



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

**Appunti universitari**

**Tesi di laurea**

**Cartoleria e cancelleria**

**Stampa file e fotocopie**

**Print on demand**

**Rilegature**

NUMERO : 413

DATA : 02/11/2012

# A P P U N T I

STUDENTE : Insana

MATERIA : Fisica II teoria + esercizi

Prof. Gozzellino

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

## PROGRAMMA DEL CORSO

in blu riferimenti bibliografici al testo di riferimento P. Mazzoldi, M. Nigro, C. Voci 'Fisica, vol. II', EdiSES (Napoli)

in verde riferimenti bibliografici al testo di riferimento P. Mazzoldi, M. Nigro, C. Voci 'Elementi di Fisica, vol. II, Elettromagnetismo e onde', EdiSES (Napoli)

## ELETTROSTATICA ✓

Cariche elettriche, Struttura elettrica della materia, Legge di Coulomb, Campo elettrostatico prodotto da distribuzioni e continue di carica, Linee di forza del campo elettrostatico, Moto di una carica in campo elettrostatico

(Paragrafi 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7 (prima parte); Paragrafi 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7)

Lavoro della forza elettrica, Potenziale elettrostatico, Energia potenziale elettrostatica, Conservazione dell'energia, Campo elettrico come gradiente del potenziale, Superfici equipotenziali, Proprietà del campo elettrostatico, Dipolo elettrico, Potenziale di un sistema di cariche in approssimazione di dipolo (cenni), Forza e momento agenti su di un dipolo (Paragrafi 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 2.6, 2.7, 2.8 (cenni), 2.9; Paragrafi 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 2.6, 2.7, 2.8)

Flusso del campo elettrico, Legge di Gauss (in forma integrale e in forma differenziale), Applicazioni e conseguenze della legge di Gauss, Campo elettrostatico prodotto da uno strato e da un doppio strato di carica, Equazioni di Maxwell per l'elettrostatica

(Paragrafi 3.1 (no dimostrazione), 3.2, 3.3, 3.4, 3.5, 3.6; Paragrafi 3.1, 3.3, 3.4; completare con i paragrafi 3.3, 3.4, 3.5, 3.6 del volume 'Fisica, vol. II')

Conduttori in equilibrio, Capacità di un conduttore isolato, Conduttore cavo, Schermo elettrostatico, Sistemi di conduttori (cenni), Condensatori, Condensatore sferico, cilindrico e piano, Collegamento in serie e in parallelo di condensatori, Energia del campo elettrostatico, Energia di un sistema di cariche, Pressione elettrostatica

(Paragrafi 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5, 4.6, 4.7, 4.8, 4.9; Paragrafi 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5, completare con i paragrafi 4.2, 4.4, 4.8, 4.9 del volume 'Fisica, vol. II')

Costante dielettrica assoluta e relativa, suscettività dielettrica, Polarizzazione nei dielettrici, Campo elettrico prodotto da un dielettrico polarizzato, Vettore induzione dielettrica e sue proprietà, Dipendenza della polarizzazione dal campo elettrico, Dielettrici isotropi e anisotropi (cenni),

Discontinuità del campo elettrico e del campo di induzione dielettrica sulla superficie di separazione tra due dielettrici, Rigidità dielettrica, Energia elettrostatica nei dielettrici (Paragrafi 5.1, 5.2, 5.3, 5.5, 5.6, 5.7, 5.9; Paragrafi 4.6, 4.7, 4.8, completare con i paragrafi 5.3, 5.4, 5.6, 5.7, 5.9 del volume 'Fisica, vol. II')

## CORRENTE ELETTRICA ✓

Concetto di conduzione elettrica, Intensità e densità di corrente, Legge di conservazione della carica, Equazione di continuità della corrente elettrica, Condizione di stazionarietà, Modello classico della conduzione elettrica, Legge di Ohm, Resistenza elettrica; Potenza, Effetto Joule, Resistori in serie e in parallelo, Forza elettromotrice, Legge di Ohm generalizzata, Carica e scarica di un condensatore attraverso un resistore, Leggi di Kirchhoff per le reti elettriche, Misura della intensità di corrente e della differenza di potenziale, Ponte di Wheatstone

## ONDE E OTTICA

✓ Descrizione di un'onda, Equazione differenziale delle onde piane, Onde piane armoniche, Analisi di Fourier (cenni), Onde trasversali e polarizzazione, Pacchetti d'onde, Velocità di fase e di gruppo (Paragrafi 12.1, 12.2, 9.10, 9.11, 12.4, 12.5, 12.10, 12.11; Paragrafo 10.1, 16.1, 16.2, completare con i paragrafi 12.2, 9.10, 9.11, 12.4, 12.5, 12.10, 12.11 del volume 'Fisica, vol. II')

✓ Onde elettromagnetiche piane, Energia di un'onda elettromagnetica piana, Vettore di Poynting, Intensità trasportata da un'onda, Quantità di moto di un'onda elettromagnetica piana, Pressione di radiazione, Onde piane in più dimensioni, Onde elettromagnetiche sferiche, Sorgenti di un'onda elettromagnetica (cenni), Dispersione e assorbimento, Velocità di gruppo, Effetto Doppler (cenni), Spettro delle onde elettromagnetiche (Paragrafi 13.1, 13.2, 13.3, 13.4, 13.5, 13.8, 13.9, 13.11 (cenni), 13.12; Paragrafi 10.1, 10.2, 10.3, 10.4, 10.5, 10.8, completare con i paragrafi 13.8, 13.9, 13.11 (cenni) del volume 'Fisica, vol. II')

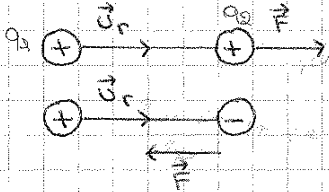
Teorema di Kirchhoff (solo enunciato), Principio di Huyghens-Fresnel, Leggi della riflessione e della rifrazione, Riflessione totale, Dispersione della luce in un mezzo trasparente, Formula di Cauchy (Paragrafi 14.1, 14.2, 14.3; Paragrafi 11.1, 11.2, 11.3, completare con il paragrafo 14.1 del volume 'Fisica, vol. II')

Somma di onde, Sorgenti coerenti e incoerenti, Condizioni di interferenza costruttiva e distruttiva, Interferenza di due onde luminose, Esperimento di Young, Cammino ottico, Interferenza prodotta da N sorgenti coerenti, Interferenza delle onde su lamine sottili (Paragrafi 15.1, 15.2, 15.3, 15.5, 15.6; Paragrafi 13.1, 13.2, 13.3, completare con i paragrafi 15.1, 15.2, 15.5 del volume 'Fisica, vol. II')

Fenomeni di diffrazione di Fraunhofer e di Fresnel, Diffrazione da una fenditura rettilinea, Diffrazione da un foro circolare (cenni), Reticolo di diffrazione, Potere dispersivo e potere risolutivo di un reticolo, Spettroscopia con il reticolo di diffrazione (cenni) (Paragrafi 16.1, 16.2, 16.3, 16.5, 16.6, 16.7; Paragrafi 14.1, 14.2, 14.3, 14.5, 14.6, 14.7)

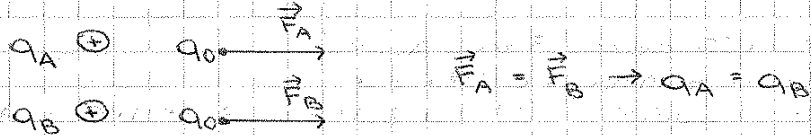
Ottica geometrica: leggi della riflessione e della rifrazione, Definizioni e convenzioni, Specchi, Diottri, Lenti sottili (Paragrafi 17.1, 17.2, 17.3, 17.4, 17.5; Paragrafi 12.1, 12.2, 12.3, 12.4, 12.5)

\* dipende dal mezzo e dal sistema di misura. Se siamo nel vuoto  
 $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$  dove  $\epsilon_0$  è la costante dielettrica del vuoto e nel SI vale  
 $8,85 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot m^2}$

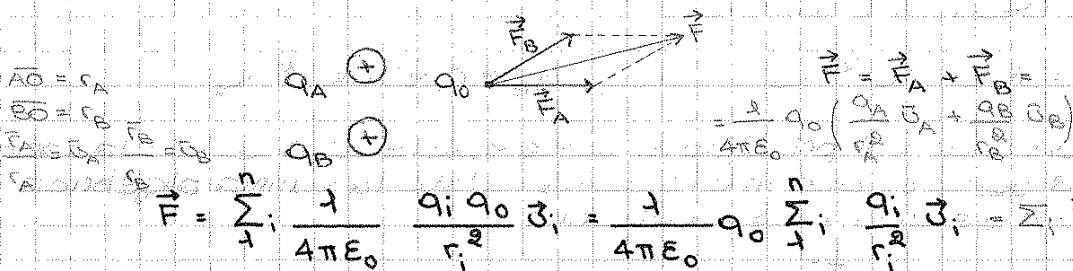


$\vec{U}_r$  esce da  $q_1$  a  $q_2$   
 Se  $q_1$  e  $q_2$  hanno stesso segno, la forza ha lo stesso verso di  $\vec{U}_r \rightarrow$  repulsiva; altrimenti  $\vec{F}$  ha verso opposto  $\rightarrow$  attrattiva

Due cariche si dicono uguali se poste alla stessa distanza da una terza carica esercitano la stessa forza.



Per trovare la forza risultante da una distribuzione di cariche si utilizza il principio di sovrapposizione. La forza risultante complessiva è una combinazione lineare delle forze esercitate dalle singole cariche sulla carica di prova  $q_0$ .



Le forze elettriche agenti su una carica  $q_0$  dovute alle cariche circostanti, si sommano come vettori - princ. di sovrapposizione di indip. delle forze simultanee

**Campo elettrostatico**

Su  $q_0$  agisce la forza  $\vec{F}$ , somma di tutte le forze dovute a tutte le cariche.

L'espressione del campo elettrostatico nel punto P è  $\vec{E}(P) = \frac{\vec{F}(P)}{q_0}$

$q_0$  deve perturbare il meno possibile il sistema, quindi la scegliamo il più piccolo possibile.

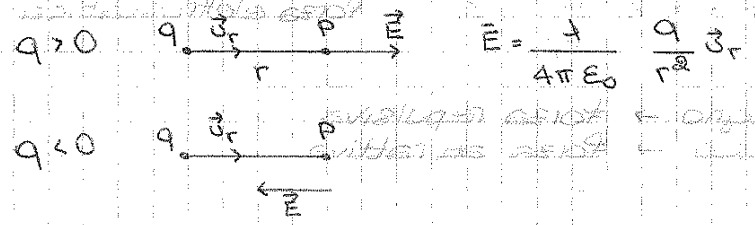
$$\vec{E}(P) = \lim_{q_0 \rightarrow 0} \frac{\vec{F}(P)}{q_0}$$

Il campo elettrostatico  $\vec{E}$  generato in un punto dello spazio da un sistema di cariche, è il rapporto tra: forza elettrica risultante che agisce su una carica di prova  $q_0$  positiva posta nel punto  $P$  e  $q_0$  stessa.

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u}_i$$

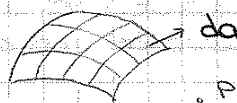
$q_i$  sono le cariche attorno al punto P

Attenzione! La sommatoria è algebrica, quindi bisogna tenere conto del segno delle cariche.



In questo modo  $\vec{E} = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{r^2} \vec{u}_r$   $\vec{u}_r$  va da  $dq$  a  $P$

(2) lungo una superficie



$dq = \sigma ds$

$\vec{E} = \int_S \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma ds}{r^2} \vec{u}_r$

(3) su un volume



$dq = \rho dv$

$P(x_0, y_0, z_0)$

$\vec{E} = \int_V \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho dv}{r^2} \vec{u}_r = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho dx dy dz}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2]^{3/2}} \vec{r}$   
 $\vec{u}_r = \vec{r}/r$

$E_x = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(x, y, z) dx dy dz (x-x_0)}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2]^{3/2}}$

$\lambda, \sigma, \rho$  sono costanti solo se la carica è uniformemente distribuita, altrimenti variano da punto a punto.

Le loro unità di misura sono:

densità lineare di carica  $\lambda \rightarrow C/m$

densità superficiale di carica  $\sigma \rightarrow C/m^2$

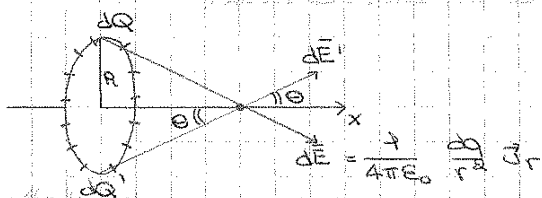
densità spaziale di carica  $\rho \rightarrow C/m^3$

L'unità di misura del campo  $\vec{E}$  è  $N/C$

Esempi

1. 7 p. 17

(\*) Calcolare il campo elettrico lungo l'asse di un anello carico uniformemente.



$\lambda = \frac{q}{2\pi R}$   
 $dq = \lambda dl$

$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r'^2} \vec{u}_r$

Dividendo l'anello in tante parti infinitesime, poi integro su tutto l'anello, ma è un integrale di vettori! Allora considero  $dq'$  diametralmente opposto a  $dq$ .

$d\vec{E}' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq'}{r'^2} \vec{u}_r$

$d\vec{E}'_x = d\vec{E}_x$  componenti x uguali e concordi  
 $d\vec{E}'_y = -d\vec{E}_y$  " " " " in modulo ma non in segno  $\rightarrow$  si elidono

il campo risultante è // all'asse x  
 $d\vec{E} + d\vec{E}' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot 2 \frac{dq \cos\theta}{r'^2} \vec{u}_x$  ma  $dq = \lambda dl$

allora  $\vec{E} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda \cos\theta}{r^2} \left( \int_{\pi R} dl \right) \vec{u}_x = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\cos\theta}{r^2} \lambda \pi R \vec{u}_x$

considero metà circonferenza perché ho già sommato i due contributi

$$= \frac{qx}{2\epsilon_0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{(x^2 + A^2)^{3/2}} \right) \vec{u}_x \pm \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{|x|}{(x^2 + A^2)^{3/2}} \right) \vec{u}_x$$

$x = 0$

discontinuità del campo elettrostatico

$$\Delta \vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_x$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_x \\ \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_x \end{cases}$$

se  $A \rightarrow \infty$ , cioè se abbiamo un piano infinito, troviamo:

$$\vec{E}_{dx} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_x$$

$$\vec{E}_{sx} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_x$$

il campo ha lo stesso valore ma c'è una discontinuità:  $\Delta \vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_x$

se  $x \gg A$  otteniamo  $\vec{E} = \pm \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{x}{x^2 + A^2} \right) \vec{u}_x =$

$$= \pm \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \frac{A^2}{x^3} \right) \vec{u}_x = \pm \frac{\sigma}{4\epsilon_0} \frac{A^2}{x^3} \vec{u}_x$$

sviluppo in serie  
ha portato su il  
denom  $\rightarrow$  l'esponente è  $-\frac{3}{2}$

$$= \pm \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x^2} \vec{u}_x$$

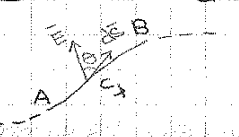
Questo è il caso in cui si perde ogni informazione sulla distribuzione di carica, è come se tutta la carica fosse condensata nel centro del disco.

$$\vec{F} = q_0 \vec{E} = m \vec{a} \rightarrow \vec{a} = \frac{q_0 \vec{E}}{m}$$

Cariche che si muovono soggette ad una forza compiono lavoro

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = q_0 \vec{E} \cdot d\vec{s} = q_0 E \cos \theta ds$$

angolo tra  $\vec{E}$  e  $d\vec{s}$



$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

La forza elettrostatica è conservativa  $\rightarrow$  il lavoro dipende solo dagli estremi  $\rightarrow$  si può scrivere

$$W_{ee} = - (U_e(B) - U_e(A)) = U_e(A) - U_e(B)$$

Tutto questo discorso può essere applicato all'energia potenziale:

$$U = q_0 V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q q_0}{r} + \dots$$

$q$  è limitata in una regione dello spazio  
 $r \rightarrow \infty, U \rightarrow 0$



$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_A}{r_A} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_B}{r_B}$$

distribuzione discreta di cariche

Caso con  $n$  cariche: 
$$V(P) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i}$$



$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r}$$

distribuzione continua di carica...

$$\int dV = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r} \rightarrow V^{(P)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r}$$

- ... lungo una linea  $dq = \lambda dl$
- " " superficie  $dq = \sigma ds$
- " un volume  $dq = \rho dV$

se la distribuzione non è uniforme  $\lambda, \sigma, \rho$  variano da punto a punto

$$P(x, y, z) \rightarrow V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq(x', y', z')}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}}$$

$$V(P) = \int_r^\infty \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

è possibile legare campo elettrostatico e potenziale tramite una relazione definita punto per punto

$$-dV = \vec{E} \cdot d\vec{s} \rightarrow -\frac{\partial V}{\partial x} dx - \frac{\partial V}{\partial y} dy - \frac{\partial V}{\partial z} dz = E_x dx + E_y dy + E_z dz$$

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial V}{\partial x} &= E_x \\ -\frac{\partial V}{\partial y} &= E_y \\ -\frac{\partial V}{\partial z} &= E_z \end{aligned} \right\}$$

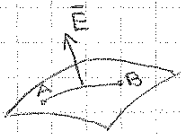
applico l'operatore di gradiente che ha componenti  $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$  si applica solo a scalari e li trasforma in vettori

$$-\nabla V = \vec{E}$$



Una superficie equipotenziale è una superficie su cui il potenziale è cost.

$$V(x, y, z) = \text{cost.}$$



$dV = 0$  perché sono su una sp. equipotenziale  
 $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \rightarrow$  ciò vuol dire  $\vec{E} \perp d\vec{s}$

ma  $\vec{E} = -\nabla V \rightarrow -\nabla V \perp d\vec{s}$

$$|\text{grad } V| = \frac{dV}{dn}$$

$dn \rightarrow$  direzione perpendicolare alla sp. equipotenziale e diretto nel verso di crescita di  $V$

esempio:  $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$  può variare solo  $r \rightarrow$  su sp. equipotenziali, se la

carica è puntiforme,  $r = \text{cost.} \rightarrow$  sono sfere

Le superfici equip. non si intersecano mai, altrimenti in quel punto il potenziale avrebbe 2 valori, ma non è possibile perché è una funzione univoca.

