



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO : 407

DATA : 02/11/2012

A P P U N T I

STUDENTE : Bessone

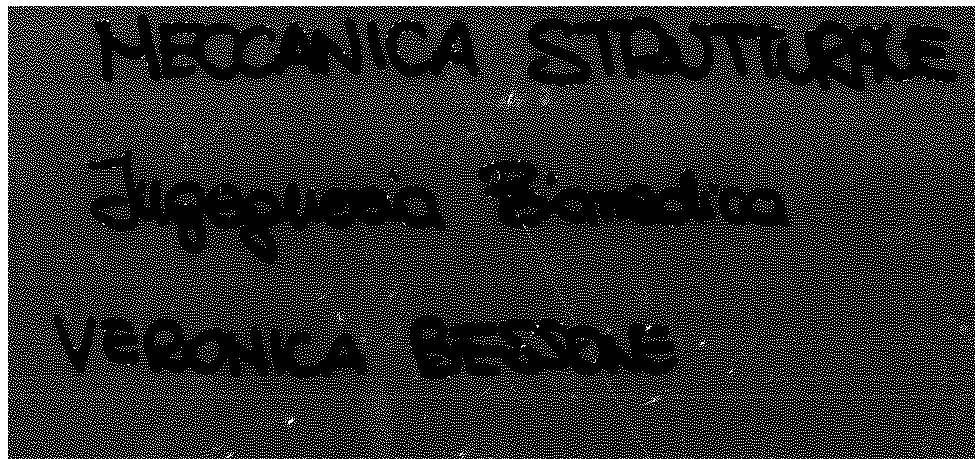
MATERIA : Meccanica Strutturale

Prof. Somà

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.



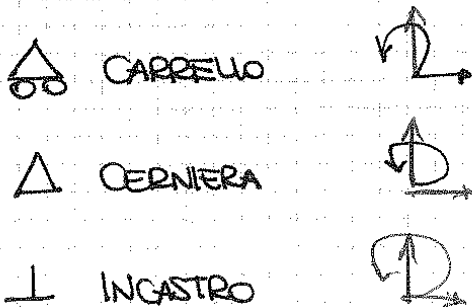
CAPITOLO 1: EQUILIBRIO DELLE TRAVI E CALCOLO DI REAZIONI VINCOLARI

TIPICI VINCOLI E CARATTERISTICHE

VINCOLI IDEALI:

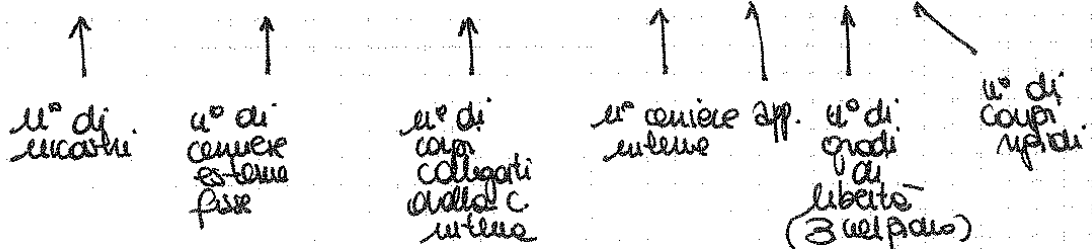
- Ideali (restrizione alla posizione e non all'atto del moto)
- Perfetti (capaci di eliminare completamente lo spostamento)
- Bilaterali
- Pervi di attrito
- Fissi (indipendenti dal tempo)
- Puntiformi

I vincoli sono condizioni cinematiche che impediscono alcuni dei possibili spostamenti del sistema, nei loro punti di contatto saranno presenti forze e momenti di reazione.



GRADO DI IPERSTATICITA'

$$G = 3 \cdot i + 2 \cdot ce + 2 \cdot (c - 1) \cdot ci + a - m \cdot n$$

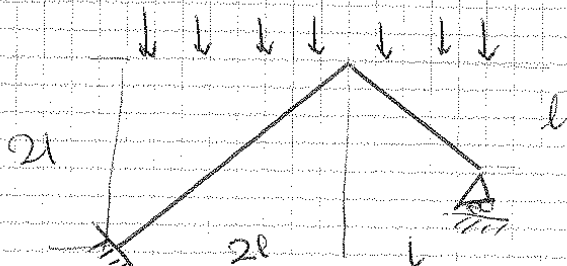


$3NC = 3NV$ isostaticità

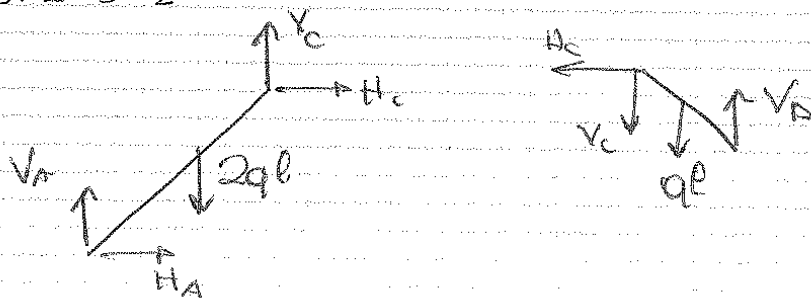
$3NC > 3NV$ labile

$3NC < 3NV$ iperstaticità

ES. 4



$$3 \times 2 = 3 + 2 + 1$$



$$H_A + H_C = 0$$

$$H_C = 0 \quad H_A = 0$$

$$V_A + V_C = 2ql$$

$$V_C + ql = V_D$$

$$2ql^2 + H_C 2l = V_C 2l + H_A l$$

$$ql^2/2 = V_D l$$

$$-2ql^2/2 + H_C l - V_C 2l = M_A$$

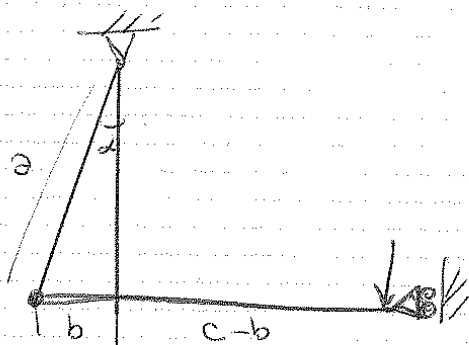
$$V_C = 15 \text{ N}$$

$$V_D = 15 \text{ N}$$

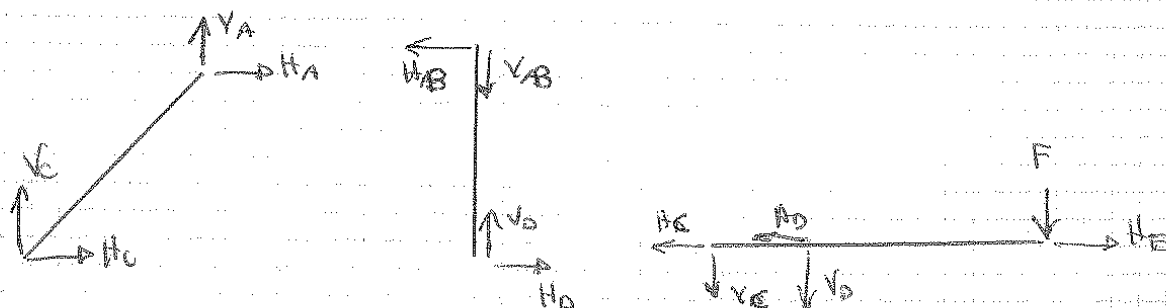
$$V_A = 75 \text{ N}$$

$$H_A = 80 \text{ Nm}$$

ES. 5° S.



$$3 \times 3 = 2 + 2 + 1 + 2 \times 2$$



Si definisce ASTA un particolare modello di trave che collegato al resto della struttura mediante coppie dette "nodi" e che ammette carichi esterni solo sui nodi. I carichi possono essere obliqui: $T = M_f = 0 \quad N \neq 0 \quad \forall e$

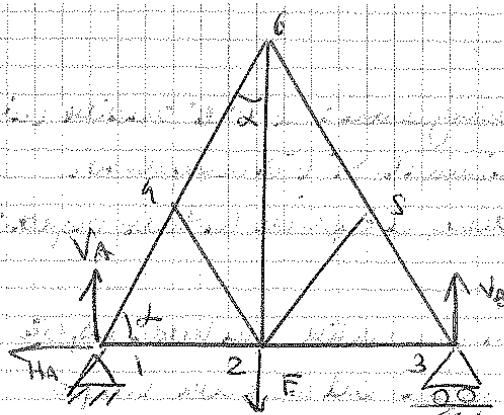
TRAVATURE RETICOLARI: insieme di aste

$$\begin{array}{ccc} & 2 + 3 = 2n & \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{no di} & & \text{no di} \\ \text{aste} & & \text{nodi} \end{array}$$

La TRAVE è un corpo la cui dimensioni longitudinali sono molto maggiori delle trasversali.

Si taglia una sezione attorno ad ogni nodo individuando delle forze e calcolando l'equilibrio si ottengono tutte le forze agenti sulle sezioni.

