\gamma: [a, b] \to \mathbb{R}^n$ (con γ regolare) è $L(\gamma, a, b) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$

Esempio: (1) $\gamma: [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$ $\gamma(t) = (3\cos t, 3\operatorname{sen} t)$

$\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 3\operatorname{sen} t \end{cases} \to x^2 + y^2 = 9$ è una semicirconferenza



Calcolo $L(\gamma, 0, \pi)$: $\gamma'(t) = (-3\operatorname{sen} t, 3\cos t)$, $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{9(\sin^2 t + \cos^2 t)} = 3$

Al variare di t la norma è costante

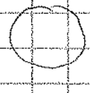
31

27 maggio 2014

$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$
$\gamma(t) = (R\cos t, R\sin t, t)$ elica cilindrica

ASCISSA CURVILINEA $\quad s(t) = \int_0^t \|\gamma'(\tau)\| d\tau$

Ripasso
$\gamma : \mathbb{R} \supseteq I \to \mathbb{R}^n$ funzione continua si dice curva se I intervallo aperto, arco di curva se $I = [a, b]$ limitato e chiuso

γ si dice regolare se è $C^1(I)$ e $\gamma'(t) \neq \vec{0}\ \forall t$
γ si dice semplice se è iniettiva $(t_1 \neq t_2 \Rightarrow \gamma(t_1) \neq \gamma(t_2))$
γ si dice chiusa se $\gamma(a) = \gamma(b)$ per $I = [a, b]$
γ può essere semplice e chiusa per esempio 

γ è regolare, lunghezza d'arco $L(\gamma, a, b) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$

La lunghezza non cambia se faccio un cambiamento di parametrizzazione da curva regolare a curva regolare (semplice)

Es $\gamma : [0, 2\pi] \to (R\cos t, R\sin t)$ sostegno = circonf. di centro O e raggio R
$L(\gamma, 0, 2\pi) = \int_0^{2\pi} R\,dt = 2\pi R$

$\gamma'(t) = (-R\sin t, R\cos t)$

Provo a cambiare parametrizz.: voglio lo stesso sostegno ma con un'espressione $\neq$

$\delta : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \quad \delta(t) = (R\cos(2t), R\sin(2t))$
Calcolo $L(\delta, 0, 2\pi) = \int_0^{2\pi} \sqrt{4R^2 \sin^2(2t) + 4R^2\cos^2(2t)}\, dt = 4R\pi$ è diverso da prima!!!
$\delta'(t) = (-2R\sin(2t), 2R\cos(2t))$

È percorsa due volte $\to$ δ non è semplice perché non iniettiva.

L'ascissa curvilinea nel caso dell'elica cilindrica è $\sqrt{R^2+1}\, t$ (trovata ieri)
In generale $s'(t) = \|\gamma'(t)\|$ sempre > 0. In particolare $\|\gamma'(t)\| \neq \vec{0}$ perché $\gamma'(t) \neq \vec{0}$ perché γ è regolare) $\Rightarrow s(t)$ è invertibile.
In questo caso $t = \frac{s}{\sqrt{R^2+1}}$
Cambio parametro

$$\gamma \begin{cases} x = R\cos\left(\frac{s}{\sqrt{R^2+1}}\right) \quad y = R\sin\left(\frac{s}{\sqrt{R^2+1}}\right) \quad z = \frac{s}{\sqrt{R^2+1}} \end{cases}$$

$$\gamma'(s) = \left(-R\sin\left(\frac{s}{\sqrt{R^2+1}}\right)\frac{1}{\sqrt{R^2+1}},\ R\cos\left(\frac{s}{\sqrt{R^2+1}}\right)\frac{1}{\sqrt{R^2+1}},\ \frac{1}{\sqrt{R^2+1}}\right)$$

$$\|\gamma'(s)\| = \sqrt{\frac{R^2}{R^2+1}\sin^2\left(\frac{s}{\sqrt{R^2+1}}\right) + \frac{R^2}{R^2+1}\cos^2\left(\frac{s}{\sqrt{R^2+1}}\right) + \frac{1}{R^2+1}} = 1$$

Quando l'arco di curva è riferito all'ascissa curvilinea $\|\gamma'(t)\| = 1$.

$L(\gamma(s), 0, t) = \int_0^t \|\gamma'(s)\| ds = \int_0^t ds = t$

32

(2) $\gamma: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (2 + 2\cos t, 1 + 2\sin t)$, $F(x,y) = (x-2)(y-1) + 1$, $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Calcolare $\int_\gamma F\,ds$

Cos'è il sostegno di γ? $\begin{cases} x = 2 + 2\cos t \\ y = 1 + 2\operatorname{sen} t \end{cases} \to (x-2)^2 + (y-1)^2 = 2^2$ circonf. di $R=2$ e $C=(2,1)$

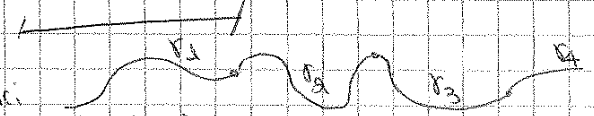
$\gamma'(t) = (-2\sin t, 2\cos t)$

$\|\gamma'(t)\| = 2$

$F(t) = F(2+2\cos t, 1+2\sin t) = (\cancel{2}+2\cos t - \cancel{2})(\cancel{1}+2\sin t - \cancel{1}) + 1 = 4\sin t\cos t + 1$

$\int_\gamma F\,ds = \int_0^{2\pi} (4\sin t\cos t + 1)2\,dt = \int_0^{2\pi} (2\operatorname{sen} 2t + 1)2\,dt = 2\Big[t - 2\cos(2t)\Big]_0^{2\pi} =$

$= 2\big[(2\pi + \cancel{2}) - (0 + \cancel{2})\big] = 4\pi$



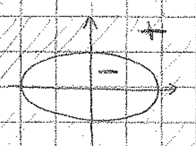
Dati tanti archi di curva regolari
e F definita almeno sui sostegni $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$
fare $\int_{\gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_4} F\,ds = \int_{\gamma_1} F\,ds + \dots + \int_{\gamma_4} F\,ds$

31 maggio 2011

<u>Esempi di funzioni</u>

$\gamma: \mathbb{R} \supseteq I \to \mathbb{R}^n$
$q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ forme quadratiche
$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ applicazioni lineari

$F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ in generale
F ha dominio $I = \operatorname{dom} F$ in $\mathbb{R}^n$
<u>Esempio</u>: $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definito da $F(x,y) = \log(x^2 + 4y^2 - 1)$ dom F?
$x^2 + 4y^2 - 1 > 0$ ma so che $x^2 + 4y^2 = 1$ è l'ellisse con $a = 1$, $b = 1/2$
Nell'origine ottengo un valore negativo → tutta la regione interna è negativa → al di fuori è positiva
→ dom F = {punti esterni all'ellisse in $\mathbb{R}^2$}



NB: Un teorema dice che una conica divide il piano in due regioni, una pos e una neg.

