NUMERO : 403

DATA : 02/11/2012

A P P U N T I

STUDENTE : Tabasso

MATERIA : Analisi II Controllo numerico
Prof. Pieraccini_Ugaglia

ANALISI 2 _ CALCOLO NUMERICO

1

Richiami di geometria:

- E_{IJ}: el nulli tranne $e_{IJ} = 1$ → forma base di spazio $m \times n$: $\forall A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ $A = \sum_i \sum_j a_{ij} E_{IJ}$
- $(AB)^T = B^T A^T$
- A (semi) def positiva se $x^T A x > 0$ (≥) opp $\det(A) > 0$; e el diagonali di A simm > 0
  A diagonale dominante per righe se $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j \neq i \\ j=1}} |a_{ij}|$
  colonne $|a_{jj}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$
- $\det(A) = 0 \Rightarrow$ A singolare
  ↳ A diag dominante opp simm ⇒ non singolare
- $rk(A)$ = num di vett linearmente indipendenti
- x, y ORTOGONALI se $x^T y = 0$ $\{a_1 \dots a_n\}$ ORTONORMALE se $a_i^T a_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$
  A ortogonale ⇒ $A^{-1} = A^T$
- Autovalore: $Ax = \lambda x$; $\det(\lambda I - A) = 0$; se A simm ⇒ autoval reali e autovett ortogonali ; A def pos ⇒ autoval > 0
  → autovettori lin. ind.
  $X^{-1} A X = \Lambda$ ⇒ diagonalizzabile
  ↳ matr diagonale (dove $a_{ii} = \lambda_i$)
  RAGGIO SPETTRALE
  ↳ $\rho = \{ \max |\lambda_i| \mid \lambda = \text{autoval di } A \}$
- NORMA DI VETTORE: $\begin{cases} \|x\| > 0 \\ \|cx\| = |c| \, \|x\| \\ \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \text{ e } \|x-y\| \geq \big| \|x\| - \|y\| \big| \end{cases}$

norma inf: $\|x\|_\infty = \max |x_i|$
$\|x\|_1 = \sum |x_i|$
euclideo $\|x\|_2 = \sqrt{\sum |x_i|^2}$

vettore è sempre vettore colonna!

COMPATIBILI se $\|Ax\| \leq \|A\| \, \|x\|$

$\begin{cases} \|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}| & \text{* faccio somma x ogni righe poi prendo max} \\ \|A\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}| & \text{* faccio somma x ogni colonna poi prendo max} \\ \|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)} & \text{* max dei moduli di autovett} \end{cases}$

se c'è qst collegamento norma = NATURALE
↳ $\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$
↳ $\rho(A) \leq \|A\|$

$\|A\|_F = \sqrt{\sum_i \sum_j |a_{ij}|^2}$ * somma i quadrati di elementi

↓
NORMA DI MATRICE
$\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$
+ prop di norma di vettore

3

CANCELLAZIONE NUMERICA

- perdita di cifre significative durante operazione di macchina (x es facendo sottrazione tra 2 numeri molto vicini tra loro)
- amplificazione errori di approssimazione
- si può evitare usando modi alternativi x fare calcolo

Problema è BEN POSTO se ammette 1 sola soluzione, che dipende con continuità dai dati, altrimenti è MAL POSTO
↳ CONDIZIONAMENTO dipende dal problema,
STABILITÀ DELL'ALGORITMO dall'algoritmo usato

→ come si propagano nel problema le perturbazioni sui dati (approssimazione)?

$y = f(x) \Rightarrow f(x+\delta x) = \begin{cases} \bar{y} \text{ sol esatta di } x+\delta x \\ \tilde{y} \text{ sol ottenuta} \end{cases} \rightarrow$ ma $\tilde{y} \neq \bar{y}$
↳ non è detto che piccolo δx corrisponda a piccolo δy

⇒ Algoritmo numericamente stabile se $\frac{\|\bar{y}-\tilde{y}\|}{\|\bar{y}\|}$ ha ordine di grandezza di ε_m, altrimenti instabile

considera propagazione err arrotondamento
⇒ ↳ ∀ operazioni devono presentare err relativo controllabile con ε_m

$$\frac{\|f(x+\delta x)-\tilde{y}\|}{\|f(x+\delta x)\|}$$

⇒ Problema ben condizionato se $\frac{\|f(x) - f(x+\delta x)\|}{\|f(x)\|} \sim \frac{\|\delta x\|}{\|x\|}$; altrimenti mal condizionato

- perturbazioni sui dati non influenzano eccessivamente risultati

$$\frac{\|f(x+\delta x)-f(x)\|}{\|f(x)\|} \leq K \frac{\|\delta x\|}{\|x\|}$$

K → NUMERO DI CONDIZIONAMENTO → Probl ben condizionato se K piccolo; mal condizionato se K grande

non cambia per espressioni equivalenti

Esempio:

$$x = a+b \Rightarrow \frac{|\delta x|}{|x|} \leq \frac{|\delta a|}{|a+b|} + \frac{|\delta b|}{|a+b|} = \underbrace{\frac{|a|}{|a+b|}}_{K_a}\frac{|\delta a|}{|a|} + \underbrace{\frac{|b|}{|a+b|}}_{K_b}\frac{|\delta b|}{|b|} \rightarrow K = \max(K_a, K_b)$$

