NUMERO : 394

DATA : 17/10/2012

A P P U N T I

STUDENTE : Cetani

MATERIA : Fisica I

Prof. Ruggeri

GRANDEZZE FISICHE

Una grandezza fisica è un aspetto della natura descrivibile in modo oggettivo e quantificabile mediante l'operazione di misurazione, che fornisce come risultato un numero seguito dalla unità di misura.

Una grandezza fisica è tale se è stato definito il modo preciso, un metodo operativo per effettuare l'operazione di misurazione, serve ovviamente uno strumento di misura ed un'unità di misura.

Ogni grandezza fisica è definita dall'insieme di tutte le possibili operazioni di misurazione che la riguardano.

10^{8}	$1\,m$	10^{-3}	10^{-6}	10^{-10}
Triangolazione ottica	Regola	Microscopio	diffrazione	

La lunghezza è definita dall'insieme di tutti i possibili modi di misurazione

GRANDEZZE FISICHE
- → FONDAMENTALI: necessitano di un metodo operativo di misurazione (l, m, t)
- → DERIVATE: sono definite attraverso una relazione funzionale con le 3 grandezze fondamentali (velocità, forza...)

L'analisi dimensionale permette di scrivere qualsiasi grandezza fisica come il prodotto di $L^{\alpha} M^{\beta} T^{\gamma}$, dove L = lunghezza, M = massa, T = tempo

SISTEMI DI UNITÀ DI MISURA

La scelta delle grandezze fondamentali e delle rispettive unità dà origine a un sistema di unità di misura.

SI (MKS)	m	kg	s
CGS	cm	g	s
PRATICO (degli ing.)*	m	Kgf	s
	Lunghezza	Massa	Tempo

*Forza

RISULTATO DI UNA MISURAZIONE

Viene espresso nel formato $\bar{l} \pm \bar{\varepsilon}$ (seguiti dall'unità di misura)
In generale se si effettuano più misurazioni il risultato della misurazione è attendibilmente il valore espresso dalla media delle misurazioni:

$$\bar{l} = \frac{l_1+l_2+\dots+l_n}{n} \equiv \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} l_i$$

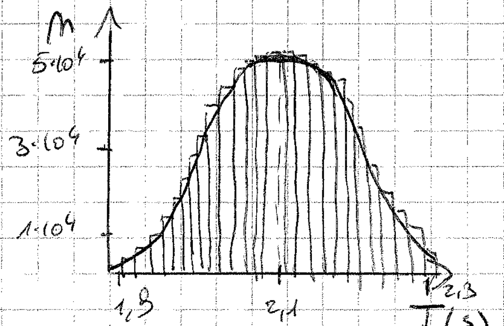
FORMATO RISULTATO: valore medio ($\bar{l}$) ± errore ($\bar{\varepsilon}$) [seguiti da u. di m.]

DISTRIBUZIONE E CALCOLO dell'ERRORE

ERRORE
- 1 MISURA: corrisponde con la incertezza ≡ sensibilità strumento
- <20 MISURE: $\frac{V_{MAX} - V_{MIN}}{2}$ [SEMIDISPERSIONE MASSIMA]
- >20 MISURE: gli errori seguono la disposizione a campana di Gauss. È possibile stimare l'errore mediante la DEVIAZIONE STANDARD (ERRORE QUADRATICO MEDIO)

Distribuzione di Gauss

Quando una misurazione viene ripetuta n volte, con $n \gg 1$ si ha la caratteristica disposizione dei valori misurati secondo la "campana di Gauss" ed essa è tanto meglio approssimata tanto $n \to +\infty$.

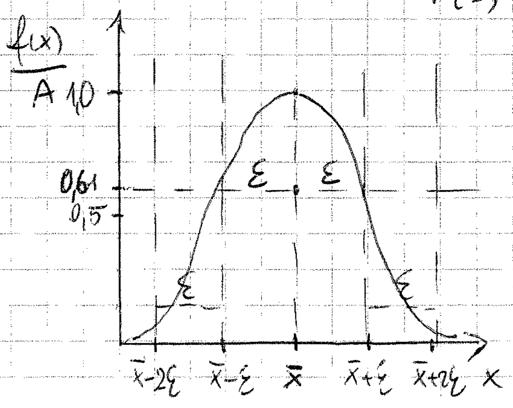


Distribuzione di Gauss

$$f(x) = A\, e^{-\left(\frac{(x-\bar{x})^2}{2\varepsilon^2}\right)}$$

A: valore massimo funzione $\equiv \bar{l}$

ε: semilarghezza della curva: valutata dove $f(x)$ vale $Ae^{-\frac{1}{2}}$



Distribuzione degli errori in una gaussiana

INTERVALLO	% di misure
$\bar{x}-\varepsilon \div \bar{x}+\varepsilon$	68
$\bar{x}-2\varepsilon \div \bar{x}+2\varepsilon$	95
$\bar{x}-3\varepsilon \div \bar{x}+3\varepsilon$	99,7

$$\varepsilon_{\Delta}^2 = \left(\frac{\delta f}{\delta x}\right)^2 \varepsilon_x^2 + \left(\frac{\delta f}{\delta y}\right)^2 \varepsilon_y^2 + \left(\frac{\delta f}{\delta z}\right)^2 \varepsilon_z^2 + \dots$$

nelle quali figurano le derivate parziali della funzione.
Nella divisione e prodotto quindi il quadrato dell'errore relativo su L si ottiene sommando i quadrati degli errori relativi su L.

$$\varepsilon_r^2 = \frac{\varepsilon_1^2}{L_1} + \frac{\varepsilon_2^2}{L_2} \equiv \varepsilon_{r1}^2 + \varepsilon_{r2}^2$$

CIFRE SIGNIFICATIVE

Bisogna utilizzare notazione scientifica.
Sono il n° di cifre certe + il n° di cifre affette da incertezza.

$3,4 \cdot 10^{-3}$ 2 c.s.

$7,41 \pm 0,1$ 2 c.s.! e non 3!

Se si effettuano operazioni tra numeri con diverse cifre significative bisogna arrotondare mantenendo il n° di c.s. pari alla grandezza fisica coinvolta nell'operazione con minori cifre significative.