Si intersecano dove si ha la maggiore variazione di potenziale

Sono equidistanziate se la variazione di potenziale è costante.

Sono ortogonali alle linee di forza.

10 ottobre 2011

$$V(A) = \int_P^A \vec{E} \cdot d\vec{s} = V(A) - V_{\infty} \quad \text{lavoro per spostare la carica unitaria da } P \text{ a } A$$

$$\vec{E} = -\text{grad } V = -\nabla V \quad \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

Il campo elettrostatico è conservativo o irrotazionale.

Introduciamo l'operatore rotore che si applica ad un vettore e genera un vettore:

$$\text{rot } \vec{E} = \nabla \times \vec{E}$$

$$\begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \vec{u}_x + \left( \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \vec{u}_y + \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \vec{u}_z$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial V}{\partial z} \right) = -\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial V}{\partial y} \right) = -\frac{\partial^2 V}{\partial z \partial y}$$

sono uguali  $\rightarrow$  ciò vale nei 3 casi

$\rightarrow \text{rot } \vec{E} = 0$  campo irrotazionale

un campo conservativo ha rotore identicamente nullo, ovvero è irrotazionale.

Se  $q$  e  $q_0$  hanno segno opposto,  $q_0 q < 0 \rightarrow U(r) < 0$ . Se  $r$  aumenta  $U(r) - U(\infty) < 0$ . L'energia potenziale sta aumentando,  $W < 0$ .  
 Significa che la forza è stata applicata dall'esterno sul sistema.

Quindi se il sistema evolve

- diminuendo l'energia pot. il lavoro è svolto dalle forze del campo verso l'esterno
- aumentando " " " " " " dall'esterno sul campo

L'energia potenziale elettrostatica ha la stessa dignità di quelle studiate. Quindi si può dire che, in assenza di forze esterne,

$$W = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = U_A - U_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_0 q \left( \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

$r_A$  e  $r_B$ : distanza iniziale e finale di  $q_0$  da  $q$

$$\rightarrow \frac{1}{2} m v_B^2 + U_B = \frac{1}{2} m v_A^2 + U_A \quad \text{l'energia totale del sistema si conserva}$$

$$\frac{1}{2} m v_B^2 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q q_0}{r_B} = \frac{1}{2} m v_A^2 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q q_0}{r_A} \quad \text{energia potenziale del sistema } q + q_0$$

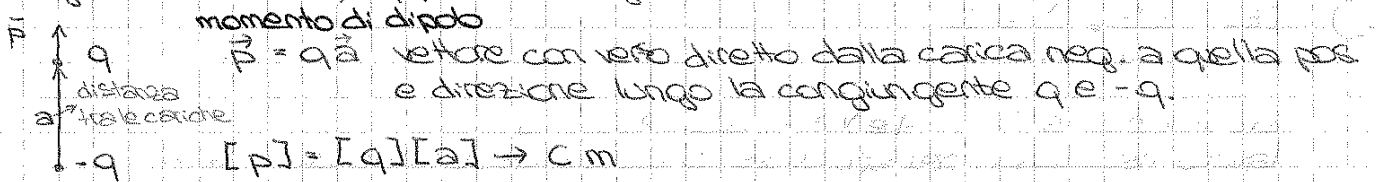
Caso con N cariche

energia pot. di un sistema di N cariche

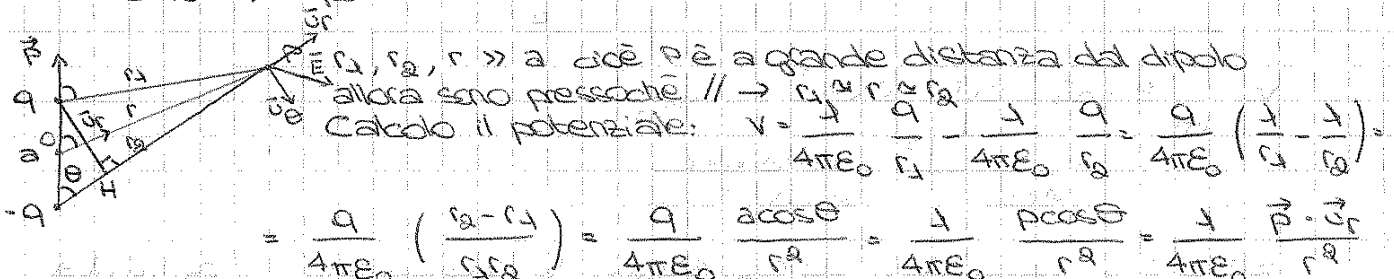
$$U = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^N \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} = U = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^N q_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \frac{q_j}{r_{ij}} \quad \text{potenziale generato da } q_j \text{ su } q_i$$

Dipolo elettrostatico (importante perché molti sistemi possono essere approssimati con un dipolo elettrico)

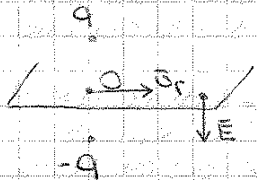
È una distribuzione di carica formata da 2 cariche, una positiva e una negativa uguali in modulo, opposte in segno. È un sistema complessivamente neutro



Il c. di M. delle due cariche non coincide  $\rightarrow$  il sistema interagisce con l'esterno  $\rightarrow$  il potenziale non è nullo



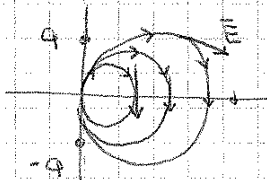
Se ci troviamo sul piano mediano (passante per O e L al dipolo):  
centro del dipolo



$$\vec{p} \perp \vec{r} \rightarrow (\vec{p} \cdot \vec{r}) \vec{r} = 0$$

$$\vec{E} = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}}{r^3}$$

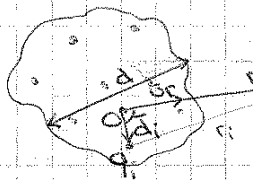
È il vettore a  $\vec{p}$   
è diretto antiparallelemente al momento di dipolo



Più ci allontaniamo dal dipolo, (E meno intenso) più le linee di forza sono distanziate. In ogni punto E ha verso // alla linea di forza. Sull'asse il verso della linea di forza è // a  $\vec{p}$ , sul piano mediano è antiparallelo a  $\vec{p}$ .  
Le linee di forza sono tridimensionali  $\rightarrow$  simmetria sferica.  
L'aspr. nello spazio si ottiene ruotando la figura intorno all'asse

I dipoli oscillanti (cariche non fisse) generano un campo elettromagnetico

**Potenziale di un sistema di cariche nell'approx. di dipolo**



Vogliamo conoscere il potenziale in un punto P dello spazio  
Consideriamo un sistema di cariche  $q_i$  in una regione di dimensione massima  $d$   
Suppongo per ipotesi che  $r \gg d$

Calcolo il potenziale in un punto P a distanza  $r$  da O:

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sum q_i}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sum q_i \vec{d}_i \cdot \vec{r}}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} + \dots$$

ma  $r = r_0 + d_i$   
con  $d_i$  che viene 0 alla carica  
 $r \gg d \rightarrow r = d_i \cos \theta + r_0$

O punto qualsiasi interno alla regione

termine di monopolo  
(sistema di cariche non neutro)

termine di dipolo

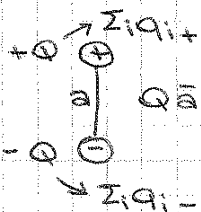
Se il sistema di cariche non è neutro, il primo termine prevale sull'altro.  
Se il sistema di cariche è neutro (come l'atomo), il primo addendo se ne va, rimane solo il secondo termine  $\rightarrow$  può essere trattato in approssimazione di dipolo.

$$\sum q_i \vec{d}_i = \vec{p} \quad \text{momento di dipolo del sistema di cariche rispetto a O}$$

(non varia con la scelta del polo)

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^2}$$

no perso informazioni sulla distribuzione originaria di carica che non interessa più



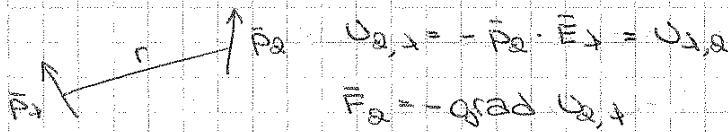
È come se avessi un dipolo dove  $+q$  è la somma di tutte le cariche positive,  $-q$  la somma di tutte le cariche negative.  
È una modellizzazione della realtà.  
I centri di massa delle cariche positive e di quelle negative non devono coincidere per poter approssimare a dipolo

es:  $q_+ = +q$      $q_- = -q$   
 $c.d.m. + \neq c.d.m. - \rightarrow$  non è approssimabile con un dipolo

es:  $q_+ = -q$      $q_- = +q$

poiché la risultante delle forze è  $\neq 0$   
 Se  $\vec{E} \neq \text{cost.}$   $\rightarrow$  rotazione e traslazione del dipolo (vedi esempio)

Se ho due dipoli, qual è l'energia pot. di uno dei due dipoli nel campo elettrostatico generato dall'altro dipolo?



### Legge di Gauss

$$\Phi(\vec{E}) = \int_S \vec{E} \cdot \vec{u}_N dS$$

se la sup. è chiusa la normale è sempre diretta verso l'esterno

Il flusso di  $\vec{E}$  attraverso una sup. chiusa <sup>qualsiasi</sup> è uguale alla somma algebrica delle cariche nella sup. chiusa diviso  $\epsilon_0$

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{\sum_i q_i}{\epsilon_0}$$

se la distrib. di cariche è discreta

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{\int_V \rho(x,y,z) dV}{\epsilon_0}$$

se la distrib. di cariche è continua

Se non ci sono cariche all'interno della sup. il flusso è nullo ( $q=0$ )

13 ottobre 2011

Vale sia per campi elettrostatici, sia per campi elettrici. Vale sempre perché è importante? Permette di legare  $\vec{E}$  con la sua sorgente, di determinare  $\vec{E}$  quando c'è una simmetria tra le cariche. Se non c'è simmetria ciò non è possibile.



distingui bene flusso di  $\vec{E}$  ed  $\vec{E}$  stesso

La relazione è di tipo integrale, considera una certa regione dello spazio. È possibile avere una relazione di tipo locale per legare sorgente e relativo campo elettrico: si usa l'operatore divergenza

$$\text{div } \vec{E} = \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

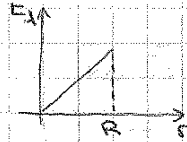
è uno scalare

### Teorema della divergenza

Il flusso di un campo vettoriale attraverso una sup. chiusa è l'integrale sull'intero volume della sup. chiusa dell'operatore divergenza di  $\vec{E}$

$$\int_S \vec{E} \cdot \vec{u}_N dS = \int_V \text{div } \vec{E} dV$$

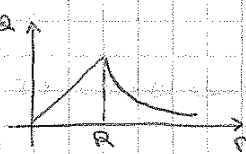
$\vec{E}_1$  cresce linearmente con  $r$



Per  $R_2$  valgono gli stessi ragionamenti di simmetria

$$\Phi(\vec{E}) = \int_S \vec{E} \cdot \vec{u}_n ds = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \rightarrow \vec{E}_2 = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

$\vec{E}_2$  decresce come  $1/r^2$



$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \rightarrow \vec{E}_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

ma questo è il campo elettrico generato da una carica puntiforme → all'esterno della sfera le cose vanno come se ci fosse un'unica carica puntiforme racchiusa al centro della sfera

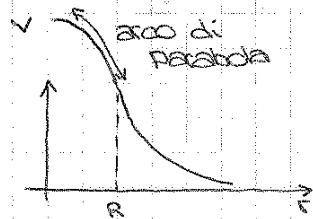
$$\vec{E} = -\text{grad } V = -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r \rightarrow V_1(r) = -\int E dr = -\int \frac{\rho r}{3\epsilon_0} dr \rightarrow V_1(r) = \frac{-\rho r^2}{6\epsilon_0} + \text{cost}$$

rispetto ad un campo elettrostatico, non elettrico in gen.

non è 0

$$V_2(r) = -\int E dr = -\int \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} dr \rightarrow V_2(r) = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r} + \text{cost}$$

$R < r < \infty \rightarrow \text{cost} = 0$  se  $r \rightarrow \infty$



$V$  decresce come  $1/r$

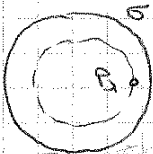
$V$  è una funzione continua →  $V_1(R) = V_2(R)$

$$\rightarrow -\frac{\rho R^2}{6\epsilon_0} + \text{cost} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 R} \rightarrow \text{cost} = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0}$$

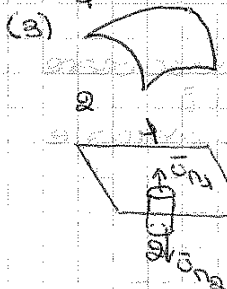
Se la carica è distribuita solo sulla superficie il flusso di  $\vec{E}$  attraverso  $R_1$  interno al guscio sferico carico è 0.

Se la carica è distribuita solo sulla superficie il flusso di  $\vec{E}$  attraverso  $R_1$  interno al guscio sferico carico è 0.

$$\Phi(\vec{E}) = \int_{S_{R_1}} \vec{E} \cdot \vec{u}_n ds = 0 \text{ perché } \vec{E} = 0$$



DISCONTINUITÀ DEL CAMPO ELETTRICO



cilindro infinitesimo con le basi // allo strato, una base nel mezzo ↑, l'altra nel mezzo ↓

$$h \ll R \quad \vec{u}_{n1} \parallel \vec{u}_{n2} \text{ ma opposti} \rightarrow \vec{u}_{n1} = -\vec{u}_{n2}$$

$$d\Phi(\vec{E}) = d\Phi_1(\vec{E}) + d\Phi_2(\vec{E}) + d\Phi_L(\vec{E}) = (\vec{E}_1 \cdot \vec{u}_{n1} + \vec{E}_2 \cdot \vec{u}_{n2}) ds$$

$$= [\vec{E}_1 \cdot (-\vec{u}_{n2}) + \vec{E}_2 \cdot \vec{u}_{n2}] ds \stackrel{\text{trascurabile}}{=} (\vec{E}_{2n} - \vec{E}_{1n}) ds = \text{componenti di } \vec{E} \text{ alla superficie}$$

$$= \frac{\sigma ds}{\epsilon_0} \rightarrow \vec{E}_{2n} - \vec{E}_{1n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

discontinuità di  $\vec{E}$  nel passare attraverso la superficie (caso del disco: qui è una generalizzazione)

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{E} = -\text{grad } V \\ \text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \text{div grad } V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \end{cases} \text{ equazioni di Maxwell per l'elettrostatica}$$

$$\nabla \cdot \nabla V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \text{ equazione di Poisson}$$

operatore Laplaciano

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \text{ si applica ad uno scalare e lo trasforma in vettore scalare}$$

## CONDUTTORI E GLI ISOLANTI

- CONDUTTORI l'esempio tipico sono i metalli;

Li consideriamo in equilibrio  $\rightarrow$  cariche fisse, non si muovono, cioè non c'è un moto ordinato delle cariche. Non consideriamo situazioni di agitazione termica. Per un conduttore in equilibrio

condizione media macroscopica

$$\vec{E} = 0 \text{ all'interno}$$

altrimenti ci sarebbe una componente che fa muovere le cariche. Presa una superficie qualunque contenuta nel conduttore

$$\phi(\vec{E}) = 0 \text{ perché } \vec{E} = 0$$

ma  $\phi(\vec{E}) = 0 \Rightarrow \frac{\sum_i q_i}{\epsilon_0}$ , cioè non ci sono cariche all'interno di un conduttore in equilibrio. Si parla a livello macroscopico, non atomico. Allora

- o non esiste mai un conduttore carico  $\rightarrow$  FALSO
- o la carica si distribuisce solo sulla superficie  $\rightarrow$  VERO

Val la seconda ipotesi: La cariche sulla superficie si distribuiscono in modo che  $\vec{E} = 0$



raggio di curvatura

La densità di carica  $\sigma$  è: elevata sulle punte, dove R piccolo  
bassa



Solo per le sfere e il piano  $\sigma$  è costante perché il raggio di curvatura è costante

$\vec{E} = -\text{grad } V \rightarrow V = \text{cost.}$  nel conduttore e sulla superficie  $\rightarrow$  la superficie del conduttore in equilibrio è equipotenziale. Allora  $\vec{E}$  sarà diretto perpendicolarmente alla superficie per le proprietà delle sup. equip.