TOPOLOGIA IN $\mathbb{R}^n$
prodotto scalare euclideo canonico: $(x_1, \dots, x_n) \cdot (y_1, \dots, y_n) = (x_1, \dots, x_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$
$\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$

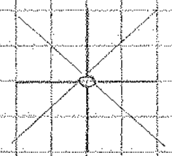
Def: Dati $P(x_1 \dots x_n)$, $Q(y_1 \dots y_n)$ punti di $\mathbb{R}^n$, $d(P,Q) = \|\vec{OQ} - \vec{OP}\|$

<u>Proprietà $\|\ \|$</u>
1) $\|\vec{v}\| \geq 0$, $\|\vec{v}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$
2) $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$
3) $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$
(valore assoluto)

Def: Dato $P_0 \in \mathbb{R}^n$, si dice INTORNO SFERICO di P_0 - $U(P_0, r)$ - di RAGGIO r
$\{(x_1 \dots x_n) = P \mid d(P, P_0) < r\}$

Es: $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $F(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$, dom $F = \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$. Calcolare $\lim_{P \to (0,0)} f(P)$

Restringo F alle rette per l'origine $y = mx$, $\forall m \in \mathbb{R}$



$$F(x,y)\Big|_{r: y=mx} = \frac{x^2 m}{x^2 + m^2 x^2} = \frac{m}{1+m^2}$$

$$\lim_{P \to (0,0)} F(x,y)\Big|_{y=mx} = \frac{m}{1+m^2} \Rightarrow \nexists \text{ limite perché cambiando restrizione cambia il limite}$$

Prop: $F: \mathbb{R}^n \supset \text{dom} F \to \mathbb{R}$. Se P_0 è punto di accumulazione di due sottoinsiemi, $U_1, U_2 \subseteq$ dom F e se $\lim_{P \to P_0} F(P)\Big|_{U_1} \neq \lim_{P \to P_0} F(P)\Big|_{U_2}$ allora $\nexists \lim_{P \to P_0} F(P)$.

Def: $F: \mathbb{R}^n \supseteq \text{dom} F \to \mathbb{R}$, $P_0 \in \text{dom} F$, F si dice continua in P_0 se $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tale che $\|P - P_0\| < \delta \Leftrightarrow |F(P) - F(P_0)| < \varepsilon$.

F continua in $P_0 \Leftrightarrow \lim_{P \to P_0} F(P) = F(P_0)$

Es: $F_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definita da $F_i(x_1, x_2, \dots x_n) = x_i$ funzione coordinata

È continua ovunque:

$P_0 = (a_1, a_2 \dots a_n) \in \mathbb{R}^n$, dimostro che F_i è continua in P_0

$|F_i(P) - F_i(P_0)| = |x_i - a_i| < \varepsilon = \delta$

$n=2$ $\|P - P_0\| = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2} < \delta = \varepsilon$

$\to$ In generale F_i è continua $\forall P_0 \in \mathbb{R}^n$

Teorema: Date $F, G: \mathbb{R}^n \supseteq I \to \mathbb{R}$ continue su I

(1) $F+G$ è continua

(2) KF " (K costante)

(3) FG "

(4) F/G $(G(P) \neq 0)$ è continua

Corollario: Le funzioni polinomiali sono continue

Es: $f(x,y,z) = xy + 4z$ è continua (sul dominio)

... le funzioni razionali sono continue

Es: $G(x,y) = \frac{2x}{x^2 + 4y^3}$ è continua (sul dominio)

Teorema: La composizione di funzioni continue è continua (sul dominio)

Es: $F(x,y) = \cos\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)$ continua su $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0) = $ dom

$(x,y) \mapsto \frac{xy}{x^2+y^2} = z \mapsto \cos z$

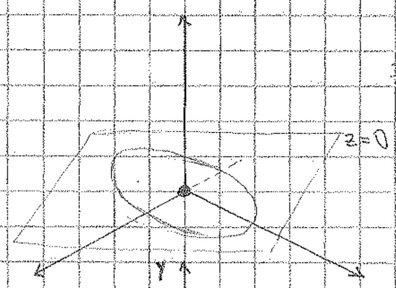
Es: $f(x,y) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$, $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\text{dom} f = \mathbb{R}^2$

$\boxed{\text{graf } f}$, insiemi di livello, sezioni con $x=0$, $y=0$

graf $f = \{(x,y,z) \mid z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}\}$ $\subseteq$ semispazio $z \geq 0$ perché ho somma di quadrati

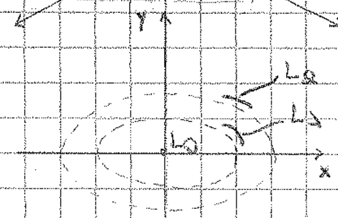
Le curve di livello per non essere vuote devono avere $z>0$ → positive

L_0: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 0$ → $(0,0)$

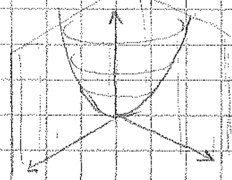


L_1: $\begin{cases} z = 1 \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \end{cases}$

L_2: $\begin{cases} z = 2 \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 2 \end{cases}$ → $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{18} = 1$

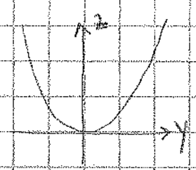


Quindi è una conca di questo tipo:

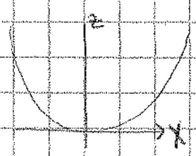


Vediamo il profilo:

$\begin{cases} z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \\ x = 0 \end{cases}$ → $z = \frac{y^2}{9}$



$\begin{cases} \text{"} \\ y = 0 \end{cases}$ → $z = \frac{x^2}{4}$



È un PARABOLOIDE ELLITTICO

Esercizio: Studiare con lo stesso proced. il grafico di $f(x,y) = \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}$

Derivate per $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$n=1$ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

x_0 interno a dom f

$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ derivabile se il lim $\exists$ ed è finito

$x = x_0 + h$ percorre la retta reale

$n>1$ i domini sono sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ nei quali mi posso muovere come voglio

$n=2$ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

esempio: $f(x,y) = x^3 y - x\sqrt{y}$ $\text{dom} f = \{(x,y) \mid y \geq 0\}$

pongo $y=2$ → $f(x,2) = 2x^3 - \sqrt{2}\,x$ funzione di 1 var. reale → posso derivare rispetto a questa:

$\frac{d\, f(x,2)}{dx} = 6x^2 - \sqrt{2}$ Ho ristretto f ai punti della retta $y=2$. Analogamente posso fare per la retta $x=3$

