NUMERO : 397

DATA : 17/10/2012

A P P U N T I

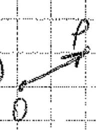
STUDENTE : Cetani

MATERIA : Geometria
Prof. Beccari

VETTORI DEL PIANO

Vettori applicati in un punto fisso O dello spazio.

VETTORE = def. segmento orientato OP (orientato da O a P)

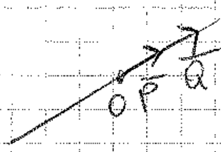


SIMBOLI: OP, $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\underline{w}$

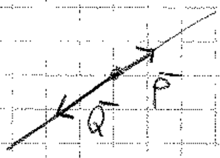
MODULO di un vettore: $|OP|$ = lunghezza di OP rispetto ad una prefissata unità di misura.

VERSORE = def. vettore di modulo 1.

VETTORI PARALLELI (o aventi la stessa direzione): vettori appartenenti alla stessa retta per O.

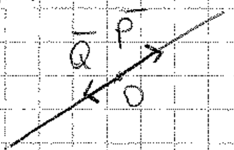


paralleli e concordi



paralleli e discordi

CASO PARTICOLARE:



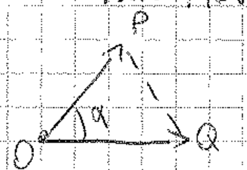
$|OP| = |OQ|$

OP e OQ sono uno l'opposto dell'altro

$\vec{OP} = -\vec{OQ}$ oppure $\vec{OQ} = -\vec{OP}$

ANGOLO TRA 2 VETTORI: caso generale: $\bar{u} = OP$, $\bar{v} = OQ$

NON PARALLELI (OPQ vertici di un triangolo)



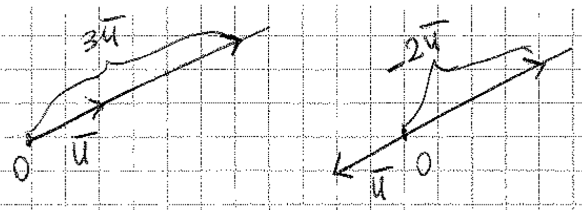
Si dice che $\bar{u}, \bar{v}$ formano un angolo α se α è la misura in radianti dell'angolo $P\hat{O}Q$ ⇒ notazione $\widehat{\bar{u}\bar{v}}$

CASI PARTICOLARI: $\bar{u}$ e $\bar{v}$ paralleli e concordi: $\widehat{\bar{u}\bar{v}} = 0$

" " " discordi: $\widehat{\bar{u}\bar{v}} = \pi$

⇒ in tutti i casi $0 \leq \widehat{\bar{u}\bar{v}} \leq \pi$

Caso particolare: $\bar{u}$ e $\bar{v}$ si dicono **ORTOGONALI** se $\widehat{\bar{u}\bar{v}} = \frac{\pi}{2}$



Nel caso $a=0$ oppure $\bar{u}=\bar{0}$ per def. $0\bar{u}=\bar{0}$ $\forall \bar{u}$

$a\bar{0}=\bar{0}$ $\forall a \in \mathbb{R}$

Osservazioni: ① $1\bar{u}=\bar{u}$ ② $(-1)\bar{u}=-\bar{u}$

PROPRIETÀ ① $b(a\bar{u})=(ba)\bar{u}$ $\forall a,b \in \mathbb{R}, \forall \bar{u}$ PROPR. ASSOCIATIVA

② $a(\bar{u}_1+\bar{u}_2)=a\bar{u}_1+a\bar{u}_2$ $\forall a, \forall \bar{u}_1, \bar{u}_2$ PROPR. DISTRIBUTIVA

③ $(a+b)\bar{u}=a\bar{u}+b\bar{u}$ $\forall a,b \in \mathbb{R}, \forall \bar{u}$

COMBINAZIONE LINEARE DI VETTORI (C. l.)

Siano $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_r$ vettori e $a_1, a_2, \dots, a_z$ numeri reali

Def Si dice combinazione lineare $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_r$ con coefficienti $a_1, a_2, \dots, a_z$ il vettore $a_1\bar{u}_1+a_2\bar{u}_2+\dots+a_n\bar{u}_r$

PRODOTTO SCALARE

Definizioni: ① vettori non nulli

$\bar{u}\cdot\bar{v}=|\bar{u}||\bar{v}|\cos \bar{u}\hat{}\bar{v}$

② $\bar{u}=0$ oppure $\bar{v}=0 \rightarrow \bar{u}\cdot\bar{v}=0$

Altre notazioni: $<\bar{u},\bar{v}>$; $<\bar{u}|\bar{v}>$

ANNULLAMENTO del prodotto scalare

$\bar{u}\cdot\bar{v}=0$ → $\bar{u}=\bar{0}$ oppure $\bar{v}=0$
→ $\bar{u}$ e $\bar{v}$ ORTOGONALI

OSSERVAZIONI ① $\bar{u}\cdot\bar{v}>0$ se e solo se $\bar{u}\hat{}\bar{v}<\frac{\pi}{2}$

② $\bar{u}\cdot\bar{v}<0$ se e solo se $\bar{u}\hat{}\bar{v}>\frac{\pi}{2}$

③ $\bar{u}\cdot\bar{u}=|\bar{u}|^2$ $\left(|\bar{u}|=\sqrt{\bar{u}\cdot\bar{u}}\right)$

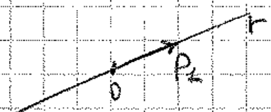
PROPRIETÀ ① $\bar{u}\cdot\bar{v}=\bar{v}\cdot\bar{u}$ $\forall \bar{u},\bar{v}$

② $\bar{u}\cdot(\bar{v}_1+\bar{v}_2)=(\bar{u}\cdot\bar{v}_1)+(\bar{u}\cdot\bar{v}_2)$

③ $\bar{u}\cdot(a\bar{v})=(a\bar{u})\cdot\bar{v}=a(\bar{v}\cdot\bar{u})$ $a\in\mathbb{R}$

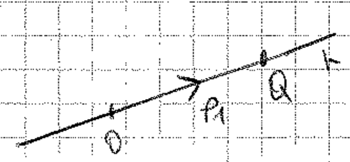
VETTORI e COMPONENTI

(1) $\bar{u}_1 \neq \bar{0}$ $\quad \bar{u} = OP_1$



$a \in \mathbb{R} \longrightarrow a\bar{u}_1 \parallel$ ad $\bar{u}$, cioè appartiene a retta r.

- Sia $\bar{v}$ un vettore OQ su r

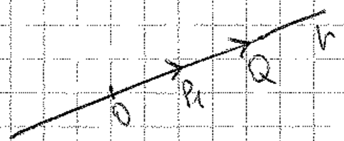


$\exists\, a \in \mathbb{R} \;/\; OQ = a\,OP_1$

$|a| = \dfrac{|OQ|}{|OP_1|}$

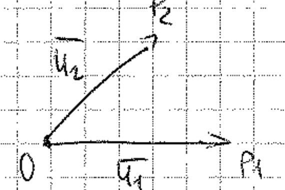
C'è una corrispondenza biunivoca tra numeri reali e vettori sulla retta applicati in O e quindi una corrispondenza biunivoca tra numeri reali e punti della retta.

- Sia $\bar{u}_1$ un versore: $|a| = |OQ|$



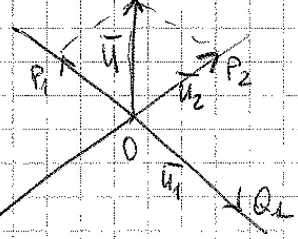
a = ascissa di Q nel riferimento cartesiano su r con origine O e unità di misura $= |OP_1|$

(2) $\bar{u}_1, \bar{u}_2$ siano 2 vettori non paralleli



(a, b) coppia ordinata di numeri reali e sia $\bar{u} = a\bar{u}_1 + b\bar{u}_2 \Rightarrow \bar{u}$ appartiene al piano individuato da $\bar{u}_1$ e $\bar{u}_2$

VICEVERSA Supponiamo di avere un vettore $\bar{v}$ nel piano di $\bar{u}_1$ e $\bar{u}_2$.
Allora esiste una coppia di numeri (a, b) per cui $\bar{u} = a\bar{u}_1 + b\bar{u}_2$



$\bar{u} = OP$

$\exists\, a \mid OP_1 = a\bar{u}_1 \qquad \exists\, b \mid OP_2 = b\bar{u}_2$

$\Longrightarrow \bar{u} = OP = OP_1 + OP_2 = a\bar{u}_1 + b\bar{u}_2$

CONCLUSIONE: Dati 2 vettori $\bar{u}_1, \bar{u}_2$ non $\parallel$ è possibile stabilire una corrispondenza biunivoca tra coppie ordinate di numeri reali (a, b) e vettori del piano ovvero una c.b. tra coppie di reali e punti del piano

Prodotto per numeri reali

$k \in \mathbb{R}$ $\quad \bar u = a\bar i + b\bar j + c\bar k$

$k\bar u = k(a\bar i+b\bar j+c\bar k) = k(a\bar i)+k(b\bar j)+k(c\bar k) = (ka)\bar i+(kb)\bar j+(kc)\bar k$

$\Rightarrow$ le componenti di $k\bar u$ sono (ka, kb, kc)

Prodotto scalare

$\bar u\cdot\bar v = (a\bar i+b\bar j+c\bar k)\cdot(a'\bar i+b'\bar j+c'\bar k) = (a\bar i)(a'\bar i+b'\bar j+c'\bar k)+(b\bar j)(a'\bar i+b'\bar j+c'\bar k)$
$+ (c\bar k)(a'\bar i+b'\bar j+c'\bar k) = aa'+bb'+cc'$

Essendo $a\bar i\cdot b\bar j = 0$ ecc. essendo perpendicolari

$\bar i\cdot\bar i = \bar i^2 = 1$ ecc. essendo versori

$$\boxed{\Rightarrow |\bar u| = \sqrt{\bar u\cdot\bar u} = \sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$\bar u\cdot\bar v = |\bar u||\bar v|\cos \widehat{\bar u \bar v}$

Se $\bar u\neq\bar 0$, $\bar v\neq\bar 0$

$$\boxed{\cos\widehat{\bar u\bar v} = \frac{\bar u\cdot\bar v}{|\bar u||\bar v|} = \frac{aa'+bb'+cc'}{\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right)\left(\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}\right)}}$$

Prodotto vettoriale

$\bar i\times\bar i = \bar 0$

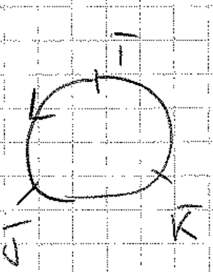
$\bar i\times\bar j = \bar k \qquad \bar j\times\bar i = -\bar k$

$\bar i\times\bar k = -\bar j \qquad \bar k\times\bar i = \bar j$

$\bar j\times\bar j = 0$

$\bar j\times\bar k = \bar i \qquad \bar k\times\bar j = -\bar i$

$\bar k\times\bar k = 0$



$\bar i\times\bar j = \bar k$

$\bar j\times\bar i = -\bar k$

$\bar u\times\bar v = (a\bar i+b\bar j+c\bar k)\times(a'\bar i+b'\bar j+c'\bar k) = (a\bar i)\times(a'\bar i+b'\bar j+c'\bar k)+(b\bar j)\times(a'\bar i+b'\bar j$
$+c'\bar k)+(c\bar k)\times(a'\bar i+b'\bar j+c'\bar k) = ab'\bar k - ac'\bar j - ba'\bar k + bc'\bar i +$
$+ ca'\bar j - cb'\bar i = (bc'-cb')\bar i + (ca'-ac')\bar j + (ab'-ba')\bar k$

Usando il determinante
$$\begin{vmatrix} \bar i & \bar j & \bar k \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} = (bc'-cb')\bar i - (ac'-ca')\bar j + (ab'-ba')\bar k$$
$$= \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}\bar i - \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}\bar j + \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}\bar k$$

Es $\bar{u}=(2,1,1)$ $\bar{v}(0,3,-1)$ $\bar{w}(-1,4,0)$

> Calcolare $(\bar{u}\times\bar{v})\times\bar{w}$ e di verificare che si ottiene un vettore complanare con $\bar{u}$ e $\bar{v}$.