La componente normale di  $\vec{E}$  subisce una discontinuità, quindi all'esterno del conduttore  $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_n$  e varia al variare di  $\sigma$  teorema di Coulomb

→ la cavità non contiene cariche

$\vec{E} = 0$  nella cavità e all'interno del cond. che quindi si trovano allo stesso potenziale. Le cariche si trovano solo sulla sup. esterna del cond.

dall'esterno

Se avviciniamo una carica  $+Q$  si ha una ridistribuzione delle cariche, ma nella cavità non ci si accorge di nulla (cambia solo il segno di  $V$  ma non ci sono  $\Delta V$ ).

Se  $Q$  è all'interno, sulla parete della cavità compariranno cariche indotte negative così  $\Phi(\vec{E}) = 0$  e  $q + \sum q_{ind. neg.} = 0$

All'esterno invece compariranno delle cariche indotte ~~positive~~. L'anno fuori si accorge di questo cambiamento. Qualsiasi cosa accada nella cavità, all'esterno non cambia la distrib. di cariche. Il conduttore funziona come uno schermo elettrostatico perfetto. Non c'è scambio di informazione tra interno e esterno.

griglia o con fori  
si comporta così

es: griglia dell'armatura del cemento armato protegge dalle scariche elettriche

Lo stesso vale per la scocca dell'auto. La griglia è detta gabbia di Faraday

Il conduttore cavo è uno schermo elettrost. perfetto tra interno e esterno

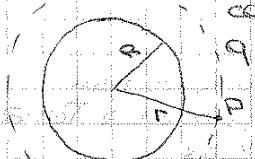
20 ottobre 2011

Capacità di un conduttore:  $C = \frac{q}{V}$

Quando varia  $q$ , varia anche  $V$  nella stessa quantità → il loro rapporto non varia ma →  $C$  dipende da: forma, dimensione del conduttore, mezzo in cui si trova

Tiene conto della quantità di carica che il conduttore può tenere su se stesso. Si misura in Farad,  $F = \frac{C}{V}$  (nei problemi si hanno  $10^{-6} F$ )

Il Farad è un'unità di misura molto grande

Esempio  CONDUTTORE SFERICO  
 $\sigma$  uguale in tutti i punti perché  $r$  di curv. costante  
 $C = \frac{q}{V}$

$$\Phi(\vec{E}) = \int \vec{E} \cdot \vec{u}_n dS = E \int dS = E 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} \rightarrow E = \frac{q}{4\pi r^2 \epsilon_0}$$

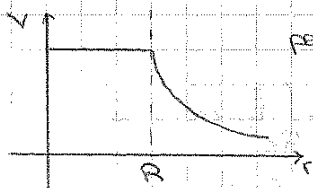
si perde informazione sulla distr. di carica

$\vec{E} \parallel \vec{u}_n$  e  $\vec{E}$  dipende dalla distanza

$$E = -\frac{dV}{dr} \rightarrow V = -\int E dr = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q}{r} + cost.$$

vale per tutti i punti all'esterno della sfera, ma  $V$  è una funz. continua

$$\frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q}{R} = V(r=R)$$



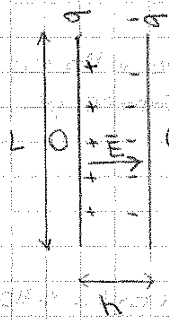
per  $r < R$   $V$  è costante perché nei conduttori  $E = 0$

se aumenta  $q$ , aumenta anche  $V$  dove compare  $q \rightarrow C$  non dipende da  $V$  o  $q$

Allora la capacità è:  $C = \frac{q}{\frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q}{R}} = 4\pi \epsilon_0 R$

↓ forma, dimensione mezzo

2)



CONDENSATORE PIANO

infatti  $E=0$  nel conduttore  
 $L \gg h$  in modo da trascurare gli effetti ai bordi

Si tratta di un doppio strato

$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{u}_n$  costante in tutti i punti e diretto perpendicolarmente alle armature

riprova che  $C$  non dipende da  $q$

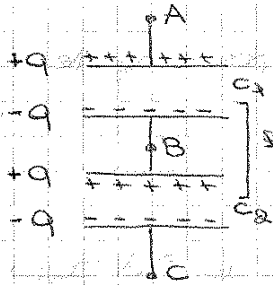
$V_A - V_B = \frac{\sigma}{\epsilon_0} h$

$C = \frac{q}{\frac{\sigma}{\epsilon_0} h} = \frac{\frac{\sigma S}{h}}{\frac{\sigma}{\epsilon_0} h} = \frac{\epsilon_0 S}{h}$

$C$  dipende di nuovo da: forma (infatti l'espressione è diversa da prima) dimensioni mezzo

Esistono condensatori con  $C$  variabile: si sfalsano le armature, cambia  $S$  e cambia  $C$ . Ma costano e non sempre sono utili. Allora si possono comporre i condensatori:

- in serie → la seconda armatura del 1° condens. è collegata alla prima armatura del 2° condens. elettricamente  
 Su tutte le armature la carica è la stessa



formano un unico conduttore

$V_A - V_B = q/C_1$

$V_B - V_C = q/C_2$

sommo membro a membro

$V_A - V_C = q \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)$

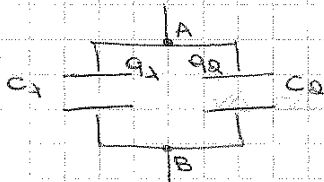
inverso della capacità equivalente della serie

$\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{C_{eq}}$ ,  $C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$

Il discorso si può estendere a  $n$  condensatori in serie →  $\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$

$C_{eq} < C_i$  la  $C_{eq}$  sarà sempre minore della  $C$  di un qualsiasi condensatore della serie

- in parallelo → la differenza di potenziale tra le loro armature è la stessa



$q_1 = (V_A - V_B) C_1$

$q_2 = (V_A - V_B) C_2$

$q_1 + q_2 = (V_A - V_B) (C_1 + C_2)$

capacità equivalente del parallelo

somma delle singole capacità che formano il parallelo

$C_{eq} = \sum_{i=1}^n C_i$ ,  $C_{eq} > C_i$  la  $C_{eq}$  è sempre maggiore di quella di ciascun componente

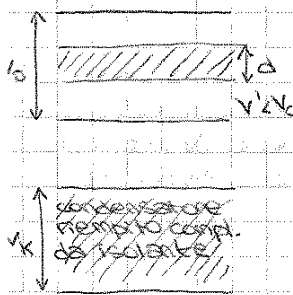
Due condensatori in parallelo si comportano come un unico condensatore



24 ottobre 2011

materiale in cui la carica prototta localmente per strofinio non è in grado di muoversi

**SOLANTI (o DIELETRICI)**



Inserisco nel condensatore una piastra di materiale dielettrico parallela alle armature.  $d \rightarrow$  spessore della lastra ( $\Delta V$  diminuisce linearmente)  $> d$ ,  $< \epsilon$  è la caduta di potenziale tra le armature linearmente. Posso riempire completamente il condensatore di materiale dielettrico. Allora ho la minima caduta di potenziale  $\rightarrow V_k$   $\rightarrow$  esperimenti di Faraday  $\rightarrow \frac{V_0}{V_k} > 1$   
 $\frac{V_0}{V_k} = k$  il rapporto dipende solo dalle proprietà del materiale, ma non dalla carica sulle armature o dalla loro forma o dimensioni.  
 $k$  costante dielettrica relativa, è sempre  $> 1$  del dielettrico. Il dielettrico diminuisce  $\Delta V$

$E_k = \frac{V_k}{h}$   $h$  distanza tra le armature

$E_k = \frac{V_0}{hk} = \frac{E_0 \cdot \sigma}{k}$  anche il campo elettrico, come il potenziale, diminuisce  $k$   $k$   $k \epsilon_0$  di un fattore  $k$ .

$E_0 - E_k = E_0 \left(1 - \frac{1}{k}\right) = E_0 \frac{k-1}{k} = E_0 \frac{\chi}{\chi+1}$  variazione del campo elettrico dovuto alla presenza del dielettrico

$k-1 = \chi$  suscettività elettrica del dielettrico

$k > 1 \rightarrow \chi > 0$

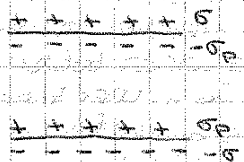
$k$  adimensionale  $\rightarrow \chi$  adimensionale

$E_k = E_0 - E_0 \frac{k-1}{k} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} - \frac{\sigma}{\epsilon_0} \frac{k-1}{k} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} - \frac{\sigma_p}{\epsilon_0}$

$E_k$ , campo elettrico, all'interno del dielettrico ha la stessa espressione di un campo nel vuoto, sovrapposizione del campo dovuto alle cariche libere sulle armature e del campo dovuto a una distr. uniforme di carica di densità  $\sigma_p$  depositata sulle facce del dielettrico, con segno opposto a quello delle cariche libere sull'armatura contigua.

$\frac{\sigma}{k} = \sigma_p$  densità di carica di polarizzazione per unità di superficie

Modellizzazione della distrib. di carica sulle facce del dielettrico che si affacciano sulle armature



Cambia la capacità del condensatore:  $C_k = \frac{q}{V_k} = \frac{kq}{V_0} = C_0 \cdot k$

quindi  $C_k$  aumenta, rispetto a  $V_0$ , di un fattore  $k$ .

$C_0 = \frac{\epsilon_0 S}{h} \rightarrow C_k = \frac{k \epsilon_0 S}{h} = \frac{\epsilon S}{h}$

$k \epsilon_0 = \epsilon$  costante assoluta dielettrica

$\epsilon_0 = \frac{C_0 h}{S} \rightarrow \frac{F}{m} = \frac{C^2}{N m^2}$  (non è adimensionale)

È come se tutti i dipoli fossero orientati, ma un momento di dipolo medio inferiore a  $p_0$ .

$$\langle p \rangle < p_0$$

$$\langle p \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p_{0i}$$

~~il momento di dipolo medio è inferiore a  $p_0$~~

Anche l'acqua ha la polarizz. elettronica, ma è mascherata da quella per orientamento.

Cosa succede se  $\vec{E}$  varia nel tempo? Se varia poco, non succede nulla. Se varia molto rapidamente ( $\sim 10^9$  Hz) la costante dielettrica si riduce. I dipoli non riescono a seguire le variazioni di  $\vec{E}$ , la polarizz. per orient. cessa e rimane solo la polar. elettronica.

Nel forno a microonde i dipoli dell'acqua vorrebbero seguire le variazioni di  $\vec{E}$  ma si formano attriti che provocano il riscaldamento.

Considero un volume di dielettrico  $\Delta V$  piccolo, contenente almeno 1000 atomi per poter parlare di valori medi.

$$\Delta V \rightarrow \Delta \vec{p} = \langle \vec{p} \rangle \Delta N \quad \text{momento di dipolo complessivo}$$

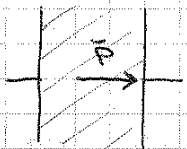
numero di particelle in  $\Delta V$

$$\vec{P} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta V} = \frac{\Delta N \langle \vec{p} \rangle}{\Delta V} = n \langle \vec{p} \rangle \quad \text{momento di dipolo per unità di volume} \rightarrow \text{polarizzazione}$$

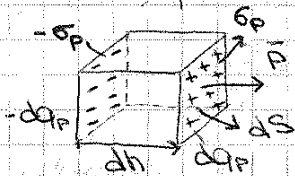
$n \rightarrow$  numero di particelle per unità di volume

Se il dielettrico è ISOTROPO  $\vec{P} \parallel \vec{E} \rightarrow \vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$

- Polarizzazione uniforme  $\rightarrow \vec{P}$  ha lo stesso valore in tutti i punti del dielettrico



dielettrico isotropo e uniforme



def. di momento di dipolo,  $d\vec{p}$  è diretto da  $-dq_p$  a  $dq_p$

$$d\vec{p} = \vec{P} dS dh = dq_p dh$$

Posso sostituire il parallelepipedo con un dipolo perché è avvenuta una polarizzazione, c.d.M. +/- non coincide. Non interessa ciò che avviene microscopicamente. Penso che le cariche siano distribuite non in un punto ma su una superficie.

$$P dS dh = dq_p dh \rightarrow P = \frac{dq_p}{dS} = \sigma_p$$

$dS$  ad  $dh$  il carattere di vettore di  $\vec{P}$  perché hanno stessa direz. e verso

$$\int_S \sigma_p dS + \int_V \rho_p dV = 0$$

termine che non c'è nella polarizzazione uniforme

$$\begin{cases} \sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{u}_n \\ \rho_p = -\text{div} \vec{P} \\ \vec{P} = \text{cost}, \text{div} \vec{P} = 0 \\ \rho_p = 0 \end{cases}$$

$$\int_S \vec{P} \cdot \vec{u}_n dS - \int_V \text{div} \vec{P} dV = 0$$

• Come si modifica la legge di Gauss?  $\Phi(\vec{E}) = \frac{q + q_p}{\epsilon_0}$   $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho + \rho_p}{\epsilon_0}$

• Come si semplifica se il dielettrico è omogeneo e isotropo?

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} + \frac{\rho_p}{\epsilon_0} = \frac{\rho}{\epsilon_0} - \frac{\text{div} \vec{P}}{\epsilon_0} = \frac{\rho}{\epsilon_0} - \frac{\text{div}(\epsilon_0 \chi \vec{E})}{\epsilon_0}$$

Posso portare fuori  $\epsilon_0$  perché isotropo e omogeneo

$$\text{div} \vec{E} + \chi \text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \rightarrow \underbrace{(1 + \chi)}_{=k} \text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \rightarrow \text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$$

L'informazione su  $\rho_p$  è condensata in  $\epsilon$ .

• Come circuitare  $q_p$ ?

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} - \frac{\text{div} \vec{P}}{\epsilon_0} \rightarrow \text{div}(\underbrace{\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}}_{\vec{D}}) = \rho$$

questa relazione vale sempre

$\vec{D}$  vettore induzione dielettrica

$$\begin{cases} \text{div} \vec{D} = \rho \\ \oint \vec{D} \cdot \vec{u}_n dS = \Phi(\vec{D}) = q \end{cases}$$

Se il dielettrico è isotropo  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \chi \vec{E} = \epsilon_0 (\chi + 1) \vec{E} = \epsilon \vec{E}$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \frac{\vec{P}}{\epsilon_0 \chi} + \vec{P} = \frac{\vec{P}}{\chi} + \vec{P} = \frac{1 + \chi}{\chi} \vec{P}$$

In un dielettrico  $\chi$  ci sono solo cariche di polarizzazione  $\rightarrow \text{div} \vec{D} = 0$

$\text{div} \vec{D} = 0 \rightarrow \text{div} \frac{1 + \chi}{\chi} \vec{P} = 0$  se isotropo

$\frac{1 + \chi}{\chi} \text{div} \vec{P} = 0$  se omogeneo  $\rightarrow \rho_p = 0 \rightarrow$  non ci sono cariche di polarizzazione

Polarizz. uniforme o... } non ci sono cariche di polar. all'interno del dielettrico  
 ~ Dielettrico omog. e isotropo

$$\vec{P} \rightarrow \frac{C}{m^3} \text{ come } \sigma_p$$

Il campo elett. rimane sempre conservativo  
 Il vettore  $\vec{D}$  non è conservativo.

$$\vec{D} \rightarrow \frac{C}{m^2}$$

### Densità di energia

$$U = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} qV = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 Vol$$

$$U = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

Se c'è un dielettrico:

- se è isotropo al posto di  $\epsilon_0$  sostituisco  $\epsilon$  →  $U = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} DE = \frac{1}{2} \frac{D^2}{\epsilon}$

- se è anisotropo →  $U = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E}$

$$U = \int_{Vol} u \, dV$$

### Materiali piezoelettrici (es. quarzo)

Se subiscono una deformazione meccanica (es. compressione) immediatamente i dipoli elettrici si orientano in modo da avere una polarizzazione  $\neq 0$  anche se non c'è un campo elettrico.