MISURE E INDETERMINAZIONE

Secondo il "Principio di Indeterminazione di Heisenberg" non si può determinare con sufficiente precisione posizione e velocità di un corpo sufficientemente piccolo, ovvero con massa infima.

$$\Delta x \cdot \Delta q \geq \frac{1}{2} h$$

h → costante di Planck

Δx: incertezza sulla posizione

Δq → incertezza sulla quantità di moto (mv)

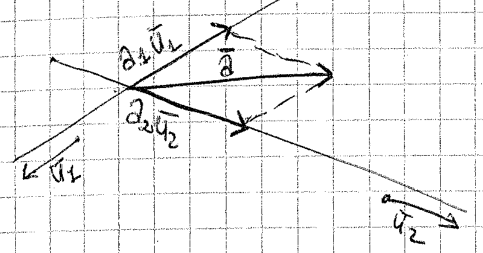
Quindi a livello microscopico il principio si manifesta in modo evidente e rende impossibile quindi pretendere di ottenere una misura "reale" contemporanea di velocità e posizione.
Invece a livello macroscopico essendo l'incertezza di Δq dipendente dalla massa m, esso è del tutto trascurabile e le misure ottenute si possono quindi considerare "reali".

VERSORI

Il rapporto fra un vettore qualsiasi e il suo modulo è per definizione un vettore adimensionale, di modulo unitario, che ha la stessa direzione e lo stesso verso del vettore; esso è detto VERSORE.

$$\bar{u}_a = \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|} \qquad \text{Da cui: } \bar{a} = |\bar{a}|\,\bar{u}_a$$

SCOMPOSIZIONE DEI VETTORI



$\bar{a}$ vettore complanare con π

π piano definito da rette orientate (di versori $\bar{u}_1$ e $\bar{u}_2$)

$$\bar{a} = \underbrace{a_1\bar{u}_1}_{\text{componente}_1} + \underbrace{a_2\bar{u}_2}_{\text{componente}_2}$$

Il vettore $\bar{a}$ è esprimibile mediante una combinazione lineare: è la somma di ciascuna componente di $\bar{a}$.

I componenti 1 e 2 sono vettori!

Ciascun vettore componente di $\bar{a}$ può essere scritto come prodotto di uno scalare a (la componente) per il versore $\bar{u}$.

$$\text{Componente}_1 \; \bar{C}_1 = a_1\bar{u}_1$$

$\hookrightarrow$ la componente

Quando i versori u_1 e u_2 sono perpendicolari allora le componenti sono chiamate ortogonali.

PRODOTTO SCALARE

Si definisce Prodotto Scalare (o prodotto interno) di 2 vettori, $\bar{a}$ e $\bar{b}$, la grandezza scalare che si ottiene moltiplicando fra loro i moduli dei 2 vettori per il coseno dell'angolo θ compreso.

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}|\cos\theta$$

Il prodotto scalare di 2 vettori ortogonali è zero!

Per il prodotto scalare valgono le seguenti proprietà:

- commutativa - distributiva

Il prodotto scalare di un vettore con se stesso è uguale al quadrato del suo modulo:

$$\bar{a}\cdot\bar{a} = |\bar{a}||\bar{a}|\cos 0 = |\bar{a}|^2\cdot 1 = |\bar{a}|^2$$

ESPRESSIONI CARTESIANE delle OPERAZIONI FRA VETTORI

Dati i seguenti vettori: $\bar{V} = V_x \cdot \bar{i} + V_y \cdot \bar{j} + V_z \cdot \bar{k}$ $\quad \bar{W} = W_x \cdot \bar{i} + W_y \cdot \bar{j} + W_z \cdot \bar{k}$

valgono le seguenti relazioni:

1) $\bar{V} + \bar{W} = (V_x + W_x) \cdot \bar{i} + (V_y + W_y) \cdot \bar{j} + (V_z + W_z) \cdot \bar{k}$

2) $\bar{V} = \bar{W} \Leftrightarrow V_x = W_x , \; V_y = W_y , \; V_z = W_z$

3) $k\bar{V} = kV_x \cdot \bar{i} + kV_y \cdot \bar{j} + kV_z \cdot \bar{k}$

4) $\bar{V} \cdot \bar{W} = V_x W_x + V_y W_y + V_z W_z$ caso particolare $\bar{V} \cdot \bar{V} = |\bar{V}|^2 = V_x^2 + V_y^2 + V_z^2$

5 $\bar{V} \times \bar{W} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ V_x & V_y & V_z \\ W_x & W_y & W_z \end{vmatrix} = (V_y W_z - V_z W_y)\bar{i} - (V_x W_z - V_z W_x)\bar{j} + (V_x W_y - V_y W_x) \cdot \bar{k}$

DERIVATE DI VETTORI e VERSORI

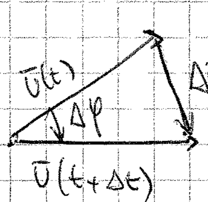
$$\bar{W}(t) = W_x(t) \cdot \bar{i} + W_y(t) \cdot \bar{j} + W_z(t) \cdot \bar{k}$$

$$\frac{d\bar{W}(t)}{dt} = \frac{dW_x}{dt} \cdot \bar{i} + \frac{dW_y}{dt} \cdot \bar{j} + \frac{dW_z}{dt} \cdot \bar{k}$$

essendo i versori cartesiani non dipendenti dalla variabile t.

Quando $\bar{W}(t)$ è costante in modulo e non in direzione in tal caso la derivata $\frac{d\bar{W}(t)}{dt}$ è $\perp$ a $\bar{W}(t)$

CASO $\bar{u}(t)$ costante in modulo



Versori: $\bar{u}(t)$; $\bar{u}(t+\Delta t)$

differenza: $\Delta \bar{u}$

$\Delta\varphi$: angolo di rotazione (corrispondente ad un Δt positivo)

Se $\Delta t \to 0$ allora $\Delta\varphi \to 0$ e quindi $\Delta\bar{u} \perp \bar{u}(t)$

Il modulo $|\Delta\bar{u}| = 2u \operatorname{sen} \frac{\Delta\varphi}{2}$ ed essendo $u = 1$

si ha: $$\frac{|\Delta\bar{u}|}{\Delta t} = \frac{|\Delta\bar{u}|}{\Delta\varphi} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta\bar{u}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta\varphi \to 0} \frac{\operatorname{sen}\frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}} \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}$$

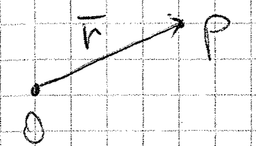
dunque $\frac{d\bar{u}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \cdot \bar{n}$ $\quad$ $\bar{n}$: versore che giace sul piano π contenente $\bar{u}(t)$ e $\bar{u}(t+dt)$; è $\perp$ a $\bar{u}(t)$; verso verso $\bar{u}(t+dt)$; $\frac{d\varphi}{dt}$ quantità positiva.