05.7

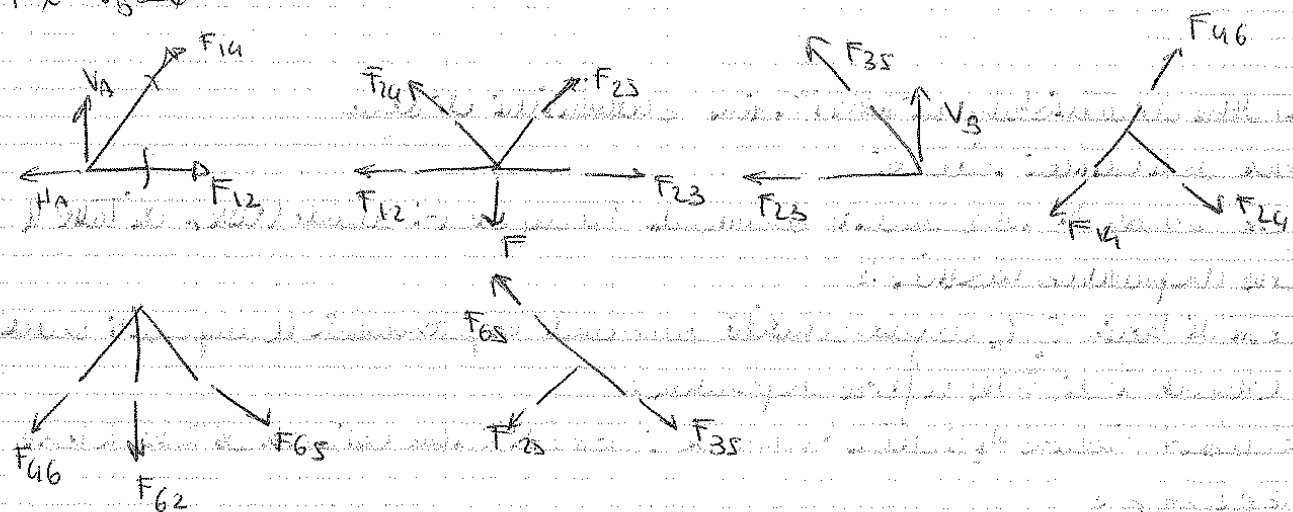


$$9+3=2 \cdot 6$$

$$V_A + V_B = F$$

$$H_A = 0$$

$$F_x = V_B \cdot 2L$$



$$F_{12} - H_A + F_{14} \cos \alpha = 0$$

$$V_A + F_{14} \sin \alpha = 0$$

$$F_{12} - F_{23} + F_{24} \cos \alpha - F_{25} \cos \alpha = 0$$

$$F = F_{24} \sin \alpha + F_{25} \sin \alpha$$

$$F_{23} + F_{25} \cos \alpha = 0$$

$$F_{25} \sin \alpha + V_B = 0$$

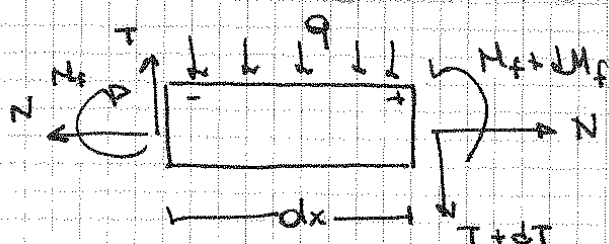
$$F_{46} - F_{14} - F_{24} \cos \alpha = 0$$

$$F_{14} = 0$$

$$F_{46} \sin \alpha + F_{62} + F_{56} \sin \alpha = 0$$

$$F_{62} - F_{35} - F_{25} \cos \alpha = 0$$

➔ LEGAME DIFFERENZIALE TRA TAGLIO E MOMENTO FLETTENTE



$$T + dT - T dx - q dx = 0$$

eq. alla traslazione

$$dT - q dx = 0$$

$$q = \frac{dT}{dx}$$

$$M_f + dM_f - N_f - T dx - q \frac{dx^2}{2} = 0$$

eq. alla rotazione

↓
trascurando di
ordine superiore

$$dM_f - T dx = 0$$

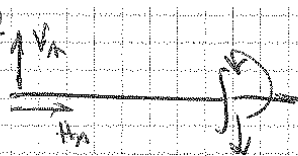
$$T = \frac{dM_f}{dx}$$

$$q = \frac{dT}{dx} = \frac{d^2 M_f}{dx^2}$$

DIAGRAMMA DELLE SOLLECITAZIONI

- il diagramma di taglio è la derivata prima del diagramma di momento flettente
- in assenza di carico distribuito il diagramma di taglio avrà derivata nulla e sarà rappresentato da tratti costanti, altrimenti la derivata del diagramma di taglio è pari al carico distribuito
- se carico distribuito inoltre rappresenta la derivata seconda del diagramma di momento e determina il segno della concavità del diagramma
- dove il diagramma di taglio attraversa la linea dello zero, il momento flettente ha un massimo o un minimo

ES. 2

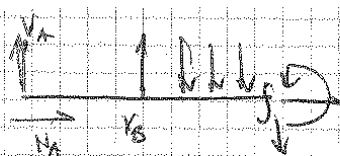


$$N = -H_A = -50 \text{ N}$$

$$T = V_A = 5 \text{ N}$$

$$M = V_A x \rightarrow 0$$

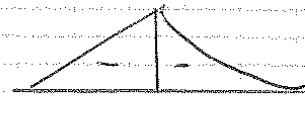
$\downarrow -10 \text{ Nm}$



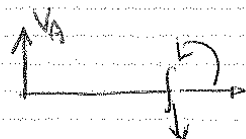
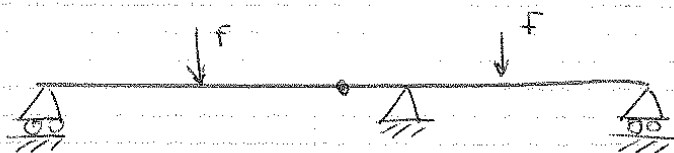
$$N = -50 \text{ N}$$

$$T = V_A + V_B - qx$$

$$M_f = V_A(x+2) + V_B x - q \frac{x^2}{2}$$



ES. 3

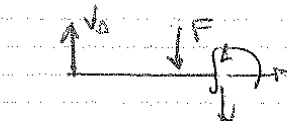


$$N = 0$$

$$V_A = T = 25 \text{ N}$$

$$M_f = V_A x \rightarrow 0$$

$\downarrow 60 \text{ Nm}$

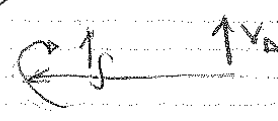


$$N = 0$$

$$T = V_A - F = -25 \text{ N}$$

$$M_f = V_A(2a - Fx) \rightarrow 60 \text{ Nm}$$

$\downarrow 0$



$$N = 0$$

$$T = V_A$$

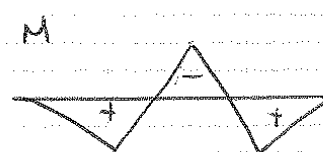
$$M_f = V_D x \rightarrow 0$$

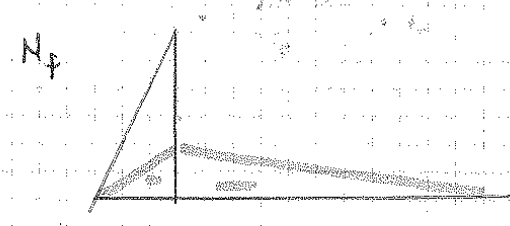


$$N = 0$$

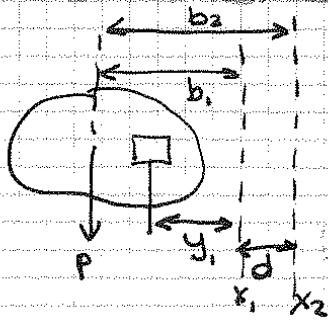
$$T = F - V_D$$

$$M_f = V_D(b+x) - Fx$$





TEOREMA DI TRASPOSIZIONE DEI MOMENTI STATICI



Si conosce momento statico S_1 rispetto alle asse x_1 e si vuole calcolare S_2 rispetto x_2

$$S_1 = \int_A y_1 dA = A \cdot b_1$$

$$S_2 = A \cdot b_2 = A(b_1 + d) = A b_1 + A d = S_1 + d A$$

se x_1 è baricentrico $S_1 = 0 \Rightarrow S_2 = A \cdot d_G$

↓
distanza di x_2
dal baricentro

Il momento statico di una qualsiasi area rispetto ad una retta qualsiasi è dato dal prodotto dell'area per la distanza del suo baricentro dalla retta.

NOMENTO STATICO DI FIGURE COMPOSITE

Si ottiene sommando o sottraendo

$$S_x = A_1 y_{G1} + A_2 y_{G2} \dots + A_n y_{Gn} = \sum_{i=1}^n A_i y_{Gi}$$

$$S_y = A_1 x_{G1} + A_2 x_{G2} \dots + A_n x_{Gn} = \sum_{i=1}^n A_i x_{Gi}$$

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^n A_i x_{Gi}}{A}$$

$$y_G = \frac{\sum_{i=1}^n A_i y_{Gi}}{A}$$

Esercitazione n° 3

ES. 1

$$A_t = (2a + h)b$$

$$A_p = hb$$

$$S_{xt} = (2a + h)b\left(a + \frac{h}{2}\right) - ch\left(a + \frac{h}{2}\right) = 60 \cdot 10^6 \text{ mm}^3$$

$$S_{yt} = b(2a + h)\frac{b}{2} - ch\frac{b}{2} = 40 \cdot 10^6 \text{ mm}^3$$

$$x_G = 200 \text{ mm} \quad y_G = 300 \text{ mm}$$

$$\frac{60 \cdot 10^6 \text{ mm}^3}{30 \cdot 10^4 \text{ mm}^2}$$

$$I_{xG} = Ay^2$$

$$I_{yG} = Ax^2$$

ES. 2

$$A_c = 2h \quad A_c = \pi r^2 = \pi \frac{d^2}{4}$$

$$S_{x1} = 2h \cdot x_G = h \cdot 2 \cdot \frac{h}{2}$$

$$S_{x2} = \frac{\pi d^2}{4} b$$

$$S_{y1} = h \cdot 2 \cdot \frac{2}{2}$$

$$S_{y2} = \frac{\pi d^2}{4} \frac{2}{2}$$

$$x_G = \frac{2}{2} \quad y_G = \frac{S_x}{A_{tot}}$$

$$I_{xG1} = I_{G1} + (y_{G1} - y_G)^2 A_1$$

$$I_{yG2} = I_{yG1} + (x_{G1} - x_G)^2 A_1 = \frac{\pi d^4}{64} (b - y_G)^2 A_2$$

ES. 6

$$x_G = 0 \quad y_G = 0$$

$$AJ_x = \int_{A_1} y^2 dA_1 \quad y = \pm b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

$$I_{x1} = \int_{-a}^a \int_{-b}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} y^2 dy dx = \int_{-a}^a \left(\frac{y^3}{3} \right)_{-b}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} dx = \int_{-a}^a \frac{b^3}{3} \left(2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right)^{3/2} \right) dx$$

Sostituisco $\frac{x}{a} = \cos t \quad x = a \cos t$
 $dx = -a \sin t$

$$= \frac{2b^3}{3} \int_0^\pi \sin^4 t dt = \frac{2b^3}{4} \pi \quad \text{e } I_y = \frac{2b^3}{4} \pi$$

$$A_2 = I_y = I_x = \frac{\pi d^4}{64}$$

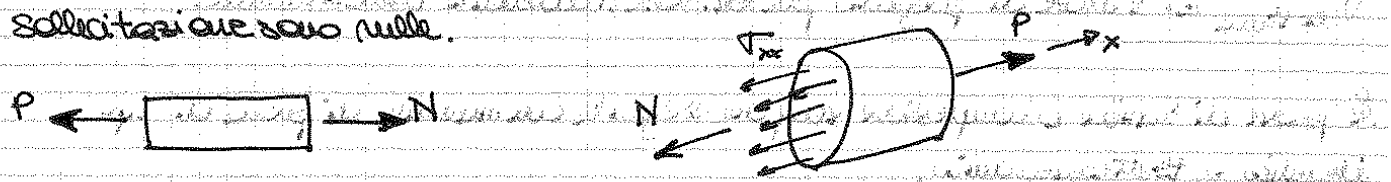
$$\pi \frac{R^4}{4}$$

$$I_{xtot} = I_{x1} - I_{x2}$$

$$I_{ytot} = I_{y1} - I_{y2}$$

TRAZIONE E COMPRESSIONE

Si intende per trazione un carico tale che, nelle sezioni rette della trave, determina uno sforzo normale non nullo mentre tutte le altre caratteristiche di sollecitazione sono nulle.