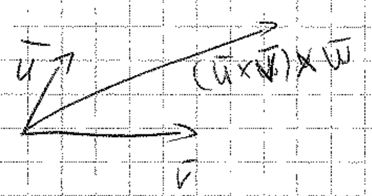
$$\bar{u}\times\bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (-1-3)\,\bar{i} - (-2-0)\,\bar{j} + (6+0)\,\bar{k} = -4\bar{i} + 2\bar{j} + 6\bar{k}$$

$$(\bar{u}\times\bar{v})\times\bar{w} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -4 & +2 & +6 \\ -1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = (-24)\,\bar{i} - (6)\,\bar{j} + (-16+2)\,\bar{k} = -24\bar{i} - 6\bar{j} - 14\bar{k}$$

Per verificare la complanarità si effettua il prodotto triplo:

$[(\bar{u}\times\bar{v})\times\bar{w}] \cdot \bar{u}\times\bar{v} =$

$$= \begin{vmatrix} -24 & -6 & -14 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (-1-3)\cdot(-24) - (-2)\cdot(-6) + (6)\cdot(-14) = 96 - 12 - 84 = 0$$



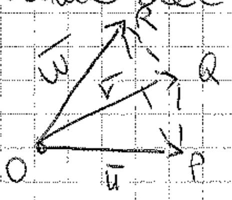
È possibile esprimere $(\bar{u}\times\bar{v})\times\bar{w}$ come combinazione lineare di $\bar{u}$ e $\bar{v}$, cioè esistono 2 numeri reali a, b per cui risulta

$(\bar{u}\times\bar{v})\times\bar{w} = a\bar{u} + b\bar{v}$

$(-24,-6,-14) = a(2,1,1) + b(0,3,-1)$

$$\begin{cases} -24 = 2a + 0 \\ -6 = a + 3b \\ -14 = a - b \end{cases} \quad \begin{cases} a = -12 \\ b = 2 \\ -14 = -12 - 2 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{matrix} a = -12 \\ b = 2 \end{matrix}$$

> Si controlli che $\bar{u}, \bar{v}$ e $\bar{w}$ non siano complanari. Si calcoli il volume del tetraedro formato dai 3 vettori:



$$(\bar{u}\times\bar{v})\cdot\bar{w} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ -1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 4\cdot 2 + 1 + 3\cdot 1 = +12$$

volume del parallelepipedo = 3 volume piramide = 6 volume tetraedro

Volume $= \frac{1}{6}\,12 = +2$ $\quad \cos \bar{u}\hat{}\bar{v} = \frac{3-1}{\sqrt{6}\sqrt{10}} = \frac{2}{\sqrt{60}} = \frac{2}{2\sqrt{15}} = \frac{1}{\sqrt{15}}$

$\bar{u}\hat{}\bar{v} = \arccos \frac{1}{\sqrt{15}}$

ES: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad A_{12} = - \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$ $\quad A_{31} = + \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}$

somme esponenti dispari $\rightarrow -1$ $\qquad$ pari $\rightarrow +1$

PRIMO TEOREMA di LAPLACE

Data A ... e fissata una riga (colonna) di A, il determinante di A è la somma dei prodotti degli elementi della riga (colonna) per i rispettivi complementi algebrici.

- Se la riga scelta è l'i-esima

$$\det A = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \dots + a_{in} A_{in}$$

- Se la colonna scelta è la j-esima

$$\det A = a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \dots + a_{nj} A_{nj}$$

ES.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det A$ (riga) $= 1 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \end{vmatrix} =$

$\det A$ colonna $= 1 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \end{vmatrix} - 0 + 0 + 1 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \cancel{-6} + \cancel{6} + \cancel{4} + \cancel{2} + 1 - 8 = -2$

Conviene calcolare il determinante scegliendo la riga o la colonna con più zeri.

OSSERVAZIONI:

Def: Sia M una matrice $m \times n$. Si dice TRASPOSTA di M la matrice ^tM $n \times m$ ottenuta scambiando ordinatamente righe con colonne.

$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ 2×3 $\qquad$ $^tM = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ 3×2

Ogni matrice $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ ammette un opposto, indicato con $-A$

$$-A = (-a_{ij})$$

$$A + (-A) = (-A) + A = 0$$

PRODOTTO PER SCALARI

$A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,n}$, $k \in \mathbb{R}$

Def Si dice prodotto di k per A la matrice indicata con kA

$$kA = (k a_{ij}) \quad i = 1, 2 \dots m \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Esempio

$$3 \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 15 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Proprietà

- $1A = A$
- $h(kA) = (hk)A$
- $k(A+B) = kA + kB$
- $(h+k)A = hA + kB$

PRODOTTO DI MATRICI

$A = (a_{ij})$ $m \times n$ $B = (b_{ij})$ $p \times q$

Si può calcolare il prodotto AB se e solo se $n = p$ (n° di colonne di A = n° di righe di B). In tale caso $C = AB$ è una matrice $m \times q$ così definita:

$C_{ij} \Rightarrow a_{i1}\ a_{i2} \dots a_{in}$

$$c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{in} b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

2×3 $\qquad$ 3×4

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 11 & 4 \\ 1 & -6 & 26 & 7 \end{pmatrix}$$

2×4

BA non esiste

3×4 $\quad 2 \times 3$

Allora $B_1 = B_1 I = B_1(AB_2) = (B_1A)B_2 = IB_2 = B_2$

Se A è invertibile, l'unica matrice B per cui $AB = BA = I$ si chiama MATRICE INVERSA di A e si indica con A^{-1}

$(AA^{-1} = A^{-1}A = I)$

PROPOSIZIONE: Siano P, Q matrici $n \times n$ invertibili. La matrice prodotto è invertibile e si ha:

$(PQ)^{-1} = Q^{-1}P^{-1}$

Dim: Calcoliamo $(PQ)(Q^{-1}P^{-1}) \overset{?}{=} I$

$(PQ)(Q^{-1}P^{-1}) = P(QQ^{-1})P^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I$

Analogamente: $(Q^{-1}P^{-1})(PQ) = I$

OSSERVAZIONI: Se A è invertibile anche A^{-1} lo è e $(A^{-1})^{-1} = A$

CRITERI DI INVERTIBILITÀ. CALCOLO DELL'INVERSA DI UNA MATRICE

1) Se A invertibile, $AA^{-1} = I$, $\det(AA^{-1}) = \det I$

$(\det A)(\det A^{-1}) = 1$

$\Rightarrow$ Condizione necessaria affinché A sia invertibile: $\det A \neq 0$

Se A è invertibile, $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$

$\Rightarrow$ la condizione $\det A \neq 0$ è anche condizione sufficiente.

Costruiamo la matrice $A^* = (A_{ij})$, dove A_{ij} è il C.A. di a_{ij}.

AFFERMO $\boxed{A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\, {}^t(A^*)}$

dim:

$$AA^{-1} = A\left[\frac{1}{\det A}\, {}^t(A^*)\right] = \frac{1}{\det A}\left(A\, {}^t(A^*)\right) = \frac{1}{\det A}(C_{ij})$$

$C_{ij} = \det A$ (per il I teorema di Laplace)

$C_{ij} = 0$, $i \neq j$ (per il II teor. di Laplace)

$$= \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} \det A & 0 & 0 \\ 0 & \det A & 0 \\ 0 & 0 & \det A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Con calcoli analoghi: $\left[\dfrac{1}{\det A}\, {}^t(A^*)\right] A = I \Rightarrow \boxed{A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\, {}^t(A^*)}$

Caso particolare $m=n$, $\det A \neq 0$, $AX=B$;

esiste l'inversa di A, A^{-1}

$A^{-1}(AX)=A^{-1}B \quad (A^{-1}A)X=A^{-1}B \quad IX=A^{-1}B$

$$\boxed{X=A^{-1}B}$$

$$x_i = \frac{1}{\det A}\left(A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + \dots + A_{ni}b_n\right) = \frac{\tilde{A}_i}{\det A}$$

$\tilde{A}_i$ = determinante della matrice che si ottiene da A sostituendo la colonna i-esima con la colonna dei termini noti.

$$\begin{cases} 2x+y=1 \\ x-y=0 \end{cases} \qquad A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & 1 \\ b_2 & -1 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & b_1 \\ 1 & b_2 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$$

TRASFORMAZIONI ELEMENTARI SULLE RIGHE (COLONNE) DI UNA MATRICE

$A \in \mathbb{R}^{m,n}$ ($\mathbb{C}$)

$R_1, R_2, \dots, R_m$ righe di A

Tre tipi di trasf. elementari:

1. $R_i \to R_i + a R_j \quad a \in \mathbb{R} \quad i \neq j$
2. $R_i \leftrightarrow R_j \quad i \neq j$
3. $R_i \to k R_i \quad k \in \mathbb{R},\ k \neq 0$

Es.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 + 2R_3} \begin{pmatrix} 13 & 2 & 17 \\ -1 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to 5R_2} \begin{pmatrix} 13 & 2 & 17 \\ -5 & 20 & 25 \\ 6 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

PROPOSIZIONE: Ogni t.e. sulle righe di A trasforma A in una matrice $A' = PA$ dove A' è la matrice invertibile che si ottiene applicando la trasformazione alla matrice identica (opportuna).

OSSERVAZIONE: la definizione ha senso perché tutte le matrici ridotte ~A hanno lo stesso rango.

SISTEMI LINEARI

È dato un sistema lineare di m eq. in n incognite $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$AX=B$$

A matrice dei coefficienti: a_{ij} = coeff. di x_j nella i-esima eq.

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ matrice delle incognite

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ matrice dei termini noti

Si chiama matrice completa del sistema la matrice $m\times(n+1)$ che si ottiene da A aggiungendo la colonna dei termini noti. Simbolo $(A|B)$

ES $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + 6x_3 = 0 \end{cases}$ $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & +1 \\ -1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & +1 & 1 \\ -1 & 0 & 6 & 0 \end{array}\right)$$

1° CASO: SISTEMI RIDOTTI

Def Un sistema lineare $AX=B$ si dice ridotto se A è ridotta (per righe)

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} \\ * * * * \end{pmatrix}} \qquad \left(\begin{array}{c|c} \\ x x x x & b_m \end{array}\right) \longrightarrow 0 = b_m$$

A B

Esempio: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ -x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ kx_3 = h \end{cases}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & k & 0 \end{pmatrix}$ $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$

Il sistema è ridotto per ogni $k \in \mathbb{R}$

$(PA)X_0 = P(AX_0) = PB$

Viceversa se $\tilde{X}_0$ è soluzione di $(PA)X = PB$, cioè $(PA)\tilde{X}_0 = PB$, allora:

$P^{-1}(PA)\tilde{X}_0 = P^{-1}(PB)$

$(P^{-1}P)A\tilde{X}_0 = (P^{-1}P)B$

$I(A\tilde{X}_0) = IB \longrightarrow A\tilde{X}_0 = B \Rightarrow \tilde{X}_0$ è anche soluzione di $AX=B$

APPLICAZIONI: $AX=B$ Consideriamo una t.e. sulle righe di A e di $(A|B)$. Questa operazione trasforma il sistema in uno equivalente. Scegliendo le t.e. in modo da "ridurre" la matrice A, si ottiene un sistema $A'X=B'$ ridotto con le stesse soluzioni di $AX=B$.

Esempio
$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ -x+3y+z=0 \\ 2x-y=3 \end{cases} \qquad X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2=R_2+R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x-y=3 \\ 4y=1 \end{cases}$$

$y=\frac{1}{4} \quad 2x=3+\frac{1}{4} \rightarrow x=\frac{13}{8} \quad z=x+y-1=\frac{1}{4}+\frac{13}{8}-1=\frac{7}{8}$

Il sistema ha un'unica soluzione $\left(\frac{13}{8}, \frac{1}{4}, \frac{7}{8}\right) \Rightarrow X\begin{pmatrix} \frac{13}{8} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{7}{8} \end{pmatrix}$

1° caso $4a-5\neq 0 \Rightarrow a\neq \frac{5}{4} \Rightarrow \rho(A)=3=\rho(A|B)$

$n=\rho(A)=3 \Rightarrow$ una sola soluzione $\Rightarrow$ soluzione nulla.

2° caso $a=\frac{5}{4} \Rightarrow \rho(A)=\rho(A|B)=2<n=3$

$\infty^{3-2}=\infty^1$ soluzioni

Risolviamo il sistema ridotto equivalente:

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ -y+\frac{3}{4}z=0 \\ 0=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} y=-\frac{3}{4}z \\ x=-\frac{1}{4}z \end{array} \qquad X=\begin{pmatrix} -\frac{1}{4}t \\ -\frac{3}{4}t \\ t \end{pmatrix} \quad \forall t\in\mathbb{R}$$

Conclusioni $\boxed{\text{IMPORTANTE}}$

Proposizione: Sia A una matrice quadrata $n\times n$. Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

1. A è invertibile
2. $\rho(A)=n$
3. i sistemi $AX=B$ hanno una e una ~~sola~~ soluzione $\forall B$
4. $\det A\neq 0$.

Potenza di matrice quadrata

$A\in\mathbb{R}^{n,n}$

$A^k=A\cdot A \qquad A^3=A\cdot A\cdot A$

Caso particolare matrice diagonale:

$$D=\begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & \ddots\ d_n \end{bmatrix} \rightarrow D^2=\begin{bmatrix} d_1^2 & 0 \\ 0 & \ddots\ d_n^2 \end{bmatrix} \rightarrow D^n=\begin{bmatrix} d_1^n & 0 \\ 0 & \ddots\ d_n^n \end{bmatrix}$$

Esempio:

$A=\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \quad A^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ matrice nilpotente

$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \quad A^2=\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

Se $B^2=B$ matrice idempotente

Proprietà:

- $(A+B)^2\neq A^2+2AB+B^2$ non vale prop. commutativa tra matrici!