- problema mal condizionato se $a+b$ piccolo cioè $|a| \sim |b|$ ma $a=-b$ ⇒ CANCELLAZIONE NUMERICA

• Nel caso $a_{kk}^{(k)} = 0$ → PIVOTING
si permutano due righe in modo da avere $a_{kk}^{(k)} \neq 0$

⇒ x maggiore stabilità → $r \geq k$: $|a_{rk}^{(k)}| = \max_{k \le i \le n} |a_{ik}^{(k)}|$ → considero solo righe sotto al pivot!
↳ evitare moltiplicatori ↑ e pivot ↓ che ↑ err arrotondamento
↳ è già effettuato in matr simmetriche e a diagonale dominante

P_{ij} → matrice di permutazione → PA scambio riga i con J in A ; AP scambio colonna i con J in A
↳ matrice ottenuta da I scambiando riga i con riga J

$\det A = (-1)^s \det(U)$ U → matrice triangolare ottenuta ; s → num permutazioni
↳ prodotto di u_{ii}

⇒ alla fine di fattorizzazione io ottengo

moltiplico da dx a sx

$M_{n-1}P_{n-1}M_{n-2}P_{n-2}\dots M_2P_2M_1P_1\, A\, x = M_{n-1}P_{n-1}\dots M_1P_1\, b$ ⇒ $Ux = \tilde{b}$ ⇒ $M_{n-1}P_{n-1}\dots M_1P_1 A = U$ ⇒ $GA = U$ ⇒ $M_{n-1}P_{n-1}\dots M_1P_1 = G$

↳ x det G basta scrivere moltiplicatori in A al posto degli zeri e permutarli come una qualsiasi colonna di A in permutazioni successive

⇒ $M_{n-1}P_{n-1}\dots M_2P_2 A = \bar{M}_{n-1}\dots\bar{M}_1 P_{n-1}\dots P A \dots = \bar{M}PA$ ⇒ $\bar{M}PA = U$ ⇒ $PA = \bar{M}^{-1}U = LU$
↳ ottengo gli M permutando opportunamente visto che $MP \neq PM$; $L = \bar{M}^{-1}$

$\bar{M}_i = M_i^{(n-1-i)} = P_{n-1}\dots P_{i+1} M_{i+1} P_{i+1}\dots P_{n-1}$

⇒ $\boxed{PA = LU}$

es: $P_1 M = \bar{M} P_2 \Rightarrow P_1 M P_2 = \bar{M} \underbrace{P_2 P_2}_{I} = \bar{M} \Rightarrow \bar{M} = P_1 M P_2$

$$\Rightarrow \begin{cases} Ly = Pb \\ Ux = y \end{cases}$$

COSTO COMPUTAZIONALE: ordine di grandezza di operazioni necessarie in funz di n = grandezza matrice

Gauss → conviene se hai $Ax =$ a piacere b ⇒ devi ripetere solo $Ly = Pb$
↳ costo $= O\left(\frac{n^3}{3}\right)$

Cholesky

• se A simmetrica def positiva $A = R^T R$, R triang superiore $O\left(\frac{n^3}{6}\right)$ → ci mette metà tempo

MATLAB:

[L,U,P] = lu(A)

R = chol(A) → fa fatt di Cholesky, se trova matrice non simm, usa solo parte triang superiore

- metodi convergono se A = matrice a diag dominante (→ x righe o colonne) ← ma non è necessario
- A irriducibile se $\nexists P : P^T A P = \begin{pmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{22} \end{pmatrix}$
  ↳ ⇒ converge se $|a_{ii}|$ o $|a_{kk}| \geq \sum_{i \neq k} |a_{ik}|$ ← cioè el su diag ≥ Σ el su riga o su colonna
- A simm def positiva ⇒ GS converge
- vel di GS > vel di J
- convergenza GS $\not\Leftrightarrow$ convergenza J

Test di arresto

- criterio di arresto di iterazioni → se dopo tot iterazioni capisco che non funziona → raggiungo incertezza desiderata

$$\frac{\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|}{\|x^{(k+1)}\|} < tol$$ → iterate succ molto vicine tra loro

↓ TOLLERANZA RELATIVA

$tol > 0$ → precisione di macchina

$$\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \leq tol$$

↓ TOLLERANZA ASSOLUTA

RESIDUO dell'equazione al passo $k+1$ = $r^{(k+1)} = b - Ax^{(k+1)}$ ⇒ $\dfrac{\|b - Ax^{(k+1)}\|}{\|b\|} \leq tol$