tensione $\sigma_{xx} = \frac{N}{A}$ $[\sigma] = \frac{[N]}{[mm^2]}$

Definiamo la tensione σ_{xx} definita con doppio pedice, che sta ad indicare la direzione della tensione e la direzione della normale della sezione rispetto alla quale la tensione è calcolata.

deformazione $\epsilon_{xx} = \frac{\Delta l}{l}$

The diagram shows a bar of initial length \$l\$ being stretched to a new length \$l + \Delta l\$ by forces \$P\$ applied at both ends.

legge di Hooke: $\sigma_{xx} = E \epsilon_{xx}$ E modulo di Young $= \frac{[N]}{[mm^2]}$

$\frac{N}{A} = E \epsilon_{xx} = E \frac{\Delta l}{l}$ $\Delta l = N \frac{l}{EA}$ $k = \frac{EA}{l}$ parametro di rigidezza assiale della trave

Conseguenza dell'allungamento orizzontale vi è una deformazione verticale

$\epsilon_{yy} = \frac{\Delta b}{b}$ $\epsilon_{yy} = \nu \epsilon_{xx}$ ν coefficiente di Poisson 0.25/0.35

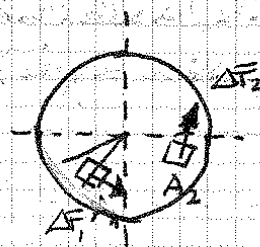
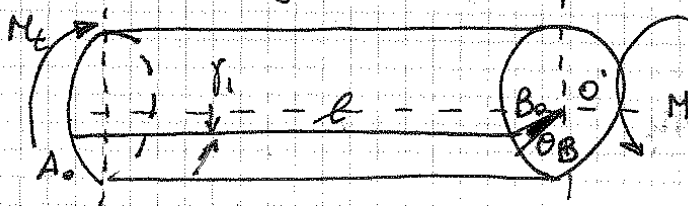
$\mathcal{L} = \frac{1}{2} P \Delta l$ $\mathcal{L} = \frac{P^2 l}{2EA}$ lavoro

$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sigma_{xx} \epsilon_{xx} V = \frac{1}{2} \frac{\sigma_{xx}^2}{E} V = \frac{1}{2} \epsilon_{xx}^2 E V$

The graph shows a linear relationship between force \$P\$ and displacement \$\Delta l\$, starting from the origin. The area under the line represents the work done.

TORSIONE

Si ha torsione semplice quando ogni sezione del corpo è soggetta al solo momento torcente, essendo nulle tutte le altre caratteristiche di sollecitazione (Solo tensioni tangenziali)



$$\tan \gamma = \gamma = \frac{B \cdot B}{l}$$

$$B \cdot B = r \cdot \theta$$

$$\gamma = \frac{r \cdot \theta}{l}$$

Legge di Hooke $\tau = G \gamma$ $\rightarrow G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ modulo di elasticità tangenziale

$$M_t = \int_A \tau \, dA = \int_A G \frac{r \cdot \theta}{l} \, dA = \frac{G \theta}{l} \int_A r^2 \, dA = \frac{G \theta}{l} J_p$$

$$\tau = \frac{M_t r}{J_p}$$

modulo di resistenza a torsione $W_t = \frac{J_p}{d/2}$

W_t per una sezione circolare piena $= \frac{\pi d^3}{16}$

W_t per una sez. circolare piena $= \frac{\pi d^4}{16 D}$

lavoro $L = \frac{1}{2} M_t \theta = \frac{1}{2} \frac{G J_p \theta^2}{l}$

Torsione in travi a sezione rettangolare / a sezione circolare di piccolo spessore

TAGLIO

Una sezione S di una trave è soggetta al solo sforzo di taglio T quando la risultante di tutte le forze esterne che precedono S giace nel piano della sezione e passa per il suo baricentro. La sollecitazione di taglio però risulta sempre accompagnata da quella di flessione.

$$\tau_m = \frac{T}{A}$$

$$\tau = \frac{TS}{bJ_z}$$

Sezione rettangolare $\tau_{max} = \frac{3}{2} \frac{T}{b \cdot h} = \frac{3}{2} \tau_m$

sezione circolare $\tau_{max} = \frac{4}{3} \frac{T}{\pi r^2} = \frac{4}{3} \tau_m$

lavoro $L = \chi \frac{T^2 \rho}{GA}$

ES.4

$$\tau_x = \frac{M_y}{J_z} = \frac{M_y D}{2\pi(D^4 - d^4)} \cdot \frac{6432}{1000} = 566,3 \text{ MPa}$$

$$W_z = \frac{635681}{D} \cdot 2 = 2189,3 \text{ mm}^3$$

$$S = \frac{700}{566,3} = 1,24$$

b)

$$M_y = 7 \text{ kNm}$$

$$\tau = \frac{M_y c}{J_p} = \frac{7000 \cdot D}{2\pi(D^4 - d^4)} \cdot \frac{32}{D} = 165,2 \text{ MPa}$$

$$W_t = \frac{J_p}{D/2} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32 \cdot D} \cdot \frac{32}{D} = 42378,8 \text{ mm}^3$$

$$M_x = \frac{G \theta J_p}{l} \quad \theta = \frac{M_x l}{G J_p} = \frac{M_x l 2(1+\nu) 32}{E \pi(D^4 - d^4)} = 0,027 \text{ rad}$$

ES.5

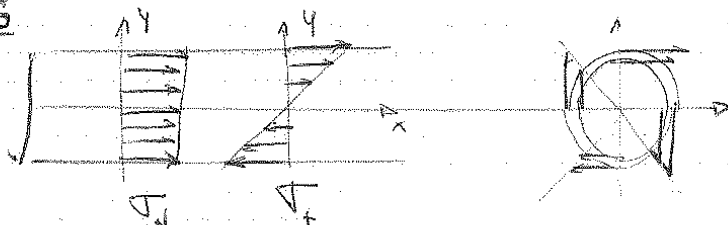
$$\theta = \frac{M_x l}{G J_p} = \frac{M_x \cdot l 2(1+\nu) 32}{E D^4 \pi} = 0,00007 \text{ rad}$$

$$\tau = \frac{160 \cdot 32 \cdot 8 \cdot 1000}{4 \cdot \pi \cdot D^4 \cdot 2} = 15,09 \text{ MPa} \quad 50\%$$

$$\tau = \frac{15,09}{2} = 7,54 \text{ MPa} \quad 25\%$$

$$\tau = 15,09 \cdot 2 = 30,18 \text{ MPa} \quad 100\%$$

ES.6



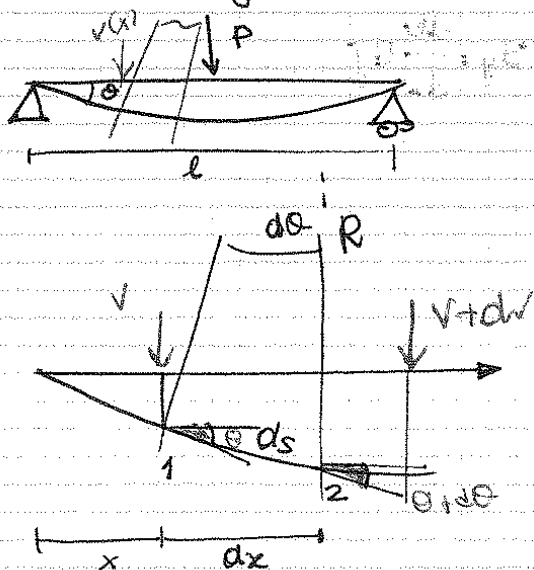
avendo assunto l'ipotesi di parete sottile τ saranno assunte costanti nelle pressioni

$$Q = \pi \frac{d^2}{4} = 1256,6 \text{ mm}^2$$

$$A = 2\pi \frac{d}{2} S = 1580 \text{ mm}^4$$

CAP. 6: LINEA ELASTICA

→ quando una dimensione è predominante
 ↳ si insiste nello studio della deformabilità delle travi. Nella progettazione delle travi la valutazione dello spostamento elastico massimo (freccia) o della rotazione massima di una sezione è importante per evitare interferenze che possano pregiudicare il corretto funzionamento del sistema.



In un generico punto distante x dall'origine la freccia è definita come lo spostamento verticale $v(x)$ nella direzione y subito dal punto quando passa dalla configurazione undeformata alla deformata (spostamento verso l'alto $(+)$; verso il basso $(-)$).

L'angolo di rotazione dell'asse della trave nel generico punto dell'asse x o l'angolo tra l'asse x e la tangente alla curva $v(x)$ $(+)$ in senso orario.

$$R = \frac{ds}{d\theta} \quad \frac{1}{R} = \frac{d\theta}{ds} \quad \text{raggio di curvatura}$$

$$\frac{dv}{dx} = \tan \theta \quad \theta = \arctan \frac{dv}{dx}$$

Piccola curvatura (hp. 1): quando le curvature sono di raggio inferiore rispetto alla lunghezza l .

$$ds = \frac{dx}{\cos \theta} \approx dx$$

Solo nelle travi snelle (hp. 2): $\frac{L}{h} > 10$

ottengo **MODELO EULERO-BERNOULLI**

$$\frac{1}{R} = \frac{d\theta}{dx} \quad \frac{dv}{dx} = \tan \theta \approx \theta$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{1}{R}$$

CAP. 4: FONDAMENTI DI MECCANICA DEI CONTINUI

hp. del continuo:

- **OMOGENEO**: se ha uguali proprietà in tutti i suoi punti
- **ISOTROPO**: proprietà uguali in tutti i suoi punti
- **ANISOTROPO**: variano nelle direzioni del punto

DENSITA' DI UN PUNTO: limite del rapporto fra la massa di una porzione di materia circostante il punto ed il suo volume

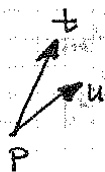
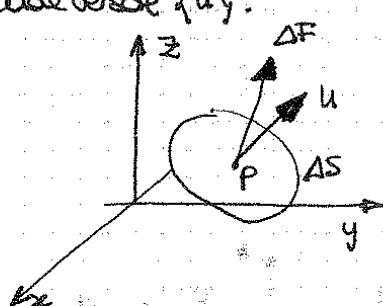
$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \rho_m$$

ETTORE DI TENSIONE

Dato un continuo, si assume una superficie per un punto P , si individua su di essa un elemento di superficie ΔS contenente il punto P , si individua $\{n\}$ la normale alla superficie in P .