$f(3,y) = 27y - 3\sqrt{y}$ → $\frac{d(f(3,y))}{dy} = \ldots$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 71 di 139

Ripasso sulla derivabilità

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad dom\, f = I \subseteq \mathbb{R}$

f derivabile in $x_0 \in I \iff \exists f'(x_0)$ tale che $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) = 0$

$\iff \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - hf'(x_0)}{h} = 0$

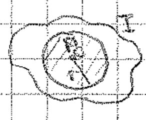
Osservazioni

(1) Considero la legge $h \longmapsto hf'(x_0)$ è una funzione $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Posso dire che è un'applicazione lineare

(2) $g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$ è la retta tangente a $y = f(x)$ in $(x_0, f(x_0))$

Estendo a $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, P_0 interno a $dom\, f$, f definita $\forall P$ tali che $\|P - P_0\| < r$



Def.: f si dice differenziabile se $\exists$ un'applicazione lineare $d_{P_0} f$ (differenziale): $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tale che $\forall \vec{h}$ (vettore) con $\|\vec{h}\| < r$ $[\vec{h} = \vec{OP} - \vec{OP_0}]$ si ha $f(P) = f(P_0) + d_{P_0} f(\vec{h}) + o(\|\vec{h}\|)$

$\|\vec{h}\| \to 0$ quando $P \to P_0$

Se f è differenziabile in P_0 allora $g(P) = f(P_0) + d f(\vec{h})$ approssima $f(P)$ a meno di infinitesimi di ordine superiore a $\|\vec{h}\| = \|\vec{OP} - \vec{OP_0}\|$. (PIANO TANGENTE)

Prop. Se f è differenziabile in P_0, f è continua in P_0

Prop. Se f ha in un intorno di P_0 tutte le derivate parziali continue allora f è differenziabile in P_0

Ma cos'è il DIFFERENZIALE? Scrivo $P = P_0 + \vec{h} = P_0 + t\vec{u}$ con $\vec{h} = t\vec{u}$ ($t \in \mathbb{R}$, vettore $\vec{u}$)

$f(P_0 + t\vec{u}) = f(P_0) + d_{P_0} f(t\vec{u}) + o(\|t\vec{u}\|)$

$f(P_0 + t\vec{u}) = f(P_0) + \underbrace{t\, d_{P_0} f(\vec{u})}_{\text{uso le regole delle appl. lineari}} + \|\vec{u}\| \varepsilon$ $\quad \varepsilon(\vec{h}) \to 0$

$\frac{f(P_0 + t\vec{u}) - f(P_0)}{t} = d_{P_0} f(\vec{u}) + \frac{t}{t} \|\vec{u}\| \varepsilon \to 0$

$\lim_{t \to 0} \frac{f(P_0 + t\vec{u}) - f(P_0)}{t} = d_{P_0} f(\vec{u})$

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ derivata secondo $\vec{u}$

Caso particolare: $\vec{u} = \vec{e}_i \in$ base canonica di $\mathbb{R}^n \to \lim_{t \to 0} \frac{f(P_0 + t\vec{e}_i) - f(P_0)}{t} = d_{P_0} f(\vec{e}_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(P_0)$

Riconsidero $\vec{u}$ vettore qualsiasi di $\mathbb{R}^n$. Posso esprimere $\vec{u}$ come $\vec{u} = u_1 \vec{e}_1 + \dots + u_n \vec{e}_n$

Inoltre $d_{P_0} f$ è appl. lineare per definizione.

$d_{P_0} f(\vec{u}) = u_1 d_{P_0} f(\vec{e}_1) + \dots + u_n d_{P_0} f(\vec{e}_n) = \underbrace{u_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(P_0) + \dots + u_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(P_0)}_{\text{combinaz. lin. delle der. parz.}} = \vec{u} \cdot \nabla_{P_0} f$

$d_{P_0} f(\vec{u}) = \vec{u} \cdot \nabla_{P_0} f$

prodotto scalare di $\vec{u}$ per il gradiente

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 73 di 139

Def: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ derivabile in P_0 tale che le derivate parziali prime siano derivabili, si dice matrice hessiana

$$H_{P_0} f = (h_{ij}) \quad \text{con } h_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(P_0)$$
$\in \mathbb{R}^{n,n}$

Es: $Hf = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2\cos(2y) \\ 2\cos(2y) & -4x\,\text{sen}(2y) \end{pmatrix}$

$P_0 = (2,0) \to H_{P_0} f = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

Teorema (di Schwarz) $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, se esistono in un intorno di P_0 le derivate parziali seconde e sono continue allora $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ $\quad i \neq j$

Corollario
Se valgono le ipotesi del teorema Hf è una matrice simmetrica.

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\quad P_0$ ipotesi del teorema di Schwarz
$f(P) = f(P_0) + d_{P_0} f(P-P_0) + \frac{1}{2!}(P-P_0)\cdot H_{P_0} f(P-P_0) + o(\|P-P_0\|^2)$ sviluppo di Taylor al secondo ordine in P_0 di f

Cosa significa $(P-P_0)\cdot H_{P_0} f(P-P_0)$?

$(P-P_0) = \begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ \vdots \\ x_n - a_n \end{pmatrix}$ $\quad \to (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n) \cdot \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1n} \\ h_{21} & & & h_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ h_{n1} & & \dots & h_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ \vdots \\ x_n - a_n \end{pmatrix} =$

$P_0(a_1, \dots, a_n)$

$= {}^T\begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ \vdots \\ x_n - a_n \end{pmatrix} H_{P_0} f \begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ \vdots \\ x_n - a_n \end{pmatrix}$ è una forma quadratica nelle variabili $(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$

Def: $T_{2,P_0} f(P) = f(P_0) + d_{P_0} f(P-P_0) + \frac{1}{2}(P-P_0)\cdot H_{P_0} f(P-P_0)$ si dice polinomio di Taylor del secondo ordine in P_0

Es: Trovare $T_{2,P_0} f$ in $P_0(2,0)$ per $f(x,y) = x\,\text{sen}(2y)$

$H_{P_0} f = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad P - P_0 = (x-2, y)$

$T_{2,P_0} f(P) = f(P_0) + d_{P_0} f(P-P_0)^{*} + \frac{1}{2}(P-P_0)\cdot H_{P_0} f(P-P_0)^{\bullet} =$

$= 0 + 4y + \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{4}^{2} y(x-2) = 4y + 2y(x-2)$

$*$ $f_x = \sin 2y \quad f_x(P_0) = 0$
$f_y = 2x\cos 2y \quad f_y(P_0) = 4$
$d_{P_0} f \leftrightarrow (0 \;\; 4)$
$d_{P_0} f(x-2, y-0) = (0 \;\; 4)(x-2 \;\; y) = 4y$

$\bullet$ $(x-2, y)\cdot\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-2 \\ y \end{pmatrix} = (x-2, y)\begin{pmatrix} 2y \\ 2(x-2) \end{pmatrix} = 2y(x-2) + 2y(x-2) =$
$= 2(x-2)(y+y) =$
$= 4y(x-2)$

37

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 75 di 139

8 giugno 2011

Esempio $f(x,y) = x^2 + 4y^2$ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ graf f: $z = f(x,y)$
Determinare gli eventuali punti stazionari e determinarne la natura

So già: (0,0) punto stazionario, in particolare punto di minimo.