↳ in sol esatta $r = 0$

↓ residuo piccolo $\not\Rightarrow$ errore piccolo

$$\|e^{(k)}\| = \|x^{(k)} - x\| = \|A^{-1}(Ax^{(k)} - b)\| = \|-A^{-1} r^{(k)}\| \leq \|A^{-1}\| \, \|r^{(k)}\|$$

$$\frac{\|e^{(k)}\|}{\|x\|} \leq \|A^{-1}\| \, \|r^{(k)}\| \, \frac{\|A\|}{\|b\|} = K(A) \frac{\|r^{(k)}\|}{\|b\|} \Rightarrow \frac{\|e^{(k)}\|}{\|x\|} \leq K(A) \frac{\|r^{(k)}\|}{\|b\|} \leq K(A)\, tol$$

* Convergenza:

serve $\rho(B) = \max(\lambda(B)) < 1$ dove $B = -M^{-1}N$

e

$$A = \begin{pmatrix} \ddots & & F \\ & D & \\ E & & \ddots \end{pmatrix}$$

Jacobi: $M = D$ $N = A - D$ Gauss-Seidel: $M = D + E$, $N = F$

BASE DI NEWTON

DIFFERENZE DIVISE

→ $f[x_i] = f(x_i)$

→ $f[x_{i0} \dots x_{in}] = \dfrac{f[x_{i1} \dots x_{in}] - f[x_{i0} \dots x_{i_{n-1}}]}{x_{in} - x_{i0}}$

x_i	$f[x_i]=y_i$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
x_0	y_0		
x_1	y_1	$\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0} = f_1$	
x_2	y_2	$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = f_2$	$\frac{f_2-f_1}{x_2-x_0}$
x_3	y_3	$\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2} = f_3$	$\frac{f_3-f_2}{x_3-x_1}$

prendi el della colonna a sx stesso rigo $= a$ e el colonna a sx, rigo sopra $= b$, dopodiche prendi x dello stesso rigo $\to x_a$ e x di rigo più in alto per che è servito x arrivare a qst num ($f[x_i, x_{i+1} \dots]$)

$\Rightarrow = \dfrac{a-b}{x_a - x_b}$

- Se due nodi coincidenti $f[x_0, x_0] = f'(x_0)$

$$\Rightarrow f[\underbrace{x_0, x_0 \dots x_0}_{k+1}] = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

TEOREMA: $f[x_0 \dots x_k] = \dfrac{f^{(k)}(\varepsilon)}{k!}$ ↳ $\varepsilon \in [a,b]$, $\min\{x_i\} \le \varepsilon \le \max\{x_i\}$

nodi m x forza distinti $\in [a,b]$

- se $f(x)$ polinomio di grado N e $k > N \Rightarrow f[x_0, \dots x_k] = 0$
- differenze divise non dipendono da ordine di nodi, x ciò devo tenere quello stesso ordine in p

$f[x, x_0] = \dfrac{f(x_0) - f(x)}{(x - x_0)} \Rightarrow f(x) = \underset{\substack{\downarrow \\ P \text{ in } x = x_0}}{f(x_0)} + f[x, x_0] \underbrace{(x-x_0)}_{\text{errore } f(x) - P(x)}$

$$\Rightarrow f(x) = \underbrace{f(x_0) + (x-x_0) f[x_1, x_0] + (x-x_0)(x-x_1) f[x_0, x_1, x_2] + \dots + \overbrace{(x-x_0) \dots (x-x_{n-1})}^{\prod_{k=0}^{n-1}(x-x_k)} f[x_0, \dots x_n]}_{p(x)}$$

FORMULA DI INTERPOLAZIONE di Newton

costo computazionale: $\frac{n^2}{2}$ divisioni e n^2 sottrazioni

$$\to = \sum_{i=0}^{n} \left(f[x_0, \dots x_i] \prod_{k=0}^{i-1} (x - x_k) \right)$$

- lo trovo avendo $p_n(x)$ e aggiungendo dato (x_{n+1}, y_{n+1}) e voglio trovare $p_{n+1}(x) = p_n(x) + q_{n+1}(x)$

q_{n+1}: grado: $n+1$ → $q_{n+1}(x_i) = 0 \quad i = 0 \dots n$

$\to P_{n+1}(x) = P_n(x) + \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) f[x_0 \dots x_{n+1}]$

HERMITE

Dati $(x_i, f(x_i))$ e $(x_i, f'(x_i))$ $i = 0, \dots m$ ⇒ applico differenze divise considerando due volte consecutivamente ogni x_i

x_0	$f(x_0)$	
x_0	$f(x_0)$	$f'(x_0)$
x_1	$f(x_1)$	$f[x_0, x_1]$
x_1	$f(x_1)$	$f'(x_1)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_n	$f(x_n)$	$f[x_n, x_{n-1}]$
x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$

CONVERGENZA

$f \in C^0([a,b]) \to \|E_n\|_\infty \le (1 + \Lambda_n) \min_{p \in P_n} \|f - p\|_\infty$

↳ quant'è lontana f dal possibile polinomio è il min tra tutte le distanze punto-punto

COSTANTE di LEBESGUE $= \max \sum |l_i(x)|$ dipende solo dai nodi (come E_n)

non è limitato, non cresce con n → $\lim_{n \to \infty} \Lambda_n = \lim_{n \to \infty} E_n = \infty$

se prendo un intervallo $(-a, a)$ verso estremi oscilla troppo ⇒ no accettabile

no molto ok

↳ se prendo nodi equidistanti → $\Lambda_n \ge e^{\frac{n}{2}}$

T: $f \in C^0[a,b] \to \exists \{x_i\} \in [a,b]$: p_n CONVERGE a f --→ ∃ succ di nodi x cui p_n converge sempre a f