Sia ΔF la forza che agisce dall'esterno sul corpo attraverso l'elemento di superficie ΔS .

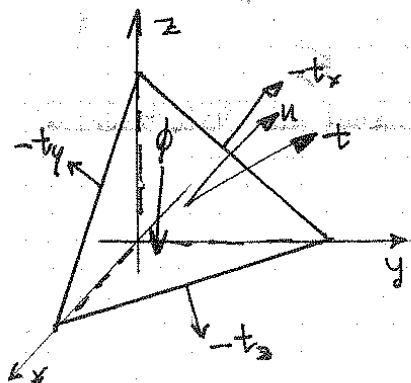
Chiaramente il valore e la direzione della forza ΔF dipenderà dalla giacitura di ΔS , ovvero dal versore $\{n\}$.



Il principio di Cauchy dice che per $\Delta S \rightarrow 0$ il rapporto $\frac{\{\Delta F\}}{\Delta S}$ tende a $\frac{\{F\}}{\Delta S}$, mentre $\frac{\{\Delta m\}}{\Delta S} \rightarrow 0$.

$$\{t\} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\{\Delta F\}}{\Delta S}$$

TENSORE DELLE TENSIONI (domanda già fatta)



tetraedro di Cauchy: equilibrio alla traslazione:

$$\{t\} dS - \{t_x\} dS_x - \{t_y\} dS_y - \{t_z\} dS_z + \{f\} dV = 0$$

$$dS_x = dS n_x \quad dS_y = dS n_y \quad dS_z = dS n_z$$

Le forze di volume tendono a zero + rapidamente

↓

$$\{t\} dS - \{t_x\} dS n_x - \{t_y\} dS n_y - \{t_z\} dS n_z = 0$$

$$\{t\} = \{t_x\} n_x + \{t_y\} n_y + \{t_z\} n_z$$

$$\sigma_p^3 - I\sigma_p^2 + II\sigma_p - III = 0$$

$$I = \text{Tr}[\sigma] = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}$$

$$II = \text{Tr}[\sigma^2] = \sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2 + 2\sigma_{xy}^2 + 2\sigma_{yz}^2 + 2\sigma_{zx}^2$$

$$III = \sigma_{xx}\sigma_{yy}\sigma_{zz} + 2\sigma_{xy}\sigma_{yz}\sigma_{zx} - \sigma_{xx}\sigma_{yz}^2 - \sigma_{yy}\sigma_{zx}^2 - \sigma_{zz}\sigma_{xy}^2$$

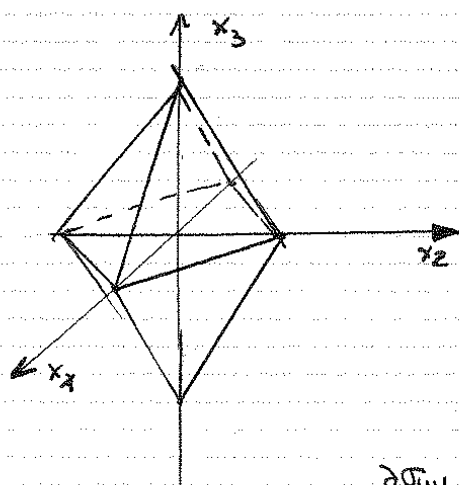
INVARIANTI

tensione media $\sigma_m = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{3}$

tensore sferico o idrostatico $[\sigma_s] = \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix}$

tensore deviatore $[\sigma_d] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_m & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma_m & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} - \sigma_m \end{bmatrix}$

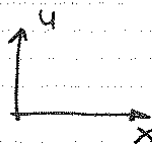
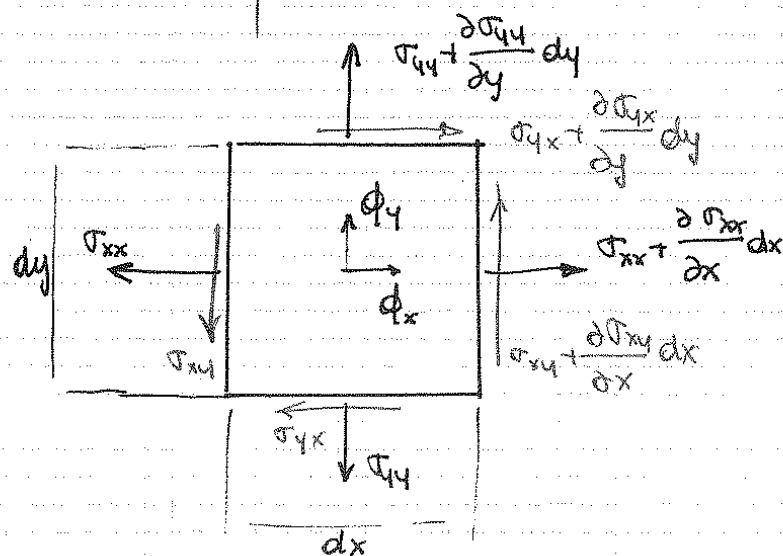
TENSIONE OTTICA



$$l = m = n = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sigma_N = \frac{\sigma_1}{3} + \frac{\sigma_2}{3} + \frac{\sigma_3}{3}$$

$$\sigma_T^2 = \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2 - \sigma_N^2 = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}{9}$$



CERCHI DI MOHR: rappresentazione bidimensionale nel piano σ_N, τ_T dello stato di tensione bidimensionale in un punto

$$u_1^2 = \frac{(\sigma_N - \sigma_2)(\sigma_N - \sigma_3) + \tau_T^2}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)}$$

$$u_2^2 = \frac{(\sigma_N - \sigma_3)(\sigma_N - \sigma_1) + \tau_T^2}{(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1)}$$

$$u_3^2 = \frac{(\sigma_N - \sigma_1)(\sigma_N - \sigma_2) + \tau_T^2}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)}$$

$$(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3) \geq 0$$

$$(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1) \leq 0$$

$$(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2) \geq 0$$

$$\Rightarrow (\sigma_N - \sigma_2)(\sigma_N - \sigma_3) + \tau_T^2 \geq 0$$

$$(\sigma_N - \sigma_3)(\sigma_N - \sigma_1) + \tau_T^2 \leq 0$$

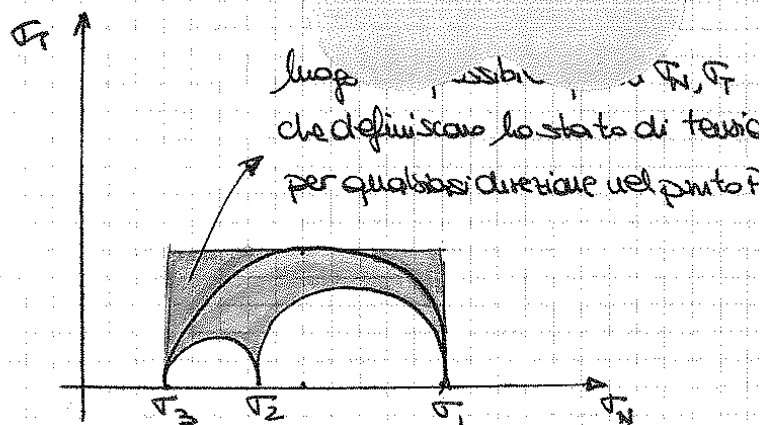
$$(\sigma_N - \sigma_1)(\sigma_N - \sigma_2) + \tau_T^2 \geq 0$$

per convenzione $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ di ROTAZIONE
 ANGOLO
 $\sin(2\theta) = \frac{\tau_{xy}}{R}$
 $\theta = \frac{1}{2} \arcsin \frac{\tau_{xy}}{R}$

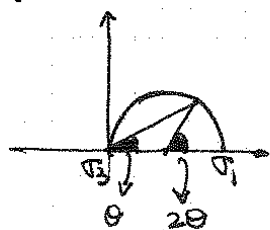
$$C_3 = \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \quad R_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \quad (a)$$

$$C_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \quad R_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (b)$$

$$C_3 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \quad R_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad (c)$$



I punti del cerchio 2 rappresentano uno stato di tensione per direzioni in cui $u_1 = 0$, quindi per qualsiasi direzione \perp all'asse x_1 , cioè per tutte le superfici individuate da fascio di piani orientate per ax_1 ,



l'angolo sotteso dalla corda che unisce σ_N, τ_T e il punto $\sigma_3 \rightarrow$ angoli al centro $\rightarrow 2\theta$

è possibile calcolare i cerchi di Mohr solo a 8 calcolatore in precedenza le tensioni principali. Ma nel caso di TENSIONE PIANA

è possibile tracciare direttamente i cerchi di Mohr \rightarrow conoscere 1 delle 3 T. PRINCIPALI

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix}$$

$$\text{asse } x \rightarrow \sigma_N = \sigma_{xx}$$

$$\tau_T = |\tau_{xy}|$$

$$\text{asse } y \rightarrow \tau_{yy} = \sigma_N$$

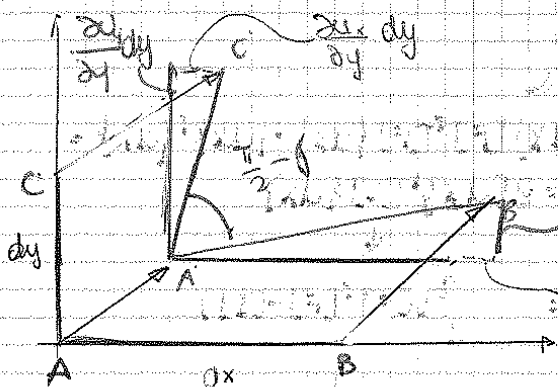
$$\tau_T = |\tau_{yx}|$$

$$C_3 = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2}$$

$$R_3 = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2}$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\tau_{xy}^2 + \left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2}$$

PIU' COLE DEFORMAZIONI E PIU' SPACAMENTI - CASO BIDIMENSIONALE



$$\overline{AB} \cdot dx^2 = \left(dx + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} dx \right)^2 =$$

$$dx^2 + 2 \frac{\partial u_x}{\partial x} dx^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 dx^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 dx^2 \approx$$

$$dx^2 \left(1 + 2 \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) \approx dx^2 \left(1 + \frac{\partial u_x}{\partial x} \right)$$

facendo la stessa cosa per AC e generalizzando al caso 3D

$$\epsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

Si ottiene anche una deformazione della tangente approssimabile ad un angolo in quarto piano

$$\gamma_{xy} = \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} dx \right) \frac{1}{dx} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} dy \right) \frac{1}{dy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}$$