(1) Cerco i punti P_0 tali che $\text{grad}_{P_0} f = \vec{0}$
$\text{grad} f = (f_x, f_y) = (2x, 8y)$
$\begin{cases} 2x = 0 \\ 8y = 0 \end{cases} \to P_0(0,0)$ è un punto stazionario

(2) Calcolo $H_{P_0} f = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}_{P_0} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$

$H_{P_0} f \begin{cases} \text{definita positiva} & \to P_0 \text{ MINIMO} \\ \text{definita negativa} & \to P_0 \text{ MASSIMO} \\ \text{indefinita} & \to P_0 \text{ SELLA} \end{cases}$

P_0 è minimo perché $H_{P_0} f$ è diagonale e sulla diagonale leggo gli autovalori che sono positivi.

Esempio $f(x,y) = x^2 - y^2$ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ graf f: $z = f(x,y)$
Determinare gli eventuali punti stazionari e determinarne la natura.

So già: (0,0) punto stazionario, in particolare punto di sella.

(1) $\text{grad} f = (f_x, f_y) = (2x, -2y)$
$\begin{cases} 2x = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \to P_0(0,0)$ è un punto stazionario

(2) $H_{P_0} f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

P_0 è un punto di sella perché la matrice è diagonale e leggo sulla diagonale gli autovalori che sono discordi, quindi $H_{P_0} f$ è indefinita.

In questo caso affinché i due autovalori siano discordi deve accadere che $\det H_{P_0} f < 0$. In questo caso $\det H_{P_0} f = -4$.

Nel caso di H_{P_0} definita positiva $\det H_{P_0} f = \lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$. Ciò accade se e solo se λ_1 e λ_2 sono concordi $\to$ f. q. può essere def. pos. o def. neg. Non posso stabilirlo a priori, quindi come si fa?

$\det H_{P_0} f = \det \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}_{P_0} = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2$

$\det(H_{P_0} f - \lambda I) = p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} f_{xx} - \lambda & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} - \lambda \end{pmatrix} = (f_{xx} - \lambda)(f_{yy} - \lambda) - f_{xy}^2 =$

$= -\lambda f_{xx} + f_{xx} f_{yy} - \lambda f_{yy} + \lambda^2 - f_{xy}^2 = \underset{+}{\lambda^2} - \lambda \underbrace{(f_{xx} + f_{yy})}_{\text{traccia di } H_{P_0} f \;\to\; ?} + \underbrace{f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2}_{\det H_{P_0} f \text{ (termine noto)} \;\to\; +}$

38

Si dimostra che $\exists\ R(O, x, y, z)$ tale che S ha equazione del tipo:

$$\left.\begin{aligned} &(1)\quad \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + \delta = 0 \\ &(2)\quad \alpha x^2 + \beta y^2 + 2\delta z = 0 \end{aligned}\right\} \text{ forme canoniche}$$

Def. Una quadrica si dice degenere se, messa in forma canonica, uno almeno dei coefficienti è nullo, cioè $\det B = 0$. Si dice non degenere se i coefficienti dell'equazione canonica sono tutti $\neq 0$, cioè $\det B \neq 0$.

- esempi di quadriche degeneri:

(a) $x^2 = 0$

$x = 0$ piano yz $\rightarrow x^2 = 0$ è un piano doppio (piano yz) coi punti contati 2 volte

(b) $(x-1)^2 = 0$ piano $x = 1$ coi punti contati 2 volte

(c) $x^2 - 1 = 0$

$(x-1)(x+1) = 0$ $\begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$ sono 2 piani paralleli

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$ $\det B = 0 \rightarrow$ quadrica degenere

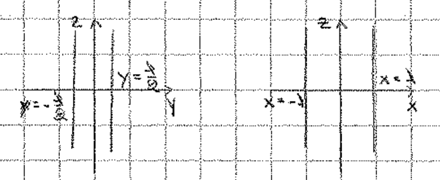
(d) $x^2 + 4y^2 - 1 = 0$ (in $\mathbb{R}^3$) cilindro quadrico ellittico

curve di livello: $\begin{cases} z = 0 \\ x^2 + 4y^2 - 1 = 0 \end{cases}$ Qualsiasi sia z, le curve di livello sono sempre le stesse, cioè l'ellisse $x^2 + 4y^2 = 1$.

$\begin{cases} z = 1 \\ x^2 + 4y^2 - 1 = 0 \end{cases}$

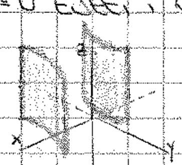
sezioni con gli assi: $\begin{cases} x = 0 \\ 4y^2 - 1 = 0 \end{cases}$ $y = \pm\frac{1}{2}$

$\begin{cases} y = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \end{cases}$ $x = \pm 1$

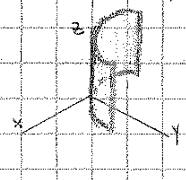


$\forall P_0(x_0, y_0)$ tale che $f(x_0, y_0) = 0$ tutti i $Q_0 = (x_0, y_0, t)$ $\forall t$ stanno sulla superficie $f(x, y) = 0$.