T: data $\{x_i\} \in [a,b] \to \exists f \in C^0[a,b]$: p_n NON converge a f --→ ∀ " " ∃ f x cui p_n NON converge a f

T BERNSTEIN: Se $f \in C^1[a,b] \Rightarrow \{x_i\}$ di Chebycev CONVERGE UNIFORMEMENTE a f in $[a,b]$

$$x_i = \cos\left(\frac{2i+1}{2(n+1)} \pi\right) \in (-1, 1) \dashrightarrow \Lambda_n \sim \frac{\pi}{2} \log n$$

se voglio $x_i \in (a,b)$ ⇒ trovo t_i

↳ $t_i = \dfrac{b-a}{2} x + \dfrac{a+b}{2}$

Metodo dei Minimi Quadrati

↳ x dati sperimentali ⇒ non sempre $f(x_i) = y_i$
↳ Regressione lineare è un caso particolare

- Scegli a priori $\overset{\text{funz}}{m} \ll \overset{\text{nodi}}{n}$ funzioni di base (di solito x^k)

$f_m(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \dots + c_m\varphi_m(x)$

↳ $\varepsilon^2 = \sum_i (f_m(x_i) - y_i)^2 = \sum_i \left(\sum_k \varphi_k c_k(x_i) - y_i \right)^2$ → per scegliere f_m → $\boxed{\min \varepsilon^2}$

$$A = \begin{pmatrix} \varphi_1(x_1) & \dots & \varphi_m(x_1) \\ \vdots & & \\ \varphi_1(x_n) & \dots & \varphi_m(x_n) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$ → non sempre risolvibile

⇒ $\| b - Ac \|_2^{2} = \min$ → funzionale quadratico convesso

(2° elevato; norma 2)

⇒ Matr Hessiana def positiva ⇒ unico punto critico è minimo

$\nabla \|Ac - b\|_2^2 = A^T A c - A^T y$ → $\boxed{A^T A c = A^T y}$ → SISTEMA DELLE EQ NORMALI

↳ condiz necessaria per punto $\vec{c}$ di minimo di ε^2

→ simmetrica def positiva ($\lambda_i \geq 0$)

• Se $\varphi_k(x)$ lin ind + e nodi distinti ⇒ colonne A lin ind
⇒ $A^T A$ non singolare e def pos ⇒ SOLUZIONE UNICA

Per risolvere

Metodo 1:
Calcolo $A^T A$, A^T e risolvo con Cholesky o Gauss
↳ no pivoting xk simm

↳ ma costoso e MAL CONDIZIONATO

Metodo 2:
fattorizzazione QR

• Ma se non ho modello lineare → trasformazione di variabili
x es:

$a_1 e^{a_2 x} \neq \sum c_k \varphi_k(x)$ → $a_1 e^{a_2 x} = y$ → $\log y = \log a_1 + a_2 x = c_1 + c_2 x$

($c_1 = \log a_1$, $c_2 = a_2$)

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \sum i & \sum x_i & \sum x_i^2 \dots & \sum x_i^n \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & & \\ \sum x_i^2 & & \ddots & \vdots \\ \sum x_i^n & \sum x_i^{n+1} & \dots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum f_i \\ \sum f_i x_i \\ \sum f_i x_i^2 \\ \sum f_i x_i^n \end{pmatrix}$$

tante righe/colonne
quanti sono gli n
gradi del polinomio
interpolante

Metodo di Newton o delle tangenti

- usa + informazioni ($f(x)$, $f'(x)$ ...)
- hai bisogno di buona stima iniziale x_0

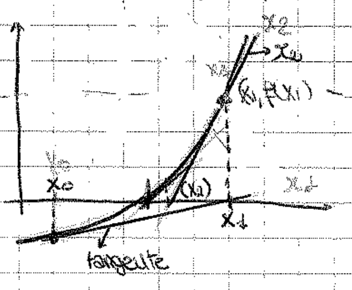
→ Approssimi $f(x)$ con retta tangente a $f(x)$ passante in $(x_0, f(x_0))$

$$r_K(x) = f(x_K) + f'(x_K)(x - x_K)$$ ← sviluppo di Taylor di 1° grado ↳ è buona approssimazione per $x \to x_K$

→ Si trovano punti dove $r_K(x) = 0$ e si ottiene x_{K+1}
⇒ si ripete finché x_n accettata come soluzione

Quindi:
punto x_K → traccio tang a $f(x_K)$ cioè funzione in quei x_K → trovo intersezione { tg in $f(x_K)$ / asse x } → ottengo x_{K+1} e ripeto operazione (tg(x_{K+1}))

$$\boxed{x_{K+1} = x_K - \frac{f(x_K)}{f'(x_K)}}$$



→ • richiede $f(x)$ e $f'(x)$ per ogni punto
  • se $f'(x) = 0$ per uno qualche i procedimento si blocca
  • costo computazionale ↑↑
  • velocità convergenza → di ordine 2 • se $f'' \in C$ e segno costante
  • si può generalizzare x sistema di eq ma non è conveniente (bisogna calcolare f e f')