Estendendo tridimensionalmente

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}$$

$$\{dx\} = [F] \{dx\}$$

Gradiente della deformazione

$$\begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial y} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial y} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix}$$

$$\{du\} = [J] \{dx\}$$

Gradiente dello spostamento

$$\begin{Bmatrix} du \\ dv \\ dw \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix}$$

$$\{du\} = ([F] - [J]) \{dx\}$$

$$e = \frac{|dx| - |dX|}{|dX|}$$

$$(dx)^2 - (dX)^2 = \{dx\}^T \{dx\} - \{dx\}^T [L] \{dx\} = 2\{dx\}^T [L] \{dx\}$$

$$\{dx\} / |dX| = \{n\}$$

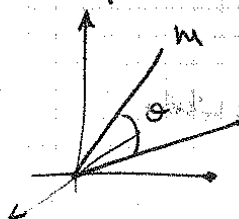
$$\frac{\{dx\}^T \{dx\}}{|dX|^2} - \underbrace{\{n\}^T \{n\}}_1 = 2\{n\}^T [L] \{n\}$$

↓
STRETCH
RATIO

$$e = \frac{|dx|}{|dX|} - 1 = \sqrt{\{n\}^T (2[L] + [I]) \{n\}} - 1 = \sqrt{\{1 \ 0 \ 0\} (2[L] + [I]) \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}} - 1 = \sqrt{2e_{11} + 1} - 1$$

$$e = \sqrt{1 + 2 \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2} - 1$$

Si considerino due segmenti inizialmente posti sugli assi x e y e dopo deformazione su linee n e m giacenti al piano xy ; i due segmenti che inizialmente formavano un angolo retto formano ora un angolo θ



$$\frac{|dx|}{|dX|} = \sqrt{2L_{11} + 1}$$

$$\frac{|dy|}{|dY|} = \sqrt{2L_{22} + 1}$$

$$\{n\} = [F] \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial X} \\ \frac{\partial y}{\partial X} \\ \frac{\partial z}{\partial X} \end{Bmatrix}$$

$$\{m\} = [F] \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial Y} \\ \frac{\partial y}{\partial Y} \\ \frac{\partial z}{\partial Y} \end{Bmatrix}$$

$$\frac{\partial x}{\partial X} \frac{\partial x}{\partial Y} + \frac{\partial y}{\partial X} \frac{\partial y}{\partial Y} + \frac{\partial z}{\partial X} \frac{\partial z}{\partial Y} = 2L_{12}$$

$$\cos \theta_{12} = \frac{2L_{12}}{\sqrt{2L_{11} + 1} \sqrt{2L_{22} + 1}}$$

Problema semi-universo di Saint Venant: TEORIA delle TRAVI

- hp:
- ① dimensioni longitudinali preponderante rispetto alle altre, omogeneo e isotropo
 - ② i carichi di volume sono nulli
 - ③ le forze superficiali sulla superficie sono nulle
 - ④ sia caricato da forze superficiali solo sulle basi con leggi tali per cui T_{xy} , T_{yz} , T_{zx} sono uguali a zero



$$0 = T_{xx}n_x + T_{xy}n_y + T_{xz}n_z$$

$$0 = T_{xy}n_x + T_{yy}n_y + T_{yz}n_z$$

$$0 = T_{xz}n_x + T_{yz}n_y + T_{zz}n_z$$

$$\frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial T_{xy}}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial T_{xz}}{\partial x} = 0$$

Nelle sezioni del solido di Saint Venant: $\frac{\partial^2 T_{xx}}{\partial x^2} = 0$ ovvero nella sezione retta della trave lo stato di tensione T_{xx} sarà al massimo rettilineo. Quindi la funzione T_{xx} può essere scritta:
 $T_{xx}(y, z) = a + by + cz$ dove a, b, c dipendono dalle caratteristiche di sollecitazione e sono costanti:

$$T_{xx}(y, z) = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{J_z} y + \frac{M_z}{J_y} z$$

Relativamente allo sforzo di taglio deve essere garantita $0 = T_{xy}n_y + T_{xz}n_z$. Secondo la teoria di Jourdain lo sforzo di taglio è funzione solo di y

$$T_{xy} = \frac{T_y S_z(y)}{b(y) J_z}$$

PROBLEMA ELASTICO

risoluzione del problema elastico richiede la conoscenza della deformazione e della tensione in ogni

Dal tensore delle tensioni 6 componenti:

• • • deformazioni 6 componenti
 + v, w, u

} → 15

garantiscono l'equilibrio con $\sum_{i=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \phi_j = 0$; le equazioni di compatibilità $\epsilon_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ legano le

6 componenti del tensore delle deformazioni con i 3 spostamenti all'equilibrio, $\{\sigma\} = [E]\{\epsilon\}$

Il teorema che garantisce l'UNICITÀ della SOLUZIONE del PROBLEMA ELASTICO è dovuto a Kirchhoff

$$I' = 468 \text{ MPa}$$

$$I'' = 468 \text{ MPa}$$

$$I' = \sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{xx}\sigma_{zz} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} - \sigma_{xy}^2 - \sigma_{xz}^2 - \sigma_{yz}^2 = 45180 \text{ MPa}$$

$$I'' = 44910$$

ES.3

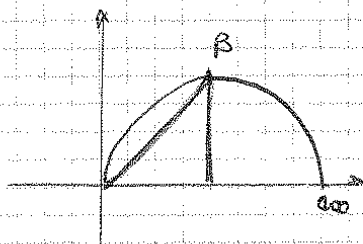
$$20 \times 5 \text{ mm} \quad F = 40 \text{ kN}$$

$$\sigma_{xx} = \frac{40000}{20 \times 5} = 400 \text{ MPa}$$

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 400 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_1 = 400 \text{ MPa}$$

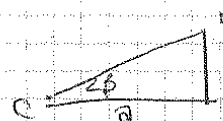
$$\sigma_2 = \sigma_3 = 0$$



in B $\tau_{max} \Rightarrow 2\theta \Rightarrow \theta = 45^\circ$ di rotazione sul sistema di riferimento

$$\tau^* = r \sin(2\beta)$$

$$\beta = \frac{1}{2} \arctan \frac{\tau_{xy}}{\sigma} = 7.23^\circ$$



$$\sigma = r \cos 2\beta = 194 \text{ MPa}$$

$$\sigma_x = \sigma + \sigma = 388 \text{ MPa}$$

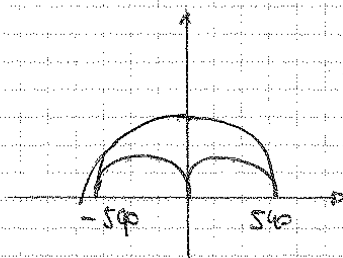
$$\sigma_y = \sigma - \sigma = 6.3 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xy} = 50 \text{ MPa}$$

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 388 & 50 & 0 \\ 50 & 6.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ES.4

$$\sigma_1 = 0 \quad \sigma_2 = 540 \text{ MPa} \quad \alpha = 45^\circ$$



$$\sigma_1 = 540 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = -540 \text{ MPa}$$

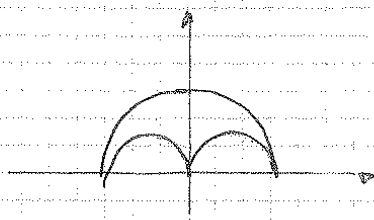
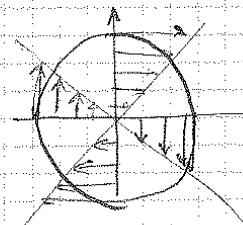
ES.5

$$d = 30 \text{ mm}$$

$$160 \text{ Nm} = M_f \Rightarrow \tau = \frac{M_f r}{J_r} = \frac{32 \cdot 160 \cdot 10^3}{\pi d^4 \cdot 2} = 30 \text{ MPa}$$

$$\frac{32 \cdot 160 \cdot 10^3}{\pi d^4 \cdot 4} = 15 \text{ MPa}$$

$$\frac{32 \cdot 160 \cdot 10^3}{\pi d^4 \cdot 8} = 7.5 \text{ MPa}$$



$$\sigma_1 = 30 \text{ MPa} \quad \sigma_2 = 0 \text{ MPa} \quad \sigma_3 = -30 \text{ MPa}$$

$$\theta = \left(\arccos \frac{80}{94} \right) \frac{1}{2} = 28^\circ$$

ES. 10

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 120 & 100 & 0 \\ 100 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \end{bmatrix}$$

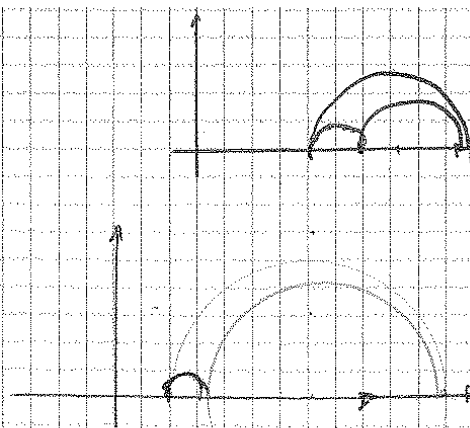
$$C = 70 \quad R = \sqrt{100^2 + 50^2} = 112$$

$$\sigma_2 = 30$$

$$\sigma_1 = 112 + 70 = 182 \text{ MPa}$$

$$\sigma_3 = 112 + 70 = -42 \text{ MPa}$$

$$\theta = \frac{1}{2} \arccos \frac{100}{112} = 31,6^\circ$$



ES. 11

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 360 & 0 & 120 \\ 0 & 0 & 0 \\ 120 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

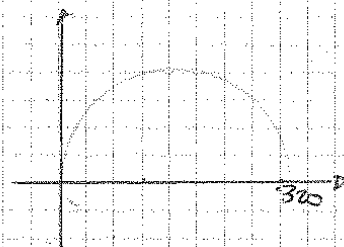
$$C = 180 \quad R = \sqrt{120^2 + 120^2} = 216$$

$$\sigma_2 = 0$$

$$\sigma_1 = 396 \text{ MPa}$$

$$\sigma_3 = -36 \text{ MPa}$$

$$\theta = \frac{1}{2} \arccos \frac{120}{216} = 16,9^\circ$$



ES. 12

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 50 \\ 0 & 0 & 0 \\ 50 & 0 & 150 \end{bmatrix}$$

$$-\sigma_p [(-\sigma_p)(150 - \sigma_p) - 50^2]$$

$$\sigma_p = 0$$

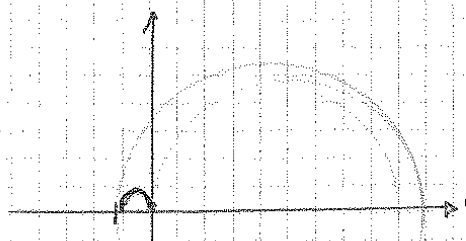
$$\sigma_p = 165 \text{ MPa}$$

$$\sigma_p = -15 \text{ MPa}$$

$$C = 75$$

$$R = \sqrt{50^2 + 75^2} = 90$$

$$\theta = \frac{1}{2} \arccos \frac{50}{90} = 16,8^\circ$$



ES. 13

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 120 - \sigma_p & -150 & 0 \\ -150 & 250 - \sigma_p & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_p \end{bmatrix}$$

$$\sigma_3 = 0$$

$$[(120 - \sigma_p)(250 - \sigma_p) - 150^2] =$$

$$\sigma_1 = 348$$

$$\sigma_2 = 21$$

CAP. 3: LA TEORIA DEL CEDIMENTO STRUTTURALE

CEDIMENTO STRUTTURALE: ogni cambiamento di dimensione, forma o proprietà del materiale di una struttura o suo componente che li rende inadeguati ad assolvere le funzioni per cui erano stati progettati.