$\in\mathbb{R}^{n,n}$ $\searrow (A+B)(A+B)=A^2+AB+BA+B^2 \quad AB\neq BA$ in generale!

(2) $R_i \leftrightarrow R_j$ scambio $\rightarrow$ CAMBIA SEGNO il det

(3) $R_i \rightarrow a R_i$ moltiplico per $a \in \mathbb{R}$ $\rightarrow$ moltiplico per a il det

ES. $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ $a \in \mathbb{R}$ $\rho(A) = ?$

$\downarrow R_1 \leftrightarrow R_2$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 = R_3 - 2R_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & -2a & 0 & a \end{pmatrix}$

Se $a = 0$ $\Rightarrow$ $\rho(A) = 2$

Se $a \neq 0$ $\Rightarrow$ $\rho(A) = 3$

SISTEMI LINEARI OMOGENEI

$AX = 0$ $\quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Proposizione:

(1) Siano X', X'' 2 soluzioni, allora anche $X' + X''$ è soluzione.

Dim: $AX' = 0$ $\quad AX'' = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow A(X' + X'') = AX' + AX'' = 0 + 0 = 0$

$X' + X''$ è soluzione.

(2) Se X' è una soluzione anche kX' è soluzione, $\forall k \in \mathbb{R}$.

Dim: $AX' = 0$ per ipotesi

$A(kX') = k(AX') = k0 = 0$

SISTEMI LINEARI (risolubili) e SISTEMI OMOGENEI ASSOCIATI

$AX = B$ sia un sistema con (almeno) una soluzione X_0.

Si chiama omogeneo associato il sistema $AX = 0$

Si dimostra che le soluzioni di $AX = B$ sono tutte e sole le $X = X_0 + Z$, con Z soluzione di $AX = 0$.

Dim

1° Se Z_0 una soluzione di $AX = 0$, allora $X_0 + Z_0$ è soluzione di $AX = B$

$A(X_0 + Z_0) = AX_0 + AZ_0 = B + 0 = B$

2° Se X_1 soluzione di $AX = B$

$AX_1 = B \Rightarrow AX_1 - AX_0 = 0 \Rightarrow A(X_1 - X_0) = 0$ $\quad Z_0 = X_1 - X_0$ è una soluzione di $AX = 0$ $\quad X_1 = X_0 + Z_0$

$AX_0 = B$

(2) Se $\rho(A) = \rho(A|B) = n$ (numero delle righe di x) la soluzione è UNICA

Se $\rho(A) = \rho(A|B) < n$ ci sono infinite soluzioni $n-\rho(A)$ righe di x si possono scegliere arbitrariamente. Per ogni scelta vengono determinate in modo univoco le righe rimanenti.

MATRICE INVERTIBILE Calcolo di A^{-1}

A matrice quadrata $n \times n$

Sono condizioni equivalenti: (1) A invertibile
(2) $\det A \neq 0$
(3) $\rho(A) = n$

Consideriamo una matrice A invertibile. Dire che $AA^{-1} = I$ vuol dire che A^{-1} è una soluzione di $AX = I$, eq. matriciale del tipo visto.

Osservazione: $\rho(A) = n$ per ipotesi
$\rho(A|I) = ?$

$(A|I)$ è una matrice $n \times n$ ridotta con rango n.
Il Teorema di R-C. ~~afferma~~ conferma che $AX = I$ è risolubile con una sola soluzione che è proprio A^{-1} matrice inversa.

L'inversa di A^{-1} si può trovare col "metodo di riduzione"

Esempio $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $(A|I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 = R_2 - R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$

$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = (1\ 0) \\ -x_1 = (-1\ 1) \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = (1\ -1) \\ x_2 = (1\ 0) - (2\ -2) \end{cases}$ $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

SPAZI VETTORIALI REALI o su $\mathbb{R}$ (gli spazi vettoriali non possono essere vuoti!)

Def Un insieme V si dice spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ (o reale) se in esso sono definite 2 operazioni, dette somma (+) e prodotto per numeri reali.

$+ : V \times V \longrightarrow V$

$\cdot : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$

prodotto cartesiano: quando si parla di insiemi, è l'insieme delle coppie degli elementi dei 2 insiemi.

(1) Proprietà commutativa della somma:
$\forall v, v' \in V : v + v' = v' + v$

(2) Proprietà associativa della somma:
$\forall v, v', v'' \in V : (v + v') + v'' = v + (v' + v'')$

(3) Esiste un elemento di V (0_V) che è neutro rispetto alla somma. $\forall v \in V,\ v + 0_V = 0_V + v = v$

(4) Per ogni $v \in V$, esiste un vettore $(-v)$ per cui: $v + (-v) = (-v) + v = 0_V$
$-v$ si dice opposto di v.

(5) $\forall v \in V : 1v = v$.

(6) $\forall v \in V;\ \forall a, b \in \mathbb{R} : a(bv) = (ab)v$

(7) $\forall a \in \mathbb{R},\ \forall v, v' \in V : a(v + v') = av + av'$

(8) $\forall a, b \in \mathbb{R},\ \forall v \in V : (a+b)v = av + bv$

Dim: unicità dell'elemento neutro rispetto alla somma

Supponiamo che ne esistano 2: $0_V, 0'_V$

$$0_V + 0'_V = \begin{cases} 0'_V \\ 0_V \end{cases} \Rightarrow 0'_V = 0_V$$

Dim: unicità dell'opposto di un vettore

Supponiamo che esista un vettore $v \in V$ che ammetta due opposti w e w'

$v + w = w + v = 0$

$v + w' = w' + v = 0$

$w = w + 0_V = w + (v + w') = (w + v) + w' = 0_V + w' = w'$

Osservazione: Molto spesso si identificano $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n,1}, \mathbb{R}^{1,n}$

4. V = insieme dei vettori dello spazio applicati in un punto con le operazioni viste (regola parallelogramma, ... ecc)

5. $V = \mathbb{R}[x]$ = insieme dei polinomi nella variabile x a coefficienti reali.

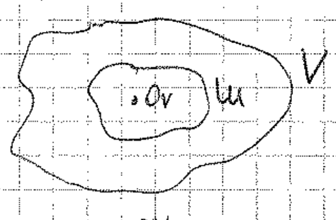
Operazioni: somma di polinomi e moltiplicazione per reali

6. $V = \mathcal{F}(I)$ = insieme delle funzioni reali di variabile reale definite su un dato intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$

Operazioni: somma di funzioni e moltiplicazioni per reali.

SOTTOSPAZI

Sia V uno spazio vettoriale



Def Sia W un sottoinsieme di V. Allora W si dice <u>sottospazio</u> di V se è uno spazio vettoriale rispetto alle operazioni definite in V e ristrette a W.

Proposizione:

W è un sottospazio di V <u>se e solo se</u> valgono le proprietà:

1. $0_V \in W$
2. $\forall w_1, w_2 \in W, \; w_1 + w_2 \in W$
3. $\forall a \in \mathbb{R}, \; \forall w \in W, \; aw \in W$

Esempi:

1. $V = \mathbb{R}^3$

$W = \{(x,y,0),\; x,y \in \mathbb{R}\}$ W è un s.s. di $\mathbb{R}^3$

1 - $(0,0,0) \in W$

2 - $(x,y,0) + (x',y',0) = (x+x', y+y', 0+0) \in W$

3 - $a \in \mathbb{R}$ $w = (x,y,0)$

$aw = a(x,y,0) = (ax, ay, a0) = (ax, ay, 0)$

Dim

$$M = \underbrace{\frac{M}{2} + \frac{{}^tM}{2}}_{S} + \underbrace{\frac{M}{2} - \frac{{}^tM}{2}}_{A}$$

$$t\left(\frac{M}{2} + \frac{{}^tM}{2}\right) = \frac{{}^tM}{2} + \frac{M}{2}$$ pari, quindi è simmetrica.

ES

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \frac{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 4 \end{pmatrix} S \qquad \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Teorema di Kronecker

$A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ → spazio

$\rho(A) = p$

⇕

∃ un minore di A di ordine p con det. non nullo

AND tutti i minori di ordine $(p+1)$ hanno det. nullo

Le operazioni elementari non cambiano il rango.

- $A \in \mathbb{K}^{m,n}$

$\longrightarrow \rho(A) = n \iff \det \neq 0$

- data A' ottenuta da A riducendo con solo oper. elem. tipo c.l. oppure scambio (no moltipl. x scalare)

$\Rightarrow \det(A)$ è uguale a meno del segno al prodotto degli elementi speciali (elementi che sotto hanno tutti 0)

Sistemi lineari

teorema $A, B \in \mathbb{K} \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $\mathbb{K}^{m \times p}$ rispettive

$M(A|B)$ $M(A'|B')$

$\Rightarrow AX = B$ equivale ad $A'X = B'$

(1.2) $u', u \in W_1+W_2$? $\Rightarrow u+u' \in W_1+W_2$

$u = w_1+w_2$
$u' = w_1'+w_2'$
$$\Rightarrow u+u' = (w_1+w_2)+(w_1'+w_2') = \underbrace{(w_1+w_1')}_{\in W_1}+\underbrace{(w_2+w_2')}_{\in W_2}$$

(1.3) $u \in W_1+W_2$; $k \in \mathbb{R}$? $\Rightarrow ku \in W_1+W_2$

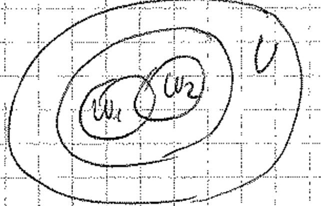
$u = w_1+w_2 \quad w_1 \in W_1,\ w_2 \in W_2$

$$ku = k(w_1+w_2) = \underbrace{(kw_1)}_{\in W_1}+\underbrace{(kw_2)}_{\in W_2}$$

(2) $u \in W_1 \Rightarrow u = u + 0_V$ (0_V pensato in W_2)
$\Rightarrow u \in W_1+W_2$

Analogamente, se $u \in W_2$, $u = 0_V + u$ ecc.

(3)



$\forall\ w \in W_1,\ w' \in W_2$

$w + w'$ = somma di 2 vettori che stanno in $U \Rightarrow w+w' \in U$

Consideriamo i seguenti casi:

(1) V = {vettori dello spazio}

W_1, W_2 = {insieme dei vettori di 2 rette distinte}

W_1+W_2 = {vettori del piano π contenente le rette}

Ogni vettore di π si può decomporre in modo unico come somma di un vettore su una retta e di un vettore sull'altra

(2) $V=\mathbb{R}^3$

$W_1 = \{(a,b,0),\ a,b \in \mathbb{R}\}$ sottospazi

$W_2 = \{(0,c,d),\ c,d \in \mathbb{R}\}$

$$W_1+W_2 = \mathbb{R}^3 : (\alpha,\beta,\gamma) = \underbrace{(\alpha,\beta,0)}_{\in W_1}+\underbrace{(0,0,\gamma)}_{\in W_2}$$

Osservazione: $(\alpha,\beta,\gamma) = \underbrace{(\alpha,0,0)}_{\in W_1}+\underbrace{(0,\beta,\gamma)}_{\in W_2}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 37 di 139

Esempio: $V = \mathbb{R}^n$

Consideriamo i vettori $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$. 1 in posizione i-esima $i = 1, 2, \dots, n$.

$\boxed{\text{Se } n=3}$ $e_1 = (1,0,0)$ $e_2 = (0,1,0)$ $e_3 = (0,0,1)$

$L(e_1, e_2) = \{a_1 e_1 + a_2 e_2\} = \{a_1(1,0,0) + a_2(0,1,0)\} =$

$= \{(a_1, a_2, 0),\ a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$

$L(e_1, e_2, e_3) = \mathbb{R}^3$

Def V si dice $\boxed{\text{finitamente generato}}$ se in V si può trovare un numero finito di vettori $v_1, v_2, \dots, v_r$ che generano V, cioè:

$$V = L(v_1, \dots, v_r)$$

Es:
1. vettori dello spazio
2. $V = \mathbb{R}^3$ (o più in generale $\mathbb{R}^n$)

$\mathbb{R}^3 = L(e_1, e_2, e_3)$ $\mathbb{R}^n = L(e_1, e_2, \dots, e_n)$

Osservazioni ed esempi:

Anche in spazi vettoriali non finitamente generati esistono sottospazi finitamente generati.