(e) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (in $\mathbb{R}^3$)



(f) $x^2 = y$ (in $\mathbb{R}^3$)



(g) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 0$ è l'origine $(0,0,0)$

(h) $x^2 + 2y^2 - 3z^2 = 0$ cono ellittico con vertice l'origine

39

② $\alpha x^2 + \beta y^2 + 2\delta z = 0$

Osservazione: C'è un autovalore nullo

(a) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$ paraboloide ellittico

$z = 0$ punto
$z > 0$ ellisse
$z < 0$ nulla

$\begin{cases} x = 0 \\ z = \frac{y^2}{b^2} \end{cases}$ $\begin{cases} y = 0 \\ z = \frac{x^2}{a^2} \end{cases}$

Caso particolare: se $a = b$ le sezioni $\begin{cases} z = k \geq 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = k \end{cases}$ sono circonferenze nel piano $z = k$ di centro $(0,0,k)$ e raggio $a\sqrt{k}$

(b) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$ paraboloide iperbolico o a sella

Non può essere di rotazione

$\begin{cases} x = 0 \\ z = -\frac{y^2}{b^2} \end{cases}$ $\begin{cases} y = 0 \\ z = \frac{x^2}{a^2} \end{cases}$

$\begin{cases} z = 0 \\ \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} z = 1 \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} z = -1 \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \end{cases}$

SFERE E CIRCONFERENZE

$S: (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ centro (a,b,c) e raggio R

Un piano, rispetto ad una sfera, può essere:
- $d(\pi, C) > R$ π è esterno ad S
- $d(\pi, C) = R$ π è tangente a S
- $d(\pi, C) < R$ π è secante S

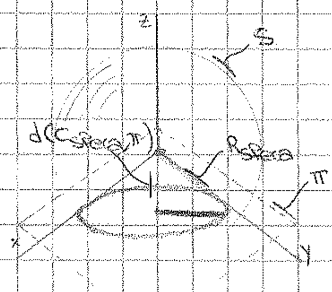
Una circonferenza è l'intersezione tra un piano π e una sfera S, quindi è rappresentata da due equazioni: $\begin{cases} \pi: \dots \\ S: \dots \end{cases}$

Esempio: Trovare centro e raggio della circonferenza $\begin{cases} z = -1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$

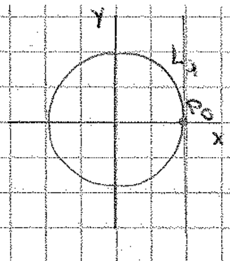
Il centro sta su π e sulla retta per il centro della sfera e $\perp$ a π.

$C_{circonferenza}(0,0,-1)$

$R_{circonferenza} = \sqrt{R^2_{sfera} - d(C_{sfera}, \pi)^2} = \sqrt{3}$



Esempio (stupido) $F(x,y) = x^2 + y^2$ $\quad F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$



$L_1 = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$

Prendo γ col sostegno coincidente con $L_1 \to \mathrm{Im}\,\gamma = L_1$
So che $\nabla F \perp \gamma'(t)$, $\forall$ punto di $\mathrm{Im}\,\gamma$.
Fisso $P_0 \in L_1$, $P_0 = (1,0)$

$\nabla_{P_0} F = (2x, 2y)_{P_0} = (2,0)$ è ortogonale al vettore tangente alla curva che abbiamo scelto coincidente con L_1.
Per trovare la retta tangente a L_1 in P_0:

$\begin{cases} x = 1 + \ell t \\ y = 0 + mt \end{cases}$ con $\vec{v}_r = (\ell, m) \perp \nabla_{P_0} F \to (\ell, m)\cdot(2,0) = 2\ell = 0 \to \ell = 0$, m qualsiasi

$\begin{cases} x = 1 \\ y = t \end{cases}$ l'equazione cartesiana è $x = 1$

Esempio $S: F(x,y,z) = 0$ $\quad S: x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 9$ centro $(0,0,1)$ e raggio 3
Trovare il piano tangente a S in $P_0(3,0,1)$

Il piano ha due condizioni:

- passa per P_0
- è ortogonale a $\overline{OP_0} - \overline{OC}$

$F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 9$
$S = L_0$ insieme di livello 0 di F
So che qualunque curva regolare dentro L_0, $\nabla_{P_0} F \perp \gamma'(t)$

$\nabla_{P_0} F \perp$ piano tangente a S in P_0

$\nabla F = (2x, 2y, 2(z-1))_{P_0} = (6,0,0) \to \pi: F_x(P_0)(x-3) + F_y(P_0)(y-0) + F_z(P_0)(z-1) =$

$= 6(x-3) + 0 + 0 = 0$

~~Questo metodo è molto utile per trovare piani tangenti a quadriche diverse da sfere.~~

In generale data superficie di eqz. cartesiana $F(x,y,z) = 0$ il piano tg alla superficie in un suo punto P_0 è $\pi: F_x(P_0)(x-x_0) + F_y(P_0)(y-y_0) + F_z(P_0)(z-z_0) = 0$ con $P_0(x_0, y_0, z_0)$. La condizione di esistenza è $\nabla_{P_0} F \neq \vec{0}$

Se la superficie è grafico di $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, la superficie ha eq.ne $z = f(x,y)$.
piano tg in $(x_0, y_0, f(x_0,y_0)) = Q_0$ è $z = T_{f,(x_0,y_0)}(P) = f(x_0,y_0) + \nabla_{(x_0,y_0)} f \cdot (P - P_0)$

Che relazione c'è tra questo risultato e quello precedente?
Chiamo $F = f(x,y) - z$, $\nabla F = (f_x, f_y, -1)$

$z = f(x,y)$ graf $f = S$
$\forall P \in S$, $P \equiv (x, y, f(x,y))$

In generale, data S superficie qualsiasi in $\mathbb{R}^3$ $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$

$\forall P \in S$, $P(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$
La superficie S è data in forma parametrica.

41

14 giugno 2011

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1 \dots x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$

$$Jf = \begin{pmatrix} \nabla f_1 \\ \vdots \\ \nabla f_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m,n}$$

Esempio 1) $m = 1$ $\quad f = f_1 \to Jf = \nabla f_1 = \nabla f$

2) $n = 1$, $\forall m$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ curva $\to Jf = \begin{pmatrix} \frac{df_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{df_m}{dt} \end{pmatrix}$ è il vettore tangente

$f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$

$f_i = f_i(t)$

Questi sono gli unici casi limite

3) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \qquad f(x,y,z) = (xyz, x^2 + y^2 + z^2)$

$$Jf = \begin{pmatrix} yz & xz & xy \\ 2x & 2y & 2z \end{pmatrix}$$

vettore $\in \mathbb{R}^n$ con norma infinitesima se $P \to P_0$

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ differenziabile in P_0 $\qquad f(P) = f(P_0) + J_{P_0} f(P - P_0) + o(\|P - P_0\|)$

Se esiste la matrice jacobiana vale questa relazione che permette di fare uno sviluppo di Taylor al 1° ordine di f.

Condizione sufficiente perché f sia differenziabile in P_0 è che se i coefficienti di Jf siano continui in P_0.