Per definire lo stato di pericolosità della trazione triassiale di un elemento, si utilizzano dei **MODELLI MATEMATICI**, stabilendo con un'equivalenza tra lo stato di tensione monoassiale ed un altro qualsiasi. Per predire il cedimento di un elemento si utilizzano ipotesi di rottura che si basano su determinati modelli.

"Si ha cedimento di un componente quando il valore del modulo elastico nello stato di tensione triassiale diventa uguale o supera il corrispondente 'modulo' che causa il collasso in uno stato di tensione monoassiale"

1. IPOTESI DI BANKINE (hp. max tensione normale σ_{max})

$$\sigma_d = \max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \geq \sigma_c$$

$$\sigma_1 \geq \sigma_t$$

$$\sigma_2 \geq \sigma_t$$

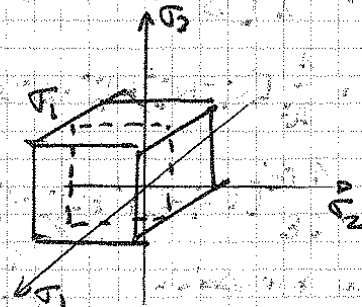
$$\sigma_3 \geq \sigma_t$$

$$\sigma_1 \leq \sigma_c$$

$$\sigma_2 \leq \sigma_c$$

$$\sigma_3 \leq \sigma_c$$

FRAGILI

2. IPOTESI DI DE ST VENANT (hp. max deformazione ϵ_{max})

$$\epsilon_d = \max(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) \geq \epsilon_c$$

$$\epsilon_c = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)]$$

$$\epsilon_c = \frac{\sigma_c}{E}$$

$$[\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] \geq \sigma_c$$

3.

(hp. max tensione tangenziale τ_{max})

$$|\tau_1| \geq |\tau_c|$$

$$|\tau_2| \geq |\tau_c|$$

$$|\tau_3| \geq |\tau_c|$$

è il + conservativo

dei cerchi di Mohr relativi ad uno stato di tensione triassiale

$$\tau_c = \frac{\sigma_c}{2}$$

$$\tau_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

$$\tau_2 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$$

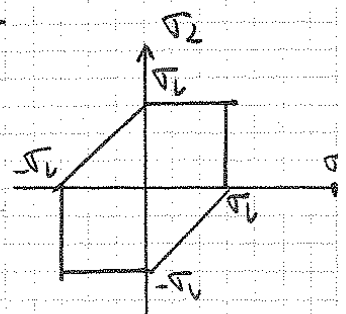
$$\tau_3 = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}$$

$$|\sigma_1 - \sigma_2| \geq \sigma_c$$

$$|\sigma_2 - \sigma_3| \geq \sigma_c$$

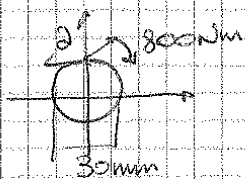
$$|\sigma_3 - \sigma_1| \geq \sigma_c$$

DOTTI



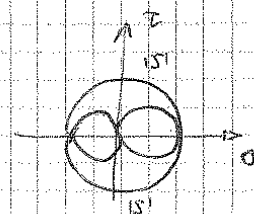
Esercitazione 17.

ES. 1



$$\tau_{max} = \frac{M_T}{W_t} = \frac{800.000}{\pi d^3} \cdot 16 = 151 \text{ MPa}$$

tenore in 2 $\rightarrow [\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 151 \\ 0 & 0 & 0 \\ 151 & 0 & 0 \end{bmatrix}$



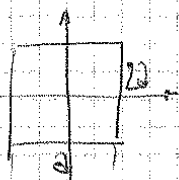
ma Trova o Val max \rightarrow acciaio e ductile

$$\sigma_{id} = \sigma_1 - \sigma_3 = 151 - (-151) = 302 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{id} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_3^2 + 4\sigma_1^2} = \frac{1}{2} \sqrt{6\sigma^2} = \sqrt{3} \sigma^2 = 261 \text{ MPa} \quad \sigma_1^2 = \sigma_3^2 = \tau^2$$

La più restrittiva è Tresca, perché è più elevato, il coefficiente di sicurezza è più piccolo che con von Mises

ES. 2



$$\tau_{max} = \frac{N_z}{A} = \frac{1000}{2a^2} = \tau_{zz}$$

$$\tau_{fmax} = \frac{6 \cdot M_x}{b \cdot h^2} = \frac{6 \cdot 500.000}{4a^3} = \tau_{xz}$$

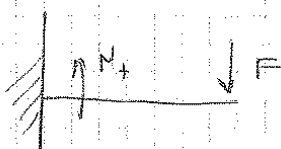
$$\tau_{id} = \tau_{2(M)} + \tau_{2(N)} = \frac{12M}{8a^3} + \frac{N}{2a^3}$$

$$\tau_{id} = \frac{\tau_{eu}}{1,5}$$

$$\frac{12M}{8a^3} + \frac{N}{2a^3} = \frac{235}{1,5}$$

$$a = 17 \text{ mm}$$

ES. 3



$$M_x = M_x - F \cdot l = 1200.500 = 600.000 \text{ Nmm}$$

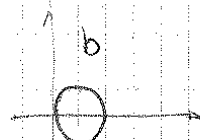
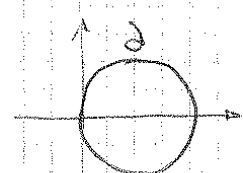
$$\tau_{2x} = \frac{M_x}{I_{xx}} \cdot \frac{h}{2} = 89 \text{ MPa}$$

$$\tau_{2B} = \frac{M_x}{I_{xx}} \cdot \frac{h}{4} = 44,5 \text{ MPa}$$

$$\tau_{2c} = \frac{M_x}{I_{xx}} \cdot \frac{h}{8} = 22,5 \text{ MPa}$$

punto più sollecitato è A

$$\text{lo } \sigma_{id} = \sigma_1 = 89 \text{ MPa}$$



FATICA DEI MATERIALI

Descrivere la natura e le conseguenze del meccanismo di rottura a fatica

STATICO: proprietà intrinseche del materiale

DIPENDENTE DAL TEMPO: sensibile al materiale, ai livelli di carico, temperature, n° di cicli e velocità, molto comune nei metalli, localizzato

→ difetti o altre imperfezioni sono quasi sempre presenti in molti materiali, la maggior parte delle volte in superficie

→ la rottura inizia generalmente in corrispondenza di una CRACK, in una zona critica, con uno stato di tensione localmente elevato. Quando la crack raggiunge dimensioni "critiche" si ha frattura della sezione residua

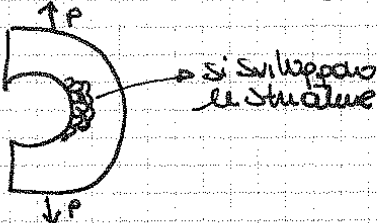
→ In corrispondenza della superficie di frattura si identificano 3 zone:

- intorno del difetto
- striature
- area di frattura

→ Il processo di rottura per fatica si può riassumere in tre fasi principali:

- inizio della crack
- propagazione della crack
- rottura

INIZIO della CRACK: duttile



fragili

le crack si presentano direttamente in corrispondenza di difetti preesistenti

PROPAGAZIONE della CRACK

le crack iniziano ad aumentare a bassa velocità

$$N_I + N_P + N_T$$

durata corrispondente alla formazione della crack

durata corrispondente alla propagazione della crack

durata totale

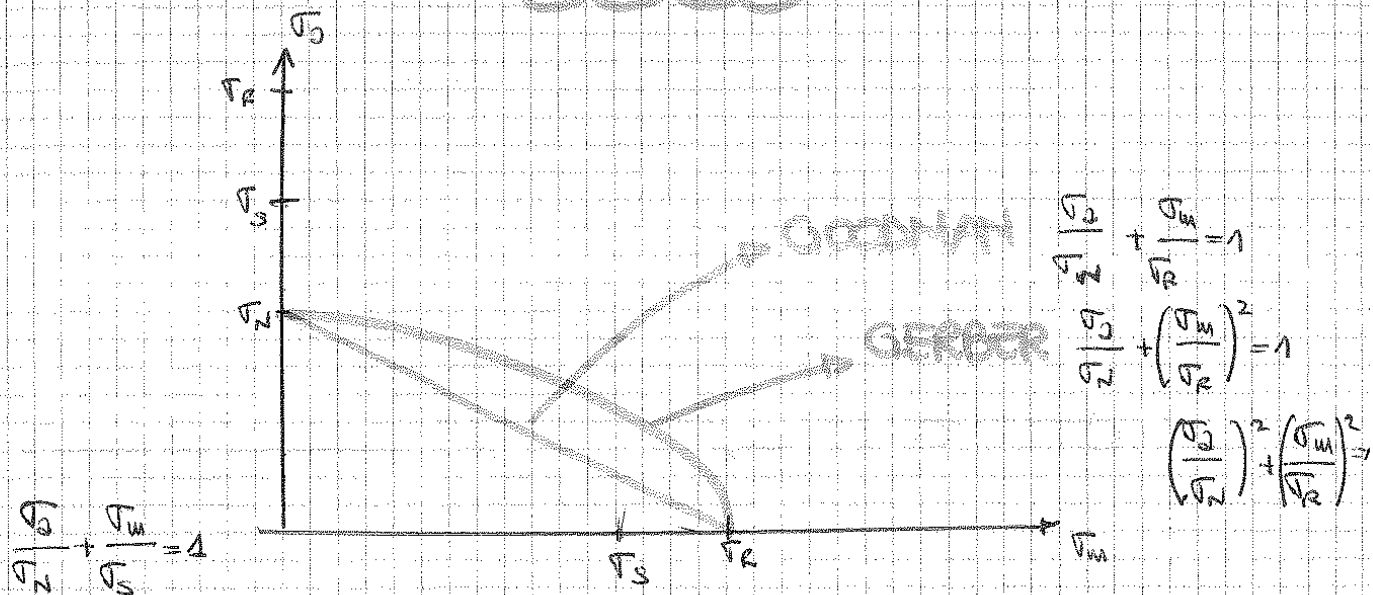
EFFETTO DELLA TENSIONE MEDIA

valutazione degli effetti da acci sulla durata di una tensione costante sovrapposta ad una di fatica alterna simmetrica, per la quale è disponibile la curva di Wohler.