Es. In ogni V se si considerano r vettori

$W = L(v_1, \dots, v_r)$ è f.g. per definizione

(2) $V = \mathbb{R}[x]$ è sottospazio f.g. ad esempio $W = \mathbb{R}_d[x]$

$w \in W$ $w = p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_d x^d =$ c.l. di $1, x, x^2, \dots, x^d$

$$W = L(1, x, x^2, \dots, x^d)$$

(3) Consideriamo le eq. differenziali lineari a coeff. costanti omogenee del 2° ordine

$$y'' + p y' + q y = 0 \qquad y = y(x)$$

le soluzioni sono della forma:

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

Caso $r=1$ Consideriamo l'uguaglianza

(*) $a_1 v_1 = 0_V$

se $v_1 = 0_V$ (*) vera $\forall a$

se $v_1 \neq 0_V$ (*) vera solo se $a_1 = 0$

$\Rightarrow \{v_1\}$ è libero se e solo se $v_1 \neq 0_V$

Esempi

1) $V = \{$vettori dello spazio$\}$

$\{v_1, v_2\}$ è libero se $a_1 v_1 + a_2 v_2 = 0_V \Rightarrow a_1 = a_2 = 0$

$v_1 = 0_V$ vettori l.d., idem se $v_2 = 0_V$

$v_1, v_2 \neq 0_V \Rightarrow a_1 v_1 = -a_2 v_2$

I vettori sono l.i $\Leftrightarrow$ non sono paralleli.

2) $V = \mathbb{R}^n$

$e_1, e_2, \dots, e_n$ sono l.i

$a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n = 0_V \Rightarrow a_2 = \dots = a_n = 0_V$

$a_1(1,0,\dots,0) + a_2(0,1,\dots,0) + \dots + a_n(0,0,\dots,1) = (0,0,\dots,0)$

$(a_1, a_2, \dots, a_n) = (0,0,\dots,0)$

Proposizione 1 Dato uno sp. vettoriale V se $v_1, \dots, v_r \in V$ sono l.d., allora $v_1, \dots, v_r, u$ sono l.d., $\forall u \in V$.

Dim Per ipotesi esistono r numeri reali $a_1, \dots, a_r$ non tutti nulli per cui:

(*) $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_r v_r = 0_V$

(*) si può riscrivere come $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_r v_r + 0 \cdot u = 0_V$

Si ottiene una c.l. di $v_1, v_2, \dots, v_r, u$ con coeff non tutti nulli

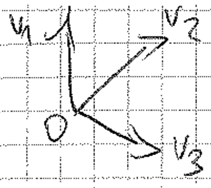
Proposizione 2 Siano dati in V r vettori $v_1, v_2, \dots, v_r$. I vettori sono l.i se:

1) $v_1 \neq 0_V$

2) nessuno dei vettori $v_2, \dots, v_r$ è c.l dei precedenti.

$\forall i = 2, \dots, r$ non esistono $\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}$ per cui

$v_i = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_{i-1} v_{i-1}$



$v \in L(v_1, v_2, v_3)$

$v = a_1v_1 + a_2v_2 + 0v_3 = 0v_1 + b_2v_2 + b_3v_3$

Cenno di dim: Portando a 1° membro

$(a_1 - b_1)v_1 + \dots + (a_r - b_r)v_r = 0_V \Rightarrow a_i - b_i = 0, \forall i$

BASE di UNO SPAZIO VETTORIALE. DIMENSIONE

Def Si dice che l'insieme ordinato $(v_1, v_2, \dots, v_r)$ di vettori di uno spazio vettoriale V ne costituisce una base se:

1. $v_1, \dots, v_r$ sono l.i.
2. $v_1, \dots, v_r$ generano V.

Corollario della prop 3: Se $(v_1, \dots, v_r)$ è una base per V, ogni vettore $v \in V$ si scrive in modo unico come c.l. di $v_1, \dots, v_r$. Esistono cioè e sono univocamente determinati r numeri reali $a_1, \dots, a_r$ per cui:

$v = a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_rv_r$. I numeri $a_1, a_2, \dots, a_r$ (nell'ordine) si dicono coordinate della base $(v_1, v_2, \dots, v_r)$

Data una base in V esiste quindi una c.l. biunivoca tra V e $\mathbb{R}^r$ $(a_1, a_2, \dots, a_r) \Leftrightarrow (a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_rv_r)$

Questa corrispondenza biunivoca "conserva" le operazioni.

LEMMA di STEINITZ

Sia V uno sp. vettoriale f.g. Siano dati in V 2 insiemi di vettori:

1. $v_1, \dots, v_r$ l.i.
2. $u_1, \dots, u_s$ generatori per V

Allora: $s \geq r$

In altro modo:

- Se V è generato da s vettori, allora al più si trovano s vettori l.i.
- Se V è f.g. e in V troviamo r vettori l.i. il numero dei generatori è almeno r.

Si può dimostrare che $\dim R(A) = \dim C(A)$

$\Rightarrow \rho(A) = \rho({}^tA)$

Proposizione Sia V uno spazio vettoriale con $\dim V = n$.

1. $v_1, \dots, v_r$ l.i. $\Rightarrow r \leq n$
2. $v_1, \dots, v_r$ generano $V \Rightarrow r \geq n$
3. $v_1, \dots, v_n$ generano $V \Leftrightarrow$ sono l.i.
$\Leftrightarrow$ costituiscono una base per V.

Proposizione: Sia V uno sp. vettoriale con $\dim V = n$
W è un s.s. di V.

1. W è f.g.
2. $\dim W \leq \dim V$
3. $\dim W = \dim V \Leftrightarrow W = V$

FORMULA DI GRASSMANN

Se W e W' sono s.s.:

$$\boxed{\dim W + \dim W' = \dim(W + W') + \dim(W \cap W')}$$

RANGO $\Leftrightarrow$ n° di righe L.I. $\Leftrightarrow$ dim. del s.s. f.g. dalle righe

V spazio vettoriale (su $\mathbb{R}$)

Base per V x def = insieme ordinato $B = (v_1, v_2, \dots, v_r)$
di vettori di V che sono
- generatori per V
- linearmente indipendenti

- Se in V esiste una base, ogni vettore $v \in V$ si esprime in modo unico come c.l. di $v_1, v_2, \dots, v_r$; esistono cioè r numeri $a_1, a_2, \dots, a_r \in \mathbb{R}$ per cui $v = a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_rv_r$.
I numeri $a_1, a_2, \dots, a_r$ si dicono COMPONENTI di v rispetto alla base B

- Se v ha componenti $a_1, \dots, a_r$ e v' componenti $a'_1, a'_2, \dots, a'_r$
allora: - $v + v' = a_1 + a'_1, a_2 + a'_2, \dots, a_r + a'_r$
- $k \in \mathbb{R}$, kv ha comp. $ka_1, ka_2, \dots, ka_r$

RICHIAMI SUGLI SP. VETTORIALI $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$

- Se i vettori di $\mathbb{R}^n$ sono le n-uple ordinate di numeri reali $v \in (a_1, a_2, \dots, a_n)$ $\mathbb{R}^n$ è f.g.. Una sua base è la base canonica $\beta(e_1, e_2, \dots, e_n)$

ES $n = 3$ $e_1 = (1,0,0)$ $e_2 = (0,1,0)$ $e_3 = (0,0,1)$

Se $v = (a_1, \dots, a_n)$, $v = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n$ e quindi le componenti di v rispetto alla base canonica sono proprio $a_1, \dots, a_n$.

- $\dim \mathbb{R}^n = n$. Tutte le basi di $\mathbb{R}^n$ contengono n vettori.

OSSERVAZIONE Se si hanno s vettori, $s < n$: non si ha una base perché i vettori non possono generare tutto $\mathbb{R}^n$. Se $s > n$, i vettori non formano base perché non sono l.i.

Se $\boxed{s = n}$, per verificare che formano una base è sufficiente verificare che i vettori siano l.i. oppure che siano generatori.

VERIFICA DELL' INDIPENDENZA LINEARE di certi vettori dati $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}$

Metodi

① Usare la def. Provare che $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0_{\mathbb{R}^n} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_n = 0$

② Esame successivo dei vettori (nessuno dei vettori è c.l. dei precedenti).

③ Si costruisce una matrice di A $n \times n$ scrivendo i vettori come righe.

$L(v_1, \dots, v_n)$ diventa lo spazio delle righe di A.

$v_1, \dots, v_n$ sono l.i. $\Leftrightarrow \rho(A) = n$

Più precisamente:

- Se $\rho(A) = n$ $v_1, \dots, v_n$ formano una base per lo spazio delle righe e quindi sono l.i. • Se $\rho(A) < n$, $v_1, \dots, v_n$ sono l.d.

Una base per W è data "dalle righe della matrice"
$(1+x+2x^2,\ x-x^2-x^3)$

ES ③ le matrici $\mathbb{R}^{2\times 2}$
$M_1=\begin{pmatrix}1&2\\3&3\end{pmatrix}$ $M_2=\begin{pmatrix}0&1\\1&-1\end{pmatrix}$ $M_3=\begin{pmatrix}2&0\\0&5\end{pmatrix}$ $M_4=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$
Una base per $\mathbb{R}^{2\times 2}$ è ad esempio
$e_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ $e_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ $e_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$ $e_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$
$\Rightarrow \dim \mathbb{R}^{2\times 2}=4$

SISTEMI LINEARI OMOGENEI

$Ax=0 \qquad A\in\mathbb{R}^{m\times n}$

- le soluzioni formano un s.s. W di $\mathbb{R}^n$
- $\rho(A)=n$ W è il s.s. formato dal solo vettore nullo
  $\dim W=0$ (base è l'insieme vuoto $\emptyset$)
- $\rho(A)<n$ il sistema ha $\infty^{n-\rho(A)}$ soluzioni dipendenti da $n-\rho(A)$ parametri.

Si può dimostrare che la $\dim W$ è $n-\rho(A)$ (cioè $\dim W=$ n° incognite libere). Una base si ottiene dando il valore 1 ad un'incognita libera e valore 0 alle altre (in tutti i modi possibili).

ES $\begin{cases}2x_1+x_2-x_4+x_5=0\\x_1-3x_3+x_4=0\end{cases}$ $A=\begin{pmatrix}2&1&0&-1&1\\1&0&-3&1&0\end{pmatrix}$

$\begin{cases}x_2=x_4-x_5-2x_1=-3x_1+3x_3-x_5\\x_4=-x_1+3x_3\end{cases}$ Sol $(t_1,-3t_1+3t_2-t_3,t_2,-t_1+3t_2,t_3)=$

$=t_1(1,-3,0,-1,0)+t_2(0,3,1,3,0)+t_3(0,-1,0,0,1)$
Il sottospazio W delle soluzioni è generato da 3 vettori.
$s_1=(1,-3,0,-1,0)$ $s_2=(0,3,1,3,0)$ $s_3=(0,-1,0,0,1)$
I vettori s_1,s_2,s_3 sono l. i.

$M=\begin{pmatrix}1&-3&0&-1&0\\0&3&1&3&0\\0&-1&0&0&1\end{pmatrix}$ $\rho(M)=3 \Rightarrow s_1,s_2,s_3$ formano base per W

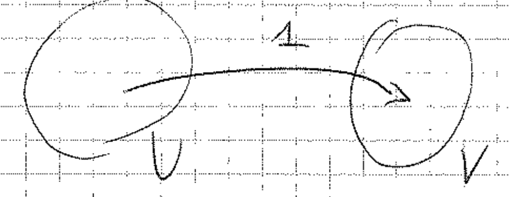
APPLICAZIONI LINEARI (a.l.)

Siano U e V spazi vettoriali su $\mathbb{R}$ (o in $\mathbb{C}$). Si dice una funzione $f: U \to V$ che "trasforma" i vettori di U in vettori di V.

Def $f: U \to V$ si chiama applicazione lineare se ad ogni $u \in U$ fa corrispondere uno ed uno solo vettore $v = f(u) \in V$ e soddisfa le condizioni:

(I) $f(u+u') = f(u) + f(u')$, $\forall u, u' \in U$

(II) $f(ku) = k\,f(u)$ $\forall u \in U, \forall k \in \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$



Esempi

1) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$f(x,y,z) = (x+y,\ x-y+z)$

$f(2,-1,3) = (1,6)$ f. è una a.l.

(I) $u = (x,y,z)$ $u' = (x',y',z')$

$f(u+u') = f((x,y,z)+(x',y',z')) = f(x+x', y+y', z+z') =$

$= ((x+x')+(y+y'), (x+x')-(y+y')+(z+z')) =$

$= f(u) + f(u') = f(x,y,z) + f(x',y',z') =$

$= (x+y,\ x-y+z) + (x'+y',\ x'-y'+z) =$

$= ((x+y)+(x'+y'), (x-y+z)+(x'-y'+z'))$

(II) $f(ku) = f(k(x,y,z)) = f((kx, ky, kz)) = (kx+ky, kx-ky+kz) =$

$= k f(u) = k(x+y,\ x-y+z) = (k(x+y), k(x-y+z))$

2) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ $f(x,y,z) = (x+y,\ z+1)$ Non è a.l.

