NUMERO : 406

DATA : 02/11/2012

A P P U N T I

STUDENTE : Bessone

MATERIA : Fisica I

Prof. Montorsi

FISICA

Cercare informazioni sul gradiente di un corpo rigido

PAG da GUARDARE

p402

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 153

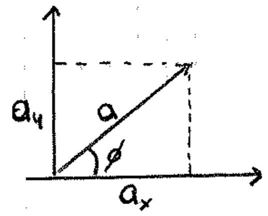
MODULO 2 - CINEMATICA DEL PUNTO

punto: corpo dotato di massa ma con estensione nulla

da Kinesis → studio dei moti di un corpo

I VETTORI

rappresentano delle grandezze caratterizzate oltre che dal valore assoluto (MODULO o INTENSITA') anche da LUNGHEZZA, DIREZIONE e VERSO. Possono rappresentare posizione, velocità, accelerazione, forza, quantità di moto e campi elettromagnetici;



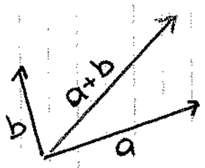
$$a_x = a\cos\phi \qquad a_y = a\,\text{sen}\,\phi$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \qquad \tan\phi = \frac{a_y}{a_x}$$

Due vettori sono uguali se sono uguali tutte le loro componenti

a+b : SOMMA VETTORIALE

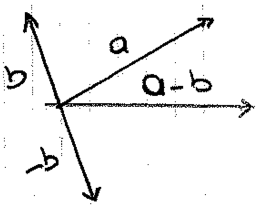
metodo parallelogramma



somma componenti

$$s_x i + s_y j = (a_x i + a_y j) + (b_x i + b_y j) = (a_x + b_x) i + (a_y + b_y) j$$

a-b : DIFFERENZA VETTORIALE

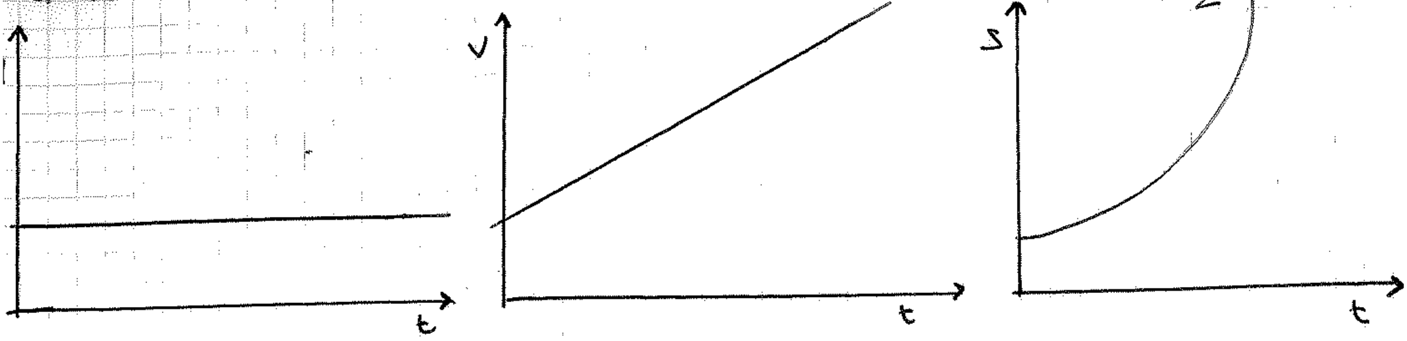


MOLTIPLICAZIONE : SCALARE PER VETTORE $\quad a_1 = ca$

DIVISIONE : " " " $\quad a_1 = a \cdot \frac{1}{c}$

CINEMATICA UNIDIMENSIONALE: movimento in linea retta

$a=k$ $\qquad V=V_0+at$ $\qquad S=S_0+V_0t+\frac{1}{2}at^2$



da cui deriva: $V^2-V_0^2=2a(x-x_0)$

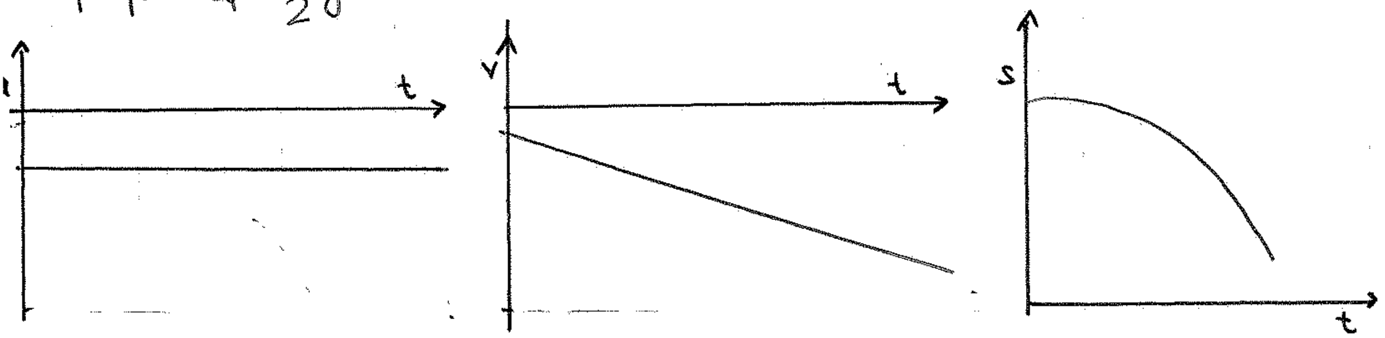
$$V_{ac}=\frac{1}{2}(V_0+V)$$

es: ACCELERAZIONE DI GRAVITÀ

$a=-g$

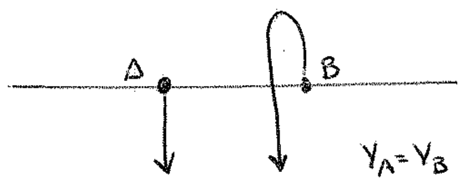
$V_y=V_{0y}-gt$

$y=y_0+V_{0y}t-\frac{1}{2}gt^2$



- accelerazione non dipende dalla natura del materiale dell'oggetto in caduta
- è semplice da calcolare, infatti, Galileo ci riuscì con un metodo semplicissimo
- sulla Terra vale $g=9{,}81\ m/s^2$, all'Equatore $g=9{,}78\ m/s^2$, al Polo $g=9{,}83\ m/s^2$
- velocità di impatto $=\sqrt{2gh}$ (con $V_0=0$)

es: se Anna lascia cadere una palla a terra, mentre Bill la lancia verso l'alto, entrambe le palle avranno velocità di caduta uguale in quanto la velocità dipende dalla posizione iniziale e da quella finale e non dalle intermedie.



MODULO 3 _ FORZA E LEGGI DI NEWTON

dinamis = forza

ISAAC NEWTON (1643-1727) Principia Mathematica

1° LEGGE DELLA DINAMICA = un oggetto non soggetto a forze esterne permane nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme se visto da un qualsiasi sistema di riferimento inerziale

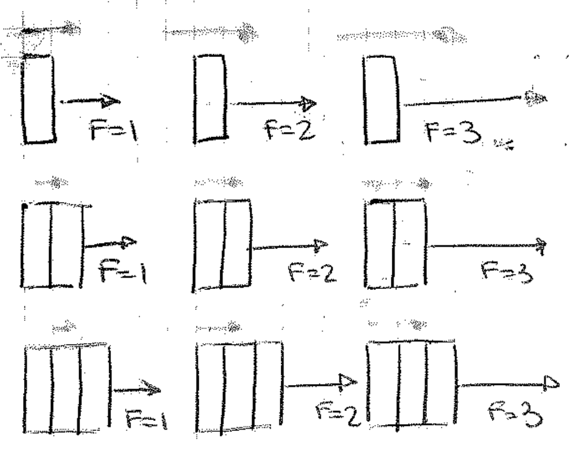
la naturale tendenza di un corpo a mantenere il proprio stato di quiete o di moto rettilineo uniforme è chiamata inerzia. Per questo i sistemi di riferimento in cui vale la 1° legge di Newton sono detti inerziali

SISTEMA di RIFERIMENTO: insieme dei riferimenti utilizzati per individuare la posizione di un oggetto nello spazio [mono/bi/tri-dimensionale]

Ma cos'è un sistema di riferimento inerziale?
Un sistema inerziale è un sistema di riferimento che non accelera ovvero "fisso".
Se esiste un SRI ne esistono infiniti che si muovono uno rispetto all'altro a velocità costante.
Se si potessero eliminare tutte le forze un SRI è un sistema di riferimento si muove di velocità costante.

es: Torino è un SRI? Sì
$a_{centripeta} = v^2/R = \omega^2 R = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R \qquad a = 0,03\,m/s^2$

2° LEGGE DELLA DINAMICA = qualsiasi oggetto non puntiforme possiede una risultante di forze $R = \sum_{i=1}^{n} F_i = ma$
l'accelerazione a dell'oggetto è proporzionale alla risultante R della forza che agisce su di esso (se $R=0$ $a=0$)
la costante di proporzionalità si chiama **massa**: è una proprietà costante dell'oggetto che non dipende dalle influenze esterne. (la forza è l'influenza esterna)

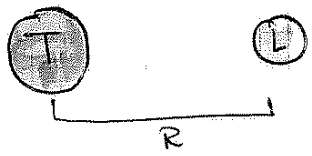


l'accelerazione è sempre proporzionale alla forza, ma la costante di proporzionalità è differente per le diverse masse
l'accelerazione impressa è inversamente proporzionale alla massa

FORZE DI CONTATTO → elettromagnetiche tra due corpi (forze nucleari deboli)

FORZE A DISTANZA → gravità, elettricità, interazioni forti

↳ ATTRAZIONE GRAVITAZIONALE è la stessa che ci sarebbe se la massa fosse tutta concentrata al centro della sfera! (è la legge di Gauss per le masse sferiche!)

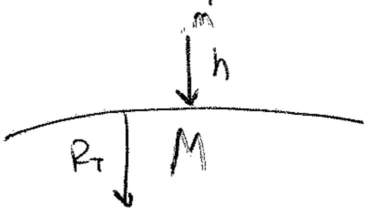


$$\frac{R_T^2}{R_L^2} = 0.000273$$

$$|F_{MM}| = G\frac{Mm}{R^2}$$

$G = 6.67 \cdot 10^{-11}\, m^3 \cdot kg^{-1} s^{-2}$

Per calcolare la forza che la Terra esercita su un oggetto vicino alla superficie terrestre si può generalizzare non dando importanza all'h (vera distanza dalla crosta terrestre) in quanto l'ordine di grandezza è minuscolo! CAMPO GRAVITAZIONALE



$$h + R_T = R_T$$
$$h << R_T$$
$$\Downarrow$$
$$F = \frac{GMm}{(R_T)^2} = \frac{GM}{(R_T)^2}m$$

$$\boxed{P = g \cdot m \quad \text{(Peso dell'oggetto)}}$$

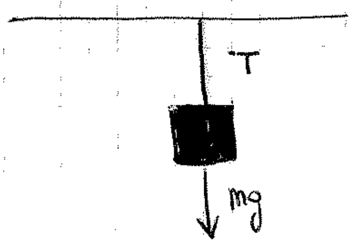
→ ne segue che massa e peso sono due cose distinte!

MASSA → intrinseca dell'oggetto!

PESO → dipende da m e da a

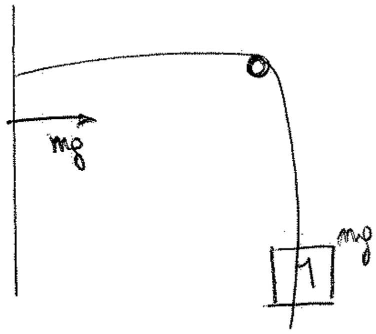
TENSIONE DI UNA FUNE

la tensione T ad un certo punto della fune è la grandezza della forza misurata in quel punto [si ricava immaginando di tagliarla!]
la tensione di per sé non ha direzione: segue quella della fune.



$T - mg = ma_y = 0$
$T = mg$

CARRUCOLE E GUIDE



S:

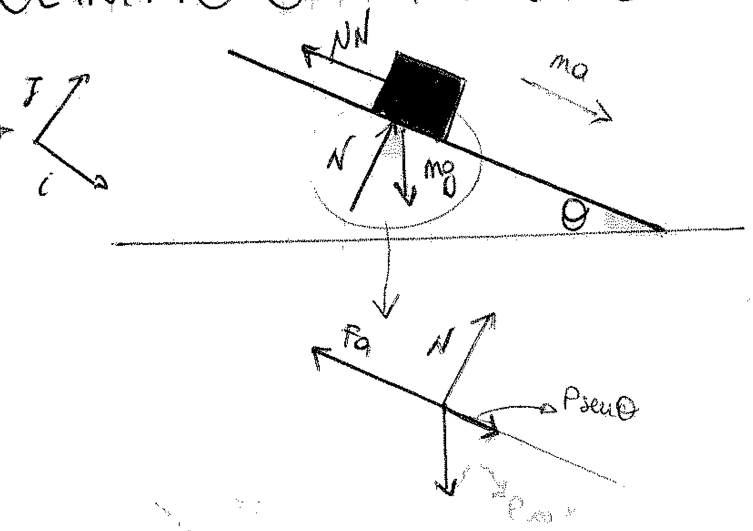
M si muove?

Sì, a dx

NB: la forza d'attrito fra due superfici è proporzionale alla normale fra quelle superfici

PIANO INCLINATO CON ATTRITO

Come sempre mettere uno degli assi parallelo al piano inclinato!



$\vec{Fa}+\vec{P}+\vec{N}=m\vec{a}$

$x: \ -F_a+mg\sin\theta=ma$

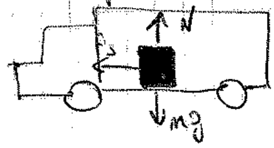
$y: \ -mg\cos\theta+N=0$

$F_a=\mu N \Rightarrow -\mu N+mg\sin\theta=ma \Rightarrow -\mu \cancel{m}g+\cancel{m}g\sin\theta=\cancel{m}a$

$\Downarrow$

$\boxed{a=g(\sin\theta-\mu)}$

es una cassa di massa m è ferma nel retro di un camion. Qual è la massima accelerazione che può avere il camion perché la cassa non scivoli?

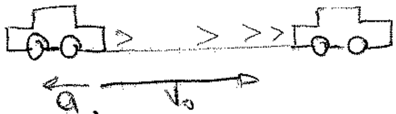


$\bar{F}_s + \bar{P} + \bar{N} = m\bar{a}$

$x: \mu_s N = m\, a_{max} \Rightarrow \mu_s \cancel{m} g = \cancel{m} a_{max} \Rightarrow a_{max} = \mu_s g$

$y: P + N = 0$

es un auto viaggia a velocità v_0. Se μ_s è il coefficiente di attrito statico tra le gomme e il suolo, quanto è la più piccola distanza entro la quale è possibile fermare la macchina?



$x: F_s = \mu_s N = ma \qquad a = \frac{\mu_s \cancel{m} g}{\cancel{m}}$

$y: N = P$

$x: v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0) \Rightarrow \cancel{v^2} = 2a(x - x_0) + v_0^2 \Rightarrow v_0^2 = -2a(x - \cancel{x_0}) \Rightarrow x = -\frac{v_0^2}{2a}$

$\Rightarrow x = +\frac{v_0^2}{2\mu_s g}$ diventa + perché è una decelerazione

es: $\mu > 0 \qquad v = k \qquad m$

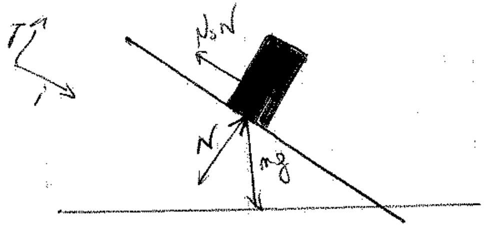
cosa succede se raddoppio m (2m)?