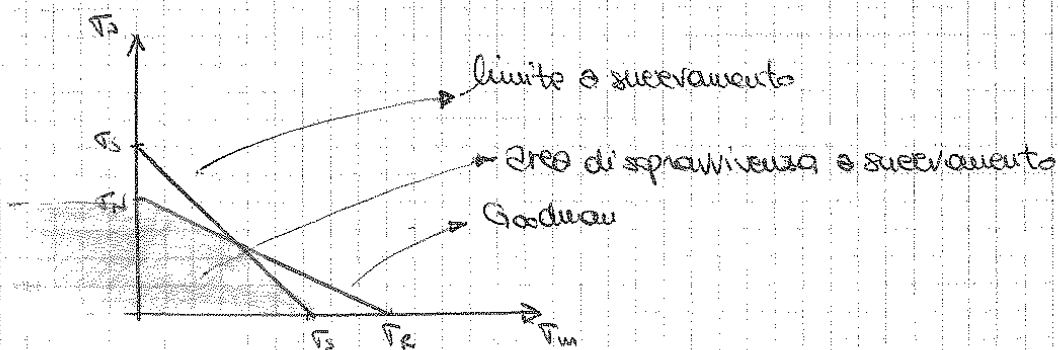
TENSIONI medie di compressione sono favorevoli al comportamento a fatica

triazole clonazepam

In alcuni casi è possibile avere **DIAGRAMMI MASTER** che riassumono i dati a diverse T_m



- I dati sperimentali tendono a dipendere tra le curve di Goodman e Gerber
- Questi i metodi dovrebbero essere utilizzati solo per valori medi di tensione medio di trazione
- Nei casi in cui $(\sigma_m < \sigma_2)$ c'è solo una piccola differenza tra i due metodi
- Nei casi in cui $(\sigma_m > \sigma_2)$ deve essere considerato anche il collasso per snervamento



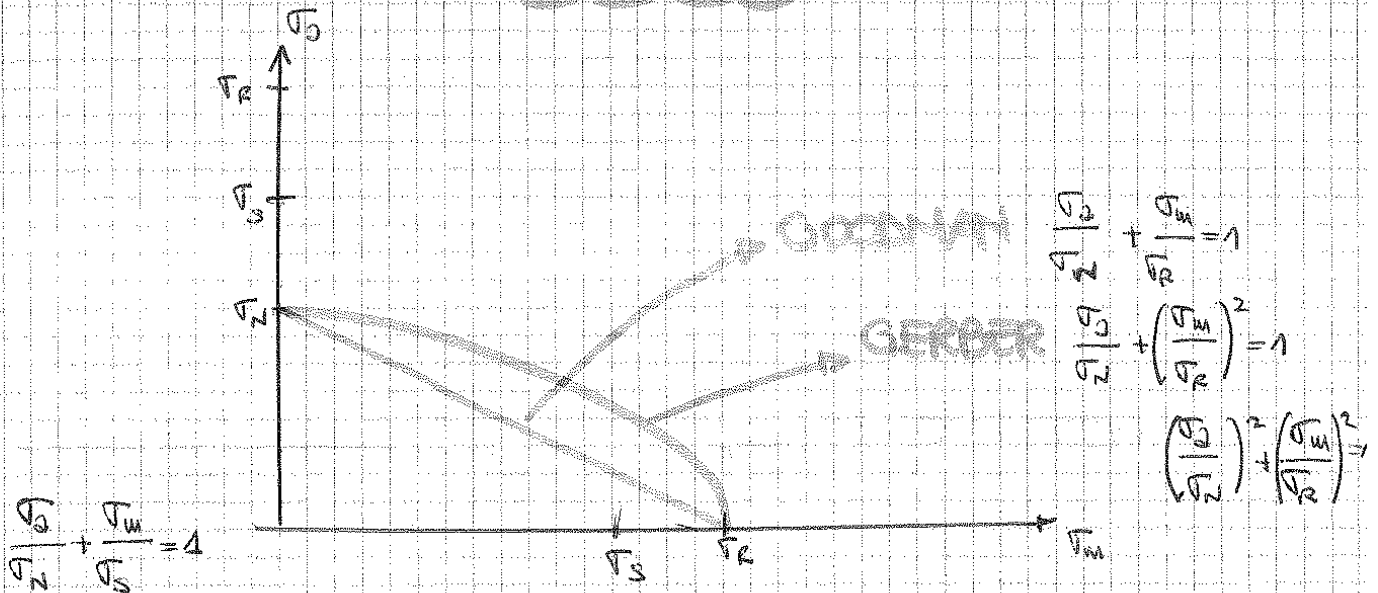
EFFETTO DELLA TENSIONE MEDIA

valutazione degli effetti del c.c. sulla durata di una tensione costante sovrapposta ad una di fatica alterna simmetrica, per la quale è disponibile lo scudo di Wohler

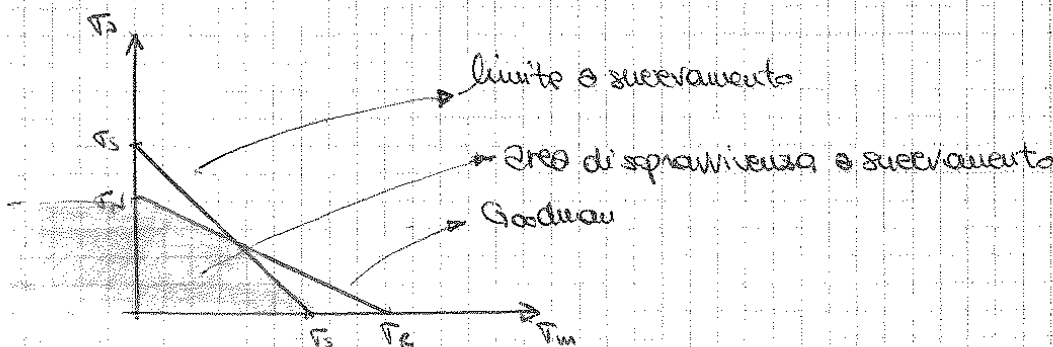
Tensioni medie di compressione sono favorevoli al comportamento a fatica

" " " teoriche " dannose " " " " "

In alcune casi è possibile avere **DIAGRAMMI MASTER** che riassumono i dati a diverse σ_m



- I dati sperimentali tendono a disporre tra le curve di Goodman e Gerber
- Tutti i metodi dovrebbero essere utilizzati solo per valori medi di tensione medio di trazione
- Nei casi in cui ($\sigma_m < \sigma_S$) c'è solo una piccola differenza tra i due metodi
- Nei casi " " ($\sigma_m > \sigma_S$) deve essere considerato anche il collasso per snervamento



DANNEGGIAMENTO CUMULATIVO

un componente meccanico solitamente è soggetto ad un carico a valori uschi e ampiezza variabili

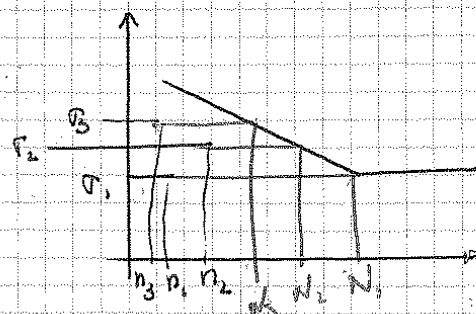
Il collasso avviene se $D_1 + D_2 + D_3 \dots + D_i + \dots + D_n \geq 1$

$$\sum_{i=1}^n D_i \geq 1$$

TEORIA LINEARE DI PALMGREN - MINER

$$D_i = \frac{n_i}{N_i}$$

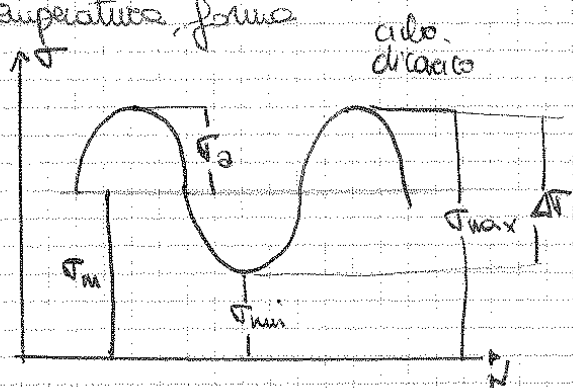
Il danno accumulato dal materiale per effetto del carico ciclico è proporzionale al rapporto tra il numero di cicli che il componente ha subito n_i ed il numero di cicli N_i che provoca rottura al livello di sollecitazione σ_i .



COLLASSO per $\sum_{i=1}^n \frac{n_i}{N_i} \geq 1$

DIAGRAMMA DI NÖLLER

la resistenza a fatica dipende da: stato della superficie, carico, tipo di acciaio, metodi di prova, temperatura, forma



$\sigma_{max}, \sigma_{min}$ tensione massima, minima

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2} \quad \text{t. medio}$$

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} \quad \text{t. alternata}$$

$$\Delta\sigma = \sigma_{max} - \sigma_{min} \quad \text{campo di tensione}$$

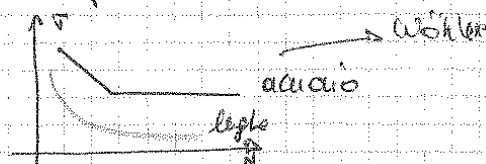
$$R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} \quad \text{rapporto di tensione}$$

$$A = \frac{\sigma_a}{\sigma_m} \quad \text{rapporto di ampiezza}$$

- σ_a limite a fatica (per $10^6 - 10^7$ cicli) \rightarrow limite statico
- σ_m resistenza a fatica per N cicli
- N n° di cicli a rottura
- n n° di cicli

Gli acciai presentano un "ginocchio" nel grafico

I dati sono ottenuti sollecitando un provino standard a flessione rotante, con ampiezza della sollecitazione costante