Introduciamo vettore $\bar{\omega}$ avente modulo $\frac{d\varphi}{dt}$, direzione $\perp$ a π e verso tale da vedere la rotazione infinitesima di $\bar{u}(t)$ verso $\bar{u}(t+dt)$ come antioraria:

Il momento assiale di un vettore rispetto una retta assegnata si annulla nei 2 casi particolari in cui:
- il vettore è parallelo alla retta;
- la retta d'azione del vettore incontra la retta;

VETTORE POSIZIONE E SISTEMI DI COORDINATE

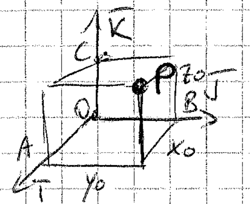
SISTEMI DI RIFERIMENTO S



Il vettore posizione caratterizza lo spostamento da O a P.

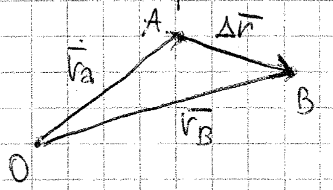
$$\boxed{\bar r = \overline{OP}}$$

COORDINATE CARTESIANE ORTOGONALI



Il vettore posizione di un generico punto P può essere rappresentato dalla terna (x, y, z), costituita dalle sue componenti lungo $\bar i, \bar j, \bar k$, che vengono dette coordinate cartesiane del punto: $\boxed{\bar r = x\bar i + y\bar j + z\bar k}$

- Il vettore spostamento $\overline{AB}$ è definito come differenza dei vettori posizione di B e di A:

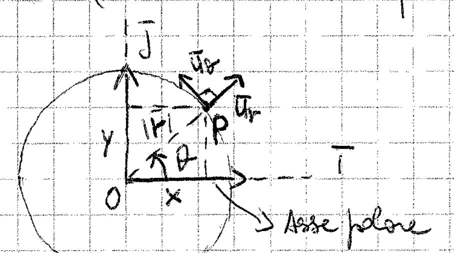


$$\overline{AB} = \bar r_B - \bar r_A \equiv \Delta\bar r$$

COORDINATE POLARI PIANE

Elementi caratteristici: - origine O, detto polo
- ASSE POLARE, semiretta orientata uscente da O.

Un elemento generico P del piano è individuato dalla coppia di scalari:
- r (distanza dal polo) - θ (angolo che forma il vettore $\bar r$ con l'asse polare



Per ogni punto P si introducono 2 versori ortogonali:

$\bar u_r$: versore della semiretta $\overline{OP}$ ($\theta = cost$), orientato nel verso degli r crescenti

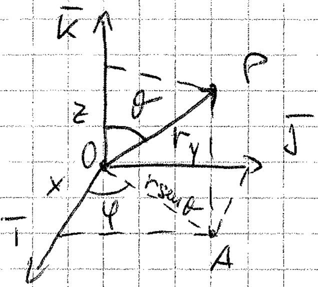
$\bar u_\theta$: versore della retta tangente in P alla circ. di centro e raggio $\overline{OP}$, orientato nel verso dei θ crescenti.

$\bar u_r$ e $\bar u_\theta$ creano una base ortogonale locale (cioè dipendente da P) in termini della quale è possibile esprimere ogni vettore, parallelo al piano considerato, come somma dei rispettivi componenti "radiale" e "trasverso".

- il versore $\overline{u}_r$ ⊥ sup sferica con $r = cost$
- il versore $\overline{u}_\theta$ ⊥ sup conica con $\theta = cost$
- il versore $\overline{u}_\varphi$ ⊥ al semipiano con $\varphi = cost$

I 3 versori dipendono dal punto P e formano una terna locale

LEGAMI FRA COORD. POLARI SFERICHE E QUELLE CARTESIANE



$$\begin{cases} x = (r \operatorname{sen}\theta)\cos\varphi \\ y = (r\operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta = \operatorname{Arccos}\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \varphi = \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{y}{x}\right) \end{cases}$$

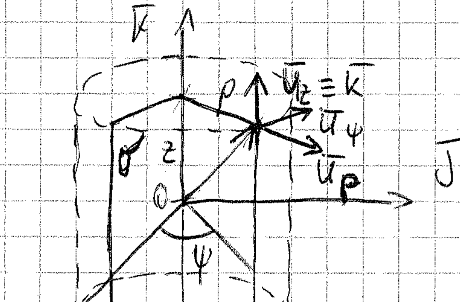
$$\overline{r} = r\,\overline{u}_r(P) \qquad \overline{r} = x\,\overline{i} + y\,\overline{j} + z\,\overline{k}$$

$$\overline{u}_r = \operatorname{sen}\theta\cos\varphi\,\overline{i} + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi\,\overline{j} + \cos\theta\,\overline{k}$$

$$\overline{u}_\theta = \cos\theta\cos\varphi\,\overline{i} + \cos\theta\operatorname{sen}\varphi\,\overline{j} - \operatorname{sen}\theta\,\overline{k}$$

$$\overline{u}_\varphi = -\operatorname{sen}\varphi\,\overline{i} + \cos\varphi\,\overline{j}$$

COORDINATE POLARI CILINDRICHE



Definito da: - retta orientata O_z di riferimento
- semipiano σ di riferimento contenente tale asse

Detto π il piano passante per O e ⊥ all'asse O_z le sup coordinate di tale sistema sono:
- i piani paralleli a π, individuati dalle loro quote z rispetto a π; al piano passante per P è ⊥ il versore $\overline{u}_z(P)$;
- le sup cilindriche con asse di simmetria O_z, definite dal raggio ρ; alla sup. cilindrica passante per P è ⊥ il versore $\overline{u}_\rho(P)$
- i semipiani passanti per O_z caratterizzati dall'angolo φ che essi formano con σ; al semipiano passante per P è ⊥ il versore $\overline{u}_\varphi(P)$

CINEMATICA

Consiste nello studio e nella descrizione del moto dei corpi dal punto di vista spazio-temporale.