(I) $f(u+u') = f((x,y,z)+(x'+y'+z')) = f((x+x', y+y', z+z')) =$

$= ((x+x')+(y+y'), (z+z')+1)$

$f(u)+f(u') = (x+y, z+1) + (x'+y', z'+1) = ((x+y)+(x'+y') + z+z'+2)$

Proposizione 1 $\ker f$ è un s.s. di V

Proposizione 2 $f: U \to V$ è iniettiva se e solo se $\ker f = \{0_U\}$

Es: $f\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ $f(x,y,z) = (x+y,\ x-y+z)$

$\ker f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x+y=0,\ x-y+z=0\}$

= insieme delle soluzioni del sist. omogeneo $\begin{cases} x+y=0 \\ x-y+z=0 \end{cases}$

$\ker f$ contiene ∞ elementi, $\ker f \neq \{0_U\}$ f non è iniettiva

APPLICAZIONI LINEARI SURIETTIVE

$f: A \to B$ f funzione tra insiemi

Def: Si dice immagine di f ($\mathrm{Im}\, f$) il sottoinsieme di B formato dagli elementi b che sono corrispondenti di almeno un elemento $a \in A$ cioè del tipo $f(a)$, per qualunque $a \in A$;

$$\mathrm{Im}\, f = \{b \in B,\ \exists a \in A\ f(a) = b\}$$

Def: f si dice suriettiva se $\mathrm{Im}\, f = B$

Proposizione 3 Se $f: U \to V$ è una a.l., $\mathrm{Im}\, f$ è un s.s. di V.

ISOMORFISMI

Def Un'a.l. $f: U \to V$ si dice isomorfismo se è iniettiva e suriettiva (cioè, una corrispondenza biunivoca)

Def Due sp. vettoriali U, V si dicono isomorfi se esiste un isomorfismo $f: U \to V$

Esempio $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^{2,2}$ sono sp. vettoriali isomorfi

Consideriamo funzione $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^{2,2}$

$$f(x,y,z,t) \to \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

f è un isomorfismo (eep. 150)

- f è lineare
- f è iniettiva $\ker f = \{(0,0,0,0)\}$
- f è suriettiva $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = f(a,b,c,d)$

Proposizione 1 Sia $f: V \to W$ una a.l.
Il nucleo di f è un s.s. di V.
$\ker f = \{v \in V, f(v) = 0_W\}$
f lineare 1. $f(v+v') = f(v) + f(v')$
2. $f(kv) = k f(v)$, $k \in \mathbb{R}$

Da dimostrare 1. $0_V \in \ker f$
2. $v, v' \in \ker f \Rightarrow v+v' \in \ker f$
3. $k \in \mathbb{R}$, $v \in \ker f \Rightarrow kv \in \ker f$.

(1) $0_V \in \ker f$ vuol dire $f(0_V) = 0_W$

(2) $f(v) = 0_W$, $f(v') = 0_W \Rightarrow f(v+v') = 0_W$

$f(v+v') = f(v) + f(v') = 0_W + 0_W = 0_W$

(3) $f(v) = 0_W \Rightarrow f(kv) = 0_W$

$f(kv) = k\, f(v) = k\, 0_W = 0_W$

Proposizione 2 Sia $f: V \to W$ una a.l.
f è iniettiva $\Leftrightarrow \ker f = \{0_V\}$
$\Rightarrow$ Se $v \neq 0_V$, $f(v) \neq f(0_V)$, cioè $f(v) \neq 0_W$
Se $v \neq 0_V$, allora $v \notin \ker f$, $\ker f = \{0_V\}$

Considero 2 vettori $v, v' \in V$ e supponiamo che $f(v) = f(v')$

$f(v) = f(v')$ $f(v) - f(v') = f(v - v') = 0_W$

$v - v' \in \ker f$, $v - v' = 0_V \Rightarrow \boxed{v = v'}$

SIGNIFICATO di $AX = B$

Dire che il sistema $AX = B$ è risolubile vuol dire che il vettore $W = (b_1, \dots, b_m)$ appartiene ad $\boxed{\mathrm{Im}\, f_A}$, cioè W ammette almeno una controimmagine V. Risolvere il sistema vuol dire trovare tutte le controimmagini di W, cioè trovare l'insieme

$$f_A^{-1}(W) = \{v \in \mathbb{R}^n, f_A(v) = W\}$$

ESEMPI

1) $A = 0 \in \mathbb{R}^{m,n}$ $f_A(v) = 0_{\mathbb{R}^m}$: f_A è la funzione (a. l.) nulla

2) $A = I_n$ $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $f_A(v) = v$ $\forall v \in \mathbb{R}^n$. L'a. l. si chiama a. l. identica o identità e si indica con i, $i_{\mathbb{R}^n}$

3) $A, B \in \mathbb{R}^{m,n}$, esiste $A+B$.
$f_{A+B}(v) = f_A(v) + f_B(v)$, $\forall v \in \mathbb{R}^n$
$(A+B)x = Ax + Bx$ si ottiene l'a. l. somma di f_A e f_B

4) sia $k \in \mathbb{R}$: $f_{kA}(v) = k f_A(v)$ $\boxed{f_{kA} = k f_A}$

5) $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ $B \in \mathbb{R}^{p,m}$ $\Rightarrow$ esiste $BA \in \mathbb{R}^{p,n}$
$f_{BA}(v)$? $BA\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = B\left(A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right)$
$\mathbb{R}^n \xrightarrow{f_A} \mathbb{R}^m \xrightarrow{f_B} \mathbb{R}^p$ $\boxed{f_B \circ f_A = f_{BA}}$

6) $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ invertibile $\mathbb{R}^n \xrightarrow{f_A} \mathbb{R}^n$ iso $(\rho(A) = n)$
$y = Ax$ $x = A^{-1}y$ $f_{A^{-1}} = (f_A)^{-1}$

TEOREMA: se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, esiste $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ per cui $f = f_A$

Dim: Basta costruire A prendendo come colonne i vettori $f(e_1), \dots, f(e_n)$ dove $(e_1, \dots, e_n)$ è la base canonica di $\mathbb{R}^n$

Infatti: $\forall (x_1, \dots, x_n)$
$f(x_1, \dots, x_n) = x_1 f(e_1) + \dots + x_n f(e_n) = x_1 f_A(e_1) + \dots + x_n f_A(e_n)$
$= f_A(x_1, \dots, x_n)$

Data una a. l. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, esiste una matrice $A = M_f$ tale che $f = f_A$

Conclusione: tutte le a. l. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sono del tipo f_A e prendo se $f(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_m)$

allora f è lineare se e solo se le y sono polinomi omogenei di 1° grado nelle variabili $x_1, \dots, x_n$.

$A \in \mathbb{R}^{m,n} = \begin{pmatrix} \end{pmatrix}$

Calcoliamo $A\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0+a_2 \\ 2a_0-a_1+3a_2 \\ a_0+a_1+a_2 \\ 5a_2 \end{pmatrix} \to 4$

$$f(v) = (a_0+a_2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (2a_0-a_1+3a_2)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (a_0+a_1+a_2)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} +$$
$$+ (5a_2)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f(v) = \begin{pmatrix} a_0+a_2 & 2a_0-a_1+3a_2 \\ a_0+a_1+a_2 & 5a_2 \end{pmatrix}$$

ES $V = \{$vettori ordinari nello spazio$\}$ $W = \mathbb{R}^3$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ Costruiamo una a.l. $f: V \to \mathbb{R}^3$ a partire da A. fissando come basi $B = (\bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k})$ per V e la base canonica in $\mathbb{R}^3$.

$v = v_1\bar{\imath} + v_2\bar{\jmath} + v_3\bar{k}$

$f(v) - ?$ $f = f_A^{B,e}$

$$A = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2v_1+v_2+v_3 \\ v_2 \\ 2v_3 \end{pmatrix}$$

$f(v) = (y_1c_1 + y_2c_2 + y_3c_3)$

$f(v) = (2v_1+v_2+v_3)(1,0,0) + v_2(0,1,0) + 2v_3(0,0,1)$

$f(v_1\bar{\imath} + v_2\bar{\jmath} + v_3\bar{k}) = (2v_1+v_2+v_3, v_2, 2v_3)$

Cambiando le basi si ottiene un'altra funzione:

$B' = B = (\bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k})$

$e' = ((1,0,0), (1,1,0), (1,1,1))$ base per $\mathbb{R}^3$

$f = f_A^{B',e'}$

$f'(v_1\bar{\imath} + v_2\bar{\jmath} + v_3\bar{k}) = (2v_1+v_2+v_3)(1,0,0) + v_2(1,1,0) + 2v_3(1,1,1)$

$f'(v_1\bar{\imath} + v_2\bar{\jmath} + v_3\bar{k}) = (2v_1+2v_2+3v_3, v_2+2v_3, 2v_3)$

Viceversa Sia $f: V \to W$ una a.l. V, W f.g.

$B = (b_1, \dots, b_n)$ base per V, $C = (c_1, \dots, c_m)$ base per W.

Costruiamo la matrice associata ad f rispetto alle basi B, C. $A = M_f^{BC} = (\quad)$ $m \times n$

$f(\bar{i}) = \bar{a}_1 \bar{i} = -a_2 \bar{k} + a_3 \bar{j}$ $\quad f(\bar{k}) = \bar{a}_1 \bar{k} = -a_1 \bar{j} + a_2 \bar{i}$ $\quad f(\bar{j}) = a_1 \bar{k} - a_3 \bar{i}$

Osservazioni:

1. La matrice associata ad una a. l. $f: V \to W$ sp. vett. f.g. dipende dalle basi scelte.
2. Se $V = \mathbb{R}^n$, $W = \mathbb{R}^m$ non necessariamente le basi più "comode" sono quelle canoniche.
3. Se $V = W$ in generale si sceglie $B = C$. Può essere conveniente usare 2 basi diverse.
4. Tutte le matrici A associate ad una stessa f al variare della scelta delle basi hanno lo stesso rango:
$\rho(A) = \dim \operatorname{Im} f$ e quindi non da B e C.

Matrici associate alla stessa $f: V \to W$ rispetto a basi diverse

$$\begin{array}{ccl} V & W & \\ B & C & \Rightarrow A = M_f^{B,C} \\ B' & C' & \Rightarrow A' = M_f^{B',C'} \end{array}$$

$AX = Y$ se $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_n \end{pmatrix}$ componenti di $v \in V$ rispetto a B

$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_m \end{pmatrix}$ dove $y_1 \dots y_m$ componenti di $f(v)$ rispetto base C.

Analogamente $Y' = AX'$

$Y' = \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_m \end{pmatrix}$ comp. di $f(v)$ rispetto a C'

$X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$ comp. di v rispetto a B'

Indichiamo con P la matrice del cambio base in V, con Q la matrice del cambio base in W;

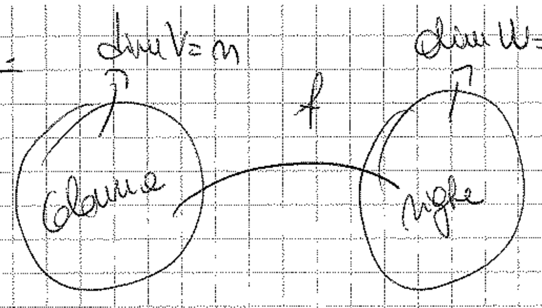
$X = PX'$ $\quad Y = QY'$

$P \in \mathbb{R}^{n,n}$ $\quad Q \in \mathbb{R}^{m,m}$ matrici invertibili

In $AX = Y$ sostituiamo queste espressioni:

$A(PX') = QY' \Rightarrow Y' = (Q^{-1}AP)X' \Rightarrow \boxed{A' = Q^{-1}AP}$

2. l.



• $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

• NULL + RANGO

$\dim \operatorname{Ker} A + \rho(A) = n$ ← SPAZIO PARTENZA

$\rho(A)$ = dim Im f

• $\dim \operatorname{Ker} \leq n$

• $\dim \operatorname{Im} \leq m$

• $\dim \operatorname{Im} \leq \dim \operatorname{In}$

INIETT $\Leftrightarrow \dim \operatorname{Ker} = 0$

$\boxed{\text{Se } m < n} \Rightarrow$ NON È INIETTIVA!

INIETT $\Rightarrow m \geq n$

SURIETT $\Leftrightarrow m = \dim W = \rho(A) = \dim \operatorname{Im}$

Se $m > n \Rightarrow$ NON SURIETT.