$i: -\mu_s N \Rightarrow \underbrace{mg \sin\theta - \mu_s mg \cos\theta = ma}$

NON un carico che dipende dalla massa m

⇓

in quanto si eliminano uno con l'altro!



$$1 - \frac{\gamma v(t)}{g} = e^{-\gamma t}$$

$$v(t) = \frac{mg}{b}(1 - e^{-\gamma t})$$

$$V_R \Rightarrow v(t) = V_R(1 - e^{-\gamma t})$$

$$v(t) \rightarrow \begin{cases} 0 & t = 0 \\ V_R & t \to \infty \end{cases}$$ velocità R per un tempo all'∞

$$t = 0 \rightarrow V_R\left[1 - (1 - \gamma t)\right] = V_R \gamma t$$ $V_R \gamma = g$ $\longrightarrow$ per tempi piccoli è come se non ci fosse attrito!

$$a = \frac{dv}{dt} = V_R \frac{d}{dt}(1 - e^{-\gamma t}) = -V_R(e^{-\gamma t}(-\gamma)) = g e^{-\gamma t}$$

$$a = g e^{-\gamma t}$$

$$a = \begin{cases} g & t = 0 \\ 0 & t \to +\infty \end{cases}$$

RIGUARDO IL RAPPORTO MOTO CIRCOLARE E FORZA

nel moto circolare

$\bar{V} = \hat{\theta}\,\omega\,\text{Raggio}$

$\bar{a} = a_r\hat{r}\ \boxed{+a_\theta\hat{\theta}}$ → solo se il moto è accelerato

$a_\theta = \text{Raggio}\,\alpha$

$R = m\bar{a}$

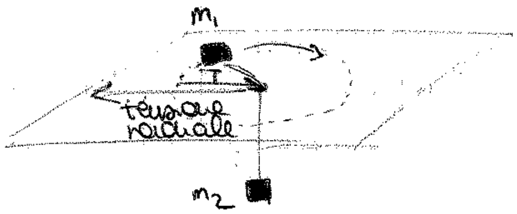
$$R_r = ma_r = -\frac{mv^2}{\text{Raggio}}$$

$$R_\theta = ma_\theta = m\alpha\,\text{Raggio}$$

es Una m, scivola lungo una traiettoria circolare con velocità tangenziale v senza attrito. Il raggio R è mantenuto costante tramite un filo ideale, all'altra estremità del filo è appeso un secondo corpo di massa m_2.

Forza di tensione T?

Velocità tangenziale?



m_1: N, T, P

$$r:\ T = m\frac{v^2}{\text{Raggio}}$$

$m_2: T = mg$

$$\begin{cases} T = m_2 g \\ T = m_1\dfrac{v^2}{\text{Raggio}} \end{cases} \qquad v = \sqrt{\frac{m_2 g R}{m_1}}$$

Definizione del MOTO ARMONICO risultato dalla forza (ma) e dalla forza elastica   Orizzontale

Se allunghiamo una molla a cui è attaccata una massa m e lasciamo andare la molla, la massa si mette ad oscillare

I   II   III

$\longleftrightarrow x$ $F = ma$

$x: -Kx = ma$

2 variabili

Ma so che $a = \frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow \quad -Kx = ma = \frac{m d^2x}{dt^2}$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{K}{m}x$$

ω^2 = frequenza angolare o pulsazione

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \quad (1)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$ equazione differenziale del moto armonico semplice

Proviamo la soluzione dell'eq. differenziale $x = A\cos(\omega t)$

$$\frac{dv}{dt} = -\omega A \operatorname{sen}(\omega t)$$

$$\frac{d^2x}{dt} = -\omega^2 A\cos(\omega t) = -\omega^2 x$$ ritrovo (1)

Proviamo la soluzione dell'eq. diff. $x = A\operatorname{sen}(\omega t)$

$$\frac{dv}{dt} = \omega A\cos(\omega t)$$

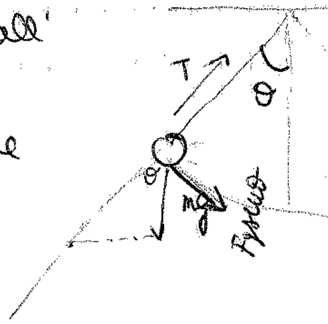
$$\frac{d^2x}{dt} = -A\operatorname{sen}(\omega t)\omega^2 = -\omega^2 x$$ ritrovo (1)

$$x(t) = B\operatorname{sen}(\omega t) + C\cos(\omega t)$$

$B = -A\operatorname{sen}\phi \quad C = A\cos\phi$

PENDOLO SEMPLICE

Il pendolo semplice è composto da una massa m sospesa all'estremità di una corda di lunghezza l e massa trascurabile. Trovare la frequenza angolare per le sue oscillazioni.



$$F = -mg\,\text{sen}\,\theta = mL\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$m: \; T + P = ma$

$$R_\theta = ma_\theta = mR_\alpha = mL\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$F = \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\text{sen}\,\theta = 0$$

per sen θ e cos θ con θ = 0 o molto vicini allo 0 si ha un'espansione di Taylor:

$$\text{sen}\,\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} \dots \qquad \text{per } \alpha << 1 \quad \text{sen}\,\theta = 0$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} \dots \qquad \text{"} \quad \text{"} \quad \cos\theta = 1$$

quindi diventa $\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0}$

$$\downarrow$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\theta(t) = A_\theta \cos(\omega t + \phi_\theta) \\ &T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \end{aligned}}$$

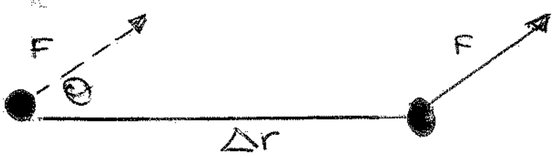
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 25 di 153

LAVORO ED ENERGIA

CINETICA = energia associata al moto

l'energia non può essere creata o distrutta: può solo trasformarsi da una forma all'altra. Diciamo che l'energia si conserva:
- in un sistema isolato
- fare del "lavoro" in un sistema isolato fa cambiare la sua energia

Lavoro (work)



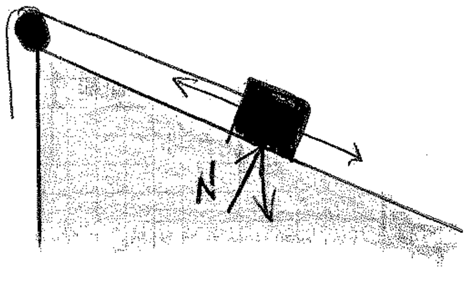
Il lavoro W di una forza costante F che agisce per uno spostamento Δr è:

$$\boxed{W = \underbrace{\vec{F}\cdot\Delta\vec{r}}_{\text{prodotto scalare}} = F\Delta r\cos\theta}$$

θ è l'angolo formato tra il vettore forza e quello spostamento
Il lavoro fatto dalle altre forze che agiscono sul corpo deve essere calcolato separatamente facendo la somma dei diversi lavori delle forze o calcolando la risultante:

$$W_1 = F_1\Delta r \qquad W_2 = F_2\Delta r$$
$$W_{tot} = F_1\Delta r + F_2\Delta r = \Delta r(F_1+F_2)$$

le forze devono essere considerate solamente se non sono perpendicolari al vettore spostamento (vedi esempio ↓ N non conta!)



Non c'è lavoro se:

$F=0$

$\Delta x=0$

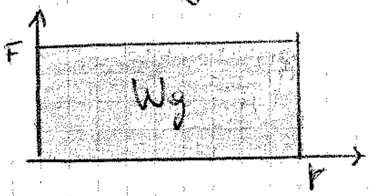
$\theta=90°$

Se $\theta>90° \Rightarrow \cos\theta<0 \Rightarrow$ il lavoro è negativo! Con $\cos 0 \Rightarrow W$ max!

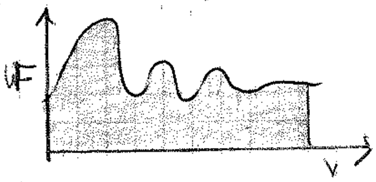
Il lavoro si misura in Joule $[J = N\cdot m = [M][L^2]/[T^2]]$ (calorie, eV, Erg)

Forze variabili

quando la forza è costante $W = F \Delta r$



quando una forza è variabile l'area si calcola con l'integrazione



$$dW = \Sigma F dx$$

$$W = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ N \to \infty}} \sum_{i=1}^{N} F(x_i)\Delta x$$

$$W = \int_{x_f}^{x_i} F(x)dx$$

→ Il lavoro è l'integrale della forza lungo lo spostamento

Teorema lavoro-energia cinetica ...

CASO 1D

$$W_R = \int_{x_1}^{x_2} R(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} ma\,dx = m\int_{x_1}^{x_2} \frac{dv}{dt}dx = \int_{v_1}^{v_2} v\,dv = \frac{1}{2}mv^2\Big|_{v_1}^{v_2} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

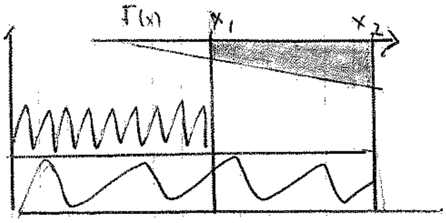
↓

lavoro fatto dalla Risultante delle forze

$$\boxed{W_R = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = K_2 - K_1}$$

Forze variabili: Forza elastica (1D)

$F_{el} = -kx$



$$W = -\int_{x_1}^{x_2} kx\,dx = -k\int_{x_1}^{x_2} x\,dx = -k\frac{x^2}{2}\Big|_{x_1}^{x_2} =$$

$$\boxed{= -\frac{1}{2}kx_2^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 \Rightarrow W<0}$$

es | blocco scivola su un piano contro una molla m quando si ferma contro la molla se $m_2 = \frac{1}{2}m_1$ e $v_2 = 2v_1$?

$$W_R = W_{el} = -\frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}kx_2^2 = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

In prossimità della terra ...

$R_1 = R_T + \Delta y \qquad \Delta y << R_T$

$R_F = R_T$

$$W_G = G m_1 m_T \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T + \Delta y}\right) = G m_1 m_T \left(\frac{\cancel{R_T} + \Delta y - \cancel{R_T}}{R_T(\underbrace{R_T + \Delta y}_{<< R_T})}\right) = G m_1 m_T \left(\frac{\Delta y}{R^2}\right) =$$

$$= \underbrace{\boxed{\left(\frac{G m_T}{R^2}\right)}}_{g} m_1 \Delta y = \boxed{g m \Delta y} \quad (3)$$

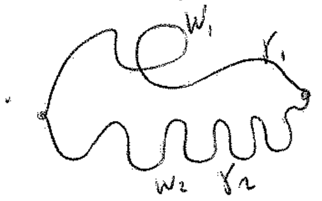
Se il lavoro fatto, dipende dalle posizioni iniziali e finali, non dal percorso fatto [precedentemente dimostrate] esempi:

(1) $W_{el} = -\frac{1}{2} k (x_2^2 - x_1^2)$

(2) $W_g = G m M \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)$

(3) $W_g = -m g \Delta y$

$W_1 = W_2 \implies$ Il lavoro in un percorso chiuso è 0



$$W_1 = \int_{r_1, \gamma_1}^{r_2} \bar{F} d\bar{r} \qquad W_1 = W_2 \qquad W_1 - W_2 = 0$$

$$W_2 = \int_{r_1, \gamma_2}^{r_2} \bar{F} \cdot d\bar{r}$$

$$\int_{r_1 \gamma_1}^{r_2} \bar{F} d\bar{r} - \int_{r_1 \gamma_2}^{r_2} \bar{F} d\bar{r} = \int_{r_1 \gamma_1}^{r_2} \bar{F} d\bar{r} + \int_{r_2}^{r_1 \gamma_2} \bar{F} d\bar{r} = \int_{\bar{a}, \gamma_1 + \gamma_2}^{\bar{a}} \bar{F} d\bar{r} = \boxed{\oint \bar{F} d\bar{r} = 0}$$

Forza conservativa è la forza per la quale $W = 0$ lungo un qualsiasi percorso chiuso

Energia meccanica E

Energia cinetica $\Delta K = W$

$\Delta U = -L$

$\Delta U = -\Delta K$

$\Delta U + \Delta K = 0$

$\Delta(U+K) = 0$ → Principio di conservazione dell'Energia meccanica

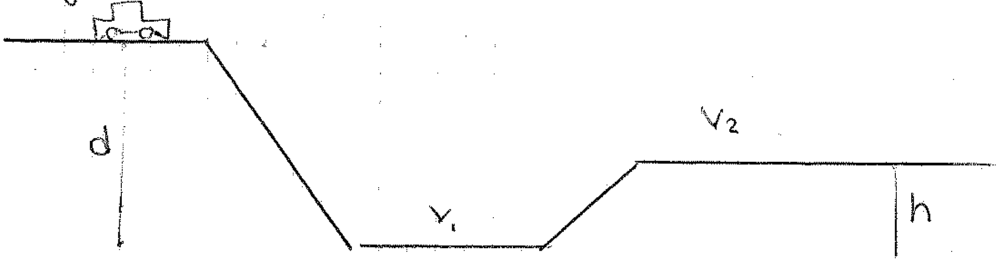
$$\boxed{E = K + U}$$

energia meccanica = energia cinetica + potenziale → in qualsiasi sistema isolato costituito da oggetti che interagiscono soltanto tramite forze conservative, l'energia cinetica può cambiare in energia potenziale ma mai cambierà il risultato dell'energia meccanica

$\Delta E = \Delta(K+U) = 0$

$E_A = K_A + U_A = K_B + U_B = E_B$

es auto giocattolo HOTWHEEL



$E_1 = E_1$

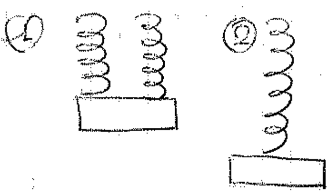
$E_1 = E_2$

$E_1 = K_1 + U_p = \frac{1}{2} m v_1^2 + 0$ $\qquad \frac{1}{2} m v^2 = mgd$ $\qquad v = \sqrt{2gd}$

$v_2^2 = 2g(d-h)$

$v_2 = \sqrt{2g(d-h)}$

es



① $E_1 = \cancel{K_1} + U_1 = U_{p1} + U_{el1}$

② $E_2 = U_{p2} + U_{el2}$

① $F_{el} = kx_1 + kx_1 = 2kx_1$

② $F_{el} = kx_2$

① $U_1 = \frac{1}{2} kx_1^2 + \frac{1}{2} kx_1^2 = kx_1^2$

② $U_2 = 2kd^2$

$W_A = E_f - E_i$

$E_A = U_A = mgl \operatorname{sen}\theta$

$E_B = K_B = \frac{1}{2} m v^2$

$W = \frac{1}{2} m v^2 - mgl \operatorname{sen}\theta = -\mu N l$

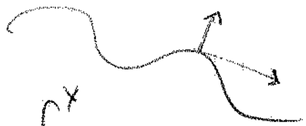
$\frac{1}{2} m v^2 - mgl \operatorname{sen}\theta = -\mu mg \cos\theta$

$v = \sqrt{2lg(\operatorname{sen}\theta - \mu\cos\theta)}$

$F_A - \mu N$

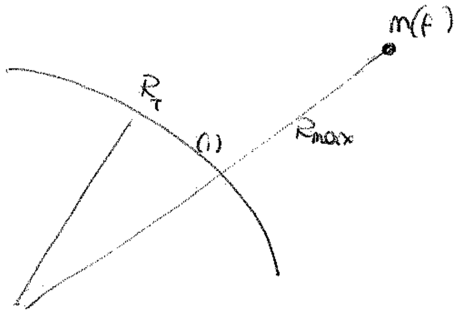
$N = mgl \cos\theta$

$W = -mg \int_0^l \cos\theta \, ds = -\mu mg \int_0^x dx = -\mu mg \Delta x$



lungo i 4 percorsi (trascurando l'attrito viscoso) raggiungo la stessa velocità. Tutto dipende da x

100 Un proiettile di massa m è lanciato dalla superficie terrestre con $v_i = v_0$. Qual è la massima distanza dal centro della Terra R_{max} raggiunta prima di tornare indietro?