IL MOTO

Il concetto di moto è un concetto relativo: un corpo è in moto rispetto a qualcosa d'altro. Pertanto per definire il moto di un corpo si deve scegliere un sistema di riferimento (la scelta è arbitraria).

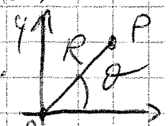
• Per semplificare lo studio del moto si prende in esame la schematizzazione del punto materiale:

Un oggetto, un corpo per definirsi PUNTO MATERIALE deve soddisfare le seguenti condizioni:

- il corpo ha dimensioni piccole (cioè trascurabili) rispetto al contesto;
- il corpo ha dimensioni piccole rispetto alla traiettoria percorsa.

• Per identificare un corpo bisogna:

- Trovare la POSIZIONE mediante il sistema di riferimento (composto da osservatore e uno cronometro [distanze e angoli]) in modo univoco. Si specifichi inoltre il TEMPO di quella posizione.



- Scegliere l'origine (normalmente coincide con la posizione dell'osservatore). Si può individuare un "punto comodo" (punto per semplificare i calcoli o previsioni su traiettoria).

Il moto si può descrivere attraverso: - TABELLE - GRAFICI - FORMULE

EQUAZIONE VETTORIALE del MOTO; TRAIETTORIA e LEGGE ORARIA

Si dice che un corpo è in moto rispetto ad un dato sistema di riferimento S quando la sua posizione in S cambia col tempo.

Per definire l'eq. vettoriale del moto bisogna osservare 2 ipotesi:

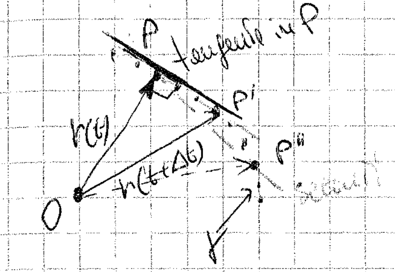
- il tempo varia con continuità $\rightarrow$ variabile continua t
- il moto varia con continuità:

Si considerino le posizioni del punto materiale P ai tempi t e $t+\Delta t$:

$$|\bar{r}(t) - \bar{r}(t+\Delta t| \rightarrow 0 \quad \text{per } \Delta t \rightarrow 0$$

Ciò equivale all'ipotesi di continuità del moto.

IL VETTORE VELOCITÀ   S.I $\left[\frac{m}{s}\right]$



Velocità media nell'intervallo Δt:

$$\bar{v}_m = \frac{\bar{r}(t+\Delta t) - \bar{r}(t)}{\Delta t}$$

Essa non dipende dal percorso effettivamente compiuto nell'intervallo fra t e t', ma solo dalle posizioni iniziali e finali, e dal tempo di percorrenza.
Una descrizione più fedele e PUNTUALE delle caratteristiche del moto si ha esaminando il vettore $\bar{v}_m$ al ridursi della durata dell'intervallo temporale Δt ($\Delta t \to 0$).

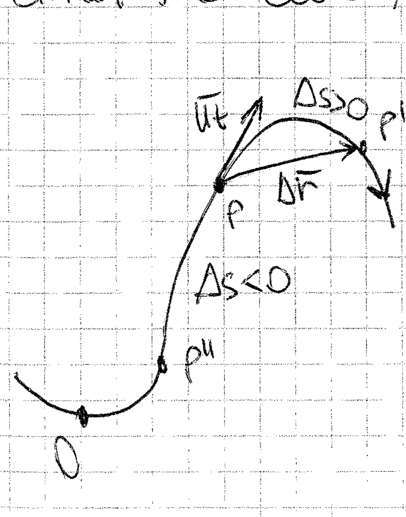
Velocità istantanea al tempo t:

$$\bar{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{v}_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t}$$

Per definizione di derivata di un vettore, si conclude che $\bar{v}$ è la derivata del vettore posizione rispetto al tempo:

$$\boxed{\bar{v}(t) = \frac{d\bar{r}(t)}{dt}}$$

Per definizione la velocità media tra t e t' è un vettore parallelo allo spostamento $\overline{PP'}$ e ha quindi direzione della retta secante che interseca in P e P'. Al ridursi di Δt, P' tende a P e la direzione della secante PP' tende per definizione a quella della retta tangente in P alla traiettoria; la velocità istantanea al tempo t ha la direzione della retta tangente alla traiettoria nel punto P.



Al ridursi di Δt, lo spostamento $\overline{PP'}$ tende ad avvicinarsi alla traiettoria e il suo modulo, che rappresenta la lungh. della corda corrispondente, è sempre meglio approssimato dalla lunghezza dell'arco della traiettoria ($|\Delta s|$) da esso sotteso:

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{|\overline{PP'}|}{|\Delta s|} = 1 = \frac{|\Delta \bar{r}|}{|\Delta s|}$$

la conoscenza dell'eq. oraria del moto permette di determinare la V_s ad ogni istante, mediante l'operazione di derivazione rispetto al tempo.
La grandezza vettoriale velocità fornisce le informazioni necessarie per seguire gli spostamenti elementari di un corpo in movimento.
Il moto può essere considerato infatti come una successione di spostamenti (rettilinei) infinitesimi $d\bar{r} = \bar{v}\,dt$, avvenuti in intervalli temporali dt. Tali spostamenti hanno, in ogni istante, la direzione e il verso della velocità istantanea e hanno intensità proporzionale ad
Lo spazio percorso è la somma delle lunghezze degli archi infinitesimi percorsi sulla traiettoria e quindi è dato dalla somma delle grandezze elementari $|ds| = |\bar{v}|\,dt \equiv v\,dt$

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} |\bar{v}|\,dt \equiv \int_{t_1}^{t_2} v\,dt} \quad [\text{SPAZIO PERCORSO}]$$

Per definizione lo spazio percorso non è negativo, nullo solo se fermo.
Questa quantità è in generale diversa dalla somma degli archi infinitesimi ds, cioè dall'integrale definito della velocità ~~scalare~~ scalare, che dà la differenza fra i valori finale e iniziale dell'ascissa curvilinea del punto materiale!

$$\Delta s \equiv s_2 - s_1 = \int_{t_1}^{t_2} V_s\,dt \equiv \int_{t_1}^{t_2} \frac{ds}{dt}\,dt \equiv \int_{s_1}^{s_2} ds$$

Questa differenza potrebbe essere nulla anche se il corpo è in movimento, come nel caso di un moto di andata e ritorno alla posizione iniziale.
Il tachimetro dà una misura del modulo della velocità scalare V_s e non la velocità scalare stessa.
Il contachilometri fornisce lo spazio percorso e non la differenza fra i valori finale ed iniziale!