AUTOVALORI ed AUTOVETTORI di un endomorfismo

Def Si dice endomorfismo una app. lineare f di uno spazio V in sè: $f: V \to V$

Esempi (1) Consideriamo l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$

$f = f_A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

associato alla matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Calcoliamo $f(1,1,1) = (2,2,2) = 2(1,1,1)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(2) $f: C^{\infty}(\mathbb{R}) \to C^{\infty}(\mathbb{R})$ f derivazione

Se $v = y(x)$ $f(v) = y'(x)$

Per $v = e^{\lambda x}$ $f(v) = \lambda e^{\lambda x} = \lambda v$ $(\lambda \neq 0)$

Def 1 $\lambda \in \mathbb{R}$ si dice <u>AUTOVALORE</u> (o valore proprio) per un endomorfismo $f: V \to V$ se esiste un vettore $\bar{v} \in V$, $\bar{v} \neq 0$, per cui $\boxed{f(\bar{v}) = \lambda \bar{v}}$

$y(x) = ce^{ax}$, c costante arbitraria.
Gli autovettori sono tutti e solo le funzioni multiple di e^{ax}.
Anche in questo caso $\dim V_a = 1$ $V_a = \mathcal{L}(e^{ax})$

<u>Osservazione</u> Anche $\lambda = 0$ è un autovalore $f(v) = 0v$ $f(v) = 0_V$
$y'(x) = 0$ funzione nulla.
Gli autovettori sono tutte le fz. costanti.

<u>Osservazione</u> In generale, data $f: V \to V$ $0 \in \mathbb{R}$ è un autovalore se $\exists$ $v \neq 0_V$ tale che $f(v) = 0_V$

$\boxed{f(v) = 0_V} \Rightarrow 0$ autovalore $\Longleftrightarrow f$ non iniettiva

$\boxed{V_0 = \ker f.}$

<u>Teorema</u> $f: V \to V$ endomorfismo
$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ autovalori (distinti)
Sia A_i un insieme libero di autovettori per λ_i
$(i = 1, 2, \dots, r)$.
Allora $\bigcup_{i=1}^{r} A_i$ è un insieme libero.

<u>Corollario</u> Se $a_1, a_2, \dots, a_r \in \mathbb{R}$ le funzioni $e^{a_1 x}, e^{a_2 x}, \dots, e^{a_r x}$ sono l.i.
Vediamo <u>es. 2</u>: a_1, a_2 sono autovalori per la f = derivata.
Per ogni autovalore si è preso <u>un</u> autovettore $e^{a_i x}$ <u>(l.i.)</u>

<u>AUTOVALORI ED AUTOVETTORI IN DIMENSIONE FINITA</u>

$f: V \to V$ <u>V f.g.</u>
Se $B = (b_1, \dots, b_n)$ una base per V; $\dim V = n$
Se $A = M_f^{B,B}$ Se $v = x_1 b_1 + x_2 b_2 + \dots + x_n b_n$
$f(v) = y_1 b_1 + \dots + y_n b_n$ $A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$
La condizione ~~A~~ $f(v) = \lambda v$ diventa
$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \boxed{Ax = \lambda x} \qquad (* A)$$
$$Ax - \lambda x = 0 \quad Ax - \lambda(Ix) = 0 \quad Ax - (\lambda I)x = 0 \quad \boxed{(A - \lambda I)x = 0}$$

Se V_λ è l'autospazio relativo a λ, $\dim V_\lambda$ = n° incognite libere
nel $(*)$ = $n - \rho(A-\lambda I)$. Si dimostra che $\dim V_\lambda \leq \mu_\lambda$, dove μ_λ
è la molteplicità di λ come radice del p.c.(A).
In particolare se λ è una radice semplice $(\mu_\lambda = 1)$, $\dim V_\lambda = 1$

3. Osservazione sul p.c.(A)

(1) Se $\dim V = n$, $A = M_f^{\beta\beta}$ è $n\times n$, grado del p.c.(A) = n. Ci
sono al più n autovalori reali distinti. In $\mathbb{C}$ p.c.(A)
ha esattamente n radici (tenendo conto delle molteplicità)
Se p.c.(A) è reale e $\alpha + i\beta$ è una radice complessa,
allora anche $\alpha - i\beta$ è una radice con la stessa molteplicità.
Se A è reale e quindi p.c.(A) è un polinomio reale,
allora se n è dispari c'è almeno un autovalore λ reale.

(1.1) p.c.(A): $p(T) = (-1)^n T^n + \ldots + (\det A)$

ES. $n=2$ $\quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\quad p(T) = \begin{vmatrix} a-T & b \\ c & d-T \end{vmatrix} = (a-T)(d-T) - bc$

$$p(T) = T^2 - (a+d)T + (ad-bc) =$$
$$= T^2 - \underbrace{(\mathrm{Tr} A)}_{\text{traccia di } A} T + \det A$$

In generale, se A è $n\times n$ $\mathrm{Tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$

(1.2) Se A è triangolare, anche $A - TI$ è triangolare, allora
p.c.(A) = $(a_{11}-T)(a_{22}-T)\ldots(a_{nn}-T)$ e quindi gli
autovalori sono gli elementi $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$.

(1.3) Se su A si applica una t.e. sulle righe o sulle colonne,
in generale il p.c. cambia e quindi cambiano gli autovalori

ES $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$ $\quad$ p.c.(A) = $T^2 - 2T + 1$

Si trova l'autovalore 1 doppio $(\mu_1 = 2)$

Scambiamo le righe:

$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ p.c.(A) = $T^2 - 1$

autovalori semplici $1, -1$.

$f(v_1) = \lambda_1 v_1$, λ_1 autovalore relativo a $v_1 = \lambda_1 v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_n$

$M f^{C,C} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ 0 & & 0 \\ & & \lambda_i \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$ In generale $f(v_i) = \lambda_i v_i = 0v_1 + 0v_2 + \dots + \lambda_i v_i + \dots + 0v_n$

$\Rightarrow M f^{C,C} = D$ diagonale; nella diagonale compaiono gli autovalori di f "nell'ordine"

<u>Osservazione</u>: Sia $A = M f^{B,B}$, B base qualsiasi

Se f è semplice, e se C è una base per V formata da autovettori per f, $M f^{C,C} = D$ diagonale.

A e D sono matrici associate alla stessa f.

Ricordiamo che se $f: V \to W$ è una a.l. e A, A' sono matrici associate in basi diverse $\underline{|A' = Q^{-1}AP}$

P matrice cambio base in V, Q matrice cambio base in W.

Nel nostro caso c'è un unico cambiamento di base da B a C (sia "in partenza" che "in arrivo")

$D = P^{-1}AP$

dove P è la matrice cambio base da B a C. P è una matrice invertibile le cui colonne contengono le componenti degli autovettori di C rispetto a B.

Si dice che <u>A è stata diagonalizzata</u> o anche che <u>A è simile</u> alla matrice diagonale D.

<u>Osservazione</u> Data A, A è simile ad una matrice diagonale D, cioè esiste P tale che $D = P^{-1}AP$ <u>se e solo se</u> le colonne di P sono "autovettori l.i. per A".

- $f: V \to V$ a.l. endom., V f.g.

f si dice <u>semplice</u> se esiste una base per B formata da autovettori per f.

- $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ si dice diagonalizzabile se è <u>simile</u> ad una matrice diagonale, cioè se $\exists P \in \mathbb{R}^{n,n}$ tale che $P^{-1}AP$ risulta diagonale.

(3) $A=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$ $\quad$ p.c.$(A)=p(T)=T^2-2T+1$

A ammette l'autovalore $\lambda=1$ con molteplicità $\mu_1=2$

$\dim V_1 = (n-\rho(A-\lambda I)) = 2-\rho(A-I) = 2-\rho\begin{pmatrix}0&2\\0&0\end{pmatrix} = 2-1 = 1 \neq \mu_1$

$\Rightarrow$ A non è diagonalizzabile.

(4) $A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&4&-2\\-1&-2&1\end{pmatrix}$

p.c.$(A)=p(T)=-T^3+6T^2 \rightarrow \det(A-TI)=\begin{vmatrix}1-T&2&-1\\2&4-T&-2\\-1&-2&1-T\end{vmatrix}=$

$=[(4-T)(1-T)-4](1-T)-[2(1-T)-2]\cdot 2+[-4+4-T]\cdot(-1)=$

$=(\cancel{4}+T^2-T-4T-\cancel{4})(1-T)-[-4T]+(T)=$

$=T^2-T^3-5T+5T^2+4T+T=-T^3+6T^2$

autovalori $\begin{cases}0 \text{ doppio}\\ 6 \text{ semplice}\end{cases}$

Esiste $P\in\mathbb{R}^{3,3}$ invertibile tale che $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&6\end{pmatrix}$

$\lambda=0 \quad Ax=0$

$\begin{cases}x+2y-z=0\\2x+4y-2z=0\\-x-2y+z=0\end{cases}$ $\quad\begin{cases}x+2y-z=0\\z=x+2y\end{cases}$ $\quad$ autovettori $(t,s,t+2s)$, $t,s\in\mathbb{R}$

Una base per V_0 è ad es. $((1,0,1),(0,1,2))$

$\lambda=6 \quad (A-6I)x=0$

$\begin{pmatrix}-5&2&-1\\2&-2&-2\\-1&-2&-5\end{pmatrix}$

$\begin{cases}x=0\\y=0\\z=0\end{cases}$

$\rightarrow\begin{pmatrix}-6&0&-6\\2&-2&-2\\-1&-2&-5\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&1&1\\-1&-2&-5\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&1&1\\-2&-1&4\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&1\\0&-1&-2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\0&-1&-2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$

$\{x+z=0 \quad x=-z$, autovettori $(-t,-2t,t)$ $t\in\mathbb{R}$ base V_6 $((1,2,-1))$

③ p.c.(A) = p.c.(B)

IN CASO DI MATRICI SIMILI

$f: V \to V$ endom., V f.g.

B, B' 2 basi per V.

$A = M_f^{B,B}$ $\quad B = M_f^{B',B'} \Rightarrow B = P^{-1}AP$

P matrice del cambio base da B a B'

$\Rightarrow$ Se esiste una base B' di autovettori per f, $B = M_f^{B',B'}$ è diagonale

$\Rightarrow A = M_f^{B,B}$ è diagonalizzabile, cioè nella sua classe $[A]$ di equivalenza c'è una matrice diagonale.

PRODOTTI SCALARI in uno sp. vettoriale V su $\mathbb{R}$

Def Un prodotto scalare in V è una funzione che ad ogni coppia $v, v' \in V$ associa un numero reale e che soddisfa le proprietà sg:

1. $v \cdot v' = v' \cdot v$ pr. commutativa
2. $v \cdot v' \geq 0$ $\quad v \cdot v = 0 \Leftrightarrow v = 0_V$
3. $v(v' + v'') = v \cdot v' + v \cdot v''$
4. $k \in \mathbb{R}$, $v \cdot (kv') = (kv) \cdot v' = k(v \cdot v')$

Def v, v' si dicono ortogonali se $v \cdot v' = 0$

Def W_1, W_2 sottospazi di V si dicono ortogonali se $\forall v \in W_1, v' \in W_2$, v e v' sono ortogonali.

Def Una norma in uno spazio vettoriale V reale è una funzione $V \to \mathbb{R}$ che associa quindi ad ogni vettore $v \in V$ un numero, che si indica con $\|v\|$ e che soddisfa alle proprietà:

1. $\|v\| \geq 0$ $\quad \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0_V$
2. $\|v + v'\| \leq \|v\| + \|v'\|$ (di disuguaglianza triangolare)
3. se $k \in \mathbb{R}$, $\|kv\| = |k|\,\|v\|$ $\quad | \; | =$ valore assoluto

Def Se $\|v\| = 1$, v si dice versore.

Osservazione Se $v \neq 0_V$, $\frac{1}{\|v\|} v$ è un versore

Infatti $u = \frac{1}{\|v\|} v$ $\quad \|u\| = \left\| \frac{1}{\|v\|} v \right\| = \underbrace{\frac{1}{\|v\|} \|v\|}_{\text{proprietà 3}} = 1$

$\mathbb{R}^n$ col prodotto scalare euclideo si dice brevemente $\boxed{\mathbb{R}^n \text{ euclideo}}$

(2') V s.v. di $\mathbb{R}^n$ con pr. scalare definito in $\mathbb{R}^n$ e ristretto a V

(3) $V = C^0([a,b])$ $\quad [a,b] \in \mathbb{R}$

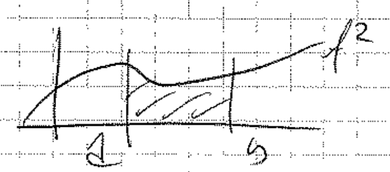
Un prodotto scalare si può definire nel modo seguente

$v = f(x) \quad v' = g(x)$ continue in $[a,b]$

$$v \cdot v' = \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx$$

PROPRIETÀ

$v \cdot v \geq 0 \quad v \cdot v = \int_a^b f^2(x)\,dx \geq 0$



$v \cdot v = 0$ se e solo se $v = f(x)$ è la funzione nulla

1) $v \cdot v' = v' \cdot v \quad \int_a^b f g = \int_a^b g \cdot f$

3) $v \cdot (v' + v'') = v \cdot v' + v \cdot v''$

$v = f(x) \quad v' = g(x) \quad v'' = h(x) \quad \in C^0[a,b]$

$$v \cdot (v' + v'') = \int_a^b f(x)\,[g(x) + h(x)]\,dx = \int_a^b [f(x)g(x) + f(x)h(x)]\,dx =$$

$$= \int_a^b f(x)g(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,h(x)\,dx = v \cdot v' + v \cdot v''$$

4) $k \in \mathbb{R}$

$$v \cdot k v' = \int_a^b f(x)\,[k\,g(x)]\,dx = k \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx$$

• Consideriamo il caso $[a,b] = [-\pi, \pi]$

L'insieme $\{1, \cos x, \operatorname{sen} x, \cos 2x, \operatorname{sen} 2x, \cos nx, \operatorname{sen} nx, \dots\}$ è formato da funzioni 2 a 2 ortogonali.