$\Delta E = 0$

$K_i + U_i = K_R + U_R$

$E_i = K_i + U_i$

$U = -\frac{GmM}{R} \qquad U^{(i)} = -\frac{GmM_T}{R_T}$

$E_i = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{GmM_T}{R_T}$

$K^{(f)} = 0$

$E_f = -\frac{GmM_T}{R_{max}}$

$\frac{1}{2} m v_0^2 = GMm\left(\frac{1}{R_E} - \frac{1}{R_{max}}\right)$

$v^2 = 2GMm\left(\frac{1}{R_E} - \frac{1}{R_{max}}\right)$

$v^2 = \frac{2GMm}{R_E} - \frac{2GMm}{R_{max}}$

$R_{max} = \frac{R_E}{\;}$

Per poter arrivare a distanza infinita, $R_{max} \to \infty$ → è più difficile uscire dall'orbita di un pianeta fermo!

$V = \sqrt{2gR_T}$

SISTEMI CONSERVATIVI BI E TRIDIMENSIONALI

$R = -\nabla U$

in particolare diciamo che il corpo è in equilibrio quando $R = 0$

∇ gradiente $\nabla F = \frac{\partial U}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}$

$F = -\frac{dU}{dx}$

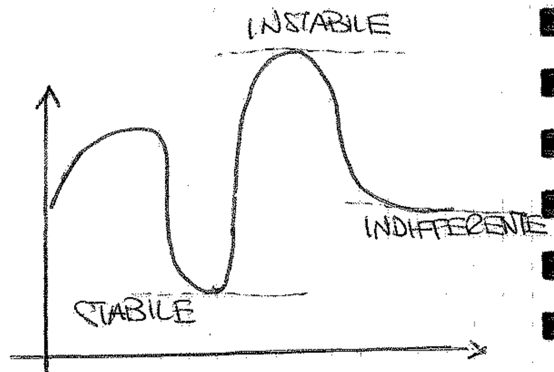
$\bar{F} - \bar{\nabla} U$

$$F \cdot d\bar{r} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}\right)\left(dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}\right) = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz\right) = -dU$$

Forza elastica $U_x = \frac{1}{2}kx^2 + C$ $F_x = -\frac{dU}{dx} = -kx$

F. gravità $U_y = mgy + C$ $F_y = -\frac{dU}{dy} = -mg$

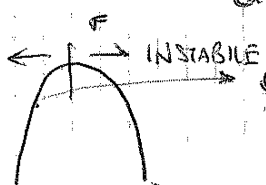
Forza gravitazi. $U_R = + \frac{GMm}{R} + C$ $F_R = -\frac{dU}{dR} = -\frac{GMm}{R^2}$



es: c'è una pallina su un percorso misto
INSTABILE: se si allontana
STABILE: ritorna alla partenza
INDIFFERENTE: rimane ferma

$\frac{dU}{dx} < 0 \Rightarrow F = -\frac{dU}{dx} > 0$

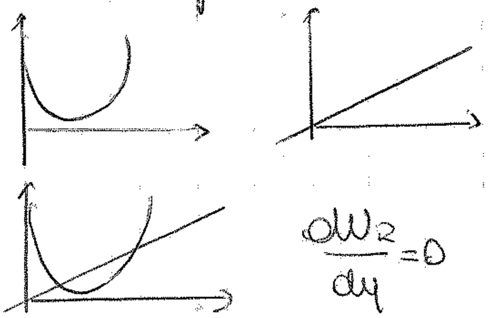
$\frac{dU}{dx} > 0 \Rightarrow F = -\frac{dU}{dx} < 0$



$\frac{dU}{dx} > 0 \Rightarrow F = -\frac{dU}{dx} < 0$

$\frac{dU}{dx} < 0 \Rightarrow F = -\frac{dU}{dx} > 0$

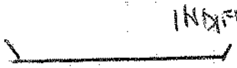
$U = U_{el} + U_g$



$\frac{dU_2}{dy} = 0$

$\frac{dU_R}{dy} = mg + ky$ $y_c = -\frac{mg}{k}$

INDIFFERENTE



$\frac{dU}{...}$ ... $F = \frac{dU}{...}$ ... nuova posizione di

CAMPI ELETTRICI

Campo formato da due particelle su una carica di prova

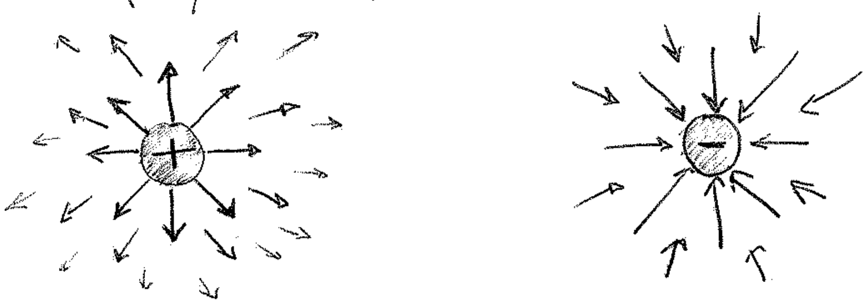
$$E = k\frac{q}{r^2} \qquad E = \frac{F}{q} = \frac{q_1}{r_1^2}\hat{r}_1 + \frac{q_2}{r_2^2}\hat{r}_2 + \dots$$

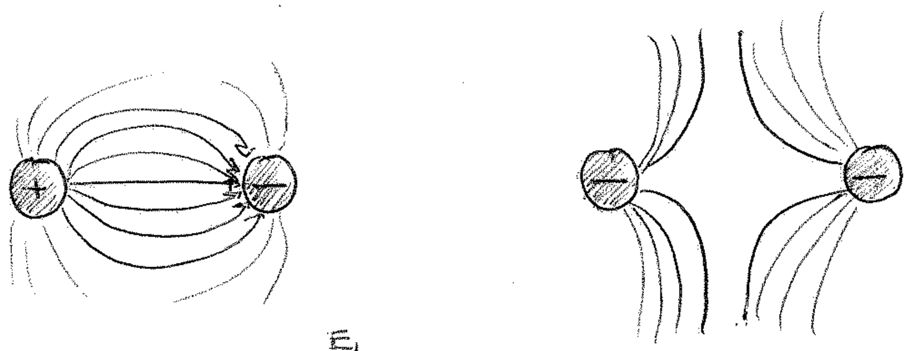
I campi possono sembrare delle quantità formali delle definizioni matematiche

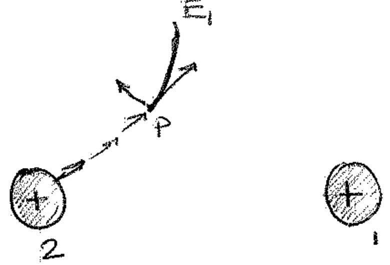
Caratteristica importante: il campo elettrico E si propaga alla velocità della luce

Non c'è azione istantanea a distanza

Se le cariche si muovono il campo E al tempo t dipende dalla posizione delle cariche nel tempo





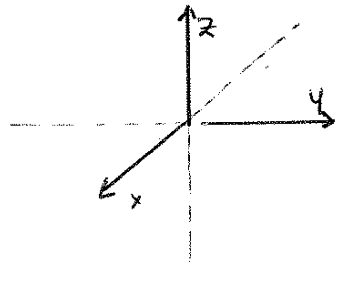


Le linee di campo elettrico sono:

- tangenti al vettore campo elettrico
- orientate nel verso del v. c. elettrico
- escono dalle cariche positive e entrano in quelle negative
- la loro densità è direttamente proporzionale a quella del c. e.

MATEMATICA dei CAMPI

1. Campo scalare: numero associato ad ogni punto dello spazio (funzione)
2. " vettoriale: vettore " " " " " " (funzione vettoriale)
3. " fisico: obbediscono a leggi semplici, generati da sorgenti



SISTEMI NON INERZIALI

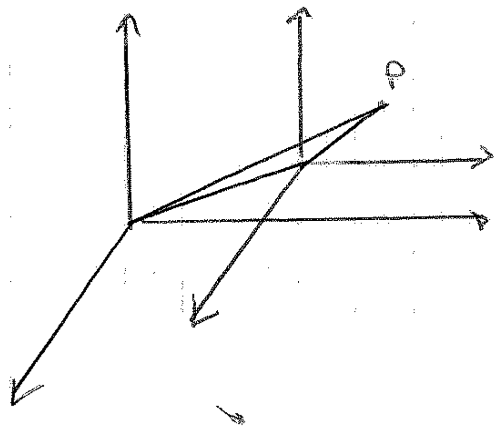
supponiamo di avere a disposizione due sistemi di riferimento cartesiani Oxy e $O'x'y'$ e vediamo come descrivere posizione, velocità e accelerazione di un punto materiale P.

$r = r' + \overline{OO'}$

$r' = \overline{OO'} + r$

$v = \frac{dr}{dt} = \frac{d\overline{OO'}}{dt} + \frac{dr'}{dt} = v_{OO'} + v'$

$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv_{OO'}}{dt} + \frac{dv'}{dt} = a_{OO'} + a'$



se $v_{OO'} \neq$ costante

$a_{OO'} \longrightarrow a' = a - a_{OO'}$

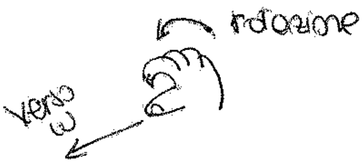
per cui un osservatore su O vedrà $F = ma$ mentre O' $F' = ma' = m(a - a_{OO'}) = F - ma_{OO'}$

risultante forze del SRI ← forza apparente

FORMULA POISSON per versori in rotazione con velocità angolare ω

$$\frac{d\hat{u}}{dt} = \overline{\omega} \times \hat{u}$$

$\overline{\omega}$ = vettore dell'angolare ha modulo $\equiv \omega$; direzione $\perp$ piano rotazionale; verso dato dalla regola della mano destra



$v = v_{OO'} + v' + \omega \times r'$

$v = \frac{d\overline{r}}{dt} = \frac{d\overline{r}'}{dt} + \frac{d_{OO'}}{dt}$

$\overline{r}' = x'\hat{i}' + y'\hat{j}' \; (z'\hat{k}')$

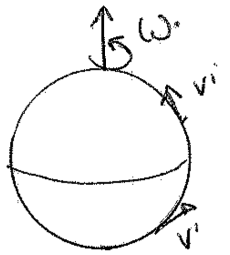
$\frac{d\overline{r}'}{dt} = \frac{dx'}{dt}\hat{i}' + \frac{x'd\hat{i}'}{dt} + \frac{dy'}{dt}\hat{j}' + \frac{y'd\hat{j}'}{dt}$

$\frac{d\overline{r}'}{dt} = \underbrace{v_x'\hat{i}' + v_y'\hat{j}'}_{\overline{v}'} + x'(\overline{\omega} \times \hat{i}') + y'(\overline{\omega} \times \hat{j}') = \overline{v}' + \overline{\omega} \times (x'\hat{i}' + y'\hat{j}') = \overline{v}' + \overline{\omega} \times \overline{r}'$

vettore posizione sistema eq. mobile

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 41 di 153

Accelerazione di Coriolis: agisce solo sugli oggetti che si muovono rispetto alla Terra
ha componente // e componente ⊥ al suolo, quella parallela è massima ai poli, nulla all'equatore



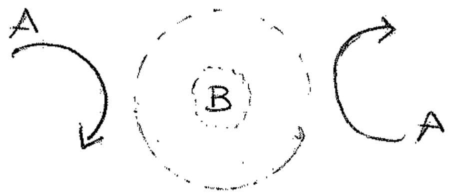
All'emisfero Nord: ⊗: $-2\vec{\omega} \times \vec{v}'$ spinge un corpo vs dx

All'emisfero Sud: ⊙: $-2\vec{\omega} \times \vec{v}'$ " " " " sx

Effetti sulla Terra: accelerazione centripeta della rotazione terrestre sui venti devia a dx all'emisfero Nord, a sx in quello Sud

ROMA-NEW YORK volo più lungo che NEW YORK-ROMA: l'aria calda dall'equatore sale muovendosi verso Nord e viene deviata a destra da Coriolis con l'effetto di vento da ovest verso est che favorisce voli nella medesima direzione e sfavorisce gli altri

CICLONE: movimento d'aria che si genera attorno alla bassa pressione



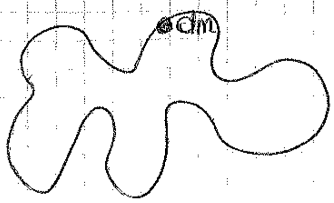
mentre l'aria si muove dalle zone di alta pressione A, a quelle di bassa B nell'emisfero Nord viene deflessa verso destra rispetto alla direzione dei venti. La circolazione d'aria è antioraria, nell'emisfero Sud il contrario

Al contrario gli ANTICICLONI sono gli enormi vortici di aria che ruotano attorno ad una zona di A cercando di allontanarsi. Questo movimento è detto divergenza anticiclonica. Nell'emisfero Nord ha senso orario.

Stessa cosa per le correnti marine.