Vale anche l'opposto: un campo elettrico provoca una polarizzazione e anche una deformazione meccanica.

Applicazione: microfoni

deform. mecc → polarizz.  
polarizz. → deform. mecc.

densità di corrente  $J = nev_d$  o vettorialmente  $\vec{J} = ne\vec{v}_d$   
 (per unità di sup.)

$$di = J dS \cos\theta = \vec{J} \cdot \vec{u}_n dS = \text{Flusso di densità di corrente attraverso } dS$$

Se la sezione non è infinitesima  $i = \int di = \int \vec{J} \cdot \vec{u}_n dS = \text{Flusso di densità di corrente attraverso } dS \text{ dello stesso conduttore.}$

Se  $J$  è uguale in tutti i punti del conduttore  $\rightarrow$  caso particolare  
 e la sezione è  $\perp$  a  $\vec{J}$  ho che  $\vec{J} \parallel \vec{u}_n$

$$\rightarrow i = JS$$

$$i \rightarrow \frac{C}{s} = A$$

$$J \rightarrow \frac{A}{m^2}$$

I materiali conduttori solidi sono costituiti da un reticolo spaziale ai cui vertici si trovano gli ioni positivi e al cui interno si muovono gli elettroni liberi. In un metallo questi sono gli unici portatori di carica. Se si mettono a contatto due conduttori  $C_1$  e  $C_2$  isolati a potenziali diversi si raggiunge una situazione di equilibrio in cui  $C_1$  e  $C_2$  si portano allo stesso potenziale. Nel processo un certo numero di  $e^-$  passa dal conduttore a potenz. < a quello >, sotto l'azione del campo elettrico dovuto alla d.d.p.

Il segno meno è dovuto al fatto che se l'integrale è positivo, la carica all'interno diminuisce e quindi ha derivata negativa.

CASO PARTICOLARE:  $Q_{int} = cost. \rightarrow \frac{\partial Q_{int}}{\partial t} = 0 \rightarrow \oint \vec{J} \cdot \vec{u}_n dS = 0$  condiz. di stazionarietà

Ricaviamo la forma locale:

per il teorema della divergenza

$$Q_{int} = \int_V \rho d\tau \rightarrow \oint \vec{J} \cdot \vec{u}_n dS = - \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho d\tau = \int_V - \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau \stackrel{\downarrow}{=} \int_V (\nabla \cdot \vec{J}) d\tau$$

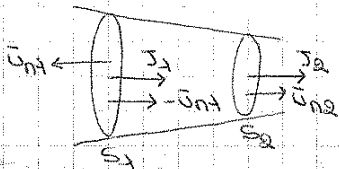
Questa relazione deve valere per ogni  $\tau$ , allora devono essere uguali le funzioni integrande

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \text{equazione di continuità della corrente elettrica}$$

In condizione stazionaria  $\nabla \cdot \vec{J} = 0$  e  $\vec{J}$  si dice solenoidale. (flusso entrante = flusso uscente)

CONDIZIONE DI STAZIONARIETÀ

Applichiamo questo risultato ad un conduttore solido percorso da una corrente di densità  $\vec{J}$ .



La superficie  $S$  è costituita da due diverse sezioni  $S_1$  e  $S_2$  e dalla sup. lat. del conduttore, attraverso cui non passa corrente  $\rightarrow J$  non ha componenti sulla sup. lat.

$$\oint \vec{J} \cdot \vec{u}_n dS = 0 = \int_{S_1} \vec{J}_1 \cdot \vec{u}_{n1} dS_1 + \int_{S_2} \vec{J}_2 \cdot \vec{u}_{n2} dS_2 = - \int_{S_1} \vec{J}_1 \cdot (-\vec{u}_{n1}) dS_1 + \int_{S_2} \vec{J}_2 \cdot \vec{u}_{n2} dS_2 =$$

$$= -i_1 + i_2 \rightarrow i_1 = i_2$$

In condizioni stazionarie l'intensità di corrente è sempre la stessa attraverso ogni sezione del conduttore. Cambia la densità di corrente e  $v_d$  (sono  $>$  dove la sezione è  $<$ ). Non vuol dire che la corrente sia costante nel tempo, ma può variare purché la carica che entra per unità di tempo in  $S$  sia uguale a quella che ne esce, sempre nell'unità di tempo. L'affermazione resta vera finché il tempo che caratterizza la variabilità della corrente è grande rispetto al tempo che la luce impiegherebbe ad attraversare il volume in  $S$ , se non è detto nulla siamo in condizioni stazionarie.

### LEGGI DI OHM

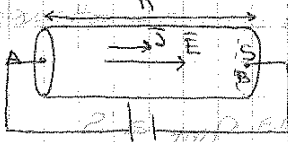
In un conduttore in condizioni stazionarie sottoposto a  $\vec{E}$  e con una d.d.p.  $\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E}$ . La velocità, e non l'accelerazione, è proporzionale al campo elettrico.

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m} \quad \text{conduttività (dipende dal materiale)}$$

$$\rho = \frac{1}{\sigma} \quad \text{resistività ( " " " )}$$

ATTENZIONE! non è  $\rho$  di prima!

CASO PARTICOLARE: considero un conduttore metallico cilindrico di lunghezza  $h$  e sezione  $S$ , omogeneo, sottoposto ad una d.d.p. e, quindi, sede di  $\vec{E}$ .



$$E = \rho J = \rho \frac{1}{S} \quad V = V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_A^B E ds = Eh$$

$$V = Eh = \rho \frac{1}{S} h = \rho \left( \frac{h}{S} \right) = Ri \rightarrow V = Ri \quad \text{ma ciò è vero solo per le resistenze ho fatte}$$

3 novembre 2014

$$R = \rho l / S$$

$$\vec{E} = \rho \vec{J}$$

Caso: sezione variabile



$$\vec{E} \cdot d\vec{x} = \frac{\rho dx}{S} i \rightarrow \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{x} = \int_A^B \frac{\rho dx}{S} i \rightarrow V_A - V_B = i \int_A^B \frac{\rho dx}{S(x)}$$

$$R = \int_A^B \frac{\rho dx}{S(x)} \quad \text{la legge di Ohm rimane } V_A - V_B = iR$$

Perché una carica elettrica fluisce in un conduttore? Perché su di essa agisce un lavoro che dà energia alla carica.

Calcoliamo tale lavoro:

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}_d \quad \text{la forza è del tipo } \vec{F} = \pm e \vec{E}$$

$$= (-e) \vec{E} \cdot \vec{v}_d \quad \text{questa è la potenza fornita ad una singola carica}$$

Possiamo definire la potenza erogata per unità di volume come

$$P_{vol} = n(-e) \vec{E} \cdot \vec{v}_d = \vec{E} \cdot \vec{J} = E J \quad \text{vale sempre, indipend. dal tipo di conduttore}$$

↓  
portatori per  
unità di volume

Non ho, infatti, sfruttato il fatto che si tratta di conduttori ohmici. Ma se il conduttore è ohmico la formula diventa, ricordando che  $\vec{E} = \rho \vec{J}$  o  $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ :

$$P_{oh} = \rho J^2 = \sigma E^2 = \frac{1}{\rho} E^2$$

Il lavoro speso per spostare una carica da un punto ad un altro è

$$dW = dq \underbrace{(V_A - V_B)}_V \quad \text{ma poiché } i = \frac{dq}{dt} \rightarrow dW = iV dt \rightarrow P = iV = \frac{dW}{dt}$$

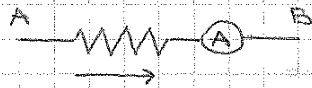
Questa è la potenza da fornire per spostare la carica da A a B, cioè per far scorrere la corrente i.

Se il materiale è ohmico  $V = iR \rightarrow P = i^2 R = \frac{V^2}{R}$   
Per far muovere una carica, bisogna fornire potenza.

Ogni volta che l'e<sup>-</sup> urta contro uno ione del reticolo cede l'energia dovuta a E sotto forma di energia termica (perché perde informazioni sulla velocità dovuta ad E). Risultato macroscopico: riscaldamento del sistema. Un filo percorso da corrente si scalda → effetto Joule. Se il riscaldamento del filo è controllato, si può usare per: stufe elettriche, asciugacapelli, boiler elettrico.

Misura dell'intensità di corrente

strumenti: amperometro o, se piccola, galvanometro  
 Va messo in serie, ma una volta inserito si altera la misura perché cambia  $i$



Bisogna rendere tale variazione minima:  
 tanto più  $r_A \ll R$ , tanto più  $i' \rightarrow i$

prima  $\rightarrow i = \frac{V_A - V_B}{R}$

dopo  $\rightarrow i' = \frac{V_A - V_B}{R + r_A}$

Misura della differenza di potenziale tra A e B

Lo strumento deve essere soggetto alla stessa caduta di potenziale, quindi va messo in parallelo. Lo strumento è il voltmetro.

Ma una volta inserito la corrente si divide tra  $R$  e  $V$ :

$i = i_v + i'$

$\rightarrow$  Bisogna rendere  $i' \approx i \rightarrow i_v$  deve essere molto piccola. Poiché  $i' R = i_v R_v$ ,  $i_v$  è tanto più piccola quanto più  $R_v \gg R$

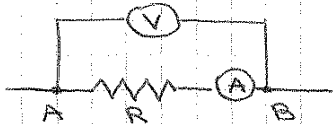


prima  $\rightarrow V_A - V_B = i R$

dopo  $\rightarrow (V_A - V_B)' = i' R$

Misura della resistenza

(\*) Voltamperometrico



Si misurano la corrente e la differenza di potenziale, quindi si trova  $R = \frac{V_A - V_B}{i}$  (con gli errori dovuti alle due misure)

(a) Ponte di Wheatstone

Si confronta la resistenza incognita con altre resistenze note. Questo metodo è più preciso.



10 novembre 2014

La f.e.m. è pari alla caduta di potenziale ai capi del generatore quando non erogava corrente.  $E = (V_A - V_B) + \mathcal{P}$

$E = R_i + r_i$  moltiplico tutto per  $i dt$

$E i dt = R_i i^2 dt + r i^2 dt$

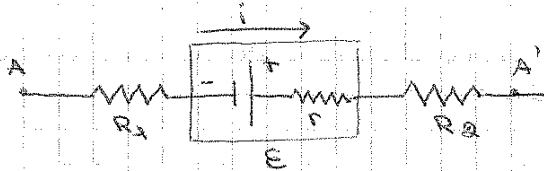
energia che il generatore fornisce al circuito (lavoro erogato dal gener.)

energia dissipata in parte all'interno, in parte all'esterno del generatore.

→ questo lavoro è completamente dissipato su R e r per effetto Joule → è trasformato in calore

urti tra e<sup>-</sup> e ioni del reticolo

Consideriamo una porzione di circuito aperto:



$V_A - V_{A'} = E = R_1 i + R_2 i + r i$  che a  $V_A - V_{A'}$  c'è il contributo di E

Fissato il verso della corrente i la f.e.m. E compare col segno + perché nel generatore la corrente entra nel polo - e esce da quello +. Se la corrente si muove in verso opposto avrei -E

$V_A - V_{A'} = E = R_1 i + R_2 i + r i$  legge di Ohm generalizzata

$E i = R_i i^2 + r i^2$  in termini di potenza

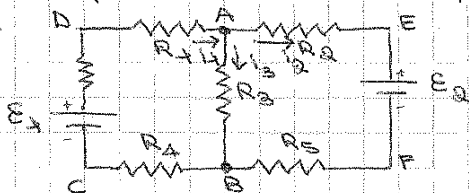
**Nomenclatura:**

resistenza in astratto → elemento che può essere messo in un circuito con resistenza non nulla, qualcosa che assorbe potenza

Definiamo nodo di una rete elettrica un punto in cui convergono almeno tre conduttori. I nodi sono collegati da rami.

Il ramo è un tratto di circuito che connette tra loro più nodi.

Una maglia è un percorso chiuso composto da più rami. Un ramo può appartenere a più maglie.



A e B sono nodi

**1ª legge di Kirchhoff: legge dei nodi**

La somma algebrica delle correnti che fluiscono attraverso un nodo è sempre uguale a zero

Ciò discende dall'eqz. di continuità della corrente

segno + correnti che escono dal nodo →  $-i_1 + i_2 + i_3 = 0$

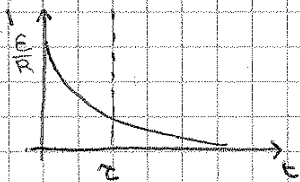
" - " " entrano nel "   
 N nodi → N eqz ma solo N-1 sono indipendenti

$\sum_{k=1}^N i_k = 0$

Il tempo di carica e scarica è governato da  $RC = \tau = \frac{L \times |q|}{|i|} = \frac{L}{\frac{dq}{dt}}$   
 $\tau > RC$ , più lento è il processo

esempio:  $R = 10 \Omega \rightarrow \tau = 10^{-5} s$  processo rapido  
 $C = 1 \mu F$   
 $R = 10^6 \Omega$  (isolante)  $\rightarrow \tau = 1 s$   
 $C = 1 \mu F$

Quando è passato  $\tau$   $q$  e  $V_c$  sono arrivati a  $\frac{2}{3}$  del valore finale,  $i$  si è ridotta a  $\frac{1}{3}$  del valore iniziale



Se si vuole caricare un condensatore, una parte del lavoro fornito dal generatore è dissipato dalla resistenza

$$\underbrace{E i dt}_{\text{lavoro effettuato}} = \underbrace{R i^2 dt}_{\text{energia dissipata sulla resistenza}} + \underbrace{V_c i dt}_{\text{energia immagazzinata}}$$

$$Ei = Ri^2 + V_c i \quad \text{in termini di potenza} \rightarrow P_{gen} = P_R + P_C$$

Quanta energia è dissipata e quanta immagazzinata?

$$\textcircled{1} \int_0^{\infty} E i dt = \int_0^{\infty} \frac{E^2}{R} e^{-t/RC} dt = \frac{E^2}{R} (-RC) (e^{-t/RC}) \Big|_0^{\infty} = \frac{E^2}{R} RC = \frac{E^2 C}{2} \quad \text{lavoro effettuato dal generatore}$$

$$\textcircled{2} \int_0^{\infty} R i^2 dt = \frac{E^2}{R} \int_0^{\infty} e^{-2t/RC} dt = \frac{E^2}{R} \frac{RC}{2} = \frac{E^2 C}{2} \quad \text{energia dissipata sulla resistenza pari a metà del lavoro effettuato dal generatore}$$

$$\textcircled{3} \int_0^{\infty} V_c i dt = \int_0^{\infty} \frac{E}{R} e^{-t/RC} (1 - e^{-t/RC}) dt = \frac{E^2 C}{2} \quad \text{energia immagazzinata nel condensatore}$$

Nella carica di un condensatore il 50% dell'energia fornita dal generatore va in energia elettrostatica, l'altra metà è dissipata in calore (indip. da R e C).  
 Caricato il condensatore, ora possiamo staccarlo dal generatore, isolarlo.  
 Non si può tenere carico all'infinito perché c'è il dielettrico o l'aria.

Studiamo il processo di scarica

SCARICA DI UN CONDENSATORE: il condensatore C ha carica q, T è aperto, c'è R.



circuito aperto  
 $q = EC$   
 $V_c = E$   
 $i = 0$

$$0 = R i + V_c$$

$$R i = - \frac{q}{C}$$

$$R \frac{dq}{dt} = - \frac{q}{C}$$

$$\frac{dq}{q} = - \frac{dt}{RC} \rightarrow \tau$$

Chiuso l'interruttore, le cariche si muovono dall'armatura a potenziale + a quella a potenziale -, dando luogo a una corrente positiva lungo il resistore  $\rightarrow i = - \frac{dq}{dt}$  (meno  $\rightarrow$  i diminuisce)

$$0 = R i + V_c$$

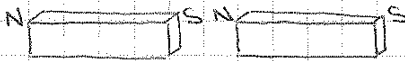
$$\int \frac{dq}{q} = - \int \frac{dt}{RC} \rightarrow \ln \frac{q}{CE} = - \frac{t}{RC} \rightarrow q = CE e^{-t/RC}$$

## IL CAMPO MAGNETICO

La sorgente, come per il campo elettrico, è la carica, che dev'essere in moto.