RAPPRESENTAZIONE CARTESIANA DELL'ACCELERAZIONE

$$\boxed{\bar{a} = \frac{dv_x}{dt}\bar{i} + \frac{dv_y}{dt}\bar{j} + \frac{dv_z}{dt}\bar{k} = \frac{d^2x}{dt^2}\bar{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\bar{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\bar{k}}$$

$$\boxed{\bar{a} = \ddot{x}\bar{i} + \ddot{y}\bar{j} + \ddot{z}\bar{k}}$$

ESPRESSIONE INTRINSECA dell'ACCELERAZIONE

L'espr. intrinseca permette di scomporre il vettore $\bar{a}$ in 2 vett. componenti che riflettono ciascuno la variazione del suo modulo e i cambiamenti della direzione orientata: si scompone in somma di vettore componenti, uno parallelo alla velocità $\bar{a}_{\parallel}$, e collegato alla rapidità di variazione della parte scalare di questa, e un altro perpendicolare alla velocità $\bar{a}_{\perp}$, dipendente dalla rapidità di variazione della sua direzione.

$$\boxed{\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v_s\bar{u}_t) = \underbrace{\frac{dv_s}{dt}\bar{u}_t}_{\bar{a}_{\parallel}} + \underbrace{v_s\frac{d\bar{u}_t}{dt}}_{\bar{a}_{\perp}}}$$

Essendo $v_s = \frac{ds}{dt}$, $\boxed{\bar{a}_{\parallel} = \frac{d^2s}{dt^2}\bar{u}_t \equiv \ddot{s}\,\bar{u}_t}$ [ACCELER. TANGENZIALE]

Tale componente ha lo stesso verso di $\bar{u}_t$ se v_s cresce o verso opposto se v_s diminuisce. Esso è il componente di $\bar{a}$ che riflette le variazioni di modulo e/o del verso di $\bar{v}$, viene detto accelerazione tangenziale [$\bar{a}_{\parallel}$ o $\bar{a}_t$].

Il versore tangente $\bar{u}_t = \frac{d\bar{r}}{ds}$ dipende dalla scelta del verso positivo per le ascisse curvilinee s sulla traiettoria e non dalle effettive caratteristiche istantanee del moto. Si esprime quindi la dipendenza di $\bar{u}_t$ dal tempo attraverso la variazione di $\bar{u}_t$ al cambiare di s (che dipende dalla forma della traiettoria) e di quella di s al cambiare di t (che è più direttamente collegata al moto del punto)

$$\frac{d\bar{u}_t}{dt} = \frac{d\bar{u}_t}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = \dot{s}\frac{d\bar{u}_t}{ds}$$

Il modulo di $\bar{a}$ è ricavabile mediante:

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \qquad |\bar{a}| = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

CARTESIANE INTRINSECHE

CLASSIFICAZIONE DI MOTI ELEMENTARI

Le 2 relazioni

$$\begin{cases} \bar{v} = \dot{s}\,\bar{u}_t \\ \bar{a} = \ddot{s}\,\bar{u}_t + \dfrac{\dot{s}^2}{\rho}\,\bar{u}_n \end{cases}$$

permettono di classificare i moti più elementari su traiettorie note, in quanto permettono di separare l'aspetto cinematico da quello geometrico (traiettoria) del moto.

Esaminando l'eq. oraria si definiscono:

a) moti con $\dot{s} = \text{costante} = \dot{s}_0$, detti moti UNIFORMI;

b) moti con $\ddot{s} = \text{costante} = \ddot{s}_0$, detti UNIFORMEMENTE VARI.

Dal punto di vista geometrico, moti con traiettoria semplice sono:

c) moti RETTILINEI, caratterizzati da $\rho \to \infty$;

d) moti CIRCOLARI, in cui $\rho = \text{costante}$.

MOTI UNIFORMI

La ricerca di una funzione $s(t)$, di cui è nota la derivata, equivale a determinare una primitiva di $\dot{s}(t)$, cioè a fare l'integrale indefinito:

$$\boxed{s(t) = \int \dot{s}(t)\,dt}$$

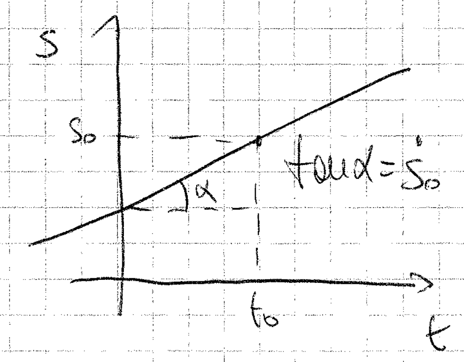
a) Nel caso $\dot{s} = \text{costante} = \dot{s}_0$: $\boxed{s(t) = \int \dot{s}_0\,dt = \dot{s}_0 \int dt = \dot{s}_0 t + C}$

Il valore C si determina dalla conoscenza dell'ascissa curvilinea $s_0 \equiv s(t_0)$ ad un istante t_0:

EQ. ORARIA MOTO UNIFORME

$$s(t) - s(t_0) = \dot{s}_0 (t - t_0) \Rightarrow \boxed{s(t) = \dot{s}_0 (t - t_0) + s_0}$$

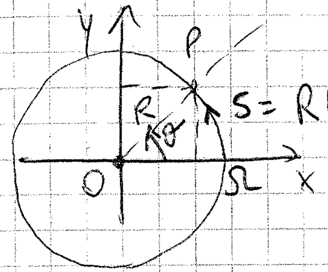
La velocità scalare $\dot{s}$ è costante, se $t_0 = 0$ diventa $\boxed{s(t) = \dot{s}_0 t + s_0}$