Es $\quad 1 \cdot \cos x = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos x\,dx = [\operatorname{sen} x]_{-\pi}^{\pi} = 0$

$\operatorname{sen} x \cdot \cos x = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} x \cos x\,dx = 0$

$\|1\| = \sqrt{1 \cdot 1} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} 1\,dx} = \sqrt{2\pi} \quad$ la f. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ è un versore

$$\|\cos x\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} =$$

$= \pi \quad \|\cos x\| = \sqrt{\pi}, \quad \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}$ è un versore

Per $\lambda = 10$, una base per V_{10} è $(1,3)$. Non è versore. Bisogna sostituire con $\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right) = u_2$

(u_1, u_2) è una base o.n. per $\mathbb{R}^2$ come richiesto.

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad p.c.(A) = p(T) = -T^3 + 6T^2$ $\quad$ 0 doppio $\mu_0 = 2$; 6 semplice $\mu_6 = 1$

autovettori $\lambda = 0$ $\quad (s, t, s+2t)$ $\quad \mu_0 = 2$

$\lambda = 6$ $\quad (u, 2u, -u)$ $\quad \mu_6 = 1$

Per ogni scelta di s, t, u:

$(s, t, s+2t) \cdot (u, 2u, -u) = \cancel{su} + \cancel{2ut} - \cancel{us} - \cancel{2tu} = 0$ autovettori $\perp$

MATRICI ORTOGONALI

Def $P \in \mathbb{R}^{n,n}$ si dice ortogonale se $\boxed{P\,{}^tP = {}^tP\,P = I}$

In altre parole P è ortogonale se è invertibile e se $\boxed{P^{-1} = {}^tP}$

Proposizione: Sono condizioni equivalenti

1. P è ortogonale
2. le righe di P formano una base o.n. per $\mathbb{R}^n$ euclideo
3. Le colonne di P — — — —

Proposizione: Se P è ortogonale, $\det P = \pm 1$

$P\,{}^tP = I \quad \det(P\,{}^tP) = \det I$

$\det(P)\det({}^tP) = \det I$

$\det(P)\det({}^tP) = 1$; ma $\det {}^tP = \det P$

$(\det(P))^2 = 1 \quad \det P = \pm 1$

Le matrici P ortogonali con $\det P = 1$ si chiamano ortogonali speciali

OSSERVAZIONI GEOMETRICHE PER $N=2$, $N=3$

$\boxed{N=2}$ $\quad P = \begin{pmatrix} a & x \\ b & y \end{pmatrix}$ $\quad (a,b)(x,y) = 0$

$ax + by = 0 \quad (tb, -ta) \quad (a,b)$ versore

Due colonne possibili:

$\|(x,y)\|^2 = 1$

$t^2b^2 + t^2a^2 = 1 \quad t^2(a^2+b^2) = 1 \quad t^2 = 1 \quad t = \pm 1$

I) $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ ortogonale speciale

II) $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ ortogonale non speciale

FORME QUADRATICHE (f.q.)

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

f è espressa da un polinomio di 2° grado omogeneo in n variabili $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Es $n=1$ $f(x) = ax^2$

$n=2$ $g(x,y) = ax^2+by^2+cxy$

$n=3$ $h(x,y,z) = ax^2+by^2+cz^2+dxy+exz+fyz$

Def Una forma quadratica si dice in forma canonica se nella sua espressione compaiono solo quadrati.

$f(x,y) = x^2-5y^2$ è in f. canonica

$f(x,y) = x^2+2xy$ non lo è

Ad ogni f.q. $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si può associare una matrice simmetrica $A \in \mathbb{R}^{n,n}$

$A = (a_{ij})$ a_{ii} = coeff. del quadrato della i-esima variabile

$a_{ij} = a_{ji} = \frac{1}{2}$ coeff. del prodotto della i-esima variabile per la j-esima

Es ① $f(x,y) = 2x^2-3xy-y^2$ $A = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix}$

② $f(u,v,w) = v^2-4uw$ $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Viceversa: data $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ simmetrica e fissate le variabili, si determina la f.q.

Es. $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 \\ -5 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & -8 \end{pmatrix} \to f(x,y,z) = x^2-8z^2-10xy+2xz+6yz$

Proposizione: Se $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è una f.q. e A è la matrice associata

(*) $f(x_1,\dots,x_n) = (x_1,\dots,x_n)\, A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Verifica ② $(u,v,w) \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = (u\ v\ w) \begin{pmatrix} -2w \\ v \\ -2u \end{pmatrix} = -2uw+v^2+(w\cdot(-2u)) = -4uw+v^2$

SEGNO DI UNA F.Q. NON IN FORMA CANONICA

Premesse Come cambia la matrice associata ad una f.q. quando si fa una sostituzione lineare di variabili $\boxed{X = PX'}$ P invertibile?

$$\text{f.q. } f(x) = {}^tXAX \to {}^t(PX')A(PX') = {}^t(X')({}^tPAP)X' = g(x')$$

f.q. nelle variabili $x_1', \dots, x_n'$ con matrice associata $\boxed{A' = {}^tPAP}$

Abbiamo visto che se A è simmetrica reale, esiste P per cui ${}^tPAP$ è diagonale.

Se la sostituzione di variabili $X = PX'$ si fa con una matrice di questo tipo, A' è diagonale e la $g(x')$ è in forma canonica.

Osservazione Se si effettua una sostituzione lineare di variabili, $f(x)$ e $g(x')$ hanno lo stesso segno.

$$\underbrace{\mathbb{R}^n_{x'} \xrightarrow{f_P} \mathbb{R}^n_{x} \xrightarrow{f}}_{g} \mathbb{R}$$

Una matrice P per cui ${}^tPAP$ è diagonale si può ottenere così:

1) si calcolano gli autovalori di A: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ (eventualmente non tutti distinti)
2) si determinano gli autospazi corrispondenti e per ciascuno si sceglie una base O.N. (per il prodotto scalare euclideo) e si fa l'unione.

Si ottiene una base B O.N. per $\mathbb{R}^n$. La matrice P avrà nelle colonne i vettori di B. P è invertibile (perché le colonne sono l.i.) ed è ortogonale (${}^tP = P^{-1}$) perché le colonne formano una base o.n. per $\mathbb{R}^n$.

$$A' = {}^tPAP = P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix} \Rightarrow g(x_1', \dots, x_n') = \lambda_1 x_1'^2 + \dots + \lambda_n x_n'^2$$

Conclusione il segno di f è determinato dagli autovalori di A, o meglio dal loro segno. In particolare f è definita positiva se tutti gli autovalori di A sono positivi.

Esercizi (su forme quadratiche)

Studiare il segno di $f(x,y) = (x+y)(x-2y)$

Controllo $f(x,y) = x^2 - xy - 2y^2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix} \quad p.c.(A) = p(T) = T^2 + T - \frac{9}{4}$$

1 var di segno $\Rightarrow$ 1 radice positiva

non c'è radice nulla $\rightarrow$ l'altra radice è negativa $\Rightarrow$ f.q. non definita.

(2) Determinare il dominio della funzione $f(x,y) = \sqrt{x^2+2xy+ky^2}$

- Cerchiamo i punti P del piano xy per cui $f(x,y) = x^2+2xy+ky^2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix} \quad p.c.(A) = p(T) = T^2 - (1+k)T + k - 1$$

Osservazione: Se $p(T)$ è il p.c. di una matrice simmetrica reale

$$p(T) = (-T+\lambda_1)(-T+\lambda_2)\dots(-T+\lambda_n)$$

Il termine noto è $\left\langle \begin{array}{l} \det A \\ \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n \end{array} \right.$

$\Rightarrow$ il $\det A$ è il prodotto degli autovalori

Nell'es. $\lambda_1 \lambda_2 = k-1$

1) $k=1$ p.c. $T^2 - 2T$ autovalori $0, 2$

la f.q. in forma canonica $g(x',y') = 2y'^2$

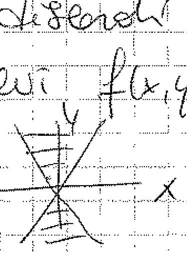
$\Rightarrow$ è semidefinita positiva, cioè $f(x,y) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow$ dom $f = \mathbb{R}^2$

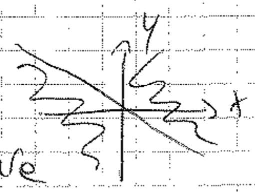
2) $k-1<0$ $\quad k<1$, autovalori discordi

Esistono punti del piano in cui $f(x,y)>0$ e punti $f(x,y)<0$

$f(x,y) = (ax+by)(cx+dy)$



Ad es. $k=0$ $\quad f(x,y) = x^2+2xy = x(x+2y)$



3) $k>1$ autovalori concordi. Il p.c.(A) presenta 2 variazioni di segno; autovalori >0

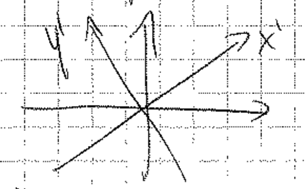
$\Rightarrow f(x,y) > 0 \ \forall (x,y) \neq (0,0)$; dom $f = \mathbb{R}^2$

Tornando all'es. 3.

$x^2+4xy-y^2-4=0$

Con un cambio di riferimento la f.q. $x^2+4xy-y^2$ diventa $\lambda x'^2+\mu y'^2$, λ,μ autovalori di $A\begin{pmatrix}1&2\\2&-1\end{pmatrix}$ $\det A=-5<0$ autovalori discordi.

Nel nuovo riferimento l'eq. è $\lambda x'^2+\mu y'^2=4$ e rappresenta un'iperbole.



$p(T)=T^2-5=0 \quad T=\pm\sqrt5$

$\sqrt5 x'^2-\sqrt5 y'^2=4$

oppure $-\sqrt5 x'^2+\sqrt5 y'^2=4$

Troviamo la matrice della rotazione $P\ (u|v)$

$\lambda=\sqrt5 \quad \mu=-\sqrt5 \quad \det P=1$

u = versore relativo a $\lambda=\sqrt5$

v = versore relativo a $\mu=-\sqrt5$

$u:(A-\lambda I)u=0 \qquad \begin{pmatrix}1-\sqrt5 & 2\\ 2 & -1-\sqrt5\end{pmatrix}u=0 \quad u=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}$

$\begin{cases}(1-\sqrt5)u_1+2u_2=0\\ -\ -\ -\end{cases} \qquad u_2=-\frac{1-\sqrt5}{2}u_1$ una base per $V_{\sqrt5}$ è $(2,\sqrt5-1)$

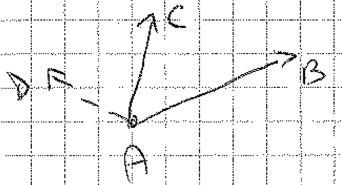
la 1ª colonna sarà $\pm\dfrac{(2,\sqrt5-1)}{\|(2,\sqrt5-1)\|}$

Ricordiamo che P deve essere del tipo

$$P=(u|v)=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha\\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$$

trovato $u=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \Rightarrow P=\begin{pmatrix}a&-b\\b&a\end{pmatrix}$

Esempio $\bar{u} = B-A$ $\quad \bar{v} = C-B$



$\bar{u}+\bar{v}$?