ANALOGIE

- due calamite a forma di parallelepipedo → fenomeno di attrazione e repulsione come se ci fosse un polo + e un polo -

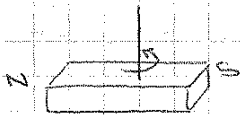


polo N - polo S attrazione  
 polo N - polo N repulsione  
 (S) (S)

$$F = k_m \frac{q_1^* q_2^*}{r^2} \quad \text{se gli estremi sono puntiformi}$$

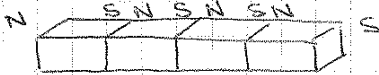
dipende  
 dal materiale  
 e da cost. di m.s.  
 $M_{12}$  → massa magnetica

- sospendiamo una calamita → ruota per trovare un orientamento // al campo magnetico



dipolo magnetico

- magnetizzazione (analogo alla polarizzazione del dielettrico immerso in un campo magnetico) se avviciniamo a un pezzo di magnetite una sottile bacchetta di ferro, questo acquista la proprietà di attirare la limatura di ferro: la bacchetta immersa nel campo magnetico generato dalla magnetite si è magnetizzata, mentre una carica elettrica può sempre essere isolata (perché esiste la carica elementare).
- non è possibile scindere polo S e polo N → struttura DIPOLORE



si ottengono poli S e N della stessa intensità di quelli di partenza → non si può parlare di massa magnetica

In natura non è mai stato osservato il monopolo magnetico, nemmeno a livello elementare. I poli magnetici sembrano esistere sempre a coppie di egual valore e segno opposto, cioè sotto forma di dipoli magnetici.

C'è equivalenza tra cariche in moto e magneti. Un sistema di cariche in moto genera un campo magnetico.

È un campo vettoriale indicato con  $\vec{B}$ . Può essere descritto con linee di flusso (o di campo). Si misura in Tesla T, unità di misura molto grande ma non supera  $10^3 \cdot 10^4$ . Si può anche misurare in Gauss  $G = 10^{-4} T$  ma non nel SI.

$$1 T = \frac{1 V \cdot s}{1 m^2}$$

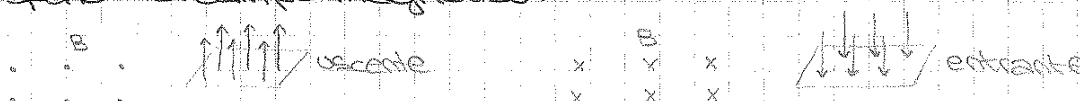
$$1 Wb = 1 V \cdot s$$

weber

le linee di flusso sono rette // e equidistanti

$\vec{B}$  può essere costante o meno, uniforme o meno. Le linee di flusso altrimenti si addensano dove  $\vec{B}$  è più intenso.

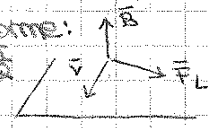
Possiamo visualizzare le linee di flusso con della limatura di ferro oppure con un ago sottile posizionato in un punto dello spazio dove si dispone // al campo magnetico.



$\vec{F}_L \perp \vec{B}$  non si usa il termine linee di forza perché esprimono il verso di  $\vec{B}$  ma non di  $\vec{F}_L$  che è  $\perp$ .

Moto in un campo magn. uniforme:

$\vec{B}$  uniforme,  $\vec{v} \perp \vec{B}$   $\theta = \frac{\pi}{2}$



$\vec{B}$  sempre  $\perp$  al piano  
 $\rightarrow \vec{F}_L$  giace sempre su questo piano  
 $\rightarrow \vec{v}$  può cambiare direzione, ma giace sempre su questo piano

$$\vec{F}_L = q\vec{v} \times \vec{B}$$

acceler. centripeta

$$F_L = qvB = m \frac{v^2}{r}$$

raggio di curvatura costante perché  $\vec{B}$  cost. per hp.,  $q$  e  $m$  cost.,  $\vec{v}$  non cambia in modulo perché la forza è centripeta

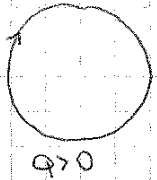
$$r = \frac{mv}{qB}$$
 circonferenza

Ma con che verso è descritta la circonferenza? Il verso è influenzato da  $\vec{B}$ .

$$\vec{F}_L = q\vec{v} \times \vec{B} = m\vec{\omega} \times \vec{v}$$

$$-q\vec{B} \times \vec{v} = m\vec{\omega} \times \vec{v} \rightarrow -q\vec{B} = m\vec{\omega} \rightarrow \vec{\omega} = -\frac{q\vec{B}}{m}$$

$q > 0$   $\vec{\omega}$  antiparalelo a  $\vec{B}$  moto orario  
 $q < 0$   $\vec{\omega}$  parallelo a  $\vec{B}$  moto antiorario.

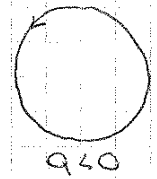


$\odot \vec{B}$  (uscente)

$\otimes \vec{B}$  (entrante)

$\otimes \vec{\omega}$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{qB}$$



$\odot \vec{B}$

$\odot \vec{\omega}$

Sia  $\omega$  sia  $T$  dipendono da  $B$  e da  $q/m$ , e non da  $r$  o da  $v$ , o da  $\theta$  quindi vale anche per  $\theta$  generico

$\theta$  generico

$\vec{B}$  uniforme,  $\vec{v}$ ,  $\vec{B}$



$$\vec{F}_L = q\vec{v} \times \vec{B} = q(\vec{v}_\perp + \vec{v}_\parallel) \times \vec{B} = q\vec{v}_\perp \times \vec{B}$$

$$F_L = qvB \sin \theta$$

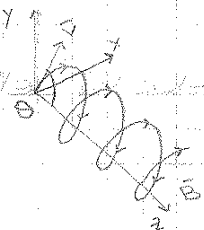
Abbiamo in un piano ortogonale a  $\vec{B}$  un moto circolare uniforme con velocità  $v_\perp$ . Il raggio di curvatura è  $r$ .

$$r = \frac{mv \sin \theta}{qB}$$

$$\omega$$
 è sempre  $\frac{qB}{m}$

Lungo  $\vec{B}$  non c'è forza  $\rightarrow$  moto rettilineo uniforme

moto circ. unif. nel piano  $\perp \vec{B}$  + moto rettil. unif. lungo  $\vec{B}$  = moto ELICOIDALE UNIFORME



## Forza magnetica su un conduttore percorso da corrente

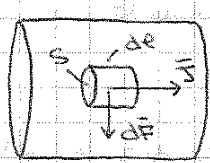
La corrente elettrica in un conduttore è dovuta al moto degli  $e^-$  sotto l'azione di  $\vec{E}$ .

Immaginiamo che un circuito sia attraversato da corrente. I portatori sono  $e^-$  applicato tramite un generatore.

$$\vec{J} = -ne\vec{v}_d$$

$n$ : numero di  $e^-$  per unità di volume

Isoliamo una parte infinitesima all'interno di un conduttore:



$$\vec{F}_L = -e\vec{v}_d \times \vec{B}$$

cariche per unità di volume

$dN$ : numero totale di portatori nella parte infinitesima

$$d\vec{F} = -e dN \vec{v}_d \times \vec{B} = -e n dV \vec{v}_d \times \vec{B} = \underbrace{-e n S dl}_{\vec{J}} \times \vec{B} = \vec{J} \times \vec{B} dV$$

$d\vec{F}$  è  $\perp$  alla direzione di  $\vec{J}$  e di  $\vec{B}$

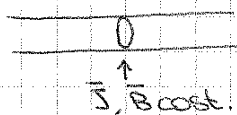
Gli  $e^-$  acquisiscono una velocità trasversale <sup>oltre</sup> rispetto a quella dovuta a  $\vec{J}$ , urtano gli ioni  $\rightarrow$  sul materiale conduttore agisce una forza che, per unità di volume, vale:

$$\vec{F}_V = \frac{d\vec{F}}{dV} = \vec{J} \times \vec{B} \quad \text{forza agente per unità di volume sul conduttore}$$

Caso 1: conduttore filiforme  $S$  piccolo rispetto a  $r$

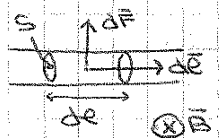
Proprio perché il conduttore è filiforme  $\rightarrow$

$\vec{J}$  ha lo stesso valore in tutti i punti, come  $\vec{B}$ , ma solo su ogni sezione, non in tutto il conduttore.



$\vec{J}, \vec{B}$  cost.

$$I = JS \rightarrow J = \frac{I}{S}$$



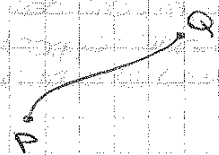
$$d\vec{F} = \vec{J} S d\vec{e} \times \vec{B} = I d\vec{e} \times \vec{B}$$

$= I$ , ma però il vettore  $\rightarrow d\vec{e}$  diventa un vettore con direz. e verso uguali a  $\vec{J}$

$d\vec{F} = I d\vec{e} \times \vec{B}$  seconda formula di Laplace

Questa formula ha solo un valore matematico perché non posso avere un tratto infinitesimo di filo nella realtà  $\rightarrow$  è detta "legge elementare".

Ma posso ricavare  $\vec{F}$  su un tratto finito di circuito.



$$\vec{F} = \int_P^Q d\vec{F} = I \int_P^Q (d\vec{e} \times \vec{B})$$

perché il regime è stazionario

Osservazioni: • Nella formula di Laplace compaiono  $I$  o  $\vec{J}$  che prescindono dal segno dei portatori  $\rightarrow \vec{F}$  non cambia direz. o verso se cambia il segno dei portatori

• oltre a  $v_d$  i portatori hanno anche una velocità di agitazione termica con direzione casuale e quindi una forza di Lorentz relativa con direz. casuale  $\rightarrow$  la  $F_L$  media legata all'agitaz. termica è nulla. Ecco perché un conduttore immerso in corrente non subisce forze.

un campo mag, ma non percorso da corrente

$$M = b \text{ sen } \theta \quad \text{e} \quad B = i S B \text{ sen } \theta$$

$\hookrightarrow ab$

$$M = m B \text{ sen } \theta$$

Momento magnetico della spira:  $\vec{m} = i S \vec{u}_n \rightarrow \vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$

$\hookrightarrow$  diretto come  $\vec{u}_n$

$\vec{u}_n \rightarrow$  l'angolo tra  $\vec{m}$  e  $\vec{B}$  è  $\theta$

$\leftarrow$  e concorde

La spira ruota in modo che  $\vec{m}$  vada a porsi // a  $\vec{B}$ . Infatti  $M = 0$  solo se

- $\theta = 0$  equilibrio stabile  $\rightarrow$  il flusso di  $\vec{B}$  è il massimo possibile
- $\theta = \pi$  " instabile

Vale per ogni circuito rigido disposto sul piano, di qualsiasi forma.

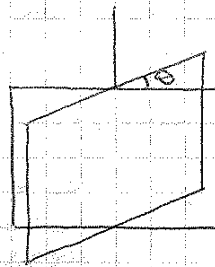
17 novembre 2011

Sospendiamo la spira rettangolare a un filo. Per semplicità  $\rightarrow$  omogenea e sospesa per il punto centrale di un lato. Centerà di orientarsi in modo che  $\vec{u}_n \parallel \vec{B}$ . Allontaniamola dalla posizione di equilibrio facendola ruotare di un angolo  $\theta$  (no attriti)  $\rightarrow$  tende a tornare alla posiz. di equilibrio

I momento di inerzia

$$M = -m B \text{ sen } \theta = I \alpha = I \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

$\hookrightarrow$  forza di richiamo (segno - come elastica)



$$-m B \text{ sen } \theta = I \frac{d^2 \theta}{dt^2} \rightarrow \frac{d^2 \theta}{dt^2} + m B \text{ sen } \theta \frac{1}{I} = 0 \quad \text{moto oscillatorio armonico}$$

$\downarrow$   
 $\sim \theta$

$$\omega = \sqrt{\frac{m B}{I}} \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{m B}}$$

Possiamo ricavare una def. operativa di  $\vec{B}$ , cioè con questo esperimento possiamo misurare  $\vec{B}$  in un punto dello spazio. Dalla misura del periodo troviamo  $|\vec{B}|$ . Possiamo trovare anche direzione e verso.

Il momento magnetico si misura in  $\text{Am}^2 \rightarrow [m] = [i][l^2]$

Un circuito piano immerso in  $\vec{B}$  si comporta come un ago magnetico: tende a orientarsi parallelamente a  $\vec{B}$ . Quindi esiste un'analogia tra un dipolo magnetico e un circuito percorso da corrente.

Principio di equivalenza di Ampere o spira-dipolo

Una spira infinitesima percorsa da corrente  $i$  e che racchiude una superficie  $ds$  è equivalente come effetti magnetici a un dipolo magnetico con  $d\vec{m} = i ds \vec{u}_n$  (diretto  $\perp$  al piano della spira e concorde alla sua <sup>elementare</sup> normale)

spira infinitesima  $\rightarrow$  se molto piccola  $\vec{B}$  in quell'area è uniforme. La risultante delle forze sulla spira è 0 solo se  $\vec{B}$  è uniforme. Altrimenti la spira, oltre a ruotare, trasla per effetto della forza magnetica.

Possiamo associare alla spira un'energia potenziale  $\rightarrow U_p = -\vec{m} \cdot \vec{B} = -m B \cos \theta$  (come per un dipolo elettrico, ma  $\vec{E}$  al posto di  $\vec{B}$ )

- $\theta = 0$  equilibrio stabile  $U_p = -m B$  (minima)
  - $\theta = \pi$  " instabile  $U_p = m B$  (massima)
- $M = - \frac{dU_p}{d\theta}$

Campo magnetico prodotto da un circuito percorso da corrente

Considero un tratto di circuito filiforme → tutte le grandezze omogenee sulla sezione del conduttore



Quanto vale  $\vec{B}$  in P?

$$d\vec{B} = \mu_0 \frac{i dl \times \vec{u}_r}{r^2}$$

dipende da sist. di rif. e mezzo

→ prima formula di Laplace...

↓ al piano di  $d\vec{e}$  e  $\vec{u}_r$   
 ↓ radice    ↓ radice    ↓ medio

$\mu_0 = \frac{\mu_0}{4\pi}$  permeabilità magnetica del vuoto

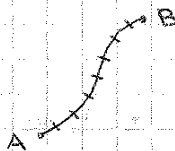
$$[\mu_0] = [B][e^2] \frac{1}{[i][l]} \rightarrow \frac{Vs}{Am} = \frac{\Omega s}{m} = \frac{H}{m} \quad |F| = qV_d B \rightarrow B = \frac{F_d}{qV_d} = \frac{E_H}{V_d} = \frac{V/m}{m/s}$$

$1 \Omega \cdot As = 1 \text{ Henry}$

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$

... detta anche legge elementare

vale il principio di sovrapposizione anche per il campo magnetico



$\vec{B} = \int d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_A^B \frac{d\vec{e} \times \vec{u}_r}{r^2}$  tratto aperto  
 regime staz.

$\oint d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint \frac{d\vec{e} \times \vec{u}_r}{r^2}$  circuito chiuso

Considero un tratto di circuito non filiforme →  $\vec{J}(x, y, z)$  ma  $\vec{J}$  costante su una sezione infinitesima.

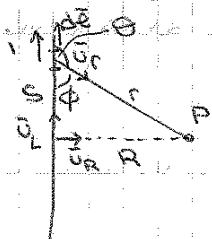


$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\int dS d\vec{e} \times \vec{u}_r}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{dV \vec{J} \times \vec{u}_r}{r^2}$$

sposto il carattere vettoriale perché  $d\vec{e}$  e  $\vec{J}$  hanno lo stesso verso

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J} \times \vec{u}_r}{r^2} dV$$

1° caso: filo rettilineo infinito...



Lo suddivido in tante parti infinitesime per applicare la prima formula di Laplace

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\vec{e} \times \vec{u}_r}{r^2} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{ds \sin\theta}{r^2} \vec{u}_\phi$$

senθ verso entrante nel piano

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R ds d\phi}{R^2} \frac{\sin\theta}{\sin\theta} \vec{u}_\phi = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \vec{u}_\phi$$

direz. e verso ⊥ al filo  
 inv. prop. a R  
 dir. prop. a i

Osservazioni:

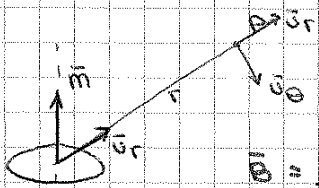
- $x$  compare al quadrato  $\rightarrow$  due punti simmetricamente opposti rispetto alla spirale hanno lo stesso  $\vec{B}$
- $x$  diminuisce  $\rightarrow B$  aumenta
- $x=0$  valore max di  $B \rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0}{2} \frac{1}{R} \vec{u}_x$
- Il verso di  $\vec{B}$  dipende dal verso di  $i$ ; al posto di  $\vec{u}_x$  si può scrivere  $\vec{u}_n$  vettore  $\perp$  al piano della spirale, scelto in base al verso di avanzamento di una vite.