Per ottenere l'equazione oraria a partire dalla velocità è necessario conoscere anche il valore di $s(t)$ ad un istante dato t_0. Tale eq. è rappresentata dalla retta di coeff. angolare $\dot{s}_0$, passante per il punto (t_0, s_0)

MOTI CIRCOLARI

> GEOMETRIA e VERSORI INTRINSECI della TRAIETTORIA



Traiettoria circolare di raggio R e centro O (piano xy). EQ. PARAMETRICHE in termini dell'ang. θ (anomalia)

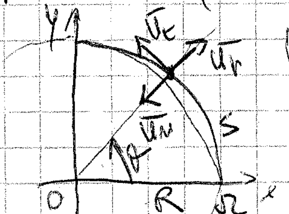
$x = R\cos\theta$; $y = R\,\mathrm{sen}\,\theta$; $z = 0$

Durante il moto il vettore posizione $\bar{r}$ ha modulo costante R e versore $\boxed{\bar{u}_r = \frac{\bar{r}}{R} = \cos\theta\,\bar{i} + \mathrm{sen}\,\theta\,\bar{j}}$

Si assume un sistema di coordinate curvilinee sulla circonferenza con origine $\Omega(R,0,0)$ e orientazione antioraria, si ha $s = R\theta$ $(0 \le s < 2\pi R)$; la traiettoria è rappresentata dall'eq. vettoriale

$$\boxed{\bar{r}(s) = R\cos\frac{s}{R}\,\bar{i} + R\,\mathrm{sen}\frac{s}{R}\,\bar{j}}$$

Per ogni punto della traiettoria si possono ricavare i versori tangente e normale (centro curvatura O, raggio di curvatura R)



$[ds = R\,d\theta]$

$$\boxed{\bar{u}_t = \frac{d\bar{r}}{ds} = \frac{d\bar{u}_r}{d\theta} = -\mathrm{sen}\,\theta\,\bar{i} + \cos\theta\,\bar{j}}$$

$$\boxed{\bar{u}_n = R\frac{d\bar{u}_t}{ds} = \frac{d\bar{u}_t}{d\theta} = -\cos\theta\,\bar{i} - \mathrm{sen}\,\theta\,\bar{j} = -\bar{u}_r}$$

$\bar{u}_t \perp \bar{u}_r$, $\bar{u}_n$ punta da P verso O ed è versore opposto ad $\bar{u}_r$.

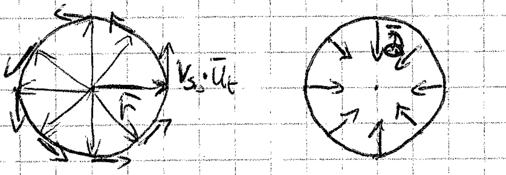
2) MOTO CIRCOLARE UNIFORME

- $v_s = \text{cost}$ $\boxed{s(t) = v_{s_0}(t - t_0) + s_0}$

oppure essendo $s = \theta R$ $\boxed{\theta(t) = \frac{v_{s_0}}{R}(t - t_0) + \theta_0}$ essendo $\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\left(\frac{s}{R}\right)}{dt} = \frac{1}{R}\frac{ds}{dt} = \frac{v_{s_0}}{R}$

- $\ddot{s} = a_t = 0$, accelerazione solo centripeta:

$$\boxed{\bar{a} = a_n\,\bar{u}_n \equiv \frac{v_{s_0}^2}{R}\,\bar{u}_n}$$



Nel moto circolare uniforme l'accelerazione è sempre ≠ da zero ed è centripeta, ha modulo costante, così come la velocità che è ⊥ sempre ad $\bar{a}$.

In generale chiamiamo periodo fondamentale di un moto il più piccolo valore di T per cui è soddisfatta la suddetta eq. vettoriale.
Il moto circolare uniforme per quanto detto è un moto periodico di periodo: $T = \frac{2\pi}{|\omega|}$ [PERIODO MOTO CIRC. UNIF.]
La grandezza FREQUENZA è definita: $f = \frac{1}{T}$ $[s^{-1} = Hz]$
ed esprime il numero di periodi compiuti nell'unità di tempo.

EQ. DIFF. DEL MOTO CIRCOLARE UNIFORME

La relazione di proporzionalità tra $\bar{a}$ e $\bar{r}$ è opportuno scriverla come:

$$\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = -\omega_0^2\bar{r}$$

corrispondente alle eq. $\frac{d^2x(t)}{dt} = -\omega_0^2 x(t)$; $\frac{d^2y(t)}{dt} = -\omega_0^2 y(t)$

Tali eq. hanno la seguente struttura:

$$\boxed{\frac{d^2 f(t)}{dt} + \omega_0^2 f(t) = 0}$$

Dove l'integrale generale dell'eq. è:

$$f(t) = A\cos(\omega_0 t + \delta)$$ dove A e δ sono cost. arbitrarie.

MOTO OSCILLATORIO ARMONICO

Si consideri un punto materiale che si muove lungo una retta [asse x per comodità] che si muove secondo la legge oraria:

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)}$$

Dove A, ω_0 sono costanti reali positive e φ_0 è una cost. reale.

A: AMPIEZZA [m] corrisponde al massimo valore che può avere l'ascissa $x(t)$

φ: FASE [rad] angolo. φ_0 angolo all'istante $t=0$ iniziale.

ω_0: PULSAZIONE $[\frac{rad}{s}]$ = modulo di ω.

$x(t)$: ascissa è detta ELONGAZIONE

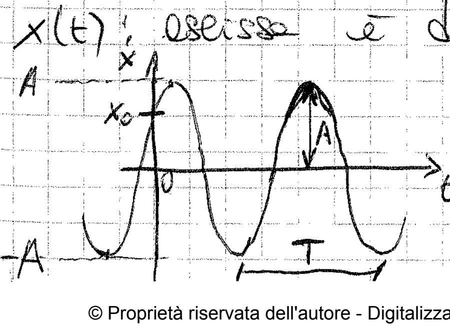
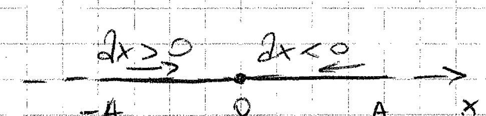


DIAGRAMMA ORARIO DEL MOTO OSCILLATORIO ARMONICO



TRAIETTORIA E ACCELERAZIONE DEL MOTO OSC. ARMONICO

MOTO PIANO IN COORDINATE POLARI

Ogni vettore parallelo al piano considerato può essere espresso in termini dei suoi componenti paralleli ai versori $\bar{u}_r(P)$ e $\bar{u}_\theta(P)$ relativi al generico punto P (componente radiale e trasverso).