$\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m \xrightarrow{g} \mathbb{R}^k$

Suppongo f differenziabile in $P_0 \in \mathbb{R}^n \supseteq \operatorname{dom} f$

g differenziabile in $f(P_0) \in \operatorname{dom} g$

Voglio studiare $F = g \circ f$

→ Teorema $F = g \circ f$ è differenziabile in P_0 e $J_{P_0} F = J_{f(P_0)} g \, J_{P_0} f$

→ Esempio $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases} \qquad (\rho, \varphi) \longmapsto (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$

$g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da $z = g(x,y)$

Voglio studiare $F = g \circ f$ $\qquad$ $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R}$, F

Suppongo $P_0 (\rho_0, \varphi_0)$

$$J_{P_0} F = \nabla_{P_0} F = \left(\frac{\partial F}{\partial \rho}, \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right)_{(\rho_0, \varphi_0)}$$

$P_0(\rho_0, \varphi_0)$ per teorema

$$Jg = \nabla g = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y} \right) \qquad Jf = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$$

Rotazioni di φ nel piano $\leftrightarrow \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

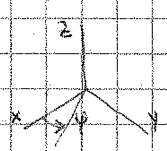
rotazione di un angolo φ attorno all'asse z di $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$\vec{i} \longmapsto (\cos\varphi, \text{sen}\,\varphi)$

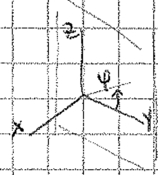
$\vec{j} \longmapsto (-\sin\varphi, \cos\varphi)$

$\vec{k} \longmapsto (0,0,1)$

La matrice che la caratterizza è $\boxed{\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$ asse z



rotazione attorno all'asse x di un angolo φ



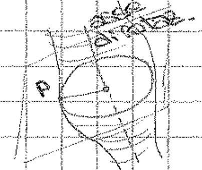
$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}}$ asse x

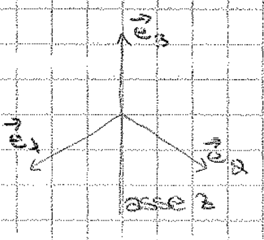
rotazione attorno all'asse y di φ $\boxed{\begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}}$ asse y

Sono matrici ortogonali e con det = 1 → sono ortogonali speciali

15 giugno 2011

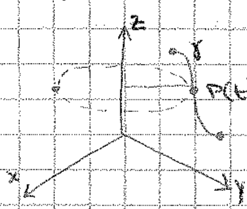
Rotazione in $\mathbb{R}^3$ attorno all'asse z





$$M = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Superficie di rotazione



$$\gamma : \begin{cases} x = 0 \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

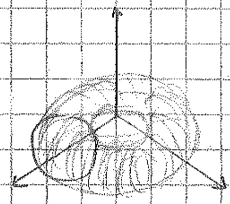
Il punto $P(t) = (0, y(t), z(t))$ $\forall t \in [a,b]$ si trasforma nella rotazione nel punto

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y(t)\sin\varphi \\ y(t)\cos\varphi \\ z(t) \end{pmatrix} \qquad \varphi \in [0, 2\pi)$$

La superficie è

$$\begin{cases} x = -y(t)\sin\varphi \\ y = y(t)\cos\varphi \\ z = z(t) \end{cases} \quad \forall t, \varphi \qquad \Leftrightarrow \quad F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

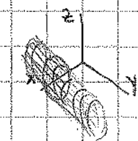
(4) $\gamma: \begin{cases} x = R + r\cos\theta \\ y = 0 \\ z = r\sin\theta \end{cases}$ $\theta \in [0, 2\pi)$ R, r costanti >0



$\begin{cases} x - R = r\cos\theta \\ y = 0 \\ z = r\sin\theta \end{cases}$ è una circonferenza

In forma cartesiana ottengo $\begin{cases} y = 0 \\ (x-R)^2 + z^2 = r^2 \end{cases}$ intersezione tra un piano e un cilindro

$(x-R)^2 + z^2 = r^2$ in $\mathbb{R}^3$
$P(x_0, y, z_0)$ tali che $(x_0 - R)^2 + z_0^2 = r^2$ $\forall y \in \mathbb{R}$
cilindro con generatrici // all'asse y



$\rightarrow$ circonf. $c(R, 0, 0)$ di raggio r

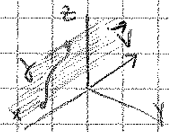
Se la si fa ruotare si ottiene un toro (o ciambella)

Non ci sono punti singolari

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R + r\cos\theta \\ 0 \\ r\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi(R + r\cos\theta) \\ \sin\varphi(R + r\cos\theta) \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$$

CILINDRI

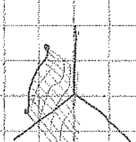
(5) $\gamma: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) = 0 \\ z = z(t) \end{cases}$



Voglio costruire il cilindro con direttrice γ e generatrici // $\vec{v}$

- Se $\vec{v}$ // asse y

$S: \begin{cases} x = x(t) \\ y = 0 + s \\ z = z(t) \end{cases}$

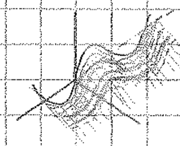


basta far variare s

- Se $\vec{v}$ // asse y e $\gamma: \begin{cases} y = 0 \\ f(x, z) = 0 \end{cases}$ allora

$S: f(x, z) = 0$ basta non esprimere y

Es. $S: z - \sin x = 0$



- Se $\vec{v} = (\ell, m, n)$

$S: \begin{cases} x = x(t) + \ell s \\ y = 0 + ms \\ z = z(t) + ns \end{cases}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 89 di 139

Esercitazioni di geometria

21 marzo 2011

ok

- Dati $\vec{u} = 3\vec{i} + 4\vec{k}$, $\vec{v} = \vec{j} - \vec{k}$ determinare

1) $\vec{u}+\vec{v}$, $\vec{u}-\vec{v}$, $3\vec{u}-2\vec{v}$

2) $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$, vers $\vec{u}$

3) $\vec{v}\cdot\vec{u}$, $\widehat{\vec{u}\vec{v}}$, $\vec{u}\wedge\vec{v}$

$\vec{u} = (3,0,4) \qquad \vec{v} = (0,1,-1)$

1) $\vec{u}+\vec{v} = (3,0,4)+(0,1,-1) = (3,1,3) = 3\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$

$\vec{u}-\vec{v} = (3,0,4)-(0,1,-1) = (3,-1,5) = 3\vec{i}-\vec{j}+5\vec{k}$

$3\vec{u}-2\vec{v} = 3(3,0,4)-2(0,1,-1) = (9,0,12)-(0,2,-2) = (9,-2,14) = 9\vec{i}-2\vec{j}+14\vec{k}$

2) $\|\vec{u}\| = \sqrt{9+0+16} = 5 \qquad \|\vec{v}\| = \sqrt{0+1+1} = \sqrt{2}$

vers $\vec{u} = \dfrac{u}{|\vec{u}|} = \dfrac{1}{5}(3,0,4) = \dfrac{3}{5}\vec{i} + \dfrac{4}{5}\vec{k}$

3) $\vec{u}\cdot\vec{v} = (3,0,4)\cdot(0,1,-1) = 3\cdot\cancel{0}+0\cdot\cancel{1}+4\cdot(-1) = -4$