La meta dell'aereo se si puntasse diretto verso essa, non verrebbe raggiunta a causa della rotazione della Terra → correttori automatici

CORPO SOLIDO CONTINUO



dm = elemento infinitesimo di m

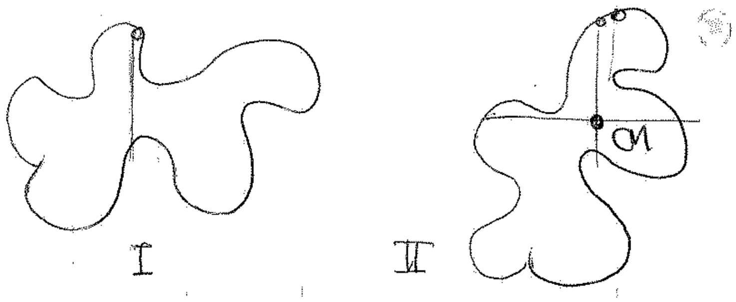
$$R_{CM} = \frac{\int r\,dm}{\int dm} = \frac{\int r\,dm}{M}$$

$$\bar{R}_{CM} = \frac{1}{M} \lim_{\substack{N\to\infty \\ m_i \to 0}} \sum_{i=1}^{N} m_i \bar{r}_i = \frac{1}{M}\int dm\,\bar{r}$$

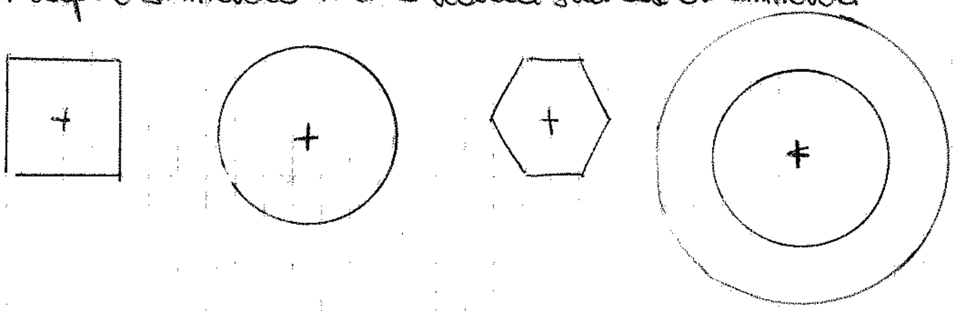
densità $\rho_M = \frac{M}{V} = \frac{dm}{dV}$

$$\left.\right\} \frac{1}{M}\int \rho\, dV \bar{r}$$

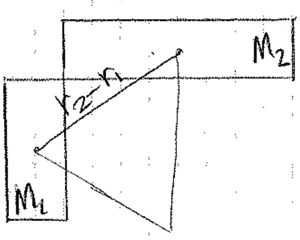
DEFINIZIONE PRATICA DEL CENTRO DI MASSA



La posizione è una proprietà intrinseca dell'oggetto.
Se un oggetto ha densità costante, la massa si semplifica e la posizione del CM non dipende più dalla massa: è centro geometrico
Se il corpo è simmetrico: il CM si troverà sull'asse di simmetria



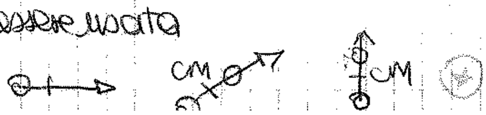
CENTRO DI MASSA DI CORPI ESTESI



Il CM di un insieme di corpi estesi si ottiene considerando la m di ogni corpo posizionata nel CM di quel corpo

$$R_{CM} = \frac{m_1 R_1 + m_2 R_2}{m_1 + m_2}$$

Il CM di un oggetto si trova dove possiamo appendere liberamente l'oggetto. Infatti la forza di gravità agisce come se la massa dell'oggetto fosse concentrata nel suo CM. Quindi se prendiamo l'oggetto altrove, tenderà a spostarsi in modo da allineare il CM alla verticale passante per il perno. Questa proprietà può essere usata per identificare gli oggetti di forma strana



URTI

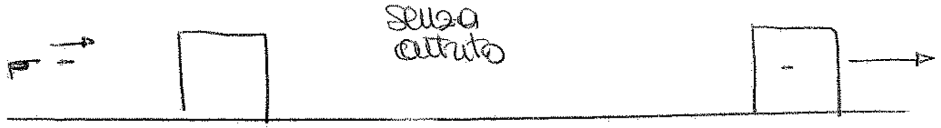
Nella collisione tra due particelle una forza relativamente grande agisce su ciascuna di esse per un tempo relativamente breve

COLLISIONI ELASTICHE = conservazione dell'energia cinetica (si conserva con il momento)
" ANELASTICHE = dissipazione " "

COLLISIONI ANELASTICHE 1D

es:

senza attrito



$V?$ $K_{in}?$ $K_f?$ $K_i = K_f?$

$F_{ext} = 0 \Rightarrow P_x = cost$

$P_{x_i} = mv_i + MV_i = mv$
$P_{x_f} = (m+M)V_f = (m+M)V$ $\rightarrow mv = (m+M)V$ $\quad V = \frac{mv}{m+M}$

$K_i = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}M\left(\frac{m+M}{M}\right)^2 V^2 = \frac{1}{2}\frac{(m+M)^2}{m}v^2$

$K_f = \frac{1}{2}(m+M)V^2$ $\quad K_i \neq K_f$

es

① $P_x = MV + mV = MV$
② $P_x = (M+m)v$

$v = \frac{M}{m+M}V$

es

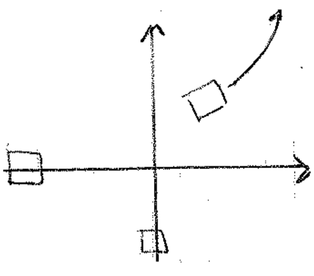
$V_1 > V_2$

qui E si conserva! $\quad$ qui no!

COLLISIONI IN 2D

es x $P_{x_i} = P_{x_f} \rightarrow m_1 v_1 = (m_1 + m_2)V_x \rightarrow V_x = \frac{m_1}{m_1 + m_2}v_1$

y $P_{y_i} = P_{y_f} \rightarrow m_2 v_2 = (m_1 + m_2)v_y \rightarrow v_y = \frac{m_2}{(m_1 + m_2)}v_2$



es: Due uomini sulla stessa plancia corrono con v uguale, ma loro hanno m diverse

i due uomini raggiungono la fine della plancia ma quello più magro sposta più plancia rispetto a CM

$v = v_e + v_p \qquad m v_p = M v_e \qquad v_p = v - v_e \qquad v_e = v \frac{M}{m+M}$

URTI ELASTICI

es: 1D

P_v si conserva $\quad m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$

$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$

es: Due scatole: una in movimento l'altra no

$$V_{CM} = \left(\frac{1}{m_1+m_2}\right) m_1 v_{1,i} + m_2 v_2 \qquad \text{ma } v_{2,i} = 0$$

$$V_{CM} = \frac{m_1}{m_1+m_2} v_1$$

$$v^*_{1,2} = v_{1,2} - v_{CM}$$

$$\begin{cases} m_1 v^*_{1i} + m_2 v^*_{2i} = 0 \\ m_1 v^*_{1f} + m_2 v^*_{2f} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (m_1 v^*_{1i})^2 = (m_2 v^*_{2i})^2 \\ (\quad " \quad)^2 = (\quad " \quad)^2 \end{cases}$$

$$v^*_{1,2} = v_{1,2} - v_{CM}$$

$$\cancel{\frac{1}{2}} \frac{m^2}{m_1} v_{1i}^{*2} + \cancel{\frac{1}{2}} \frac{m^2}{m} v_{2i}^{*2} = \cancel{\frac{1}{2}} m_1 v_{1f}^2 + \cancel{\frac{1}{2}} \frac{m^2}{m_1} v_{2f}^{*2} \qquad v_{2i}^{*2} = v_{2f}^{*2}$$

$$|v^*_{1f}| = |v^*_{2f}|$$

Non solo devono essere uguali in modulo ma anche opposti in verso

$$v_1 = v_1^* + v_{CM}$$

$$v_2 = v_2^* + v_{CM}$$

URTI ELASTICI nel RIFERIMENTO del C.d.m.

m_1

$v_{1i}' = v_{1i} - V$

$v_{1f}' = v_{1f} - V$

nell'urto elastico $v_{1f}' = -v_{1i}'$

$-v_{1i} + V = v_{1f} - V$

$2V = v_{1f} + v_{1i}$

$$\begin{cases} v_{1f} = -v_{1i} + 2V \\ V = \dfrac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2} \end{cases}$$

$$v_{1f} = -v_{1i} + 2\frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2} = \frac{-v_{1i} m_1 - m_2 v_{1i} + 2m_1 v_{1i} + 2m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2i}$$

$$v_{2f} = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{2i} + \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i}$$

① con masse uguali

$m_1 = m_2$

$v_{1f} = v_{2i}$ $\quad v_{2f} = v_{1i}$

② Bersaglio fermo $v_{2i} = 0$

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} \qquad v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i}$$

IMPULSO

$$I = \int_{t_0}^{t_1} F\,dt$$

con il termine impulso si indica il cambiamento di quantità di moto di un corpo in un intervallo di tempo

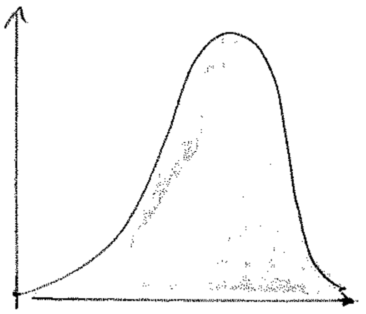
teorema dell'impulso - quantità di moto

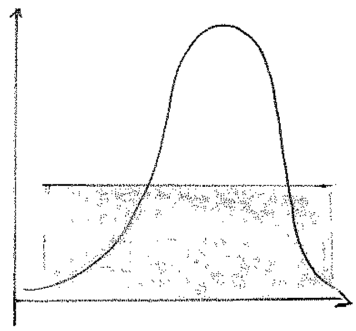
$I = P_f - P_i = \Delta P$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \vec{F}\,dt = \vec{I} \Rightarrow \int_{t_0}^{t_1} \frac{d\vec{P}}{dt}\,dt = \int_{p_0}^{p_1} d\vec{p} = \Delta\vec{p} \qquad \int dp = \int dp_x \hat{i} + \int dp_y \hat{j}$$

l'impulso della forza è uguale alla ~~variazione~~ della quantità di moto dell'oggetto su cui agisce





Energia cinetica del corpo rigido

guardare www.federica.unina.it

$E_{lab} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$ $\qquad v_1 = v_{cm} + v_1^*$

$\qquad v_2 = v_{cm} + v_2^*$

$$K = \frac{1}{2} I_0 \omega^2$$

quindi $v_1^2 = v_{cm}^2 + v_1^{*2} + 2 v_{cm} \times v_1^*$ [stessa cosa per v_2]

$$E_{LAB} = \underbrace{\frac{1}{2} m_1 v_1^{*2} + \frac{1}{2} m_2 v_2^{*2}}_{K_{Rel}} + \underbrace{\frac{1}{2}(m_1+m_2) v_{cm}^2}_{K_{cm}} + \underbrace{v_{cm} \times (m_1 v_1^* + m_2 v_2^*)}_{\rightarrow P_{rel\,cm} = 0}$$

$\sum_{i=1} m_i v_i$ = velocità del cm

$E_{LAB} = K_{Rel} + K_{cm}$

$K_{REL} = \sum \frac{1}{2} m v_i^{*2} \qquad v_i^* = \omega r_i$

$= \frac{1}{2} \omega^2 \boxed{\sum m_i r_i^2} \rightarrow I_{cm}$

$= \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2$

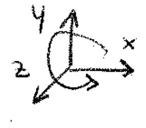
$K = \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 + \frac{1}{2} M v_{cm}^2 \longrightarrow$ 2° teorema di KOENIG

$K = \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} M v^2 \qquad v = \omega R \qquad I = CMR^2$

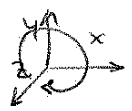
$K = \frac{1}{2} CMR^2 \omega^2 + \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2}(C+1) m v^2$

$\frac{1}{2}(C+1) m v^2 = mgh \qquad v = \sqrt{mgh} \sqrt{\frac{1}{C+1}}$

la velocità è sempre minore che nel caso di puro scivolamento perché l'Energia cinetica si divide in rotazionale e del centro di massa



antioraria
dir. +z



oraria
dir. −z

la regola della mano dx può dire la direzione del movimento

1. mettere le dita lungo la direzione di cui è applicata la forza
2. piegare " " " " " della forza
3. il pollice è la direzione di τ

$$\bar{\tau} = \bar{r} \times \bar{F} = I\bar{\alpha} \quad \begin{cases} \alpha \perp \text{piano rotazionale} \\ \rightarrow (\bar{r}, \bar{F}) \\ \tau = rF\sin\phi \end{cases}$$

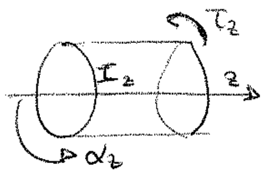
$$\tau = \bar{r} \times F \qquad \alpha = \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{pmatrix} = \hat{i}(r_yF_z - r_zF_y) + \hat{j}(r_xF_z - r_zF_x) + \hat{k}(r_xF_y - r_yF_x)$$

quando si ricava $\tau = I\alpha$ per il modulo del momento della forza di un corpo rigido in rotazione, in realtà stavamo descrivendo la componente z di un'eq. vettoriale + generale

↓

asse z = asse di rotazione → si può omettere z!

$$\tau_z = I_z \alpha_z$$



es:  Bullone da svitare

$L = 0{,}5\,m$

$\tau = rF\sin\phi$

$F = 200\,N$

$\tau = 10\,N \cdot m$

$\tau = I\alpha$

$I = \frac{1}{3}ML^2 = \frac{1}{3}(3\,kg)(0{,}5)^2 = 0{,}25\,kg\,m$

$\alpha = \frac{\tau}{I} = 2{,}83\,rad/s^2$

es: r_1 r_2 $2r_2 = r_1$

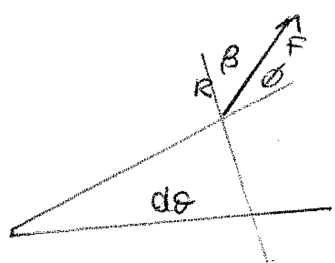
$\frac{F_2}{F_1}$? $\quad \tau = I\alpha = \alpha mR^2$

quindi $FR = mR^2\alpha$ $\quad \frac{F_2}{F_1} = \frac{mR_2\alpha}{mR_1\alpha} = \frac{1}{2}$

$F = mR\alpha$

LAVORO considerando il lavoro fatto da F che agisce su un oggetto che ruota attorno ad un asse fisso. Per uno spostamento infinitesimo angolare $d\theta$:

$$dW = F \cdot dr = FRd\theta\cos(\beta) = FRd\theta\cos(90-\phi) =$$
$$= FRd\theta\sin\phi = FR\sin\phi\, d\theta =$$



$dW = \tau d\theta$

$W = \tau\theta$

$W = \int \tau d\theta$ analogo rot. di $W = F\Delta s$

ESERCIZI VARI SUL MOMENTO D'INERZIA

Moto di Rototraslazione

FIGURA 9.28 Questa è la fotografia, eseguita con un tempo di esposizione molto lungo, di una ruota che avanza. Due lampadine sono fissate rispettivamente nel centro e in un punto del bordo della ruota. Il punto sul bordo descrive una curva detta *cicloide*.

9.7 MOTI ROTOTRASLATORI

In Figura 9.28 è riportata una fotografia, eseguita con un tempo di esposizione molto lungo, di una ruota in moto su un piano orizzontale. La ruota compie un moto complicato che può essere pensato come combinazione di un moto rotatorio e di uno traslatorio.

Il moto rotatorio e quello traslatorio sono, in generale, indipendenti; si pensi, per esempio, al moto di un disco da hockey su una superficie piana ghiacciata: è possibile lanciare il disco in modo che il suo moto sia puramente traslatorio oppure porlo in rotazione su se stesso in modo che il suo centro risulti fermo in un punto della superficie. Ma si può anche fornire al disco una velocità lineare e una velocità angolare iniziali di valore qualunque, in modo che il disco simultaneamente ruoti su se stesso e trasli rispetto alla superficie. In quest'ultimo caso il centro di massa del disco si muove di moto rettilineo, anche in presenza di forze d'attrito, mentre tutti gli altri elementi del disco descrivono un moto che è una combinazione complicata di un moto rotatorio e di uno traslatorio, così come accade per il punto luminoso posto sul bordo della ruota riprodotta in Figura 9.28.