S area sezione racchiusa dalla spirale

$$x \gg R \quad \vec{B} = \frac{\mu_0}{2} i \frac{R^2}{x^3} \vec{u}_n = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{R^2}{x^3} \vec{u}_n 2\pi = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\vec{m}}{x^3}$$

Ricorda il campo  $\vec{E}$  generato da un dipolo  $\rightarrow \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} [3(\vec{p} \cdot \vec{u}_r) \vec{u}_r - \vec{p}]$

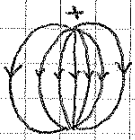
$\vec{u}_r \parallel \vec{p}$  (asse del dipolo)  $\rightarrow \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\vec{p}}{r^3}$



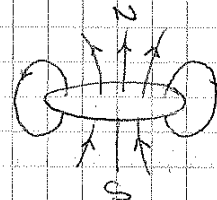
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} [3(\vec{m} \cdot \vec{u}_r) \vec{u}_r - \vec{m}] = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} [2m \cos\theta \vec{u}_r + m \sin\theta \vec{u}_\theta]$$

così ho dimostrato la seconda parte del princ. di equiv. di Ampère.

linee di forza di  $\vec{E}$



linee di forza di  $\vec{B}$





21 novembre 2011

Risultati trovati:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{d\vec{\ell} \times \vec{or}}{r^2} \quad \text{prima formula di Laplace che per un conduttore non}$$

$$\text{filiforme diventa } d\vec{B} = \frac{\vec{j} \times \vec{or}}{r^2} \frac{\mu_0 dv}{4\pi}$$

Applicata al caso del filo rettilineo infinito:

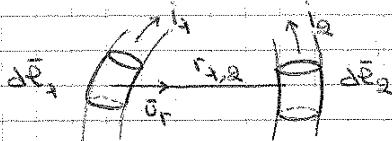
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i}{R} \underbrace{\vec{u}_\phi}_{\vec{u}_L \times \vec{u}_R} \quad \text{legge di Biot - Savart}$$

Applicata al caso della spira circolare:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2} \frac{R^2}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \underbrace{\vec{u}_n}_{\vec{u}_x}$$

Azioni elettrodinamiche tra circuiti percorsi da corrente

Calcoliamo la forza tra due circuiti percorsi da corrente. Prendiamo due tratti infinitesimi, ciascuno di un conduttore filiforme:



Il campo generato dal tratto infinitesimo del primo conduttore nel punto in cui si trova il tratto infinitesimo del 2° conduttore è:

$$d\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} i_1 \frac{d\vec{\ell}_1 \times \vec{or}}{r_{1,2}^2}$$

Allora la forza di cui risente il tratto del secondo conduttore a causa del campo magnetico prodotto dal primo è:

$$d\vec{F}_{1,2} = i_2 d\vec{\ell}_2 \times d\vec{B}_1$$

per la seconda formula di Laplace.

Se ho dei circuiti completi al posto di tratti infinitesimi:

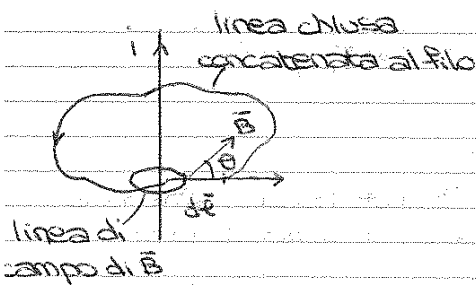
$$\vec{F}_{1,2} = \frac{\mu_0}{4\pi} i_1 i_2 \int_{\ell_1} \int_{\ell_2} \frac{d\vec{\ell}_2 \times (d\vec{\ell}_1 \times \vec{or})}{r_{1,2}^2} = -\vec{F}_{2,1}$$

Esaminiamo in particolare due fili rettilinei molto lunghi e paralleli  $\rightarrow d \gg r_{1,2}$   
 Se i conduttori sono molto lunghi possiamo trattarli come se fossero infiniti  
 $\rightarrow$  possiamo applicare la legge di Biot - Savart

## Legge di Ampère

Permette di mettere in relazione il campo magnetico con la sua sorgente, la carica, e, come la legge di Gauss, di determinare il campo magnetico nel caso di distribuzioni simmetriche di corrente. Vale per il caso stazionario.

Consideriamo un filo rettilineo infinito percorso da una corrente  $i$  che produce un campo magnetico  $\vec{B}$  dato dalla legge di Biot-Savart, una linea chiusa che concatena il filo, scegliamo un verso di percorrenza della linea e isoliamo un tratto infinitesimo. Quanto vale  $\vec{B} \cdot d\vec{e}$ ?



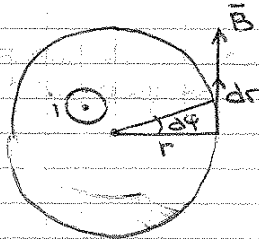
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i}{r} \vec{u}_\phi$$

$\vec{B}$  è in ogni punto  $tg$  alle linee di campo che sono circonferenze chiuse centrate sul filo.

$dr \rightarrow$  proiezione di  $d\vec{e}$  nella direzione di  $\vec{B}$

$$\vec{B} \cdot d\vec{e} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i}{r} \vec{u}_\phi \cdot d\vec{e} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i}{r} d\ell \cos\theta$$

Dall'alto



$dr$  è infinitesimo  $\rightarrow$  lo possiamo approssimare con un arco di circonferenza

$$dr = r d\phi$$

$$\vec{B} \cdot d\vec{e} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i}{r} r d\phi = \frac{\mu_0}{2\pi} i d\phi$$

La circuitazione di  $\vec{B}$  estesa ad una linea chiusa  $\vec{e}$ :

$$\Gamma = \oint \vec{B} \cdot d\vec{e} = \int \frac{\mu_0}{2\pi} i d\phi = \frac{\mu_0}{2\pi} i \int_0^{2\pi} d\phi = \mu_0 i \rightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{e} = \mu_0 i$$

Se avessimo scelto un verso orario, l'angolo tra  $d\vec{e}$  e  $\vec{B}$  sarebbe stato il supplementare di  $\theta \rightarrow$  segno  $- \rightarrow \Gamma = -\mu_0 i$

$+\mu_0 i$       angolo  $< \pi/2$       verso concorde con  $i$



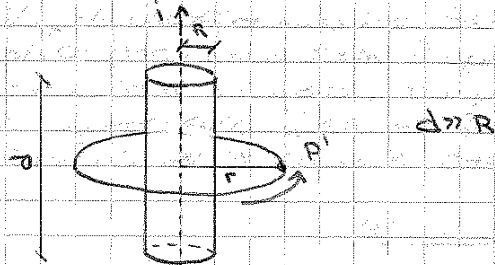
$-\mu_0 i$       angolo  $> \pi/2$       verso discorde con  $i$



## Applicazioni della legge di Ampère

### • filo rettilineo infinito

Consideriamo un conduttore cilindrico molto lungo in cui scorre una corrente  $i$ , omogenea ( $\rightarrow \vec{j}$  uguale in tutti i punti). Calcoliamo il campo magnetico in un punto  $P$  interno e in  $P'$  esterno al conduttore.



Scelgo la linea di circuitazione in modo che rispetti la simmetria: una circonferenza coassiale al conduttore in un piano  $\perp$  ad esso, passante per  $P'$ . Coincide con una linea di campo a cui  $\vec{B}$  è tangente. Scelgo il verso di percorrenza in modo che sia concorde con  $i$ . Così  $\vec{B} \parallel d\vec{\ell}$  in tutti i punti.

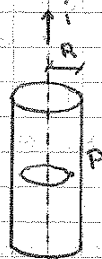
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int B d\ell$$

Tutti i punti sulla circonferenza hanno lo stesso campo magnetico perché si trovano alla stessa distanza dal conduttore.

$$\int B d\ell = B \int d\ell = B 2\pi r = \mu_0 i \rightarrow B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \text{ come dice la legge di Biot-Savart all'esterno}$$

verso di  $\vec{B} \rightarrow$  concorde col verso di percorrenza del filo (verso di scorrimento di  $i$ )  
 direzione di  $\vec{B} \rightarrow$  tangente alle circonferenze coassiali al conduttore.

È come se tutta la corrente scorresse in un conduttore filiforme sull'asse del conduttore cilindrico.



Per il punto interno scegliamo, come prima, una circonferenza.

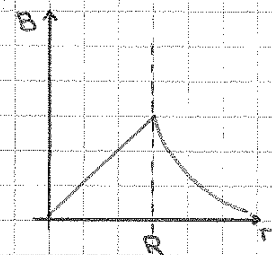
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int B d\ell = \underline{B 2\pi r} = \mu_0 i' \text{ come prima ma } r < R$$

$i'$  è la corrente che passa attraverso la linea di circuitazione scelta. Una parte di  $i$  fluisce al di fuori. Come trovo  $i'$ ?

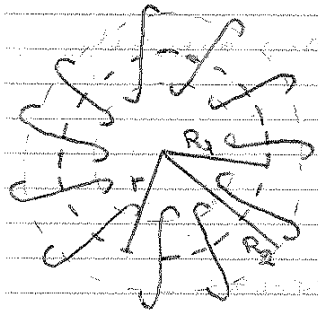
$$j = \frac{i}{\pi R^2} = \frac{i'}{\pi r^2} \rightarrow i' = i \frac{r^2}{R^2}$$

$$\rightarrow B = \frac{\mu_0 i'}{2\pi r} = \frac{\mu_0}{2\pi r} i \frac{r^2}{R^2} \rightarrow B = \frac{\mu_0 i r}{2\pi R^2}$$

(direz. e verso come prima) all'interno



• solenoide toroidale



La simmetria del problema suggerisce che le linee del campo magnetico all'interno del solenoide siano circonferenze con centro sull'asse del toroide e che il modulo di  $\vec{B}$  dipenda solo dalla distanza  $r$  dall'asse. Come linea per calcolare la circuitalità scelgo proprio una linea di campo di  $\vec{B}$ . (-----)

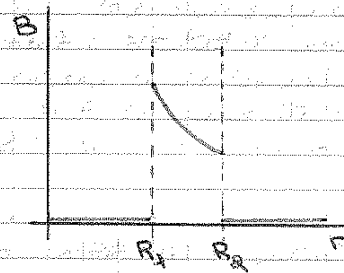
$R_1 < r < R_2$

$\oint \vec{B} \cdot d\vec{e} = \int B de = B \int de = B 2\pi r = \mu_0 i N$   
 ↳ su  $r$ ,  $B = \text{cost.}$

per la legge di Ampère

La circonferenza scelta concatenata tutte le spire.

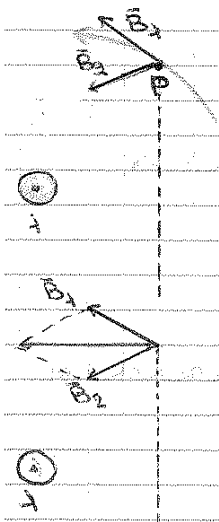
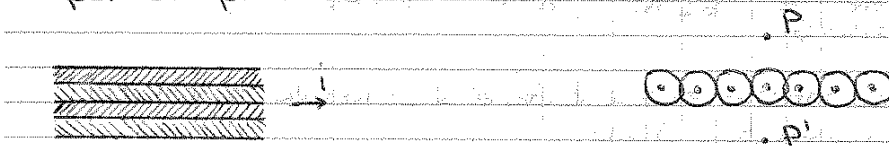
$B = \frac{\mu_0 i N}{2\pi r}$  decresce come  $1/r$



All'esterno  $B=0$  perché le linee si chiudono all'interno del solenoide

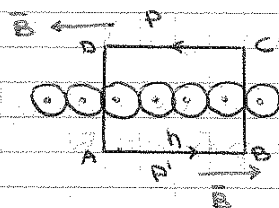
• corrente piana infinita

Molti fili rettilinei infiniti sono disposti, uno accanto all'altro, su una superficie piana.



$|\vec{B}_1| = |\vec{B}_2|$  perché  $i$  è la stessa e anche la distanza da P

Le loro componenti lungo l'asse sono uguali in modulo e opposte in segno. Allora  $\vec{B}$  è // alla superficie dei conduttori



$n$  spire concatenate (nel disegno sono 4)

$\oint \vec{B} \cdot d\vec{e} = \int_A^B + \int_B^C + \int_C^D + \int_D^A = Bh + Bh = 2Bh = \mu_0 i N$

$\rightarrow B = \frac{\mu_0 i N}{2h} \rightarrow B = \frac{\mu_0 i}{2} n = \frac{\mu_0 J_s}{2}$

$J_s$ , core  $i$ , è uscente  $\rightarrow \odot \vec{J}_s$

$J_s = in \quad J_s \rightarrow \frac{A}{m}$

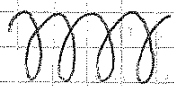
## Potenziale vettore

$\text{div } \vec{B} = \nabla \cdot \vec{B} = 0 \rightarrow \vec{B}$  si può scrivere come  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$  con  $\vec{A}$  potenziale vettore perché  $\text{div} [\text{rot} (\text{campo vettoriale})] = 0$

Tutte le formule viste possono essere scritte in termini di potenziale vettore.

## MAGNETISMO NELLA MATERIA

Supponiamo di inserire in un solenoide rettilineo infinito un mezzo diverso dal vuoto e misuriamo  $\vec{B}$  in questo mezzo.



$B_0$  valore nel vuoto  
 $B$  " " mezzo

$$\frac{B}{B_0} = \mu_r$$

$(\mu_r)$   
 permeabilità magnetica relativa  
 (adimensionale, dipende solo dalle proprietà del mezzo)

$$B = B_0 \mu_r = \mu_r \mu_0 n I$$

$\mu$  permeabilità magnetica assoluta (H/m)

$$B - B_0 = \mu_r B_0 - B_0 = B_0 (\mu_r - 1) = \chi_m B_0$$

variazione del campo magnetico dovuto alla presenza del mezzo

susceptività magnetica (adimensionale)

Se il mezzo è omogeneo, infinito e isotropo, valgono tutte le formule viste ma al posto di  $\mu_0$  metto  $\mu$ .

Per esempio la prima formula di Laplace diventa  $d\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{d\vec{e} \times \vec{r}}{r^2}$

Considereremo solo mezzi di questo tipo (amorfi).

$$B = \mu_r B_0 = (1 + \chi_m) B_0 = B_0 + \chi_m B_0 = \mu_0 n I + \mu_0 \chi_m n I$$

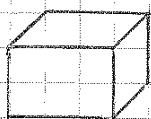
$\mu_0 n I \rightarrow$  campo magnetico prodotto dalla corrente di conduzione che scorre nelle spire del solenoide

$\mu_0 \chi_m n I \rightarrow$  effetto del mezzo magnetizzato, effetto identico a quello che sarebbe prodotto da un secondo solenoide coassiale al primo percorso da corrente di densità lineare  $\chi_m n I$ : (correnti ampèriane)

## Magnetizzazione e correnti ampèriane

Ogni atomo o molecola del mezzo interposto in  $\vec{B}$  presenta un momento magnetico medio non nullo  $\langle \vec{m} \rangle$ , o indotto da  $\vec{B}$  o, se già presente, c'è un allineamento del momento magnetico col campo magnetico.

Consideriamo un elemento infinitesimo di volume  $dV$  con un numero totale di portatori  $dN$



$$d\vec{m} = \langle \vec{m} \rangle dN \rightarrow \frac{d\vec{m}}{dV} = \langle \vec{m} \rangle \frac{dN}{dV} = \langle \vec{m} \rangle n = \vec{M}$$

$\vec{M}$  magnetizzazione (momento magnetico di una sostanza per unità di volume)

$\vec{M}$  può essere uniforme o meno. Vogliamo legare il fenomeno della magnetizzazione alla comparsa di correnti ampèriane o di magnetizzazione.

Legge di Ampère in un mezzo

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 (i + i_m)$$

↳ correnti di magnetizzazione  
↳ correnti di conduzione

forma integrale  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 (i + i_m)$

forma locale  $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}_m)$

se il mezzo è omogeneo e isotropo

Altrimenti è difficile capire come sono dirette e quanto valgono le correnti di magnetizzazione. Allora si introduce un nuovo vettore:

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}_m) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \vec{j}_m = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \text{rot } \vec{M} \rightarrow \text{rot} (\vec{B} - \mu_0 \vec{M}) = \mu_0 \vec{j}$$

$$\vec{B} - \mu_0 \vec{M} = \mu_0 \vec{H} \rightarrow \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

campo magnetizzante o campo H

È un vettore che ha il rotore dipendente solo dalle proprietà delle correnti di conduzione.