$\widehat{uv} = \arccos\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \arccos\left(\dfrac{-4}{5\sqrt{2}}\right) \simeq 124°$

pari → +
dispari → −
ottenuti sommando indice di riga e di colonna

$\vec{u}\wedge\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = i(0-4) - j(-3-0) + k(3-0) = -4\vec{i}+3\vec{j}+3\vec{k}$

ok

- Sapendo che $\|\vec{u}\| = 4$, $\|\vec{v}\| = 3$, $\vec{u}\cdot\vec{v} = 6$, calcolare il modulo di $2\vec{u}+\vec{v}$

$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = \|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v} \qquad \|\vec{u}\pm\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2 \pm 2\vec{u}\cdot\vec{v}$

$\|2\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|2\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2+2\cdot 2\vec{u}\cdot\vec{v} = (2\|\vec{u}\|)^2+\|\vec{v}\|^2+4\,\vec{u}\cdot\vec{v} = 4\cdot 16+9+4\cdot 6 =$

$= 64+9+24 = 97 \rightarrow \|2\vec{u}+\vec{v}\| = \sqrt{97}$

n vettori $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ (del piano o dello spazio) sono lin. dip. $\Leftrightarrow \exists\, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ non tutti nulli tali che $\lambda_1\vec{u}_1 + \dots + \lambda_n\vec{u}_n = \vec{0}$ $\Leftrightarrow$ almeno uno tra $\vec{u}_1, \dots \vec{u}_n$ è comb. lin. degli altri

Teorema: 3 vettori del piano così come 4 vettori dello spazio sono sempre lin. dip.

Dati $\vec{u}, \vec{v}$ (nel piano o nello spazio) le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1) $\vec{u}, \vec{v}$ lin. dip. (uno è multiplo dell'altro)
2) $\vec{u}$ è parallelo a $\vec{v}$ ($\vec{u} \parallel \vec{v}$, hanno la stessa direzione)
3) le componenti omologhe sono proporzionali
4) (nello spazio) $\vec{u}\wedge\vec{v} = \vec{0}$

RIVEDI

• Determinare i vettori di $\mathbb{R}^3$ complanari con $\vec{u}=(0,1,2)$ e $\vec{v}=(2,1,0)$

$\vec{x}$ è complanare con $\vec{u},\vec{v} \iff \vec{x}=\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}$ con $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$

$\vec{x}=\lambda(0,1,2)+\mu(2,1,0)=(2\mu,\lambda+\mu,2\lambda)$ con $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$

Un altro modo per risolverlo può essere osservato che $\vec{x}=(x,y,z)$ è compl. con $\vec{u},\vec{v}$

se $\vec{x}\cdot\vec{u}\wedge\vec{v}=0 \rightarrow \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = x(0-2)-y(0-4)+z(0-2)=-2x+4y-2z$

$-2x+4y-2z=0 \rightarrow \boxed{-x+2y-z=0}$

RIVEDI

• Determinare i versori ortogonali a $\vec{u}=(1,0,1)$ e $\vec{v}=(1,0,-1)$.

Tra i versori ortogonali ad $\vec{u}$ determinare poi quelli che formano un angolo di 45° con $\vec{w}=(1,1,0)$.

$\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -j(-1-1)=2j$ questa è la direz. del vettore $\perp$

$\rightarrow$ i versori sono $\vec{x}_1=\vec{j}$ $\quad \vec{x}_2=-\vec{j}$

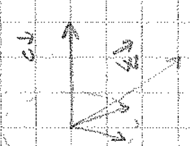
$\vec{x}=(x,y,z)$ incognito

$$\begin{cases} |\vec{x}|=1 & \rightarrow x^2+y^2+z^2=1 \\ \vec{x}\cdot\vec{u}=0 & \rightarrow x+z=0 \\ \widehat{xw}=45° & \rightarrow \dfrac{\vec{x}\cdot\vec{w}}{|x||w|=\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \vec{x}\cdot\vec{w}=1 \rightarrow x+y=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+\cancel{1}+x^2-2x+x^2=\cancel{1} \rightarrow 3x^2-2x=0 \quad x=\begin{cases}0\\2/3\end{cases} \\ z=-x \\ y=1-x \end{cases}$$

$z=\begin{cases}0\\-2/3\end{cases}$ $\quad y=\begin{cases}1\\1/3\end{cases}$

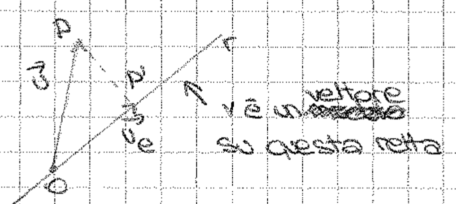
$\vec{x}_1=(0,1,0)$ $\quad \vec{x}_2=\left(2/3,1/3,-2/3\right)$



può anche darsi che ce ne sia solo uno, cioè quando $\vec{w}$ forma esso stesso col piano angolo di 45°

PROIEZIONI ORTOGONALI

$\forall\vec{u}\ \forall\vec{e}\neq\vec{0}\ \exists!\ \vec{u}_{\vec{e}}\parallel\vec{e}$ tale che $\|\vec{u}-\vec{u}_e\|=\min\|\vec{u}-\vec{v}\|$
$\vec{v}\in r$ (retta del vettore $\vec{e}$)



$\vec{u}_{\vec{e}}=\overrightarrow{OP'}$ con P' proiez. ortogonale di P su r con P tale che $\vec{u}=\overrightarrow{OP}$

Risulta che $\vec{u}_{\vec{e}}=(\vec{u}\cdot\text{vers}\,\vec{e})\,\text{vers}\,\vec{e}=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{e}}{|\vec{e}|^2}\cdot\vec{e}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 93 di 139

28 marzo 2011

- Siano $\vec{u} = 3\vec{i} + 4\vec{k}$ e $\vec{v} = \vec{j} - \vec{k}$. Applicando $\vec{u}$ e $\vec{v}$ in uno stesso punto O, trovare un punto P tale che il parallelepipedo di spigoli $\vec{u}, \vec{v}, \vec{OP}$ abbia volume 16.