Come si intuisce dagli esempi del disco sulla superficie ghiacciata e della ruota, la nostra discussione si ridurrà a casi che soddisfino le due condizioni seguenti: (1) l'asse di rotazione passa per il centro di massa del corpo, che servirà da polo nel calcolo dei momenti, e (2) la direzione dell'asse di rotazione non varia nel tempo, ovvero due assi di rotazione relativi a istanti diversi sono tra loro paralleli. Sotto queste ipotesi il moto rotatorio può essere studiato tramite l'Equazione 9.11, ovvero $\sum \tau_z = I\alpha_z$, con il momento torcente calcolato a partire dalle sole forze *esterne*. Per lo studio del moto traslatorio, che come si è detto è indipendente da quello rotatorio, si usa l'Equazione 7.16, ovvero $\sum F = Ma_{cm}$ ove $\sum F$ è la somma delle forze *esterne*.

Il caso illustrato in Figura 9.28 della ruota in moto su un piano liscio è un esempio molto comune di moto che rientra nello schema appena presentato. È importante osservare che nei punti in cui la lampadina è a contatto con il suolo l'immagine registrata sulla lastra fotografica è particolarmente brillante; ciò si spiega perché in questi istanti la lampadina si muove molto lentamente e in realtà è istantaneamente a riposo. Questo tipo di moto in cui un oggetto rotola su una superficie in modo tale che non vi sia moto relativo tra l'elemento dell'oggetto che tocca la superficie e la superficie stessa è detto *rotolamento senza strisciamento* o anche *rotolamento puro*.

In Figura 9.29 è riportata un'altra foto di una ruota in rotolamento puro. Si osservi che i raggi della ruota in basso sono più a fuoco rispetto a quelli in alto, la cui immagine è decisamente meno netta. La parte superiore della ruota si muove più rapidamente di quella in basso! Nel caso di rotolamento puro è l'attrito tra i due oggetti che permette all'elemento del corpo a contatto con la superficie fissa di essere a riposo; nonostante la ruota sia in moto, è la forza d'attrito *statico* ad agire su tale elemento.

Il rotolamento puro non è l'unico moto possibile per un corpo che rotola su una superficie scabra. Si pensi, per esempio, a un'automobile che parte su una strada ghiacciata. Nei primi istanti le ruote gireranno sul posto: il loro moto, quindi, sarà puramente rotatorio. Se però viene frapposta della sabbia tra le ruote e il fondo ghiacciato, l'auto-

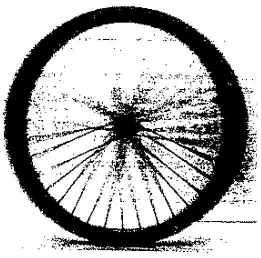


FIGURA 9.29 Immagine fotografica di una ruota che rotola senza strisciare. I raggi in alto sono più sfuocati di quelli in basso perché si muovono a velocità maggiore.

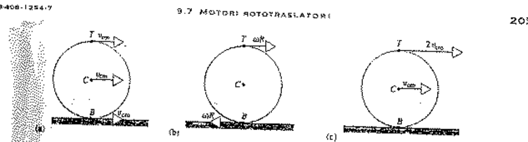


FIGURA 9.30 Il moto di rotolamento può essere pensato come la sovrapposizione di un moto puramente rotatorio attorno al centro di massa e di uno puramente traslatorio. (a) Moto puramente traslatorio: tutti gli elementi della ruota hanno la medesima velocità vettoriale. (b) Moto puramente rotatorio: tutti gli elementi si muovono con la stessa velocità angolare attorno al centro di massa. (c) Combinazione dei moti rappresentati nei riquadri (a) e (b): la velocità degli elementi T, C e B è stata ottenuta sommando la velocità del moto traslatorio a quella del moto rotatorio.

mobile inizierà a muoversi lentamente nonostante le ruote continuino a slittare sul ghiaccio: l'automobile avrà, quindi, un certo moto traslatorio, le ruote uno di rotolamento, ma vi sarà ancora uno «strisciamento» tra le ruote e il ghiaccio. Se la sabbia è sufficiente, dopo un po' le ruote non striscieranno più sul ghiaccio e si instaureranno le condizioni di rotolamento puro.

La Figura 9.30 illustra come sia possibile analizzare il moto di rotolamento puro come una combinazione di moto rotatorio e traslatorio. In caso di moto puramente traslatorio (si veda la Figura 9.30a) il centro di massa si muove, assieme a tutti gli elementi del corpo, con velocità v_{cm}. In caso di moto puramente rotatorio attorno al centro di massa (si veda la Figura 9.30b) tutti gli elementi del bordo della ruota hanno velocità tangenziale ωR, ove ω è la velocità angolare. Se il moto della ruota è la combinazione di questi due moti, l'elemento B a contatto con la superficie avrà velocità $v_{cm} - \omega R$; ma nel caso di rotolamento puro l'elemento B deve avere velocità nulla e quindi si avrà $v_{cm} - \omega R = 0$, ovvero

$$v_{cm} = \omega R. \tag{9.36}$$

Dalla sovrapposizione del moto puramente traslatorio e di quello puramente rotatorio si ottiene la situazione illustrata nella Figura 9.30c. Si osservi che la velocità dell'elemento della ruota in cima, indicato con T in figura, è pari al doppio di quella del centro di massa.

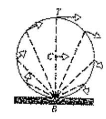


FIGURA 9.31 Un corpo che rotola su una superficie senza strisciare può essere pensato ad ogni istante in moto puramente rotatorio attorno all'asse passante per il punto che in quell'istante realizza il contatto con il suolo. I vettori rappresentano la velocità di alcuni punti all'istante considerato.

Si vuole sottolineare che l'uguaglianza 9.36 vale soltanto in assenza di strisciamento; per un generico moto di rotolamento, ovvero per una generica sovrapposizione di un moto rotatorio e di uno traslatorio, non è vero che la velocità v_{cm} del centro di massa sia uguale a ωR.

Vi è un secondo modo, molto istruttivo, di affrontare lo studio del moto di puro rotolamento: si considera l'asse ortogonale alla ruota passante per la posizione occupata dall'elemento di contatto B e si suppone che all'istante considerato tale asse sia quello attorno al quale ruota il corpo (Figura 9.31). Si dice che tale asse è l'asse istantaneo di rotazione. A istanti diversi cambia l'elemento a contatto e cambia l'asse istantaneo di rotazione, ma in ogni istante si suppone che il moto sia rotatorio attorno all'asse istantaneo. La velocità angolare della rotazione attorno a B è uguale alla velocità angolare ω della rotazione attorno al centro di massa. Se si osserva che la distanza di T da B è uguale al doppio di quella di C da B, si ha che la velocità lineare di T è uguale al doppio di quella di C.

PROBLEMA SVOLTO 9.11 Un cilindro pieno di massa M e raggio R a partire dalla posizione di riposo rotola senza strisciare su un piano inclinato di lunghezza L e altezza h (Figura 9.32). Si determini la velocità del centro di massa del cilindro quando questo giunge ai piedi del piano inclinato.

Soluzione Il diagramma delle forze in Figura 9.32b mostra le forze esterne agenti sul cilindro: il peso Mg, la reazione normale del piano N e l'attrito f. Con la scelta del sistema di riferimento in figura le componenti cartesiane della somma delle forze esterne sono $\sum F_x = Mg\sin\theta - f$ e $\sum F_y = N - Mg\cos\theta$. Applicando la seconda legge di Newton con $a_x = a_{cm}$ e $a_y = 0$ si hanno le due equazioni

$$Mg\sin\theta - f = Ma_{cm} \quad \text{e} \quad N - Mg\cos\theta = 0.$$

Al fine di calcolare il momento torcente totale esterno rispetto al centro di massa si osserva che le rette d'azione delle forze N ed Mg passano entrambe per il polo e quindi hanno braccio nullo. La sola forza che contribuisce al momento torcente totale è l'attrito: si ha, quindi, $\sum \tau_z = -fR$. Dalla seconda legge di Newton per i moti rotatori si ottiene

$$-fR = I_{cm}\alpha_z.$$

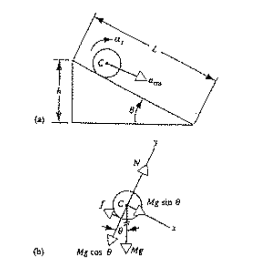


FIGURA 9.32 Problema svolto 9.11. (a) Un cilindro rotola senza strisciare su un piano inclinato. (b) Il diagramma delle forze per il cilindro.

In Figura 9.32 l'asse z è uscente dalla pagina e quindi α_z è negativa. La condizione che assicura il rotolamento senza strisciamento è $v_{cm} = \omega R$ che, una volta derivata rispetto al tempo, fornisce $a_{cm} = \alpha R$. Quest'ultima uguaglianza costituisce una relazione tra i moduli dell'accelerazione a_{cm} e dell'accelerazione angolare α. Sostituendo, infine, $\alpha_z = -a_{cm}/R$ e $I = MR^2/2$ (momento d'inerzia di un cilindro) nell'equazione precedente si ottiene

$$f = -\frac{I_{cm}\alpha_z}{R} = -\frac{(MR^2/2)(-a_{cm}/R)}{R} = \frac{1}{2}Ma_{cm}.$$

Dalla relazione appena ottenuta e dalla prima tra le equazioni relative al moto traslatorio si ha

$$a_{cm} = \frac{2}{3}g\sin\theta.$$

L'accelerazione del centro di massa, quindi, è minore del valore $g\sin\theta$, che esso avrebbe nel caso in cui il cilindro scivolasse senza rotolare sul piano inclinato. Questo risultato è vero in ogni istante, indipendentemente dalla distanza del cilindro dal piede del piano inclinato.

Dal momento che il moto del centro di massa è uniformemente accelerato il calcolo della sua velocità può essere eseguito per mezzo delle equazioni descritte nel Capitolo 2. Ponendo $v_{0x} = 0$ e $x - x_0 = L$, ove l'asse x è stato scelto parallelo al piano inclinato, le Equazioni 2.26 e 2.28 danno $v_{cm} = a_{cm}t$ ed $L = a_{cm}t^2/2$. Risolvendo la seconda equazione rispetto al tempo si ha $t = \sqrt{2L/a_{cm}}$ e sostituendo nella prima si ottiene la velocità cercata

$$v_{cm} = a_{cm}t = a_{cm}\sqrt{2L/a_{cm}} =$$
$$= \sqrt{2La_{cm}} = \sqrt{2L(2g\sin\theta)/3} = \sqrt{(4Lg\sin\theta)/3}.$$

Si può calcolare, infine, la forza d'attrito che il piano inclinato deve esercitare sul cilindro perché questo possa rotolare senza strisciare:

$$f = \frac{1}{2}Ma_{cm} = \left(\frac{1}{2}M\right)\left(\frac{2}{3}g\sin\theta\right) = \frac{1}{3}Mg\sin\theta.$$

Cosa accadrebbe se la forza d'attrito statico fosse inferiore a questo valore?

PROBLEMA SVOLTO 9.12 Un cilindro pieno uniforme di raggio $R = 12$ cm e massa $M = 3{,}2$ kg viene posto in rotazione uniforme in senso orario con velocità angolare $\omega_0 = 15$ giri/s. In seguito il cilindro viene posto a contatto con una superficie orizzontale (vedi Figura 9.33) con coefficiente d'attrito dinamico $\mu_k = 0{,}21$. Nella prima fase del moto il cilindro striscia sul piano, ma a partire dall'istante t si instaura il regime di puro rotolamento. (a) Si calcoli la velocità del centro di massa del cilindro all'istante t. (b) Si calcoli t.

Soluzione (a) Le forze agenti sul cilindro sono riportate in Figura 9.33b. Le componenti cartesiane della risultante delle forze esterne sono date da $\sum F_x = f$ e $\sum F_y = N - Mg$. Nella fase di strisciamento le forze agenti sul cilindro sono costanti e quindi anche l'accelerazione del centro di massa sarà costante; posto $v_{fx} = v_{cm}$ e $v_{ix} = 0$ si può scrivere

$$a_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_{fx} - v_{ix}}{t} = \frac{v_{cm} - 0}{t} = \frac{v_{cm}}{t}.$$

La proiezione lungo l'asse x della seconda legge di Newton fornisce, quindi,

$$f = Ma_x = \frac{Mv_{cm}}{t}.$$

Al momento totale delle forze esterne relativo al centro di massa contribuisce la sola forza d'attrito, così che $\sum \tau_z = fR$. Ponendo, ora, $\omega_i = -\omega_0$ e $\omega_f = -v_{cm}/R$, perché l'istante finale è quello in cui inizia il rotolamento senza strisciamento, si può scrivere l'accelerazione angolare nella forma

$$\alpha_z = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_f - \omega_i}{t} = \frac{-v_{cm}/R + \omega_0}{t}.$$

La seconda legge di Newton per il moto rotatorio impone che sia $fR = I_{cm}\alpha_z$; se in tale equazione si sostituiscono le espressioni di f e di α_z determinate a partire dalle equazioni precedenti, si ottiene,

$$\left(\frac{Mv_{cm}}{t}\right)R = \frac{(MR^2/2)(-v_{cm}/R + \omega_0)}{t},$$

ove si è sostituito $I_{cm} = MR^2/2$ (Figura 9.15). Con semplici passaggi algebrici si ottiene

$$v_{cm} = \frac{1}{3}\omega_0 R = \frac{1}{3}(15\ \text{giri/s})(2\pi\text{rad/giro})(0{,}12) = 3{,}8\ \text{m/s}.$$

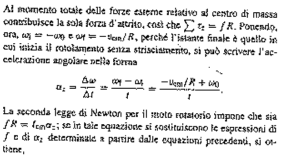


FIGURA 9.33 Problema svolto 9.12. (a) Inizialmente il cilindro ruota strisciando sulla superficie. (b) Il diagramma delle forze per il cilindro.

Si noti che v_{cm} non dipende da M, g e μ_k; cosa accadrebbe, però, se una di queste quantità fosse nulla?

(b) Si può eliminare f dal sistema di due equazioni $f = Mv_{cm}/t$ ed $f = \mu_k N = \mu_k Mg$ e risolvere rispetto a t:

$$t = \frac{v_{cm}}{\mu_k g} = \frac{3{,}8\ \text{m/s}}{(0{,}21)(9{,}80\ \text{m/s}^2)} = 1{,}8\ \text{s}.$$

PROBLEMA SVOLTO 9.13 Uno yo-yo avente massa $M = 0{,}24$ kg è costituito da due dischi di raggio $R = 2{,}8$ cm connessi mediante un asse sottile di raggio $R_0 = 0{,}25$ cm (Figura 9.34a). Una corda di lunghezza $L = 1{,}2$ m è arrotolata attorno all'asse. Si supponga di lasciar cadere lo yo-yo con velocità iniziale $v_0 = 1{,}4$ m/s e si calcoli la sua velocità angolare quando la corda è completamente srotolata.