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j}$$

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = i$$

legge di Ampère per il campo H

$$\text{rot } \vec{M} = \vec{j}_m \Rightarrow \oint \vec{M} \cdot d\vec{\ell} = i_m$$

$$\oint \vec{B} \cdot \vec{n} dS = 0 \quad \text{div } \vec{B} = 0$$

chiusa

eqz di Maxwell per la magnetostatica

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = i \quad \text{rot } \vec{H} = \vec{j}$$

Ma dobbiamo legare  $\vec{B}$  e  $\vec{H} \rightarrow \vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$

$\downarrow$   $\downarrow$   
 $A_m$   $A'_m$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad \text{vale per la maggior parte dei materiali magnetici} \\ \vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \chi_m \vec{H}) = \mu_0 K_m \vec{H} = \mu \vec{H} \end{array} \right.$$

eqz di stato di un mezzo magnetizzato (legge  $\vec{B}, \vec{H}, \vec{M}$ )

Per avere il legame tra  $\vec{B}$  e  $\vec{M} \rightarrow \vec{B} = \mu_0 \vec{M} \left( \frac{1}{\chi_m} + 1 \right)$

A seconda di  $\chi_m$  esistono 3 classi di materiali:

- DIAMAGNETI
  - PARAMAGNETI
  - FERROMAGNETI
- } valgono tutte le relazioni

Ferromagneti (Fe, Ni, leghe, cobalto)

Inseriamo nel solenoide toroidale un materiale ferromagnetico.

$$\chi_m \gg 0 \rightarrow K_m \gg 1$$

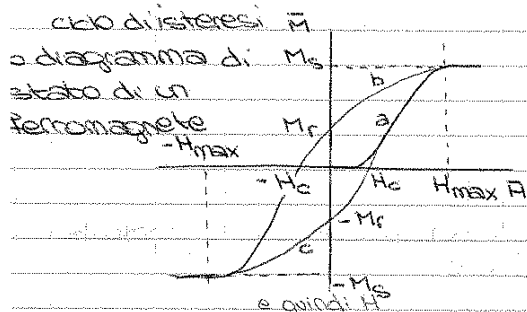
$$10^3 - 10^5$$

Facciamo variare la corrente che scorre nelle spire del solenoide toroidale, quindi facciamo variare  $\vec{H}$ .

Scelgo come linea di circuitazione una circonferenza concentrica al toroide, che coincide con una linea di campo di  $\vec{H}$ .

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = i \rightarrow H = \frac{iN}{2\pi r}$$

Vediamo come varia  $\vec{M}$  al variare di  $i$  e, quindi, di  $\vec{H}$ .



ciclo di isteresi  $\vec{M}$   
o diagramma di  $M_s$   
stato di un  
ferromagnete

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

↓  
 $\chi_m(\vec{H})$

stato vergine → il materiale non è mai stato magnetizzato

$H$  cresce → curva di 1<sup>a</sup> magnetizz. a  $H > H_{max} \rightarrow M = M_{sat} = cost$

$M(H_{max}) =$  magnetizzazione di saturazione

$\mu, K_m, \chi_m$  sono funzioni di  $H$

Diminuendo  $i$ , il percorso seguito è diverso →  $b \neq a$  → il valore di  $\vec{M}$  non è univoco →  $\chi_m(H)$  non è univoco. b si mantiene sopra ad a

$\vec{M}$  non torna a zero → ottengo un magnete permanente, magnetizzato anche in assenza di corrente. Per annullare la magnetizzazione bisogna invertire il senso della

$-H_c$  → campo coercitivo → solo per  $H = -H_c$  ottengo  $M = 0$  corrente e far  
Oltre  $-H_{max} \rightarrow M = -M_{sat} = cost$  scende  $H$  a  $H_c$

Aumento la corrente dal punto  $(-H_{max}, -M_s)$  fino a  $(H_{max}, M_s)$  → curva c

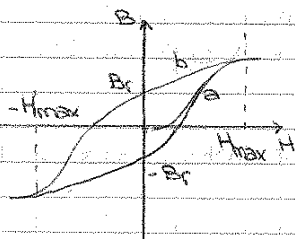
Se mi fermo ad un  $\vec{H} < \vec{H}_{max}$  la curva percorsa diminuendo la corrente è ancora diversa.

Posso ottenere qualsiasi valore di  $\vec{M}$  tra le curve a e b, facendo variare  $H$  tra  $H_{max}$  e  $-H_{max}$

$\chi_m$  varia con  $H$  e con la storia particolare del materiale.

La magnetizzazione di una sostanza ferromagnetica varia con la sua storia e con  $H$ .  
 $M \gg H$

Vediamo come varia  $\vec{B} = \mu_0(\vec{M} + \vec{H})$ ; poiché  $M \gg H$ , l'andamento di  $B$  sarà molto simile a quello di  $\vec{M}$ .

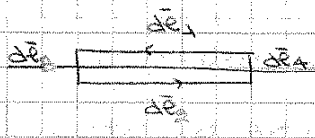


anche  $B$  ha un ciclo di isteresi

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad \text{ma } \mu = \mu_0(\chi_m + 1) \rightarrow \text{anche } \mu(H) \rightarrow \text{anche } \mu \text{ è funzione di } \vec{H}$$

Discontinuità dei campi  $\vec{B}$  e  $\vec{H}$  sulla superficie di separazione tra due mezzi magnetizzati.

1  $\chi_{m1}, \kappa_{m1}$



Come per una superficie piana percorsa da corrente, anche nel passaggio tra due mezzi magnetizzati si conserva la componente normale, mentre quella tangenziale subisce una discontinuità.

2  $\chi_{m2}, \kappa_{m2}$

Valore ancora  $B_{1n} = B_{2n}$

$B_{2t} - B_{1t} = \mu_0 J_{s,m}$

Cosa succede ad  $\vec{H}$ ? Scegliamo come percorso di circuitazione un rettangolo

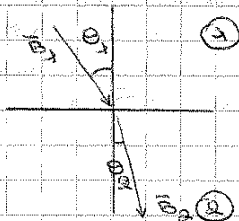
$d\vec{e}_3, d\vec{e}_4 \ll d\vec{e}_1, d\vec{e}_2$        $d\vec{e}_1 = -d\vec{e}_2$

non ci sono correnti di conduzione concatenate

Allora:  $\vec{H}_1 \cdot d\vec{e}_1 + \vec{H}_2 \cdot d\vec{e}_2 + \vec{H}_3 \cdot d\vec{e}_3 + \vec{H}_4 \cdot d\vec{e}_4 = 0 \rightarrow -H_{1t} d\vec{e}_2 + H_{2t} d\vec{e}_2 = 0$   
 $\rightarrow H_{1t} = H_{2t}$  trascurabili

La componente tangenziale di  $H$  si conserva al passaggio tra due mezzi magnetizzati.

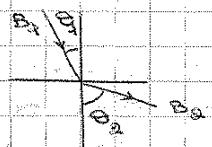
$B_{1n} = B_{2n}$  perché  $\vec{B} = \mu \vec{H} = \mu_0 \kappa_m \vec{H}$   
 $H_{1t} = H_{2t} \rightarrow \frac{B_{1t}}{\mu_0 \kappa_{m1}} = \frac{B_{2t}}{\mu_0 \kappa_{m2}} \rightarrow \frac{B_{1t}}{\kappa_{m1}} = \frac{B_{2t}}{\kappa_{m2}}$



$B_1 \cos \theta_1 = B_2 \cos \theta_2$   
 $\frac{B_1 \sin \theta_1}{\kappa_{m1}} = \frac{B_2 \sin \theta_2}{\kappa_{m2}}$

divido le due equazioni  $\rightarrow \frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\kappa_{m1}}{\kappa_{m2}}$  legge della rifrazione delle linee di campo del campo magnetico

Se  $\kappa_{m1} \ll \kappa_{m2}$  param. ferrom  $\rightarrow \theta_1 \ll \theta_2$



le linee si allontanano dalla normale

L'applicazione di ciò sono gli schemi magnetici  $\rightarrow$  sotto al mezzo 2 metto il mezzo 1 dove non arriva  $\vec{B}_2$ .



Cause della variazione di  $\Phi(\vec{B})$  concatenato al circuito: basta che vari uno dei tre termini di  $\int_S \vec{B} \cdot \vec{u}_n ds$

(1) circuito rigido che si muove in un  $\vec{B}$ , le sorgenti di  $\vec{B}$  sono fisse cioè  $\vec{B}$  non varia nel tempo

$\vec{B}$  uniforme  $\rightarrow$  moto traslatorio  $\rightarrow \Phi(\vec{B})$  non varia  $\rightarrow$  unico caso  
 $\vec{B}$  non uniforme  $\rightarrow \Phi(\vec{B})$  varia perché può variare l'angolo tra  $\vec{B}$  e  $\vec{u}_n$

(2) sorgenti di  $\vec{B}$  fisse, ma il circuito si deforma in tutto o solo in parte (braccio mobile)  $\rightarrow$  cambia la superficie che ha come contorno il circuito  $\rightarrow$  varia  $\Phi(\vec{B})$

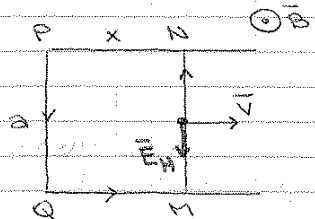
(3) circuito fisso e rigido, sorgenti di  $\vec{B}$  in movimento (muoviamo il magnete)  $\rightarrow \Phi(\vec{B})$  varia tranne nel caso di  $\vec{B}$  uniforme e moto traslatorio

(4) circuito fermo e rigido, sorgenti di  $\vec{B}$  ferme, varia la permeabilità magnetica del mezzo in cui è immerso il circuito  $\rightarrow$  varia  $\vec{B} \rightarrow$  varia  $\Phi(\vec{B})$

(5) circuito fermo e rigido, sorgenti di  $\vec{B}$  ferme, permeabilità magnetica costante,  $B(t)$  varia nel tempo

(1) e (2)  $\rightarrow$  legati al circuito (a)  $\rightarrow$  si giustifica usando la forza di Lorentz  
 (3), (4) e (5)  $\rightarrow$  legati a  $\vec{B}$  (b)  $\rightarrow$  fenomeno nuovo

(a) circuito formato da tre lati rigidi e da un braccio mobile  
 $x$  varia nel tempo  
 MNPQ  $\rightarrow$  sede di una fem indotta



$$\mathcal{E}_i = - \frac{\partial \Phi(\vec{B})}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = - \frac{\partial B}{\partial t} ax$$

$\vec{B}$  è cost. per NP

Solo  $x$  varia nel tempo  $\rightarrow \mathcal{E}_i = (Ba) \left( - \frac{\partial x}{\partial t} \right) = - Bav$

$\mathcal{E}_i$  è legata alla forza di Lorentz:

Un  $e^-$  sul ramo MN sarà soggetto a  $\vec{F}_L = -e\vec{v} \times \vec{B}$

Possiamo definire un campo di Hall:

$$\vec{E}_H = \frac{\vec{F}_L}{-e} = \vec{v} \times \vec{B} \quad \text{diretto verso il basso}$$

La fem associata a  $\vec{E}_H$ ,  $\mathcal{E}_H$  è:  $\mathcal{E}_H = \oint \vec{E}_H \cdot d\vec{e} = \int_M^N \vec{E}_H \cdot d\vec{e}$

(gli altri rami sono fermi)

$$|\vec{E}_H| = vB$$

Scelgo il verso di circuitazione concorde con  $\vec{B} \rightarrow$  antiorario  $\rightarrow$  l'angolo tra  $\vec{E}_H$  e  $d\vec{e}$  è  $\pi \rightarrow$  segno meno

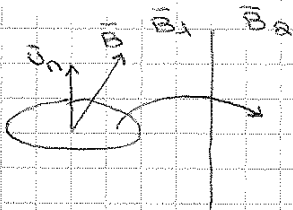
$$\mathcal{E}_H = - \int_M^N E_H d\ell = -vBa$$

La porzione a dx è ancora immersa in  $\vec{B}$  → dove scorre una corrente in  $\vec{B}$  c'è una forza frenante, che si oppone alla velocità.  
 Anche nella porzione a sx c'è una forza frenante.  
 Si usa nei freni elettromagnetici delle metropolitane.  
 Ogni volta che il pendolo entra e esce da  $\vec{B}$  viene frenato.

Che percorsi seguono le correnti in un conduttore esteso? Coincidono con le linee di forza del campo elettrico indotto. Questo giace sempre su un piano  $\perp$  al  $\vec{B}$  la cui variazione lo ha indotto. Nell'es. è sul piano della lavagna. Le linee di forza di  $\vec{E}_i$  concatenano le linee di forza di  $\vec{B}$  inducente. Se  $\vec{B}$  è uniforme → rette equidistanziate.  
 $\vec{E}_i$  → circonferenze.

Legge di Faraday: carica che fluisce nella spira

Una spira è immersa in un campo magnetico qualsiasi. La spostiamo da una zona con  $\vec{B}_1$  ad una con  $\vec{B}_2$ .



Ci sono delle correnti indotte  $i = -\frac{1}{R} \frac{\partial \Phi(\vec{B})}{\partial t}$

$$\frac{dq}{dt} = i \rightarrow i dt = -\frac{1}{R} \frac{\partial \Phi(\vec{B})}{\partial t} dt \rightarrow dq = -\frac{1}{R} \partial \Phi(\vec{B})$$

$$\int_0^q dq = -\frac{1}{R} \int_{\Phi_i}^{\Phi_f} d\Phi(\vec{B}) \rightarrow q = -\frac{1}{R} (\Phi_f(\vec{B}) - \Phi_i(\vec{B}))$$

La carica complessiva dipende solo dalla variazione del flusso.

$E - Ri = L \frac{di}{dt}$  eqz. diff. del 1° ordine a variabili separabili:

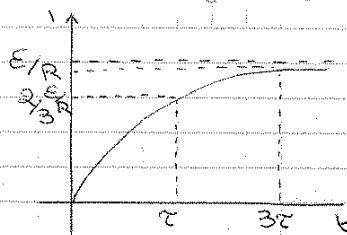
$\int_0^i \frac{di}{E - Ri} = \int_0^t \frac{dt}{L}$   $t=0 \rightarrow$  chiudo il tasto  $\rightarrow i$  era 0

$-\frac{1}{R} [\ln(E - Ri)]_0^i = \frac{t}{L} \rightarrow \ln \frac{E - Ri}{E} = -\frac{R}{L} t \rightarrow E - Ri = E e^{-\frac{R}{L} t}$

$i = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$  dove  $\tau = \frac{L}{R}$

$\tau$  è un tempo caratteristico del circuito:  $\frac{\Omega \cdot s}{\Omega} = s$

Quando chiudo T, i non va subito a  $\frac{E}{R}$  ma segue questo andamento: i tende asintoticamente al valore di regime  $i_{\infty} = \frac{E}{R}$  corrispondente alla legge di Ohm per le correnti costanti.



$\tau \rightarrow \frac{2}{3}$  del valore finale  
 $3\tau \rightarrow 95\%$  "

$i = \frac{E}{R} - \frac{E}{R} e^{-t/\tau}$   
 ↳ termine dovuto all'autoinduzione  
 ↳ termine che ci aspettiamo senza l'autoinduzione

segno meno  $\rightarrow$  Lenz  $\rightarrow$  la corrente circola in verso opposto per opporsi all'aumento di  $\phi(\vec{B}) \rightarrow$  si chiama extracorrente di chiusura

Ora apriamo il tasto: la corrente non piomba a zero

$t < 0 \quad i = i_{\infty} = \frac{E}{R}$

$t = 0 \quad$  apro il tasto  $\rightarrow E = 0 \rightarrow E_L = Ri$  ma  $E_L = -L \frac{di}{dt}$

$-L \frac{di}{dt} = Ri$  eqz. diff. del 1° ordine a variabili separabili

$\frac{di}{i} = -\frac{R}{L} dt$  ma  $R$  è maggiore di prima perché le cariche devono fluire in aria per attraversare il circuito dove T è aperto

$\int_{i_{\infty}}^i \frac{di}{i} = \int_0^t \frac{R'}{L} dt \quad R' > R$

$\ln \frac{i}{i_{\infty}} = -\frac{R'}{L} t \rightarrow i = i_{\infty} e^{-\frac{R'}{L} t}$  dove  $\tau' = \frac{L}{R'}$

ma  $i_{\infty} = \frac{E}{R} \rightarrow i = \frac{E}{R} e^{-\frac{R'}{L} t}$

La corrente scende a zero come un'esponenziale decrescente.

$$L = \frac{1}{i} \left[ \int_S B ds \right] N = \frac{1}{i} B \left( \int_S ds \right) N = \frac{1}{i} \mu_0 \frac{N^2}{l} NS = \mu_0 \frac{N^2 S}{l} = \mu_0 n^2 l S$$

Alora  $U_L = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 l S i^2$   $lS = \text{volume } V$

ma  $(\mu_0 n i)^2 = B^2 \rightarrow U_L = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} V$

Possiamo definire una densità di energia contenuta nel solenoide per unità di volume.

$$u_m = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}$$

Vale sempre: dove c'è un  $\vec{B}$ , c'è  $u_m$ .