Velocità di convergenza

Se la successione $\{x_n\}$ converge ⇒ $p \geq 2$

• toll > $|x_K - x_{K+1}|$ ⇒ arresta

Se $f'(x^*) = 0$ ⇒ x^* radice multipla con molteplicità m
Se m nota ⇒ $x_{K+1} = x_K - m\dfrac{f(x_K)}{f'(x_K)}$ con $p = 2$

→ Bisezione → errore non diminuisce in modo monotono, può anche aumentare in una qualche iterazione
→ Newton → più $n \to \infty$ più la distanza tra due sol successive vale e^{+2}, dove e è errore di iterata precedente:

$$e_{K+1} = e_K^2$$

Ma
↳ Per Newton bisogna avere buona stima iniziale, altrimenti il metodo DIVERGE

Metodi Newton-like

↳ varianti di Newton con costo ↓

1) $f'(x) = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ → approssimata con diff in avanti

2) Metodo delle secanti o di Lagrange : $\boxed{f'(x_K) = \dfrac{f(x_K) - f(x_{K-1})}{x_K - x_{K-1}}}$

→ come ↑ però invece di usare h così, uso punto già calcolato x limitare op. necessarie
→ però $x_K - x_{K-1}$ potrebbe non essere infinitesimo
⇒ $p \in (1, 2)$ ⇒ superlineare ⇒ p < risp Newton
e richiede 2 stime iniziali!

15

ODE → Equazioni Differenziali Ordinarie

↳ equazioni dove sono correlate funz. incognita e sue derivate

↳ posso ricondurre eq. a sistema di eq. di ordine n ... n → $z_n(t) = y^{(n-1)}(t)$

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

MODELLO DI MALTHUS

↳ popolazione isolata ⇒ non interagisce con altri ⇒ $p(t+\Delta t) = p(t) + N p(t)\Delta t - M p(t) \Delta t$

(→ tasso di natalità per unità di t e p: nati, morti)

$$\frac{p(t+\Delta t) - p(t)}{\Delta t} = (N-M)p(t) = a p(t) = p'(t)$$

$a>0$: esplode $N>M$ — $a<0$: estingue $M>N$

non isolata: $p'(t) = a p(t) + I$ (→ immigraz.)

MODELLO LOTKA-VOLTERRA

↳ popolazioni che interagiscono

$$p_1'(t) = a_{11} p_1(t) + a_{12} p_1(t) p_2(t)$$
$$p_2'(t) = a_{22} p_2(t) + a_{21} p_1(t) p_2(t)$$

⇒
- COOPERAZIONE → $\begin{cases} a_{11} < 0 \\ a_{22} < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} a_{12} > 0 \\ a_{21} > 0 \end{cases}$ non sopp. da sole, ma beneficio insieme
- COMPETIZIONE → $\begin{cases} a_{11} > 0 \\ a_{22} > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} a_{12} < 0 \\ a_{21} < 0 \end{cases}$ sopp. da sole, insieme si danneggiano
- PREDA-PREDATORE $\begin{cases} a_{11} > 0 \\ a_{22} < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} a_{12} < 0 \\ a_{21} > 0 \end{cases}$ 1: preda 2: predatore; 1: cresce da solo, 2 cresce danneggiando 1, da solo 2 muore

PROBLEMA DI CAUCHY

$$\boxed{\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(a) = y_0 \end{cases}}$$

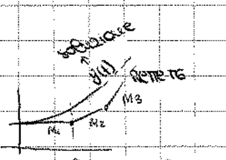
METODO NUMERICO

↳ formula che calcola $y_k \simeq y(t_k)$ (approssimazione ≃ soluz. esatta)

intervallo di integrazione: griglia di punti = NODI su $[a,b]$ ↳ equidistanti

↳ ONE-STEP: basta avere y_k (→ approssimaz. precedente)
- → ESPLICITI $y_{k+1} = y_k + h\,\Phi(t_k, y_k; h)$ (→ funzione generatrice del metodo)
- → IMPLICITI $y_{k+1} = y_k + h\,\Phi(t_k, y_k, y_{k+1}; h)$ ← problema di punto fisso?