Vettore posizione $\boxed{\bar{r} = r \cdot \bar{u}_r}$

Essendo $\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt}$: $\bar{v} = \frac{dr}{dt} \cdot \bar{u}_r + \frac{d\bar{u}_r}{dt} \cdot r = v_r \cdot \bar{u}_r + \frac{d\bar{u}_r}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \cdot r = v_r \cdot \bar{u}_r + r \frac{d\theta}{dt} \cdot \bar{u}_\theta$

$$\boxed{\bar{v} = v_r \cdot \bar{u}_r + v_\theta \cdot \bar{u}_\theta}$$

$\boxed{v_r = \frac{dr}{dt} = \dot{r}}$ COMP. RADIALE $\qquad \boxed{v_\theta = r\frac{d\theta}{dt} = r\dot{\theta}}$ COMP. TRASVERSA

I componenti sono $\perp$ tra loro. Il modulo di $\bar{v}$ è dato da

$$\boxed{v = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2}}$$

Significato fisico:

Comp RADIALE di $\bar{v}$: fornisce la rapidità istantanea con cui cambia la distanza del punto mobile dal polo

Comp. TRASVERSA di $\bar{v}$: riflette la variazione di direzione del vettore posizione

In una traiettoria circolare è evidente (con centro nel polo di coordinate) che r è costante nel tempo e pertanto la componente ~~radiale~~ radiale è identicamente nulla e la velocità è puramente trasversa.

Per l'accelerazione si ha:

Essendo $\frac{d\bar{u}_\theta}{dt} = \frac{d\bar{u}_\theta}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = -\dot{\theta} \cdot \bar{u}_r$

si ottiene:

$$\bar{a} = \frac{dv_r}{dt} \cdot \bar{u}_r + \frac{d\bar{u}_r}{dt} \cdot v_r + \frac{dv_\theta}{dt} \cdot \bar{u}_\theta + \frac{d\bar{u}_\theta}{dt} \cdot v_\theta = \ddot{r} \cdot \bar{u}_r + \frac{d\bar{u}_r}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \cdot \dot{r} + \frac{d(\dot{\theta} r)}{dt} \cdot \bar{u}_\theta - \dot{\theta}\bar{u}_r \dot{\theta} r$$

$$= \ddot{r}\bar{u}_r + \dot{\theta}\dot{r}\bar{u}_\theta + \underbrace{\left(\frac{d\dot{\theta}}{dt} \cdot r + \frac{dr}{dt} \cdot \dot{\theta}\right)}_{[\ddot{\theta} r + \dot{r}\dot{\theta}]}\bar{u}_\theta - \dot{\theta}^2 r \bar{u}_r =$$

$$= (\ddot{r} - \dot{\theta}^2 r)\,\bar{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\,\bar{u}_\theta$$

Quindi $\boxed{\bar{a} = a_r \cdot \bar{u}_r + a_\theta \cdot \bar{u}_\theta}$

$\boxed{a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2}$ COMP. RADIALE $\qquad \boxed{a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})}$ COMP. TRASVERSA

Si ottiene:

$$\boxed{\bar{v}(t) = \bar{v}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \bar{a}(t')\,dt' = \bar{v}(t_0) + \int_{\bar{v}(t_0)}^{\bar{v}(t)} d\bar{v}(t')}$$

Se è nota $\bar{a}(t)$ per ogni t in un dato intervallo temporale, e sono note posizione e velocità nell'istante t_0, si può ottenere l'eq. vett. del moto

> MOTO CON ACCELERAZIONE COSTANTE: I GRAVI

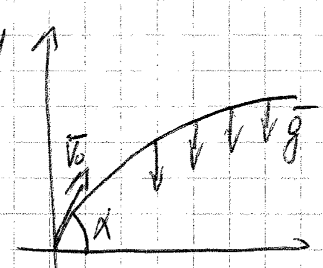
Nei casi in cui risultino trascurabili gli effetti della resistenza dell'a tutti i corpi in caduta libera (nelle vicinanze della superficie terrestre si muovono con una accelerazione che può essere considerata come costante, diretta verticalmente verso il basso, $\bar{g}$.

Se $\bar{a}(t) = \bar{g} = \text{cost}$:

$$\bar{v}(t) = \bar{v}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \bar{g}\,dt' = \bar{v}_0 + \bar{g}\int_{t_0}^{t} dt' = \bar{v}_0 + \bar{g}(t-t_0)$$

$$\bar{r}(t) = \bar{r}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \bar{v}(t')\,dt' = \bar{r}_0 + \int_{t_0}^{t} [\bar{v}_0 + \bar{g}(t-t_0)]\,dt' =$$

$$= \bar{r}_0 + \bar{v}_0(t-t_0) + \frac{1}{2}\bar{g}(t-t_0)^2$$



Per lo studio dei gravi risulta particolarmente conveniente l'utilizzo di coordinate cartesiane. Di norma si sceglie l'asse y positivo verso l'alto: $\bar{a} = \bar{g} = -g\bar{j}$

Date le C.I.: $t_0 = 0$; $x_0 = y_0 = z_0 = 0$. Detto α l'angolo tra $\bar{v}_0$ e asse x, le eq. vettoriali di $\bar{v}$ e $\bar{r}$ sono rispettivamente:

$$\bar{v}(t) = (v_0\cos\alpha)\,\bar{i} + (v_0 \operatorname{sen}\alpha - gt)\,\bar{j}$$

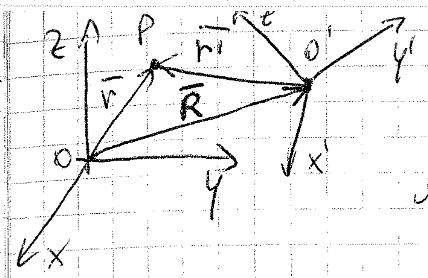
$$\bar{r}(t) = (v_0\cos\alpha)t\,\bar{i} + \left[(v_0\operatorname{sen}\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2\right]\bar{j}$$

Per le componenti cartesiane:

$$\begin{cases} v_x = v_{0x} = v_0\cos\alpha \\ v_y = v_{0y} = v_0\operatorname{sen}\alpha - gt \\ v_z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = (v_0\cos\alpha)t \\ y = (v_0\operatorname{sen}\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 \\ z = 0 \end{cases}$$

[EQ. PARAMETRICHE DELLA TRAIETTORIA]

La proiezione del punto sull'asse x si muove di moto (rettilineo) uniforme, la proiezione lungo l'asse y si muove invece di moto (rettil.) uniformemente accelerato, di accelerazione scalare $-g$.