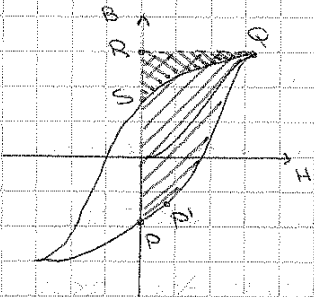
Se  $u_m$  è funzione di  $x, y, z \rightarrow U_m = \int_V u_m(x, y, z) dV$

Se il materiale non è il vuoto, sostituisco, a  $\mu_0$ ,  $\mu_0 \kappa_m$ . Per i ferromagnetici però, la permeabilità magnetica non è costante  $\rightarrow$  l'energia assorbita dipende dalla storia del sistema vediamo come si modifica.

$$u_m = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} = \frac{1}{2} \mu_0 H^2 = \frac{1}{2} BH$$

$$u_m = \frac{1}{2} \mu H^2$$

$\mu$  varia da pto a pto e in un punto può avere valori diversi. È la pendenza  $\rightarrow \mu = \frac{dB}{dH}$



Facciamo variare  $H$  di un infinitesimo  $\rightarrow$  varia  $B$  e varia  $\mu$

$$du_m = \frac{1}{2} \frac{dB}{dH} dH dH = H dB$$

$$B_P \rightarrow B_Q$$

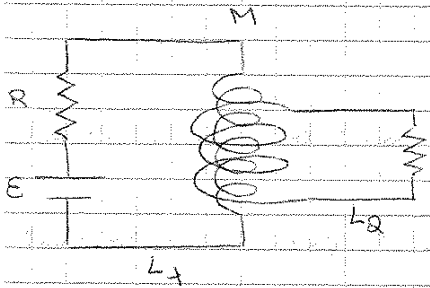
$$u_m = \int du_m = \int_P^Q H dB = \text{area } PQR > 0 \text{ perché } B \text{ cresce}$$

Ora vado a diminuire  $H$

$$u_m' = \int du_m = \int_Q^S H dB = \text{area } SQR < 0 \text{ perché } B \text{ diminuisce}$$

Sommando algebricamente  $u_m$  e  $u_m'$ , il bilancio energetico non è 0 ( $u_m > u_m'$ )  
 Compio più lavoro di quanto non mi sia restituito

$$u_m - u_m' = \text{area } PQS$$



$$\begin{cases} E + \mathcal{E}_{L_1} + \mathcal{E}_M = R_1 i_1 & \text{primo circuito} \\ \mathcal{E}_{L_2} + \mathcal{E}_M = R_2 i_2 & \text{secondo circuito (non c'è un generatore)} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_M &= - \frac{\partial \Phi_1(\vec{B}_2)}{\partial t} & \text{1° circuito} \\ &= - \frac{\partial M i_2}{\partial t} = - M \frac{d i_2}{d t} & \text{supponiamo M costante} \end{aligned}$$

Riscriviamo le equazioni:

$$\begin{cases} E = L_1 \frac{d i_1}{d t} + M \frac{d i_2}{d t} + R_1 i_1 \\ 0 = L_2 \frac{d i_2}{d t} + M \frac{d i_1}{d t} + R_2 i_2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{sistema di equazioni differenziali accoppiate} \\ \text{Il termine di accoppiamento è quello con M} \end{array}$$

Se nel 2° circuito c'è una corrente  $i_2$  è solo grazie alla mutua induzione, perché c'è uno scambio di energia tra i due circuiti e non c'è un generatore. Vediamo facendo un bilancio energetico: mediante un B variable

$$\underbrace{E i_1 dt}_{\text{lavoro del generatore nel tempo } dt} = \underbrace{R_1 i_1^2 dt}_{\text{una parte è dissipata come calore su } R_1 \text{ per effetto Joule}} + \underbrace{L_1 d i_1 i_1}_{\text{una parte fa aumentare } i_1 \text{ di } d i_1} + \underbrace{M d i_1 i_2}_{\text{una parte fa aumentare } i_2 \text{ di } d i_2}$$

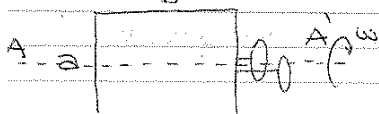
$$U_L = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2 \quad \text{energia intrinseca immagazzinata dalla coppia di circuiti}$$

Il trasformatore elettrico si basa sulla mutua induzione: riceve dalla rete esterna tensioni elevate e correnti basse e genera tensioni basse e correnti alte.  $\lambda$  è la corrente,  $\gamma$  è la dissipazione

### Forza elettromotrice a correnti alternate

Esercizio-esempio

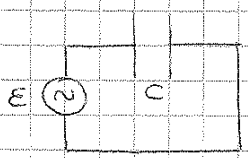
Solenoido compatto rettangolare (la lunghezza del solenoide è piccola rispetto alle spire) con N spire



flusso magnetico concatenato con la bobina in funzione del tempo  $\rightarrow \Phi(\vec{B}) = ?$   
 $\Delta V = ?$

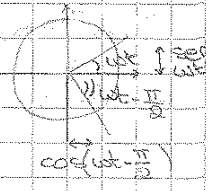
$\otimes \vec{B}$

3° caso: condensatore C



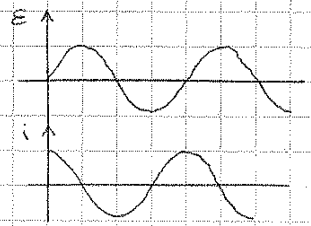
$$i = I_0 \cos \omega t \quad i = \frac{dq}{dt}$$

$$V_C = \frac{q}{C} = \int i dt = \frac{I_0}{\omega C} \sin \omega t = \frac{I_0}{\omega C} \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right)$$



$V_C$  non è in fase con la corrente, ma è in ritardo rispetto alla corrente di  $\pi/2$ .

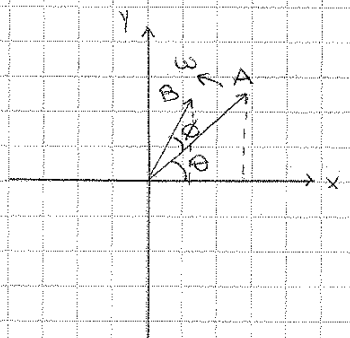
$$E = V_C = \frac{I_0}{\omega C} \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right) \rightarrow E_C \text{ è in quadratura di fase}$$



$\frac{1}{\omega C} \rightarrow$  REATTANZA CAPACITIVA

Come riusciamo a sommare gli effetti nel circuito RLC in serie?

Come sommiamo le varie grandezze per trovare il ritardo di fase?  
Col metodo dei vettori rotanti o fasori:

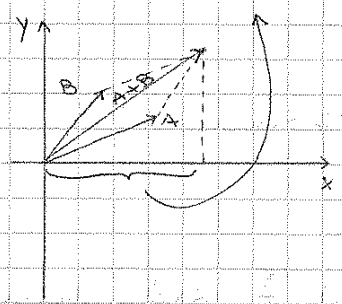


un punto descrive un moto circolare uniforme  
la sua proiezione sugli assi dà un moto armonico  
Prendiamo un vettore centrato nell'origine e moduli A e B facciamo rotare

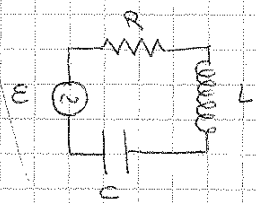
$$A \cos \omega t \quad \omega t$$

$$B \cos (\omega t + \phi) \quad \omega t + \phi$$

$$A \cos \omega t + B \cos (\omega t + \phi)$$



Circuito RLC in serie



$$E = V_R + V_L + V_C$$

$$i = I_0 \cos \omega t$$

Scrivo l'equazione del circuito:

$$0 = V_R + V_L + V_C = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{q}{c} \rightarrow \int i dt$$

Deriviamo tutte le grandezze nel tempo:

$$0 = L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{c} \quad \text{eqz. diff. del II ordine omogenea a coeff. costanti}$$

È come l'eqz. di un oscillatore armonico smorzato:

$$\frac{1}{LC} \rightarrow \text{costante elastica} \quad \frac{R}{L} \rightarrow \text{attrito viscoso}$$

Divido per L:

$$0 = \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad \text{frequenza propria di oscillazione del circuito}$$

$$i = A e^{k_1 t} + B e^{k_2 t}$$

A, B costanti che dipendono solo dalle condiz. iniziali.  
 $k_1, k_2$  soluzioni dell'equazione

$$i = e^{k t} \quad \text{la sostituisco} \rightarrow 0 = L k^2 e^{k t} + R k e^{k t} + \frac{e^{k t}}{c} = 0 \quad \text{eqz. caratteristica}$$

$$k = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - 4LC}}{2L} = \frac{-R \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}}{2L}$$

$$\gamma = \frac{R}{2L} \rightarrow \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

1° caso:  $\gamma^2 > \omega_0^2$  soluzioni reali e negative

$$k_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

somma di due esponenziali decrescenti

$$k_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

Non c'è oscillazione

2° caso:  $\gamma^2 = \omega_0^2$  soluzioni reali, uguali e negative

$$k_1 = k_2 = -\gamma \rightarrow i = e^{-\gamma t} (A + Bt) \quad \text{esponenziale decrescente}$$

La corrente, anche qui, decresce verso zero

3° caso:  $\gamma^2 < \omega_0^2$  soluzioni complesse e coniugate

$$k = -\gamma \pm \sqrt{-(\omega_0^2 - \gamma^2)} = -\gamma \pm i \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

$$k_1 = -\gamma + i \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

esponenziale di una grandezza immaginaria

$$k_2 = -\gamma - i \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

per le formule di Eulero  $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$

## Regime non stazionario

• legge di Ampère  $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$   $\text{div rot } \vec{B} = 0$   $\mu_0 \text{div } \vec{J} = 0$

$\text{div } \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$  eqz di continuità della corrente elettrica

Vediamo come si modifica, sfruttando la legge di Gauss:

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{div } \vec{J} = -\frac{\partial}{\partial t} (\underbrace{\epsilon_0}_{\text{cost.}} \text{div } \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} \text{div}(\underbrace{\vec{E} \cdot \epsilon_0}_{\text{derivata spaziale}}) = -\text{div} \left( \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \epsilon_0 \right) = -\text{div} \left( \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

$\rightarrow \text{div} \left( \vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0$  ma non ho fatto nessuna ipotesi, quindi questo risultato vale sempre

Posso sostituire a  $\mu_0 \vec{J}$  questa nuova espressione:

$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$  legge di Ampère-Maxwell

- (1) Ci sono altre sorgenti di  $\vec{B}$ : le correnti di conduzione e le variazioni temporali del campo elettrico
- (2)  $\mu_0 \sim 10^{-7}$ ,  $\epsilon_0 \sim 10^{-12}$   $\rightarrow$  se le variazioni di  $\vec{E}$  non sono rilevanti il contributo del secondo termine è trascurabile.

Il secondo termine, dimensionalmente, è una densità di corrente: densità di correnti di spostamento  $\vec{J}_s$

In forma integrale la legge di Ampère era  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{e} = \mu_0 i$ . La legge per il caso non stazionario diventa:

$\oint \vec{B} \cdot d\vec{e} = \mu_0 (i + i_s)$

$i_s = \int_S \vec{J}_s \cdot \vec{u}_n ds = \text{flusso di } \vec{J}_s \text{ attraverso la superficie} = \int_S \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{u}_n ds =$

$= \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{E} \cdot \vec{u}_n ds = \epsilon_0 \frac{\partial \Phi(E)}{\partial t}$



### Esercizio su $\vec{j}_s$

Le armature di un condensatore piano sono allontanate con  $v_{\text{cost}} = 1 \text{ mm/s}$  e tenute connesse ad una batteria da 60 V. Determinare  $\vec{j}_s(t)$  presente tra le armature, trascurando le disomogeneità ai bordi, e  $\vec{j}_s$  per  $t = 1 \text{ s}$ . Si ipotizzi che per  $t=0$  le armature siano pressoché a contatto.

condensatore ad armature piane parallele  $\rightarrow E = \frac{V}{d} = \frac{V}{vt}$

Derivo E rispetto al tempo:  $\frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{V}{vt^2}$

$\vec{j}_s = -\frac{\epsilon_0 \nabla V}{vt^2} \hat{u}_n$  segno meno  $\rightarrow \vec{j}_s$  antiparallelo ad  $\vec{E}$

$$\vec{j}_s = 5,31 \cdot 10^{-7} \text{ A/m}^2$$

### Le equazioni di Maxwell (forma integrale e differenziale)

(1) LEGGE DI GAUSS: mette in relazione  $\vec{E}$  con la sua sorgente

$$\oint (\vec{E}) \cdot d\vec{e} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad \text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

(2) Dice che  $\vec{B}$  è solenoidale

$$\oint (\vec{B}) \cdot d\vec{e} = 0 \quad \text{div } \vec{B} = 0$$

(3) LEGGE DI FARADAY: fonte di  $\vec{E}$  sono anche le variazioni temporali di  $\vec{B}$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{e} = -\frac{\partial \Phi(\vec{B})}{\partial t} \quad \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

(4) LEGGE DI AMPÈRE - MAXWELL

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{e} = \mu_0 \left( i + \epsilon_0 \frac{\partial \Phi(\vec{E})}{\partial t} \right) \quad \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

Combinando 1 e 4 trovo l'eqz di continuità della corrente

Campo elettrico e magnetico sono due aspetti di un'unica interazione, quella elettromagnetica, che ha origine dall'esistenza della carica elettrica.

Le eqz. di Maxwell sono invarianti se passiamo da un sistema inerziale ad un altro usando le trasformate di Lorentz. (si adattano anche per  $v < c$ )

Nella materia bisogna considerare  $\vec{j}_m$  e  $q_p$

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho + \rho_p}{\epsilon_0} \quad \text{div } \vec{D} = \rho \quad \text{si scrive così la (1) nella materia}$$

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad \text{la (2) e la (3) non cambiano}$$

$$\text{rot } (\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

## Onde elettromagnetiche

Nelle eqz. di Maxwell  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  hanno sempre potenza  $\neq 0 \rightarrow$  vale il principio di sovrapposizione.

Un'onda è una perturbazione impulsiva o periodica che si propaga nello spazio o nel tempo con una certa velocità.

Perturbazione di una condizione di equilibrio di un campo che descrive una proprietà di un sistema fisico.

Non si parla di onde elettriche o magnetiche perché  $\vec{E}$  è ineliminabile da  $\vec{B}$  si propagano anche in vuoto.

Studieremo le onde piane, ma le proprietà sono generali.

Ipotesi: mezzo omogeneo isotropo indefinito, non ci sono cariche libere né correnti di conduzione (e)  $\rho = 0$   
 per semplificare trascuriamo gli effetti di bordo  $\vec{j} = 0$

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \rightarrow (A) \text{ div } \vec{E} = 0$$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

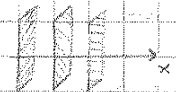
$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{rot } \vec{B} = \mu \left( \vec{j} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \rightarrow (B) \text{ rot } \vec{B} = \mu \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Onda piana: scelto un piano  $\perp$  alla direzione di propagazione l'onda ha lo stesso valore in tutti i punti.

es: scelta  $x$ , l'onda ha lo stesso valore in ogni  $y, z$

Quindi l'onda dipende solo da  $x$  e dal tempo:



$$\vec{E}(x, t)$$

$$\vec{B}(x, t)$$

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

$$\text{div } \vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

$$\text{rot } \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}, \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}, \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right)$$

$$\begin{matrix} \textcircled{3} & \textcircled{4} & \textcircled{5} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ -\frac{\partial B_x}{\partial t} & -\frac{\partial B_y}{\partial t} & -\frac{\partial B_z}{\partial t} \end{matrix}$$

$$\text{rot } \vec{B} = \left( \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}, \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}, \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right)$$

$$\begin{matrix} \textcircled{6} & \textcircled{7} & \textcircled{8} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \epsilon \mu \frac{\partial E_x}{\partial t} & \epsilon \mu \frac{\partial E_y}{\partial t} & \epsilon \mu \frac{\partial E_z}{\partial t} \end{matrix}$$

$\vec{E}$  non dipende, come  $\vec{B}$ , né da  $y$  né da  $z \rightarrow$  elimino dei termini, quelli dove derivo  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  rispetto a  $y$  e a  $z$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} = 0 \quad \textcircled{2} \quad \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \quad \textcircled{4}$$

$$E_x = \text{cost} = 0$$

ma non è l'eqz. di un'onda che si propaga

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = 0 \quad \textcircled{3} \quad \frac{\partial E_x}{\partial t} = 0 \quad \textcircled{6}$$

$$B_x = \text{cost} = 0$$