Soluzione Il diagramma delle forze agenti sullo yo-yo è riportato in Figura 9.34b. Se si orienta l'asse y verticalmente verso il basso la relativa componente della somma delle forze esterne è $\sum F_y = Mg - T$; la componente lungo l'asse z, scelto uscente dalla pagina, del momento totale delle forze relativo al centro di massa è $\sum \tau_z = TR_0$. Le leggi di Newton per il moto traslatorio e rotatorio si riducono a

$$Mg - T = Ma_y \quad \text{e} \quad TR_0 = I\alpha_z.$$

Se si suppone che la corda abbia spessore trascurabile e che non scivoli sull'asse dello yo-yo, allora l'elemento della corda a contatto con l'asse è a riposo così come lo è l'elemento B nelle figure 9.30 e 9.31. Si ha allora, osservando che $v_{cm} = \omega R_0$, che $a_{cm} = \alpha R$; si sottolinea che la relazione precedente è un'uguaglianza scalare tra moduli di vettori. Con le nostre notazioni si ha $a_{cm} = a_y$ e $\alpha = \alpha_z$. Scrivendo, allora, $a_y = \alpha_z R_0$ e ricavando l'accelerazione angolare dalle due equazioni di Newton si ha

$$\alpha_z = \frac{g}{R_0}\frac{1}{1 + I/(MR_0^2)}.$$

Il problema è stato ricondotto al calcolo del momento d'inerzia dello yo-yo: si assume che il contributo dell'asse sottile sia trascurabile; l'ipotesi è lecita perché il raggio e la massa dell'asse sono molto piccoli rispetto a quelli dei due dischi. Con questa ipotesi si ha semplicemente $I = MR^2/2$. Allora

$$\alpha_z = \frac{g}{R_0}\frac{1}{1 + R^2/(2R_0^2)} =$$
$$= \frac{980\ \text{cm/s}^2}{0{,}25\ \text{cm} + (2{,}8\ \text{cm})^2/(2 \cdot 0{,}25\ \text{cm})} = 61{,}5\ \text{rad/s}^2.$$

Per il calcolo della velocità angolare finale si potrebbe usare l'Equazione 8.6, $\omega_z = \omega_{0z} + \alpha_z t$, se si conoscesse il tempo t impiegato dallo yo-yo per lo srotolamento completo della corda. A tale scopo si ricorda che $\phi = \phi_0 + \omega_{0z}t + \alpha_z t^2/2$ (Equazione 8.7), e si osserva che per il completo srotolamento lo yo-yo descrive un angolo $\phi - \phi_0 = L/R_0 = 480$ rad. La velocità angolare iniziale dello yo-yo inoltre è

$$\omega_{0z} = v_0/R_0 = (1{,}4\ \text{m/s})(0{,}0025\ \text{m}) = 560\ \text{rad/s}.$$

Inserendo questi dati nell'Equazione 8.7 si ha $(30{,}75\ \text{rad/s}^2)t^2 + (560\ \text{rad/s})t - 480\ \text{rad} = 0$, che fornisce $t = 0{,}82$ s e $t = -19$ s. Il risultato fisicamente significativo è quello positivo e quindi

$$\omega_z = \omega_{0z} + \alpha_z t =$$
$$= 560\ \text{rad/s} + (61{,}5\ \text{rad/s}^2)(0{,}82\ \text{s}) = 610\ \text{rad/s}.$$

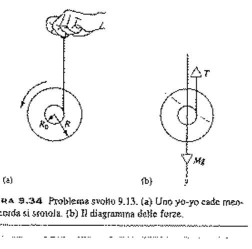


FIGURA 9.34 Problema svolto 9.13. (a) Uno yo-yo cade mentre la corda si srotola. (b) Il diagramma delle forze.

DOMANDE A RISPOSTA MULTIPLA

9.1 Momento torcente

1. Si consideri l'oggetto in Figura 9.2 e si inverta il verso degli assi coordinati: $x \to -x$, $y \to -y$ e $z \to -z$. Ovviamente $r \to -r$. Cosa accade ai vettori τ ed F?
   (A) $\tau \to \tau$ e $F \to F$.
   (B) $\tau \to \tau$ e $F \to -F$.
   (C) $\tau \to -\tau$ e $F \to F$.
   (D) $\tau \to -\tau$ e $F \to -F$.
2. Una particella occupa la posizione individuata dal vettore $r = 0i + 3j + 0k$, con le componenti espresse in metri. A partire da un certo istante alla particella viene applicata la forza, $F = 0i + 0j + 4k$, con le componenti espresse in newton. Mentre la particella accelera sotto l'effetto di tale forza, il modulo del momento di F rispetto all'origine
   (A) cresce. (B) decresce.
   (C) resta costantemente nullo.
   (D) resta uguale a una costante non nulla.
3. In uno dei suoi numerosi film d'azione Jackie Chan si lancia dalla sommità di un palazzo arrotolandosi una corda attorno alla vita e lasciandola srotolare durante la caduta, più o meno come uno yo-yo. Assumendo la sua accelerazione uguale a una costante molto minore di g, si conclude che la tensione della corda
   (A) è quasi uguale al peso dell'attore.
   (B) è esattamente uguale al peso dell'attore.
   (C) è molto minore del peso dell'attore.
   (D) è nulla.

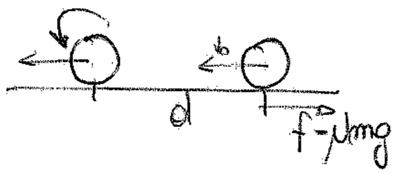
9.2 Momento d'inerzia e seconda legge di Newton

9.3 Momento d'inerzia dei corpi rigidi

4. Rispetto a quale asse è minimo il momento di inerzia di un cubo?
   (A) A un qualsiasi asse passante per il centro di massa del cubo e per il centro di una delle sue facce.

rallo sa stessa velocità
non dipende da massa !!!

4 Da scivolamento a rotolamento: una palla da bowling di massa m e raggio R è lanciata con velocità in v_0. Inizialmente non rotola. Dopo essere scivolata con attrito lungo una corsia per una distanza D alla fine rotola senza strisciare con una nuova velocità v_f. Il coeff. di μ_s è μ. Velocità finale?



$-\mu mg = mA \quad A = -\mu g$

$V = V_0 - \mu g t$

$\tau = I\alpha \quad fR = I\alpha \quad I = \frac{2}{5}MR^2$

$\mu mgR = \frac{2}{5}mR^2\alpha$

$\alpha = \frac{5\mu g}{2R}$

$\omega = \omega_0 + \alpha t = \frac{5}{2}\frac{\mu g t}{R}$

quando $\omega R = V$ la palla inizia a rotolare completamente

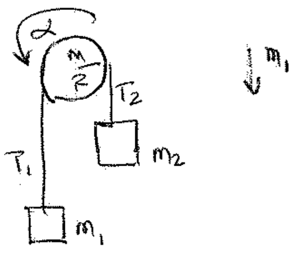
$$\begin{cases} \omega = \frac{5}{2}\frac{\mu g t}{R} \\ v = -\mu_0 g t + v_0 \end{cases}$$

$t = \frac{\omega}{c} = \frac{v}{cR}$

$V = V_0 - \cancel{\mu g}\frac{V2\cancel{R}}{\cancel{R}5\cancel{\mu g}} = V_0 - \frac{2}{5}V_0 = \frac{5}{7}V_0$

$K = \underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{K_{tras}} + \underbrace{\frac{1}{2}I\omega^2}_{K_{rot.}}$

5 MACCHINA DI ATWOOD CON CARRUCOLA MASSIVA



$a_1 = a_2 = a \quad \alpha = \frac{a}{R}$

$-mg + T_1 = ma$

$m_2: -mg + T_2 = ma$

$T_1R - T_2R = \frac{1}{2}MR^{\cancel{2}}\frac{a}{\cancel{R}}$

$a = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + M/2}\right)g$

MOMENTO ANGOLARE

quantità di moto = $p = mv$

$$\boxed{L = r \times p}$$

analogo rotazionale della quantità di moto

misura: $\frac{m^2}{s^2} kg$

<u>Definizione e derivate</u>

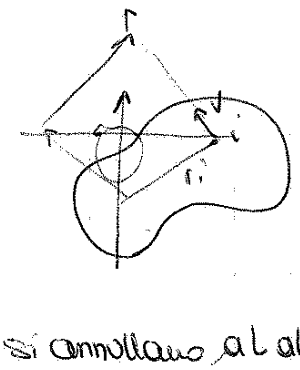
derivata di $L = \frac{dL}{dt} = \frac{d(r \times p)}{dt} = \underbrace{\left(\frac{dr}{dt} \times p\right)}_{v \times mv = 0} + \left(r \times \frac{dp}{dt}\right)$

quindi $\frac{dL}{dt} = r \times \underbrace{\frac{dp}{dt}}_{F_{ext}} = \frac{dL}{dt} = r \times F_{ext} = \tau_{ext}$

$\tau_{ext} = \frac{dL}{dt}$ dove $L = r \times p$ e $\tau_{ext} = r \times F_{ext}$

in assenza di momenti di forza esterna $\tau_{ext} = \frac{dL}{dt} = 0$, il momento angolare totale è conservato

Consideriamo un movimento di rotazione. Il momento angolare totale rispetto all'origine è la somma dei momenti angolari di ogni particella



$L = \Sigma_i r \times p = \Sigma m_i r \times v = \Sigma m r v \hat{k}$

anche L è nella direzione di z usando $v_i = \omega t$

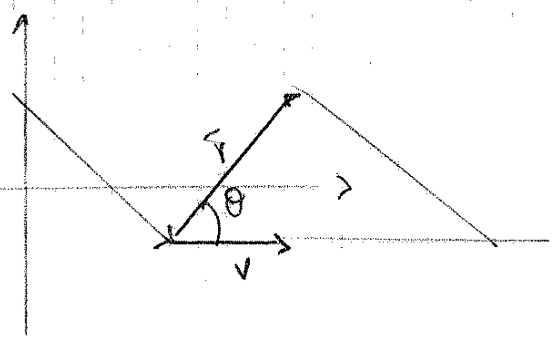
otteniamo $L = \Sigma m r^2 \omega$

$L = I\omega$ analogo di $p = mv$

Se corpo rigido è simmetrico $\tau // z$ (le componenti $\perp$ si annullano a L al L)

Il verso di L è data dalla regola della mano destra

Moto particella in moto rettilineo uniforme, ha impulso angolare costante



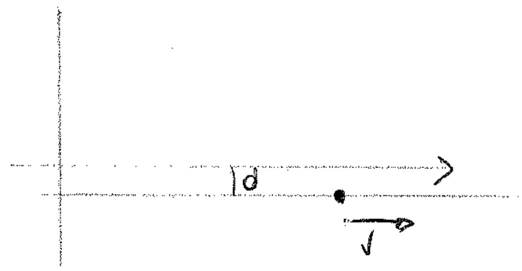
$L_0 = mrv \cdot \operatorname{sen}\theta$

$r \operatorname{sen}\theta = r_\perp$

$r_\perp$ distanza = O - retta

$\boxed{L_0 = r_\perp m v}$

[illegible]



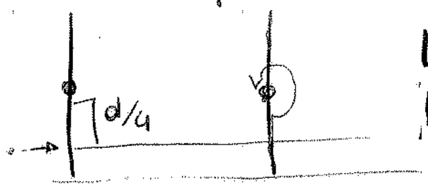
$L = r \times p$

$|L| = |r \times p| = rp \operatorname{sen}\theta = p[r \operatorname{sen}\theta] = pd$ - $p \times$ distanza dal punto di vp.

Poiché r e p sono entrambi nel piano per y, L sarà diretto come z: $L_z = pd$

Nei prodotti vettoriali la direzione è quella $\perp$ rispetto al piano formato dai due vettori

es. Barra imperniata colpita da un proiettile



$L = L^{(p)} + L^{(a)}$ $\quad L_i = L_f$

$L_i = mv_i \frac{D}{4} + 0$

$L_p = mv_2 \frac{D}{4} + I\omega_p$

$mv_1 \frac{D}{4} = mv_2 \frac{D}{4} + \frac{1}{12} M \frac{D}{3} \omega_p$

$\omega_p = \frac{3m(v_1 - v_2)}{MD}$

es. ragazzo su piattaforma lancia una palla pesante M con v tale per cui il suo vettore velocità risulti passare a distanza d dall'asse di rotazione

ω_p

$L = L^p + L^s$

$L_i = 0$

$L_p = L_p^p + L_p^s$

$L_p^p = Mvd$

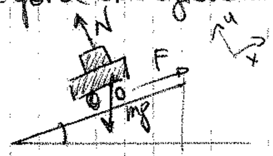
$L_p^s = -I\omega_p$

$mvd - I\omega_p = 0$

$\frac{}{Mvd}$

STATICA è lo studio di sistemi che non si muovono

es: le forze che agiscono su una macchina parcheggiata in salita



2ª legge di Newton: $F_{net} = MA_{cm} = 0$ $\quad \Sigma F = 0$

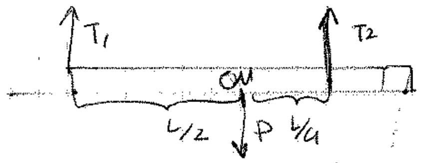
Risolviamo le eq. per x e y

x: $f_s - mg\sin\phi = 0$

y: $N - mg\cos\phi = 0$

guardare continuazione →

es Consideriamo un asse di massa M appeso a due fili usando $\Sigma F = 0$



$T_1 + T_2 = Mg$

$T_1 + T_2 - Mg = 0$

$$\tau_{cm}^{(2)} = \tau_{cm}^{(T_1)} + \tau_{cm}^{(T_2)} + \cancel{\tau_{cm}^{(m)}}$$

0

! Per analizzare le forze bisogna considerarle come se fossero le uniche presenti!

$$\tau_{cm}^{(2)} = -\frac{L}{2} T_1 \sin 90° + \frac{L}{4} T_2 \sin 90° =$$

$$= -\frac{L}{2} T_1 + \frac{L}{4} T_2 = 0$$

$$T_1 = \frac{T_2}{2}$$

$$T_2 = \frac{2}{3} Mg$$

$$\frac{L}{4} T_2 + T_2 = Mg$$

sostituendo $x = \frac{1}{2}$

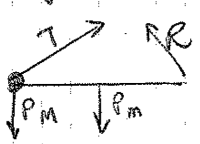
PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE: è proprietà di certe trasformazioni o modelli, sulla base della quale la risposta prodotta dalla combinazione lineare di un certo numero di sollecitazioni può ottenersi sovrapponendo le risposte che ciascuna di esse produrrebbe se fosse da sola!

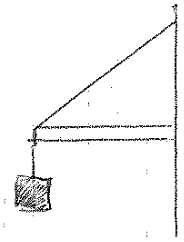
! Per risolvere qualsiasi problema di statica si possono usare $\Sigma F = 0$ e $\Sigma \tau = 0$. Si può rendere il problema molto più semplice scegliendo un asse opportuno.!

es Una lampada M che pende da una sbarra che è imperniata e sostenuta da una fune che forma un angolo ϕ

$R = F_a + N$

$\bar{T} + \bar{P}_M + \bar{P}_m + \bar{R} = 0$





es: un frigo è su un camion. Il CM del frigo è a h dalla base lunga 2W. quale accelerazione massima deve avere il camion per non far cadere il frigo?

$MgW = Mah$

$F = Ma$ → frigo, camion

$\tau_{cm}^{(f)} + \tau_{cm}^{(N)} + \tau_{cm}^{(P)} = 0$

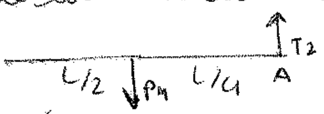
$\tau_{cm}^{(f)} = -Fh = -Mah$

$\tau_{cm}^{(N)} = MgW$

$a = g\frac{W}{h}$

es: continuazione dell'esercizio: cosa succede se una delle due corde si spezza?