↳ MULTISTEP
- ↳ IMPLICITI / ESPLICITI Φ dipende da molte più y_i = appross. precedenti



– METODI ONESTEP –

→ $y' = f(t_k, y_k) = M_{RETTA TG}$ ⇒ retta tg: $y_{k+1} - y_k = M_{TG}(x_{k+1} - x_k) = f(t_k, y_k) \cdot h$

Eulero Esplicito $\left[y_{k+1} = y_k + h f(t_k, y_k) \right]$

Eulero Implicito $\left[y_{k+1} = y_k + h \cdot f(t_{k+1}, y_{k+1}) \right]$

Trapezi (implicito) $\left[y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left(f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_{k+1}) \right) \right]$ ($h = b-a$, $f(a)$, $f(b)$)

↳ media tra EE e EI

$A = \frac{h(B+b)}{2}$ ($h = b-a$, $f(a)$, $f(b)$)

ost. nome perché $\int_{t_0}^{t} y' = \int_{t_0}^{t} f(t, y(t)) \to y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(t, y(t))$ → si scompone con formula dei trapezi

Heun (cin) (esplicito) $\left[y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left(f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, \overbrace{y_k + h f(t_k, y_k)}^{y_{k+1} \text{ per EI}}) \right) \right]$ → devo usare met. x eq. non lineare

↳ unica cosa che cambia da met. trapezi

Eulero modificato $\left[y_{k+1} = y_k + h f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} f(t_k, y_k)\right) \right]$

↳ calcolo f in punto tra y_k e y_{k+1}

→ ∀ met. espliciti riconducibili a R-K (→ esiste anche impliciti)

RUNGE-KUTTA espliciti $y_{k+1} = y_k + h \sum_{i=1}^{s} a_i K_i$ (→ generatrice)

$K_i = f\left(t_k + b_i h, y_k + h \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} K_j\right)$ $i = 1 \dots s$ (n° di valutazioni a ogni passo)

$c \in \mathbb{R}^{s \times s}$ triangolare inf. senza diagonale, $a, b \in \mathbb{R}^s$

↳ $\left[y_{k+1} = y_k + h \sum_{i=1}^{s} a_i f\left(t_k + b_i h, y_k + h \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} K_j\right) \right]$

n° stadi = n° valutazioni di funzione

EE: $s=1$ $a=1$ $b=1$ H: $s=2$ $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$ $b_1 = 0$ $b_2 = 1$ (→ $t_{k+1} = t_k + h$) $c_{21} = 1$ EM: $s=2$ $a_1 = 0$ ($a_2 = 1$) $b_2 = \frac{1}{2}$ $c_{21} = \frac{1}{2}$ $b_1 = 0$

ANALISI 2

1

SERIE

- verifica proprietà DEFINITIVAMENTE se la verifica $\forall n \geq n_0$ definito
- $a_n = q^n$ succ geom $\begin{cases} +\infty & q > 1 \\ 1 & q = 1 \\ 0 & |q| < 1 \\ \nexists & q \leq -1 \end{cases}$ $\quad S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1-q}$ $\begin{cases} +\infty & q \geq 0 \\ \frac{1}{1-q} & -1 < q < 1 \\ \nexists & q \leq 1 \end{cases}$
- $\boxed{\sum \frac{1}{n(n-1)} = 1 - \frac{1}{n}} \Rightarrow = 1$
- Serie telescopiche
- CONDIZIONE NECESSARIA x CONVERGENZA $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$ $\sum a_n$
- Serie a termini positivi: $a_n \geq 0$ $\Rightarrow$ converge o diverge pos
- CRITERIO del CONFRONTO
- $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ ARMONICA GENERALIZZATA: $\begin{cases} \text{converge} & \alpha > 1 \\ \text{diverge} & \alpha \leq 1 \end{cases}$
- Criterio del rapporto: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ radice: $\sqrt[n]{a_n} = l \Rightarrow l \begin{cases} < 1 & \text{converge} \\ > 1 & \text{diverge} \\ = 1 & \text{non si sa} \end{cases}$
- CRITERIO INTEGRALE o di McLaurin se $f(x) \begin{cases} \geq 0 \ \forall x \geq 1 \\ \text{integrabile } [1,T] \ \forall T > 1 \\ \text{dec cr su } [1,+\infty) \end{cases} \Rightarrow \sum f(n) = \int_1^{+\infty} f(x)\,dx$
- Serie di segno qualsiasi: $\sum (-1)^n b_n$, $b_n \geq 0$
- $\sum a_n$ converge assolutamente se $\sum |a_n|$ conv $\quad$ conv ass $\to$ conv ma conv $\not\to$ conv ass
- Leibniz $\begin{cases} b_n \geq 0 \\ \lim b_n = 0 \\ \{b_n\} \text{ decr} \end{cases} \Rightarrow \sum (-1)^n b_n$ conv $\quad |S - S_n| \leq b_{n+1}$ (S: num a cui converge serie)
- Serie di funzioni: $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ $\quad \{\bar{x} / \sum f(\bar{x}) \text{ converge}\}$ - insieme di convergenza puntuale di $\sum f_n(x)$
- Serie di potenze: $\sum a_n (x - x_0)^n$
  - ↳ converge sempre per $x = 0$
- serie di potenze $\Rightarrow \begin{cases} \text{converge su } \{\mathbb{R}\} & R = +\infty \\ \text{converge su } \{0\} & R = 0 \\ \text{converge su } (-R, +R) & R = \text{RAGGIO DI CONVERGENZA} = \sup\{x \in \mathbb{R} / \sum a_n \bar{x}^n \text{ conv}\} \end{cases}$
  - ↳ bisogna verificare negli estremi
- Criterio del rapporto $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l$ radice $\sqrt[n]{a_n} = l \Rightarrow R = \begin{cases} +\infty & l = 0 \\ 0 & l = +\infty \\ \frac{1}{l} & \text{altrove} \end{cases}$
- Serie derivata: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \to \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n x^{n-1}$ $\quad K = n - 1 \to \sum_{K=0}^{\infty} a_n (K+1) x^K$
- Derivazione & integrazione