Scelgo $D=A$

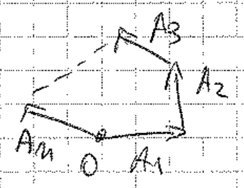
So $\bar{v} = D-A = (C-B)$

$AB + AD = AC$

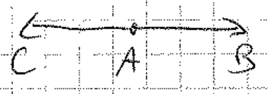
$(B-A) + (C-B) = C-A$

Esempio Sono dati n vettori $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n$

Calcolare $\bar{u}_1 + \bar{u}_2 + \dots + \bar{u}_n$



Esempio $\bar{u} = B-A$ $\quad \bar{v} = A-B = C-A$



$\bar{u}+\bar{v} = \bar{0}$

$\bar{u} = -\bar{v}$ $\quad B-A = -(A-B)$

OPERAZIONI IN COMPONENTI

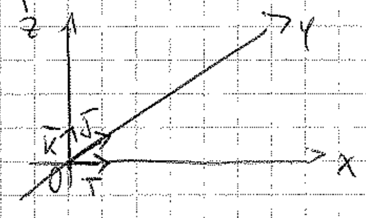
Fissata una base o.n. positiva per i vettori applicati $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, possiamo pensare ai corrispondenti vettori liberi individuati da $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ che verranno indicati con gli stessi simboli $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$. Ogni OP è c.l. di $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ (come vettori applicati)

$OP = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$

Risulta $P - O = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ (come vettore libero)

SISTEMI DI RIFERIMENTO CARTESIANI NELLO SPAZIO e COORDINATE DEI PUNTI

Sia $(\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$ una base o.n. per i vettori e O un punto fissato. Costruiamo un rif. cartesiano.



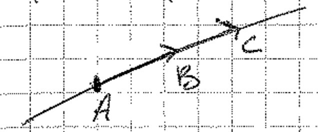
Dato P, il vettore applicato OP è $x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$.

(x, y, z) sono dette le coordinate di P.

x = ascissa $\quad z$ = quota

y = ordinata

A, B, C sono allineati?



Cons. i vettori applicati AC e AB

A, B, C sono allineati $\Rightarrow$ AB e AC sono // $\Leftrightarrow$ B-A e C-A sono // $\Leftrightarrow$
$\exists t \in \mathbb{R}$, $C-A = t(B-A)$ $\Leftrightarrow$ le componenti di C-A e B-A sono proporzionali $\Leftrightarrow$ la matrice avente come righe le componenti dei 2 vettori ha rango 1.

Esempio $A(1,1,2)$, $B=(-1,1,0)$, $C=(0,0,1)$ sono allineati?

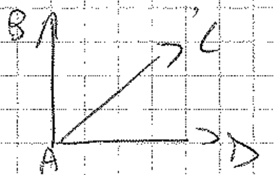
$B-A=(-2,0,-2)$ $C-A=(-1,-1,-1)$

Componenti non proporzionali $\Rightarrow$ A, B, C non sono allineati

4) Condizione di complanarità di 4 punti

$A(x_A, y_A, z_A)$, $B(\ )$, $C(\ )$, $D(\ )$

Esiste un piano contenente ABCD se e solo se

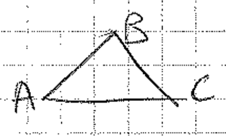


i vettori applicati in AB, AC, AD sono complanari se e solo se B-A, C-A, D-A sono complanari $\Leftrightarrow$

$(B-A)\wedge(C-A)\cdot(D-A)=0$

$$\begin{vmatrix} x_B-x_A & y_B-y_A & z_B-z_A \\ x_C-x_A & y_C-y_A & z_C-z_A \\ x_D-x_A & y_D-y_A & z_D-z_A \end{vmatrix} = 0$$

5) Area del triangolo di dati vertici



Area triangolo $A = \frac{1}{2}\left|(B-A)\wedge(C-A)\right|$

Esempio $A(1,1,2)$ $B(-1,1,0)$ $C(0,0,1)$

$B-A=(-2,0,-2)$ $C-A=(-1,-1,-1)$

$$(B-A)\wedge(C-A) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 2\bar{i}+2\bar{k}$$

$$\left|(B-A)\wedge(C-A)\right| = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{Area triangolo} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

Esempio le eq. $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = -t \\ z = 3t \end{cases}$ rappresentano la retta r passante per $P_0(1,0,0)$ e // a $\bar{v}(2,-1,3)$

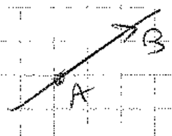
Problema: i punti $A(-3,2,-6)$ e $B(2,0,1)$ appartengono ad r?

$A \in r \Leftrightarrow \exists t$ per cui $\begin{cases} 1+2t = -3 \\ -t = 2 \\ 3t = -6 \end{cases} \Rightarrow t = -2$ A corrisponde a $t=-2$, $A \in r$

B $\begin{cases} 1+2t = 2 \\ -t = 0 \\ 3t = 1 \end{cases}$ → sistema non risolubile $\Rightarrow B \notin r$

RETTA PER 2 PUNTI A, B

r si pensa come retta per uno dei punti e // al vettore $\bar{v} = B - A$



EQUAZIONE DEGLI ASSI COORDINATI

Es. asse z = retta per O // $\bar{k}$ $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=t \end{cases}$

POSIZIONI RECIPROCHE DI 2 RETTE NELLO SPAZIO

Siano date 2 rette r, s (distinte)

r ed s possono essere:

1) Complanari → 1.1 rette incidenti in un punto; → 1.2 rette //

2) Non complanari (sghembe)

Siano r $\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$ s $\begin{cases} x = x_1 + l_1 t' \\ y = y_1 + m_1 t' \\ z = z_1 + n_1 t' \end{cases}$

$r // \bar{v} = (l, m, n)$ $s // \bar{v}' = (l', m', n')$

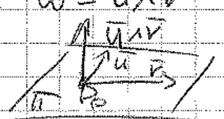
$r // s$ (eventualmente coincidenti) se e solo se $\bar{v} // \bar{v}'$

(cioè le terne (l, m, n) e (l', m', n') sono proporzionali: $\boxed{\frac{l}{l'} = \frac{m}{m'} = \frac{n}{n'}}$)

r e s sono incidenti, cioè hanno un punto Q in comune se il sistema $\begin{cases} x_0 + lt = x_1 + l_1 t' \\ y_0 + mt = y_1 + m_1 t' \\ z_0 + nt = z_1 + n_1 t' \end{cases}$ nelle incognite t, t' è risolubile

PIANO π PER UN PUNTO P_0 e // a 2 VETTORI $\bar{u}=(l,m,n)$ e $\bar{v}=(l',m',n')$

1. Si può pensare π come piano per P_0 e ortogonale a $\bar{w}=\bar{u}\wedge\bar{v}$



2. Si può scrivere in modo diverso dall'eq.:

$P\in\pi \iff P-P_0, \bar{u}, \bar{v}$ sono complanari $\iff (P-P_0)\wedge\bar{u}\cdot\bar{v}=0$

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix}=0$$

- Piano π per 3 punti A, B, C (non allineati)

π si può pensare come piano per uno dei 3 punti (ad es. $P_0=A$) e // ai vettori $\bar{u}=B-A$ e $\bar{v}=C-A$

EQUAZIONI PARAMETRICHE DI UN PIANO

Se π definito da un suo punto P_0 e da 2 vettori $\bar{u},\bar{v}$ // a π

$P\in\pi \iff (P-P_0), \bar{u}, \bar{v}$ sono complanari $\iff P-P_0$ è comb. lineare di $\bar{u}$ e $\bar{v}$ cioè esistono $t,s\in\mathbb{R}$ tali che

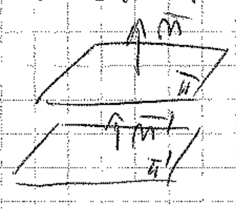
$$P-P_0=t\bar{u}+s\bar{v} \qquad \begin{cases} x=x_0+lt+l's \\ y=y_0+mt+m's \\ z=z_0+nt+n's \end{cases}$$ EQ. PARAMETRICHE DI π

POSIZIONI RECIPROCHE DI 2 PIANI

$\pi: ax+by+cz+d=0 \quad \pi': a'x+b'y+c'z+d'=0$

Se π e π' sono distinti ((a,b,c,d) e (a',b',c',d') non proporzionali)

(1) π e π' sono paralleli (e non hanno punti in comune):

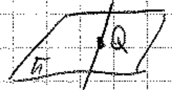


Se $\bar{n}$ e $\bar{n}'$ sono //, cioè hanno componenti proporzionali

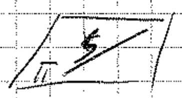
(2) π e π' sono incidenti, π e π' hanno in comune gli infiniti punti di una retta

POSIZIONI RECIPROCHE DI UNA RETTA s E DI UN PIANO π

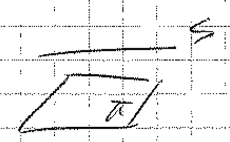
1. s e π hanno un punto in comune ("la retta è incidente al piano")



2. $s \subseteq \pi$

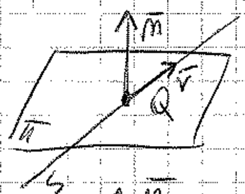


3. $s \parallel \pi$, non hanno punti in comune



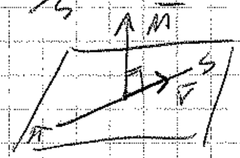
Dal punto di vista dei vettori:

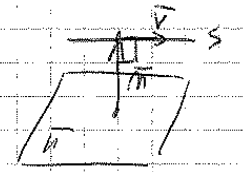
Sia $\bar{n} \perp \pi$ e $\bar{v} \parallel s$ $\quad \bar{n}=(a,b,c) \quad \bar{v}=(l,m,n)$

1. 

$\bar{n}$ e $\bar{v}$ non sono ortogonali

$\bar{n} \cdot \bar{v} \neq 0 \quad al+bm+cn \neq 0$

2. 

3. 

2-3 $\bar{n} \perp \bar{v}$

$al+bm+cn=0$

Dal punto di vista algebrico:

I 3 casi corrispondono ai casi che si presentano studiando il sistema delle eq. di π e di s.

In particolare se $\pi: ax+by+cz+d=0$ e $s \begin{cases} a'x+b'y+c'z+d'=0 \\ a''x+b''y+c''z+d''=0 \end{cases}$

le 3 situazioni corrispondono ai casi possibili presentati dal sistema lineare delle 3 eq.

Esercizi

Rappresentare in f. parametrica la retta $r \begin{cases} x+y-z+1=0 \\ -x+3y+z=0 \end{cases}$

Cerchiamo le soluzioni $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right)$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & -1 \end{array}\right) \quad \begin{cases} x+y-z=-1 \\ 4y=-1 \end{cases} \quad \begin{cases} y=-\frac{1}{4} \\ z=x+y+1 = x+\frac{3}{4} \end{cases}$

I punti di r sono $(x,y,z)=\left(t, -\frac{1}{4}, t+\frac{3}{4}\right)$

Abbiamo ottenuto le eq. parametriche di r

$\bar{r} \parallel \bar{v} = (1,0,1) \Rightarrow$ coeff di t

se $(\lambda,\mu)\neq(0,0)$ $(a,b,c),(a',b',c')$ sono l.i.

2. $\forall\,\lambda,\mu$ π contiene r
se $P_0=(x_0,y_0,z_0)$ è un punto di r, P_0 soddisfa $(*)$ $\forall\,\lambda,\mu$
e quindi $P_0\in\pi$

3. Ogni piano contenente r ha un'eq. del tipo $(*)$ per qualche (λ,μ)

Osservazione 1: Esiste una corrispondenza biunivoca tra i piani del fascio di asse r e le coppie (λ,μ), a meno di un fattore di proporzionalità.

Osservazione 2: i piani $ax+by+cz+d=0$ e $a'x+b'y+c'z+d'=0$ corrispondono rispettivamente a $(\lambda,0)$, $\lambda\neq0$ e $(0,\mu)$, $\mu\neq0$

Esempio 1

Sia $r\begin{cases}x+y-1=0\\2x+y+z=0\end{cases}$ Cerchiamo nel fascio di asse r il piano che passa per un punto $P_0\notin r$

1) $P_0=(1,1,2)$

$\lambda(x+y-1)+\mu(2x+y+z)=0$

P_0 deve soddisfare l'eq $\boxed{\lambda+5\mu=0}$

$\lambda=-5\mu$ ad es $\mu=-1$ $\lambda=5$

$5(x+y-1)-(2x+y+z)=0$ $\boxed{3x+4y-z-5=0}$

2) $P_0=(0,0,0)$

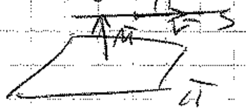
$-\lambda=0 \Rightarrow \lambda=0$ μ qualsiasi

per $\mu=1$ $\Rightarrow$ $\boxed{2x+y+z=0}$

Esempio 2

Cerchiamo il piano per r e // alla retta $s\,(x,y,z)=(t,-t,1+2t)$

$\pi\,//\,s \iff \bar n\perp\bar v \iff \bar n\cdot\bar v=0$



$\bar v=(1,-1,2)$ $\bar n=(\lambda+2\mu,\lambda+\mu,\mu)$

$1(\lambda+2\mu)-(\lambda+\mu)+2\mu=0$ $3\mu=0$ $\mu=0$ (λ qualsiasi)

$\Rightarrow x+y-1=0$ per $\lambda=1$