$\tau_A^{ext} = I_A \alpha$



$\tau_A^{(ext)} = \tau_A^{(P)} + \cancel{\tau_A^{(T_2)}}$

$\tau_A^{(P)} = \frac{L}{4} mg$

$I_{cm} = \frac{1}{12} ML^2$

$I_A = \frac{1}{12} ML^2 + M\frac{L^2}{16} = \frac{4ML^2 + 3ML^2}{48} = \frac{7ML^2}{48}$

$\cancel{M}g\frac{\cancel{L}}{\cancel{4}} = \frac{7\cancel{M}L^{\cancel{2}}}{\cancel{48}\,12}\alpha \qquad \alpha = 12g\frac{1}{7L}$

$a_{cm} = r\alpha$

$a_{cm} = \frac{\cancel{L}}{4}\,\frac{3}{7}\cancel{12}g\frac{1}{\cancel{L}} = \frac{3}{7}g$

$R^{ext} = M \cdot A_{cm}$

$\downarrow \quad -T_2 + Mg = Ma_{cm}$

$T_2 = Mg - Ma_{cm} = M\left(g - \frac{3}{7}g\right) = M\frac{4g}{7}$

es: un semaforo in equilibrio è appeso. le sbarrette sono di massa trascurabile e hanno la lunghezza indicata. la massa della palla a dx è 1kg. qual è la massa totale?

Il momento si può calcolare guardando l'asse in T

FLUIDODINAMICA

i fluidi assumono la forma del recipiente, ma gli aeriformi non mantengono il volume, i liquidi invece sì.
Gli atomi devono essere liberi di muoversi senza avere luogo le distanze delle posizioni.

densità $\rho = \frac{\Delta m}{\Delta V}$ $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$ $\frac{\text{massa}}{\text{volume}}$ $\quad * \ \rho = \frac{M}{V}$ solo se $\rho = k$

$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}$ densità locale

pressione $p = \frac{\Delta F}{\Delta A}$ $\left[\frac{N}{m^2} = \text{Pascal (Pa)}\right]$ $\frac{\text{forza}}{\text{area}}$

$1\,atm = 10^5\,Pa$

Per un certo materiale, la densità e la pressione sono connessi al modulo di compressibilità

$$B = \frac{\Delta p}{(-\Delta V / V)}$$

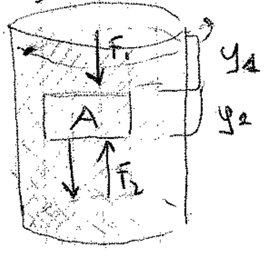
pressione che applichiamo
variazione frazionaria del volume

liquidi: hanno un B grande
gas: hanno un B piccolo

PRESSIONE E PROFONDITÀ: FLUIDI INCOMPRIMIBILI

Consideriamo un volume di fluido immaginario, la somma di tutte le forze su questo volume deve essere zero poiché si trova in equilibrio.
Ci sono 3 forze:

1. Peso = mg
2. forza verso l'alto dovuto alla pressione sulla superficie in basso
3. " " il basso " " " " " verso l'alto



$-F_1 + F_2 - mg = 0$

$p = \frac{F}{A}$ $\quad F = pA$ $\quad F_1 = p_1 A$ $\quad F_2 = p_2 A$

$p_1 A - p_2 A = mg$ $\quad \rho = \frac{m}{V}$ $\quad m = \rho V \rightarrow Ah = A(y_2 - y_1)$

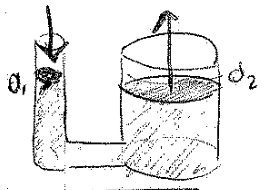
$(p_1 - p_2)\cancel{A} = g A \rho (y_2 - y_1)$

$\boxed{p_2 - p_1 = g\rho(y_1 - y_2)}$ **LEGGE DI STEVINO**

PRINCIPIO DI PASCAL

Il principio di Pascal chiarisce come si trasmette la variazione della pressione su un fluido

Ogni cambiamento di pressione applicato ad un fluido viene trasmesso ad ogni porzione del liquido stesso e al recipiente



$$\boxed{\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}}$$

$$F_2 = F_1 \frac{A_2}{A_1}$$

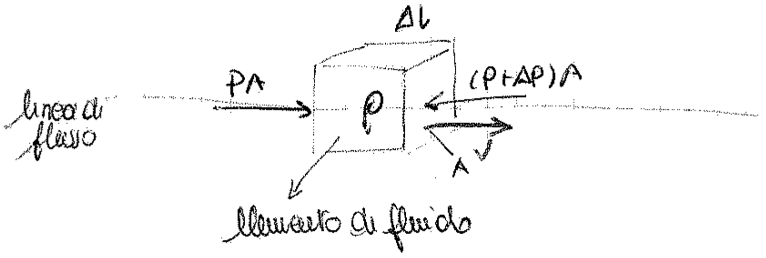
$d_2 = d_1 A_1/A_2$

$$\boxed{F_1 d_1 = F_2 d_2}$$ **ENERGIA CONSERVATA**

LEGGE DI BERNOULLI

flusso stazionario [ha sempre la stessa velocità]
flusso irrotazionale [le traiettorie del fluido non si incrociano mai]
fluido incomprimibile

$$\boxed{P + \rho g h + \frac{1}{2}\rho v^2 = cost}$$



$h_1 = h_2 = h$

$$\bar{R} = PA - (P+\Delta P)A = m\frac{dv}{dt}$$

$$\cancel{PA} - \cancel{PA} - \Delta P \cancel{A} = m\, dv/dt = \rho V \frac{dv}{dt} = \rho \cancel{A} \Delta l \frac{dv}{dt} = \rho\, dx \frac{dv}{dt} = \rho \frac{dx}{dt} dv = \rho v\, dv = \int_{v_1}^{v_2} \rho v\, dv$$

$$P_2 - P_1 = \rho \left[\frac{v^2}{2}\right]_{v_1}^{v_2} = \rho \frac{v_2^2}{2} - \rho \frac{v_1^2}{2}$$

$$P_2 + \rho \frac{v_2^2}{2} = P_1 + \rho \frac{v_1^2}{2}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 73 di 153

TERMODINAMICA

probabilistica non più deterministica

$$[p] = \frac{[F]}{[A]} = \frac{M \cancel{L} t^{-2}}{\cancel{L}}$$ → prima venivano utilizzate misure come la pressione

Si introduce una nuova misura

all'aumentare della temperatura alcuni materiali aumentano di volume e pressione

la temperatura ha quindi proprietà termometriche [V,P], quando la proprietà termometrica di due oggetti non varia allora i due oggetti hanno la stessa temperatura e sono all'equilibrio termico

PRINCIPIO ∅ della TERMODINAMICA: se A è in equilibrio termico con B e B con C, allora A è in equilibrio termico con C

LE SCALE DI MISURA DELLA TEMPERATURA

l'intervallo di temperatura è lineare

- CELSIUS °C in Europa

0°: fusione del ghiaccio

100°: ebollizione dell'acqua

- FAHRENHEIT °F in USA e UK

100°F: temperatura corporea

0°F: acqua + sale ghiacciato

ampiezza del grado Fahrenheit è i 5/9 di °C quindi

$$0°C = 32°F$$

$$\Delta T = 1°F = \frac{5}{9}°C$$

$$\boxed{T_c = (T_F - 32)\frac{5}{9}}$$

- ASSOLUTA °K → è nel sistema internazionale

0° ASSOLUTO come inizio è la temperatura + bassa → $-273°C$

stessa ampiezza del Celsius

$$T = 273,15°C + T_c$$

$$\boxed{T_c = T - 273,15°}$$

TEORIA CINETICA DEI GAS

gas ideale

- gran numero di particelle ($\sim N_A = 6 \cdot 10^{23}$)
- non ci sono forze tra le particelle
- bassa densità $\left(\rho = \frac{m}{V}\right) \longrightarrow$ pochi urti tra le particelle
- urti tra particelle e pareti del recipiente che contiene il gas sono elastici
- particelle puntiformi (gas monoatomico)
- vale l'equazione di stato dei gas perfetti

$$P \cdot V = n \cdot R \cdot T$$

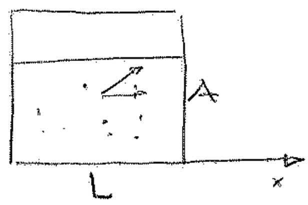
n: n° di moli

R = costante universale dei gas $\quad R \sim 8 \frac{J}{K\,mole}$ $\quad R = N_A K_B$

K_B = costante di Boltzmann $1.38 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K}$

$$P = \frac{F}{A} = \frac{dP}{dt} \cdot \frac{1}{A}$$

quant. di moto



$$F_x = \frac{dP_x}{dt} = \lim_{\Delta t} \frac{\Delta P_x}{\Delta t}$$

$$\frac{\Delta P_x}{\Delta t} = \frac{\Delta(m v_x)}{\Delta t} = \frac{m(V_{fx} - V_{ix})}{\Delta t} = \frac{-2mV_x}{\Delta t}$$

V

$V_{fx} = -V_x \quad V_{ix} = V_x$

$$\Delta t = \frac{2L}{V_x}$$

$$\frac{\Delta P_x}{\Delta t} = \frac{-2mV_x}{\frac{2L}{V_x}} = -\frac{mV_x^2}{L} = F'$$

F' forza esercitata dalla singola particella sul recipiente

$$P = \frac{F_T}{A} = \frac{\sum F_i}{A} = \frac{\sum_i m_i V_{xi}^2}{LA} = \frac{m}{V} \sum_i V_{xi}^2 = \frac{m}{V} N \cdot \frac{\sum_i V_{xi}^2}{N}$$

$\frac{\sum_i V_{xi}^2}{N} = \overline{V_x^2}$ è la media del quadrato delle velocità della componente x ...

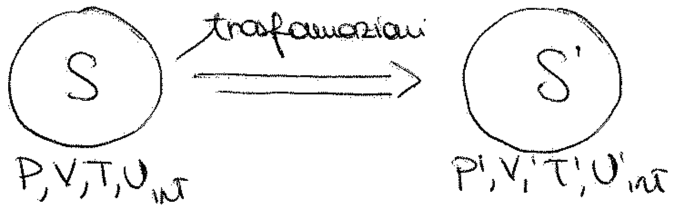
$$P = \frac{M}{V} V_x^2 = \rho \overline{V_x^2}$$

$\overline{V}^2 \quad \overline{V}^2 \quad \overline{\ }^2$

PRINCIPIO 1 DELLA TERMODINAMICA è la conservazione dell'energia per un sistema fluido su cui operiamo delle trasformazioni

3 grandezze rilevanti

→ lavoro } trasformazioni che si possono attuare sul sistema
→ calore
→ energia del sistema



U_{int} energia interna è la somma di energie cinetiche e potenziali di tutte le particelle del gas ed è la stessa per qualsiasi percorso seguito ($U_{int} = -W + Q$)
Per un gas ideale l'energia interna dipende solo dalla temperatura.
In particolare per un gas ideale monoatomico:

$$U_{int} = K_{trasl.} = \sum_i K_i D = N\frac{3}{2}k_BT = n\underbrace{N_A\frac{3}{2}k_B}_{R}T$$

$$\boxed{U_{int} = \frac{3}{2}nRT} \rightarrow \text{solo per gas ideali}$$

Per un gas ideale biatomico

$$K_i = \frac{1}{2}M_i v^2_{CM,i} + \frac{1}{2}I\omega^2$$

tre gradi di libertà traslazionali (v_x, v_y, v_z)
due gradi di libertà rotazionali (piano di rotazione perpendicolare all'asse congiungente i due atomi della molecola)

TEOREMA DI EQUIPARTIZIONE DELL'ENERGIA DI MAXWELL: per ogni grado di libertà attivato l'energia interna aumenta di $\frac{1}{2}k_BT$ per il numero di molecole del gas ideale

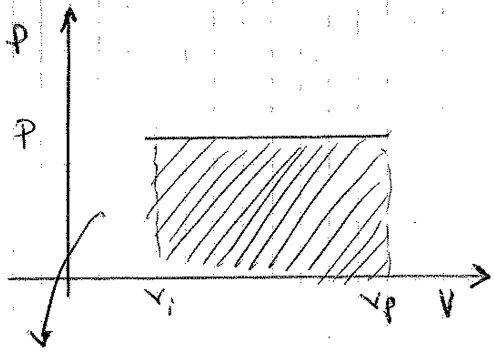
es: gas biatomico $\Delta U_{int} = 5\cdot\frac{1}{2}k_BT\overset{nN_A}{N} = \frac{5}{2}nR\Delta T$

gas ideale poliatomico (poli>2)
3 gradi di libertà traslazionali
3 gradi " " rotazionali (non ci sono direzioni proibite)

$$\Delta U_{int} = N6\frac{1}{2}k\Delta T = 3nR\Delta T$$

TRASFORMAZIONI ISOBARE ($p = cost$)

$$W_{sul} = -\int_{V_i}^{V_f} p\,dV = -p\int_{V_i}^{V_f} dV = -p(V_f - V_i)$$



piano di Clapeyron

TRASFORMAZIONI ISOCORE ($V = cost$)

$$W_{sul} = -\int_{V_i}^{V_f} p\,dV \underset{V_i = V_f}{\Rightarrow} W = 0$$

$$\Delta U_{int} = Q$$

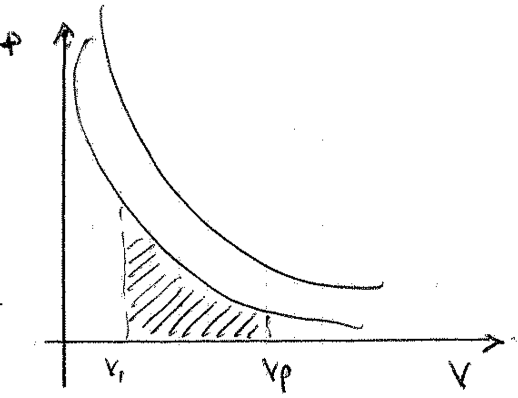
TRASFORMAZIONI ISOTERME ($T = cost$)

$$PV = cost = n \cdot R \cdot T$$

$$P = \frac{cost}{V} = \frac{n \cdot R \cdot T}{V}$$

$$W_{sul} = -\int_{V_i}^{V_f} p \cdot dV = -n \cdot R \cdot T \int_{V_i}^{V_f} \frac{1}{V}\,dV = -nRT \left[\ln\right]_{V_i}^{V_f} =$$

$$-nRT \ln\frac{V_f}{V_i} = n \cdot R \cdot T \ln\frac{V_i}{V_f}$$



quindi, riassumendo

$P = cost$	$W_{sul} = -P(V_f - V_i)$
$V = cost$	$W_{sul} = 0$
$T = cost$	$W_{sul} = n \cdot R \cdot T \ln\frac{V_i}{V_f}$

Nel caso di cambiamento di stato

$$\boxed{Q = mL}$$

L = calore latente : $\frac{Q}{m}$ necessaria affinché un campione subisca un cambiamento di fase completo

$\begin{cases} L_f : \text{solido} \to \text{liquido} \\ L_e : \text{liquido} \to \text{gas} \end{cases}$

$U'_{int} - U_{int} \longrightarrow \Delta U_{int} = W_{sul} + Q$ 1ª legge della Termodinamica

$Q = \Delta U_{int} - W$

lavoro fatto sul sistema, se uso $-W_{dal}$ (dal sistema)

Nel caso di trasformazioni isocore il calore specifico (a volume costante) è inferiore che nel caso di trasformazioni isobare perché nell'ultimo caso vi è anche lavoro

C_v = calore specifico a volume costante
C_p = " " " pressione "