1) $\sum a_n x^n$, $R > 0 \longrightarrow S(x) \in C^\infty(-R, +R)$ $\quad S^{(K)}(x)$ si ottiene derivando K volte
$\forall x \in (-R, +R)$ $\int_0^x S(t)\,dt = \sum \int_0^x a_n t^n\,dt$

- $a_n = \frac{1}{n!} S^{(n)}(0)$
- $f(x)$ analitica e SVILUPPABILE IN SERIE DI TAYLOR se $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ ha $R > 0$ $\quad \to \sum = f(x)$
  - ↳ polinomio di Taylor di grado $k = \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n}{n!}$
- f ANALITICA in x_0 se $\exists M > 0 : |f^{(n)}(x)| \leq M^n$, $\forall x \in (x_0 - R, x_0 + R)$
- f analitica e pari/disp in 0 $\Rightarrow$ sv di Taylor ha solo potenze pari/disp di x

3

- Curva: funzione continua $\gamma: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$
- Sostegno: $Im\,\gamma$ curva ha + info di sostegno: verso di percorrenza
- Curva semplice → iniettiva: sostegno non si auto interseca
  ↳ basta che lo sia almeno una delle variabili
- γ Regolare se derivabile in I e $\gamma'(I) \neq 0$ $\Rightarrow \gamma'(t)$ vettore tg a γ in $\gamma(t)$
- γ Regolare a tratti se posso dividere I in n° finito di intervalli con γ Regolare
- $(g \circ f)(\bar{x}) = g(f(\bar{x}))$ con $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

  $\nabla (g \circ f)(\bar{x}) = g'(f(\bar{x})) \cdot \nabla f(\bar{x})$
- $(f \circ \gamma) = f(\gamma(t))$ $\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

  $\nabla \quad = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$

Se $\nabla(f \circ \gamma)(t) = 0 \Rightarrow \nabla f(\gamma(t))$ ortogonale a $\gamma(t) \Rightarrow \nabla f(\gamma(t))$ ortogonale a curva di livello
Se f differenziale in $\bar{x}_0 \in D \Rightarrow \nabla f(\bar{x}_0)$ ortogonale a ins. di livello $\{\bar{x} \in D \mid f(\bar{x}) = f(\bar{x}_0)\}$

- Punto di max relativo se $\forall x \in B(\bar{x}_0, x)$ $x \leq x_0$, massimo se vale $\forall x$

Punto critico $\Rightarrow$ differenziabile e $\nabla f(\bar{x}_0) = 0$

FERMAT $\begin{cases} f \text{ differenz. in } \bar{x}_0 \\ \bar{x}_0 \text{ min o max} \end{cases} \Rightarrow \nabla f(\bar{x}_0) = \vec{0}$

SHWARZ: $f \in C^2(D)$ $\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)$

Matrice Hessiana: $\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2 \partial x_1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$

x_0 punto di min → H def pos ⇒ autov > 0 → det H > 0 e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$
" " " max → H def neg ⇒ " < 0 → " $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$
" " " sella → H in def ⇒ autov > e < 0 → det H < 0
niente → H semi def ⇒ $\geq 0 \leq$ → det H = 0

- Taylor: $f(\bar{x}) = f(\bar{x}_0) + \nabla f(\bar{x}_0)(\bar{x} - \bar{x}_0) + \frac{1}{2}(\bar{x} - \bar{x}_0) H_f(\bar{x}_0)(\bar{x} - \bar{x}_0) + o(\|\bar{x} - \bar{x}_0\|^2)$

  $= f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \frac{1}{2}\left[(x - x_0)^2 f_{xx}(x_0, y_0) + 2(x - x_0)(y - y_0) f_{xy} + (y - y_0)^2 f_{yy}\right] + o(\ldots)$

  $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$

- $\nabla f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$ $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
- $\operatorname{div} f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $= \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}$ $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
- $\operatorname{rot} f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}$ $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$
- f IRROTAZIONALE se $\operatorname{rot}\vec{f} = 0$
- f conservativo se $\exists \varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}: \vec{f} = \nabla \varphi$, φ potenziale

  → conservativo → irrotaz (no viceversa)
- LAPLACIANO di f $\Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$
- Dini o Funzione implicita $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\}$ → voglio scrivere $V = \varphi(x)$ o $V = \psi(y)$

  $\{(x_0, y_0) \mid V \neq \varphi(x) \text{ e } V \neq \psi(y)\} \Rightarrow$ punti con $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$

° CAMBIO DI VARIABILI $\begin{cases} \Phi : B \subseteq \mathbb{R}^2 \to A \subseteq \mathbb{R}^2 \\ \Phi \text{ biettivo} \\ \Phi \in C^1 \\ \Phi \text{ Regolare} \end{cases}$ $J_\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial u} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial u} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial v} \end{pmatrix}$ dove $\Phi : (u,v) \to (\Phi_1, \Phi_2)$