Esercitazione n° 8

ES U°1

$$b = 15 \text{ mm} \quad h = 30 \text{ mm} \quad N = 12 \text{ kN} \quad N_f = N_f \sin(\omega t)$$

$$N_f = 70000 \text{ N} \quad \omega = 125,7 \text{ rad/s}$$

$$\sigma_{\text{tensione}} = \frac{12000}{15 \cdot 30} = 27 \text{ MPa} \quad \sigma_f = \frac{M_f}{W_f} = \frac{700000}{bh^2} \cdot 6 = 311 \text{ MPa}$$

$$\sigma_x = 27 + 311 \sin(\omega t)$$

$$\sigma_{\text{max}} = 27 + 311 = 338 \text{ MPa} \quad 90^\circ$$

$$\sigma_{\text{min}} = 27 - 311 = -284 \text{ MPa} \quad 0^\circ$$

$$\sigma_m = 27 \text{ MPa}$$

$$\sigma_0 = 311 \text{ MPa}$$

$$\Delta\sigma = 622 \text{ MPa}$$

$$R = \frac{\sigma_{\text{min}}}{\sigma_{\text{max}}} = -0,84$$

$$A = \frac{\sigma_0}{\sigma_m} = 11,5$$

$$12h = 60 \cdot 60 \cdot 12 = 43200 \text{ s}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \approx 20 \text{ Hz} \cdot 12h = 864000 \text{ cicli}$$

ES U°2

$$\sigma_R = 793 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{1000} = 0,9 \sigma_R$$

$$\sigma_p = 0,5 \sigma_R$$

$$\sigma_N = A(N)^b$$

$$\sigma_N = 1284,66 (3 \cdot 10^5)^{-0,085} = 439 \text{ MPa}$$

$$A = \frac{(\sigma_{1000})^2}{\sigma_0} = \frac{0,81 \sigma_R^2}{0,5 \sigma_R} = 1284,66$$

$$b = \frac{\log \sigma_p - \log \sigma_{1000}}{\log 10^6 - \log 10^3} = -0,085$$

$$\sigma_N = A(N)^b$$

$$\frac{\sigma_N}{A} = \frac{600}{1284,66} = N^{-0,085}$$

$$\log N = -\log \frac{600}{1284,66} \cdot \frac{10^4}{0,085} = 7685 \text{ cicli}$$

ES U°4

$$\sigma_R = 650 \text{ MPa}$$

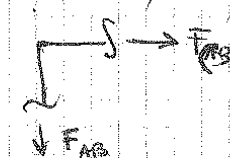
$$F = F_0 \sin(\omega t)$$

$$F_0 = 15 \text{ kN}$$

$$V_B = F_0 \sin(\omega t)$$

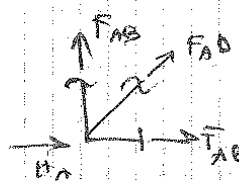
$$H_A + H_B = 0$$

$$F_0 \sin(\omega t) \cdot 3\ell = H_B \ell$$



$$F_{AB} = V_B = 15000 \text{ N}$$

$$F_{CB} = H_B$$



$$F_{AE} + H_A + 300 \cdot 45^\circ F_{AD} = 0$$

$$F_{AB} = -F_{CB} \sin(\omega t)$$

$$F_{AE} = -30000 \text{ N}$$

$$F = -33000 \text{ N}$$

$$F_{BC} = 20000 \text{ N}$$

Esercitazione n° 9

ES n° 1

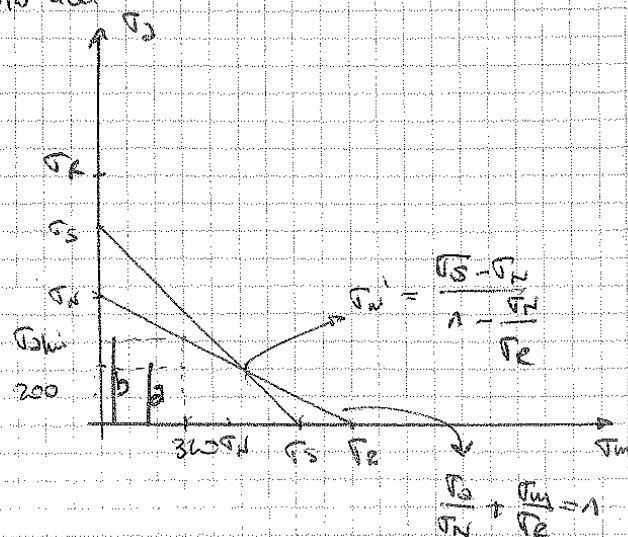
$\sigma_R = 300 \text{ MPa}$ $\sigma_S = 180 \text{ MPa}$ $\sigma_N = 450 \text{ MPa}$ $N = 10^5 \text{ ad}$

$$\sigma_m' = \frac{\sigma_S - \sigma_N}{1 - \frac{\sigma_N}{\sigma_R}} = \frac{180 - 450}{1 - \frac{450}{300}} = 660 \text{ MPa non di rottura}$$

$$\frac{\sigma_{allu}}{\sigma_N} + \frac{\sigma_N}{\sigma_R} = 1$$

$$\sigma_{allu} = \sigma_N \left(1 - \frac{\sigma_N}{\sigma_R}\right) = 450 \left(1 - \frac{450}{300}\right) = 290 \text{ MPa}$$

$$S = \frac{290}{200} = 1,45 \quad S = \frac{b}{a}$$



ES n° 2

$N = 10,5 \text{ kN}$ $M_f = M_{f0} \text{ (aut)}$ $b = 5 \text{ mm}$ $h = 10 \text{ mm}$ $\sigma_R = 400 \text{ MPa}$ $\sigma_S = 320 \text{ MPa}$ $\sigma_N = 180 \text{ MPa}$

$$\sigma_N = \frac{N}{A} = \frac{10500}{500} = 210 \text{ MPa} = \sigma_m$$

$$\sigma_{tmax} = \frac{M_{f0} \cdot 6}{2bh^3} = \frac{M_f \cdot 6}{bh^3} = \sigma_2$$

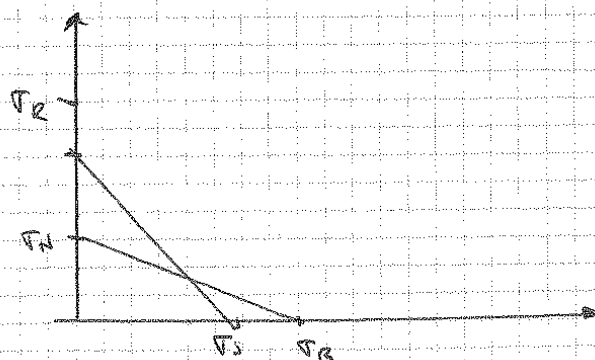
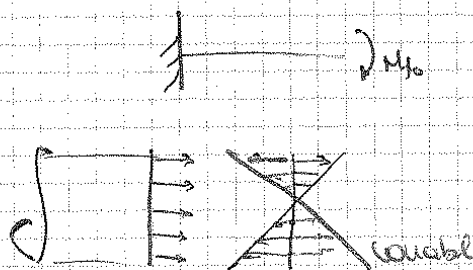
$$\sigma_m' = \frac{\sigma_S - \sigma_N}{1 - \frac{\sigma_N}{\sigma_R}} = \frac{320 - 180}{1 - \frac{180}{400}} = 254 \text{ MPa}$$

$$\frac{\sigma_{allu}}{\sigma_N} + \frac{\sigma_N}{\sigma_R} = 1$$

$$\sigma_{allu} = \left(1 - \frac{\sigma_N}{\sigma_R}\right) \sigma_N = \left(1 - \frac{210}{400}\right) 180 = 85,5 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{allu} = \frac{N_{tallu} \cdot 6}{bh^3} = 85,5 \text{ MPa}$$

$$M_{tallu} = \frac{85,5 \cdot 100 \cdot 5}{6} = 7,125 \text{ Nm}$$



ES n° 3

$$\sigma_2 = \frac{120000}{\pi d^2} \cdot 4$$

$$\sigma_m = \frac{50000}{\pi d^2} \cdot 4$$

$$\sigma_m' = \frac{\sigma_2 - \sigma_m}{1 - \frac{\sigma_m}{\sigma_R}} = \frac{750 - 470}{1 - \frac{470}{940}} = 560 \text{ MPa} \rightarrow \text{limite della regione c}$$

ES. W°5

$$D=20\text{mm} \quad d=20\text{mm} \quad H=120\text{mm} \quad h=80\text{mm} \quad r=10\text{mm} \quad \sigma_R=510\text{MPa} \quad \sigma_s=355\text{MPa}$$

$$F=64\text{kN}$$

$$\sigma_{max} = K_t \cdot \tau_m$$

$$\tau_m = \frac{80}{20 \cdot 80} = 40\text{MPa}$$

$$\frac{H}{h} = \frac{120}{80} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{r}{h} = \frac{10}{80} = 0.125$$

$$K_t = 1.95$$

$$\sigma_{max} = 40 \cdot 1.95 = 78\text{MPa}$$

$$\tau = \frac{\sigma_s}{\sigma_{max}} = \frac{355}{78} = 4.55$$

ES. W°6

$$D=45\text{mm} \quad 1.5\text{m} \quad d=30\text{mm} \quad r=4.5\text{mm} \quad F=500\text{N}$$

$$\frac{4.5}{30} = 0.15$$

$$\frac{D}{d} = \frac{45}{30} = 1.5$$

$$K_t = 1.5$$

$$\tau_m = \frac{M_t \cdot d}{2 \pi d^3} = 283\text{MPa}$$

$$\sigma_{max} = 1.5 \cdot 283 = 424\text{MPa}$$

$$\sigma_s = 424 \cdot 1.7 = 720\text{MPa}$$

ES. W°7

$$a=0.5\text{m} \quad b=1\text{m} \quad D=26\text{mm} \quad r=3\text{mm} \quad F=300\text{N} \quad \sigma_R=890\text{MPa}$$

$$d = D - 2r = 20$$

$$\frac{26}{20} = 1.3 = \frac{D}{d}$$

$$\frac{3}{20} = 0.15 = \frac{r}{d}$$

$$K_t = 1.62$$

$$q = \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{P}{r}}}$$

$$\text{MPa} \approx 145.01 \text{ psi} \quad \sigma_R = 890 \cdot 145.01 \text{ psi} = 128000 \text{ psi}$$

$$q = \frac{1}{1 + \frac{9045}{\sqrt{3}}} = 0.975$$

$$K_t = 1 + q(K_t - 1) = 1 + 0.975(1.62 - 1) = 1.604$$

$$\sigma_{app} = K_t \cdot \sigma_a = K_t \cdot \frac{300 \cdot d}{2 \pi d^3} = 64 = K_t \cdot 191 = 306\text{MPa}$$

$$\sigma_{app} = \frac{\sigma_D}{K_t} = \frac{445}{1.604} = 277\text{MPa}$$

$$n = \frac{445}{K_t \cdot \sigma_D} = 1.45$$