$\boxed{C_p > C_v}$

} Relazione di Mayer

La differenza maggiore tra i due si ha nel caso dei gas

Nel caso dei gas ideali è importante utilizzare $c = \frac{C}{n}$ LEGGE DI DULONG-PETIT

$C = n \cdot c$

c = calore specifico molare

$C = n \cdot c$

$Q = n \cdot c \Delta T$ $\quad n c_v \Delta T = n c_p \Delta T$

$Q = n c \Delta T$

$$c_v = \frac{Q}{n\Delta T} = \frac{\Delta U_{int}}{n\Delta T} = \frac{\alpha \cancel{n} R \cancel{\Delta T}}{\cancel{n}\cancel{\Delta T}} \boxed{\alpha R} = \begin{cases} 3/2 R & \text{gas monoatomico} \\ 5/2 R & \text{gas biatomico} \\ 3R & \text{gas poliatomico} \end{cases}$$

↳ calore specifico a volume costante

$$c_p = \frac{Q}{n\Delta T} = \frac{\Delta U_{int}}{n\Delta T} - \frac{W_{sul}}{n\Delta T} = \frac{\Delta U_{int}}{n\Delta T} + \frac{P\Delta V}{n\Delta T} = c_v + \frac{\cancel{n}R\cancel{\Delta T}}{\cancel{n}\cancel{\Delta T}} = \boxed{c_v + R}$$

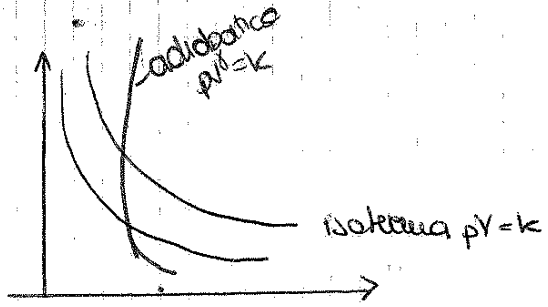
↳ calore specifico a pressione costante

Calore specifico a V cost. c_v

$\Delta(PV) = nR\Delta T$
$\Delta P V + P\Delta V = nR\Delta T$
$P = \text{cost}$

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{\alpha + R}{c_v} = 1 + \frac{R}{c_v} = 1 + \frac{1}{\alpha} = \frac{\alpha + 1}{\alpha}$$

Confronto tra adiabatiche e isoterme



l'adiabatica è più ripida perché $\gamma > 1$

I processi adiabatici e isotermi sono reversibili, perché non ci sono flussi di calore da caldo a freddo

I sistemi sono quasi statici ovvero lenti a sufficienza in modo che il sistema si trovi sempre vicino all'equilibrio

Es: Si gonfia una ruota fino alla pressione relativa di 482kPa. Quanto W deve essere compiuto? La pressione atm è 1,00 atm, la T ext è 20°C e il V rimane costante e uguale a 1,00L. Qual è la P del pneumatico gonfio e la temperatura dell'aria al suo interno e ritornare a 20°C?

$\Delta U_{int} = W_{sul} = n C_V \Delta T = n \frac{5}{2} R \Delta T$

$\downarrow$ gas biatomico

NON GUARDARE L'ESERCIZIO: è sbagliato!!!

$V^\gamma = \left(\frac{nR\Delta T}{p}\right)^\gamma = cost$

$\frac{T^\gamma}{p^\gamma} = k' = \frac{T_i^\gamma}{p_i^{\gamma-1}} = \frac{T_f^\gamma}{p_f^{\gamma-1}}$

$T_f^\gamma = \left(\frac{p_f}{p_i}\right)^{\gamma-1} T_i^\gamma$

$T_f = \left(\frac{p_f}{p_i}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}} T_i = \left(\frac{p_f}{p_i}\right)^{\frac{2}{7}} T_i$

$\gamma = \frac{c_p}{c_V} = \frac{7}{2} \cdot \frac{2}{5} R = \frac{7}{5} R$

$\Delta p = 4.8$ atm

$p_f = p_i + \Delta p$

$T = 483k$

$pV = nRT \qquad n = \frac{pV}{RT} = \frac{1}{7}$ mole

$n RT_i \quad 12 \cdot 293 \quad \ldots \quad 7$

tipicamente T_L è la temperatura dell'ambiente

si può formulare il RENDIMENTO della MACCHINA TERMICA

$$\eta = \frac{W}{Q_A (= Q_H)}$$

tutte le macchine termiche hanno $\boxed{\eta < 1}$, dimostrando.

$$W_{PAL} = Q = Q_A + Q_C = Q_A - |Q_C|$$

$$\eta = \frac{Q_A - |Q_C|}{Q_A} = 1 - \frac{|Q_C|}{Q_A} < 1$$

es: macchina termica

$Q_A = 200\ J$

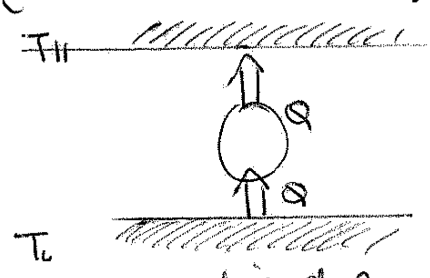
$Q_C = 160\ J$

Qual è l'efficienza?

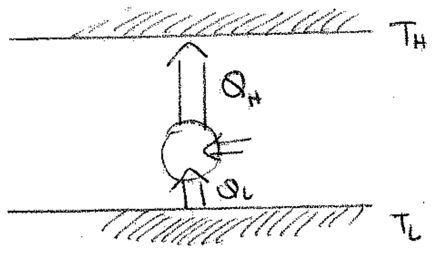
$1 - \frac{160}{200} = \frac{1}{5}$ $\quad \eta = 20\%$

2° Principio per le macchine frigorifere

non è possibile effettuare trasformazioni il cui unico risultato sia il trasferimento di calore da sorgente a temperatura più bassa a sorgente a temperatura più alta (enunciato di Clausius)



macchina ideale



macchina reale

Si può formulare l'EFFICIENZA della MACCHINA FRIGORIFERA

$$K = \frac{Q_L}{W} = \frac{Q_A}{W}$$

l'efficienza della macchina frigorifera K non può mai essere infinita $[K < \infty]$

es: cubetti di ghiaccio T?

prende 1L di acqua a 10°C, $K = 5{,}5$, $P = 550\ W$, solo il 10% per congelatore

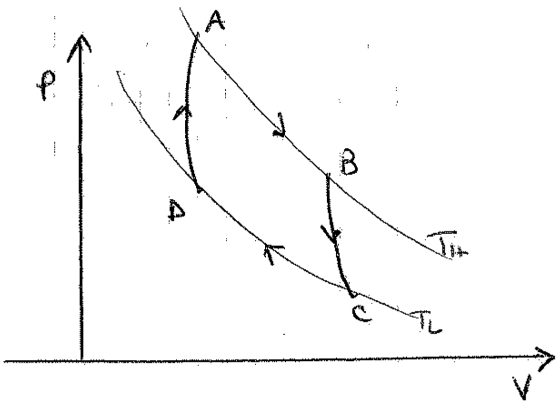
$Q_f = m \cdot c \Delta T$ $\qquad Q = m \cdot L$ $\qquad Q_T = m(c\Delta T + L) = 41{,}86 + 333 \cdot 10^3 \approx 3{,}78 \cdot 10^5\ J$

$P = 55\ W$ $\qquad \frac{Q}{\ } = K$ $\qquad \frac{Q}{\ } = K$ $\qquad W = \frac{Q}{\ } \longrightarrow P \cdot \Delta t = \frac{Q}{\ }$ $\qquad \Delta t = \frac{3{,}378 \cdot 10^5}{\ } = 21'$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 87 di 153

CICLO DI CARNOT

è una macchina che opera solo trasformazioni reversibili.
Si dimostra che è la macchina termica con rendimento maggiore possibile fra quelle che temperature



AB = espansione isoterma
BC = " adiabatica
CD = compressione isoterma
DA = " adiabatica

RENDIMENTO MACCHINA CARNOT: $\eta = 1 - \frac{|Q_c|}{Q_A} < 1$

Q_A è il calore assorbito lungo l'isoterma AB, Q_C è il calore ceduto lungo l'isoterma CD

AB: $\Delta U_{INT}^{(AB)} = 0$ (isoterma)

$$\Rightarrow Q_A = Q_{AB} = -W_{SUL}^{(AB)} = W_{DAL}^{(AB)}$$

$$W^{AB} = nRT_H \ln \frac{V_B}{V_A} = Q_A$$

CD: $\Delta U_{int}^{(CD)} = 0$

$$Q_C = Q_{CD} = W_{DAL}^{(CD)} = nRT_L \ln \frac{V_D}{V_C} = -nRT_L \ln \frac{V_C}{V_D}$$

$$\eta = 1 - \frac{\cancel{nR}T_L \ln \frac{V_C}{V_D}}{\cancel{nR}T_H \ln \frac{V_B}{V_A}}$$

si può dimostrare che $\frac{V_C}{V_D} = \frac{V_B}{V_A}$ quindi

$$\boxed{\eta = 1 - \frac{T_L}{T_H}}$$

$$\boxed{\eta = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1} \leq 1 - \frac{T_2}{T_1}}$$

Dunque nel ciclo di Carnot

$$\eta = 1 - \frac{|Q_L|}{Q_H} = 1 - \frac{T_L}{T_H}$$

$$\frac{|Q_L|}{Q_H} = \frac{T_L}{T_H}$$

$$-\frac{Q_L}{T_L} = \frac{Q_H}{T_H}$$

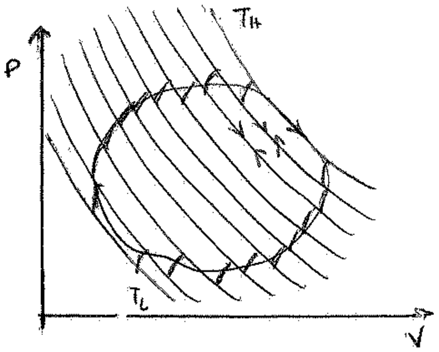
$\frac{Q_H}{T_H} + \frac{Q_L}{T_L} = 0 \longrightarrow$ macchina reversibile $\quad \frac{Q_H}{T_H} + \frac{Q_L}{Q} \leq 0 \longrightarrow$ macchina irreversibile

$$\boxed{\sum_{i=1}^{4} \frac{Q_i}{T_i} = 0}$$

i=AB
i=BC
i=BD
i=DA

ovvero è nulla la somma del calore scambiato sulla temperatura a cui viene scambiato per un ciclo di Carnot

Per qualsiasi macchina termica vale $\sum_{i=1}^{4} \frac{Q_i}{T_i} = 0$



approssimo il ciclo con un numero adeguato di cicli di Carnot per ognuno dei quali vale $\sum_{i=1}^{4} \frac{Q_i^j}{T_i^j} = 0$

$$\sum_{j=n} \sum_{i=1}^{4} \frac{Q_i^j}{T_i^j} = 0$$

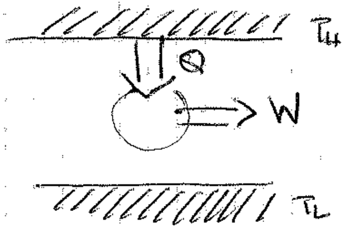
$$\Downarrow$$

$$\sum \frac{Q_i}{T_i} = 0$$

tutte le isoterme interne al ciclo reale che ho aggiunto danno contributo nullo essendo percorse due volte, una volta assorbendo e l'altra cedendo calore

$$\lim_{Q_i \to 0} \sum \frac{Q_i}{T_i} = \oint \frac{dQ}{T} \qquad \oint \frac{dQ}{T} = 0$$ per qualsiasi trasformazione ciclica reversibile

Riformulazione di macchina termica e frigorifera con entropia (Boltzmann)

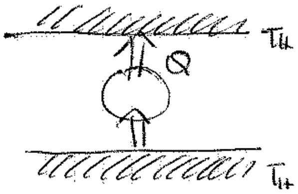


macchina ideale

N.B.: il sistema deve essere isolato $\Delta S = \cancel{\Delta \bar{S}_M} + \Delta \bar{S}_A$

$$\Delta \bar{S}_A = \frac{-|Q|}{T_H}$$

$$-\frac{|Q|}{T} < 0$$



macchina ideale

$$\Delta S = \cancel{\Delta S_M} + \Delta S_A$$

$$\Delta S_A = -\frac{|Q|}{T_L} + \frac{|Q|}{T_H} = |Q|\left(\frac{1}{T_H} - \frac{1}{T_L}\right) < 0$$

ROBABILITÀ: POSIZIONE delle 4 PARTICELLE

	1	2	3	4	
1	S	S	S	S	} 1
2	S	S	S	D	
3	S	S	D	S	
4	S	D	S	S	} 4
5	D	S	S	S	
6	S	S	D	D	
7	S	D	S	D	
8	D	S	D	S	} 6
9	D	D	S	S	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	} 4
					} 1

16 possibilità

probabilità: $\frac{1}{16}$

M molteplicità n° di microstati

P probabilità n° macrostati

$$\boxed{S = -k_B \ln P}$$

MICROSTATO: quali particelle stanno a dx e quali a sx : 16 Microstati

MACROSTATO: quante " " " " " quante " " : 5 Macrostati

microstati hanno tutti la stessa probabilità $\frac{1}{16}$

macrostati: 4 sx $\frac{1}{16}$

3 sx 1dx $\frac{1}{4}$

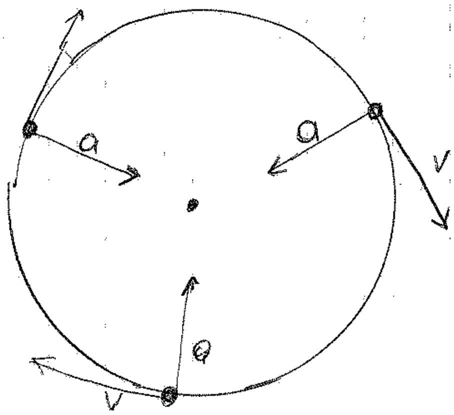
2 sx 2dx $\frac{\cancel{6}}{\cancel{16}}$ $\frac{3}{8}$

1 sx 3dx $\frac{1}{4}$

4dx $\frac{1}{16}$

moto di un corpo che si muove di velocità costante con un'accelerazione su una traiettoria circolare

a diretta radialmente: accelerazione centripeta



$$a_c = \frac{v^2}{r} \quad \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

periodo

$$T = \frac{2\pi R}{v}$$

ma il corpo percorre un arco di parabola $\theta \times R$

$$d\vec{R}(t) = d\vec{\theta} \times \vec{R}(t)$$

si introduce la velocità angolare ω

$$\vec{\omega}(t) = \frac{d\vec{\theta}}{dt}$$

$$\omega = \frac{\theta}{t} \quad \left[\frac{rad}{s}\right]$$

la velocità tangenziale v diventa

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{R}(t)}{dt} = \frac{d\vec{\theta} \times \vec{R}(t)}{dt} = \frac{d\vec{\theta}}{dt} \times \vec{R}(t) = \vec{\omega} \times \vec{R}(t)$$

$$v = \omega \cdot R$$

accelerazione angolare α

$$\alpha = \frac{\omega}{T}$$

accelerazione centripeta

$$a_c = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$$

è un moto che utilizza il sistema delle coordinate polari. Un sistema di riferimento bidimensionale che associa ad ogni punto del piano a un angolo e a una distanza dal polo