$\Rightarrow D \subseteq A \Rightarrow D' = \Phi^{-1}(D) \subseteq B \Rightarrow \begin{cases} x = \Phi_1(u,v) \\ y = \Phi_2(u,v) \end{cases} \Rightarrow \iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{D'} f(\Phi(u,v))\,du\,dv\,|\det J_\Phi|$

↳ coord polari $\det J_\Phi = \rho$

° Massa lamina (Area: D, densità: $\mu(x,y)$) $\to M = \iint_D \mu(x,y)\,dxdy$

° Baricentro: $x_{i_B} = \frac{1}{M} \iint_D x_i\, \mu(x,y)\,dxdy = \dfrac{\iint_D x_i\, \mu(x,y)\,dxdy}{\iint_D \mu(x,y)\,dxdy}$

° D rettangolo $[a,b] \times [c,d]$ $f(x,y) = g(x) \cdot h(y) \Rightarrow \iint_D f(x,y) = \int_a^b g(x) \int_c^d h(y)$

° RIDUZIONE PER FILI se D semplice $\Rightarrow \iiint_D f = \iint_E \int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dxdy$

° INTEGRAZ PER STRATI $\forall z \in [a,b]$, $\underbrace{D \cap \{z = z_0\}}_{= A_z}$ ha uguale forma $\Rightarrow \iiint f = \int_a^b \iint_{A_z} f(x,y,z)\,dxdy\,dz$

° Volume $= \iiint_D 1\,dxdydz$

° Solidi di Rotazione: rotaz di T attorno asse k $\Rightarrow V(D) = \text{Area}(T) \times 2\pi\, k_b^{\text{baric}} = 2\pi \iint_T k\,dxdydz$
G def nel piano ik

° Eq. differenziali: $F(t, y, y', \dots y^{(n)}) = 0$
↳ ordine $= n$
↳ forma normale se posso riscrivere: $y^{(n)} = f(t, y, y', \dots y^{(n-1)})$

° Cauchy $\begin{cases} F(x, y, \dots y^{(n)}) = 0 \\ y(x_0) = y_0 \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$

° Problema al contorno $\begin{cases} F(x, y, \dots y^{(n)}) = 0 \\ y(x_0) = a \\ y(x_1) = b \end{cases}$

° Lineari: $y'' + ay' + by = 0$ $\quad \lambda^2 + a\lambda + b = 0$
$\Delta > 0$ 2 sol reali $\varphi(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$ $\quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$
$\Delta = 0$ 1 sol $\varphi(x) = c_1 e^{\lambda x} + x c_2 e^{\lambda x}$
$\Delta < 0$ sol $\in \mathbb{C}$ $\varphi(x) = e^{\alpha x}(c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x)$
$\alpha \pm i\beta$ ↳ soluz periodiche se $\alpha = 0$
perché φ_1, φ_2 ! $\varphi_2 = e^{\alpha x} \sin\beta x$!

se non omogenea:
1) risolvo omogenea $\to \varphi_0(x)$
2) pongo $\varphi(x) = Ax + b$ (moltiplicato per x^n dove n è la prima derivata di $y \neq 0$) calcolo derivate, sostituisco in eq
$\Rightarrow \varphi_P = \varphi(x) = Ax + b$ $\Rightarrow \varphi_T(x) = \varphi_0(x) + \varphi_P(x)$
3) Se $F(\dots) = e^{\gamma x} \Rightarrow \varphi_P = Ae^{\gamma x}$, se $\gamma \in$ sol om $\Rightarrow \varphi_P = Axe^{\gamma x}$, se γ è sol doppia di om $\Rightarrow \varphi_P = Ax^2 e^{\gamma x}$
4) Se $F(\dots) = a\cos\gamma x + b\sin\gamma x \Rightarrow \varphi_P(x) = A\cos\gamma x + B\sin\gamma x$ risonanza ($\Rightarrow$ moltiplico per x φ_P) se sol $= \pm\gamma i$

° Sistema di eq diff $\vec{y}^{(n)} = F(t, \vec{y}, \vec{y}', \dots \vec{y}^{(n-1)})$ 1° ordine: $\vec{y}' = F(t, \vec{y})$ $\begin{cases} y_1' = F_1(t, y_1, \dots y_n) \\ \vdots \\ y_n' = F_n(t, y_1, \dots y_n) \end{cases}$
↳ soluzione = curva integrale

° Cauchy $\begin{cases} \vec{y}' = F(t, \vec{y}) \\ \vec{y}(t_0) = \vec{y_0} \end{cases}$ 1) Se $F : I \times D \to \mathbb{R}$ continua in intorno $t_0 \times \vec{y_0} \Rightarrow \exists$ sol
($t \in I \subseteq \mathbb{R}$, $\vec{y} \in D \subseteq \mathbb{R}^n$)
2) Se F e deriv parziali F risp componenti y continue $\Rightarrow \exists!$ sol