Cerco $P = (x, y, z)$ tale che il vettore $\vec{OP} = (x, y, z)$ soddisfi $|\vec{OP} \cdot \vec{u} \wedge \vec{v}| = 16$

$\vec{u} \wedge \vec{v} = (3\vec{i} + 4\vec{k}) \wedge (\vec{j} - \vec{k}) = 3\vec{i} \wedge \vec{j} - 3\vec{i} \wedge \vec{k} + 4\vec{k} \wedge \vec{j} = 3\vec{k} + 3\vec{j} - 4\vec{i} = (-4, 3, 3)$

$|\vec{OP} \cdot \vec{u} \wedge \vec{v}| = 16 \iff |(x, y, z) \cdot (-4, 3, 3)| = 16 \rightarrow |-4x + 3y + 3z| = 16$

Posso scegliere $y = z = 0 \rightarrow |-4x| = 16$ $\begin{cases} x = 4 \\ x = -4 \end{cases} \rightarrow P = (4, 0, 0)$

Rette nel piano

- Scrivere eqz. cart. e param. della retta per $A = (2, 1)$ e $B = (3, -2)$

1) $\vec{u} = B - A = (1, -3)$

eqz. cartesiana $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-3} \rightarrow -3x + 6 = y - 1 \rightarrow -3x - y + 7 = 0$

2) Trovo il vettore ortogonale: $\vec{n}(3, 1)$ infatti: $\vec{n} \cdot \vec{u} = 3 - 3 = 0 \rightarrow$ sono ortogonali

$3(x-2) + (y-1) = 0 \rightarrow 3x + y - 7 = 0$

eqz. parametrica $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + (-3t) \end{cases}$

- Determinare l'eqz. cart. della retta r passante per $A = (-3, 2)$ e // a r_1: $x - 2y = 1$

1) Il vettore normale a r_1 lo è anche a r. Questo vettore è $\vec{n}_{r_1} = (1, -2)$

Quindi r: $1(x+3) - 2(y-2) = 0 \rightarrow x - 2y + 7 = 0$

2) Considero il fascio di rette improprio, // a r_1: F $x - 2y + K = 0$

Impongo che passi per $A \rightarrow -3 - 4 + K = 0 \rightarrow K = 7 \rightarrow$ r: $x - 2y + 7 = 0$

RIVEDI IL 2

- Tra le rette passanti per il punto di intersezione di r_1: $x + 2y - 3 = 0$ e r_2: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 - 2t \end{cases}$ trovare la retta:
  1) passante per $P(2, 1)$
  2) $\perp$ a r_3: $x - y - 7 = 0$

$x - 1 = \frac{3-y}{2} \rightarrow 2x - 2 = 3 - y \rightarrow 2x + y - 5 = 0$

Trovo il fascio di rette: $\lambda(x + 2y - 3) + \mu(2x + y - 5) = 0$ $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0 \iff \lambda$ e $\mu \neq 0$

1) Impongo che passi per $P \rightarrow \lambda(2 + 2 - 3) + \mu(4 + 1 - 5) = 0 \rightarrow \lambda = 0 \rightarrow$ la retta è r_2

2) Inoltre i parametri direttori sono $(1, -1)$

$r \perp r_3 \iff \vec{n}_r \perp \vec{n}_{r_3} = (1, -1) \rightarrow$ r: $(\lambda + 2\mu)x + (2\lambda + \mu)y - 3\lambda - 5\mu = 0$

$(\lambda + 2\mu, 2\lambda + \mu) \cdot (1, -1) = 0$ $\lambda + 2\mu - 2\lambda - \mu = 0 \rightarrow \mu = \lambda \neq 0$

Per $\mu = \lambda = 1$ ottengo $3x + 3y - 8 = 0$

$r_1: \begin{cases} y = -2x \\ x + 2x = 0 \\ z = t \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \quad r_1 \parallel \vec{v}_1 = (0,0,1) = \hat{v}_1$

$r_2 \parallel \vec{v}_2 = (-4,3,0) \quad \hat{v}_2 = \left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0\right)$

$\hat{v}_1 + \hat{v}_2 = \left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 1\right)$

$\hat{v}_1 - \hat{v}_2 = \left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}, 1\right)$

$b_1 = \begin{cases} x = -4/5\, t \\ y = 3/5\, t \\ z = -1 + t \end{cases}$

$b_2 = \begin{cases} x = 4/5\, t \\ y = -3/5\, t \\ z = -1 + t \end{cases}$

OK

- Determinare i piani β_1 e β_2 bisettori dei diedri formati dai piani $\alpha_1: y + z - 1 = 0$ e $\alpha_2: x = 4 + t,\ y = -1 + s,\ z = 3 + t + 4s$ cioè $x + 4y - z + 3 = 0$

$d(P, \alpha_1) = d(P, \alpha_2)$ con $P = (x, y, z)$ generico

$\frac{|x + 4y - z + 3|}{\sqrt{1 + 16 + 1}} = \frac{|y + z - 1|}{\sqrt{2}} \rightarrow |x + 4y - z + 3| = 3|y + z - 1|$

$x + 4y - z + 3 = \begin{cases} 3y + 3z - 3 \rightarrow x + y - 4z + 6 = 0 \\ -3y - 3z + 3 \rightarrow x + 7y + 2z = 0 \end{cases}$

APPROFONDIRE

- Scrivere l'equazione del piano α contenente $r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 6t \\ z = -3 - 3t \end{cases}$ e $\parallel$ a $s: \frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{3} = z$

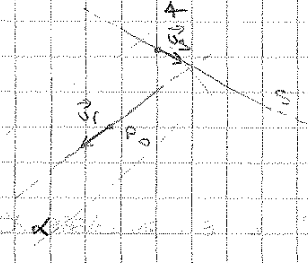
dopo aver verificato che r ed s sono sghembe.

sghembe $\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{v}_r \not\parallel \vec{v}_s \\ r \cap s = \emptyset \end{cases}$

$r \parallel \vec{v}_r = (2, 6, -3)$ → non sono $\parallel$ perché $\frac{2}{4} \neq \frac{6}{3} \neq \frac{-3}{1}$

$s \parallel \vec{v}_s = (4, 3, 1)$

$r \cap s \rightarrow \frac{\cancel{1} + 2t - \cancel{1}}{4} = \frac{2 + 6t + 2}{3} = -3 - 3t \rightarrow \underbrace{\frac{t}{2} = \frac{4}{3} + 2t = -3 - 3t}_{t = -8/9 \quad t = -13/15}$ → non incidenti



$P_0(1, 2, -3)$ $\quad \alpha \parallel \vec{v}_r, \vec{v}_s$ e passa per $P_0 \in r$ qualsiasi

il piano è $\perp$ a $\vec{v}_r \wedge \vec{v}_s$, cioè è complanare a $\vec{v}_r$ e $\vec{v}_s$

$\rightarrow (P - P_0) \cdot (\vec{v}_r \wedge \vec{v}_s) = 0$

$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+3 \\ 2 & 6 & -3 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (x-1)15 - (y-2)14 + (z+3)(-18) = 0$

$\rightarrow 15x - 14y - 18z - 41 = 0$

La distanza di r da s è $d(\alpha, s) = d(P, \alpha)\ \forall P \in s \quad P(1, -2, 0)$

$\frac{|15 + 28 - 41|}{\sqrt{225 + 14^2 + 18^2}} = \frac{2}{\sqrt{745}}$

4