Sia $\bar{R}$ il vettore posizione dell'origine O' di S' rispetto all'origine di S.

essendo $\bar{v} = \left(\frac{d\bar{r}}{dt}\right)_S$ velocità del punto materiale in S

$\bar{v}' = \left(\frac{d\bar{r}'}{dt}\right)_{S'}$ velocità del punto materiale in S'

Posto $\bar{V}(t) = \left(\frac{dR}{dt}\right)_S$ risulta

$$\boxed{\bar{v}_T = \bar{V}(t) + \bar{\omega}(t) \times [\bar{r}(t) - \bar{R}(t)]}$$

la velocità di trascinamento dipende dal moto relativo dei 2 sistemi di riferimento e inoltre dalla particolare posizione occupata dal punto mobile all'istante considerato.

$\bar{v}_T$ -> se $\bar{\omega} = 0$ -> $\bar{v}_T = \bar{V}(t)$ moto di traslazione di S' rispetto

-> se $\bar{V} = 0$ e $\bar{\omega} \neq 0$ -> $\bar{v}_T = \bar{\omega} \times (\bar{r} - \bar{R})$ moto di rotazione di S' rispetto al

In generale se $\bar{\omega} \neq 0$ e $\bar{V} \neq 0$, $\bar{v}_T$ è un moto di rototraslazione.

Per l'accelerazione si ha:

$$\boxed{\bar{a} = \bar{a}' + \bar{a}_T + \bar{a}_{Co}}$$

$\bar{a}_T$: acc. di trascinamento dipende dal moto relativo dei sist. di rif. e dalla posizione del punto materiale

$\bar{a}_{Co}$: accelerazione di Coriolis (acc. complementare) dipende dalla velocità del punto in S' ed è presente solo se $\bar{v}' \neq 0$

$$\boxed{\bar{a}_T = \bar{A} + \bar{\alpha} \times (\bar{r} - \bar{R}) + \bar{\omega} \times [\bar{\omega} \times (\bar{r} - \bar{R})]}$$

$\bar{A} = \left(\frac{dR^2}{dt^2}\right)_S$; $\bar{\alpha} = \left(\frac{d\bar{\omega}}{dt}\right)_S$

$$\boxed{\bar{a}_{Co} = 2\bar{\omega} \times \bar{v}'}$$

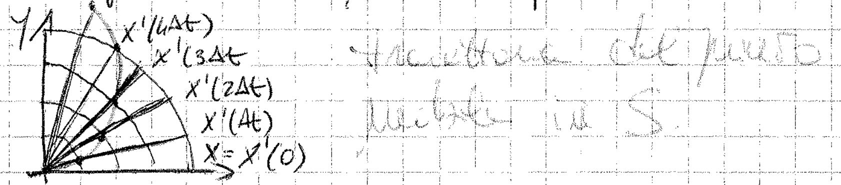
Anche l'angolo θ che forma il vettore posizione r con l'asse x del riferimento S dipende da t: $\boxed{\theta = \omega t}$

Da queste eq. si può ricavare l'eq. esplicita della traiettoria del punto in S:

$$\boxed{r = \frac{V_0'\theta}{\omega}}$$

EQ ESPLICITA della TRAIETTORIA del punto mobile in S

È l'eq. di una curva a spirale; il moto è perciò accelerato.



Il caso più generale che si può avere è il moto di ROTOTRASLAZIONE

DINAMICA

Studia le correlazioni fra le caratteristiche del moto dei corpi e quelle delle interazioni cui sono sottoposti [studio del moto tenendo conto delle cause]

La FORZA è una grandezza fisica vettoriale caratterizzata da direzione, verso e intensità.

Essa interagisce con i corpi: - modificando lo stato di moto dei corpi su cui agisce e - li deforma.

Operativamente la forza si può misurare attraverso lo strumento "dinamometro" che mediante la deformazione di una molla fornisce la misura in N del modulo della forza applicata.

PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE: le forze si sommano come vettori.

COND. DI EQUILIBRIO di un corpo: Esso è in eq. quando la somma vettoriale di tutte le forze agenti su di esso è nulla ($\vec{R} = 0N$)

REAZIONE VINCOLARE: È la forza esercitata da un piano di vincolo. Il vincolo nasce tra interazione di contatto tra un corpo e un piano dove il piano si oppone ad alcuni movimenti in determinate direzioni del corpo. La reaz. vinc. può avere sia comp. ⊥ che tangen modulo dell'accelerazione dei punti della sup. terrestre rispetto al sistema delle stelle lontane è abbastanza piccolo, rispetto all'acc. gravitazionale, la non inerzialità a volte può essere trascurata_

SIGN. FISICO del I principio: Non sono le forze a generare il movimento: un corpo libero si muove con velocità costante_

II PRINCIPIO DELLA DINAMICA

"In un sistema di riferimento inerziale, ogni volta che un corpo (un moto) è accelerato, esiste (almeno) una forza responsabile di tale accelerazione; tra forza risultante e accelerazione, esiste in ogni istante la relazione $\bar{F}(t) = m\,\bar{a}(t)$".

I vettori forza e accelerazione risultano proporzionali fra loro istante per istante, attraverso una costante scalare che appare tipica del corpo e che viene chiamata massa inerziale:

$$\boxed{\sum_{i}^{N} \bar{F}_i(t) = m\,\bar{a}(t)}$$

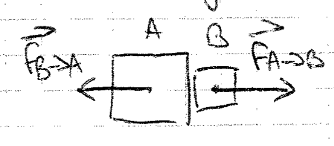
PESO DI UN CORPO

Sulla terra esiste la forza gravitazionale, forza che agisce su ogni corpo facendolo cadere nel vuoto con accelerazione costante $\vec{g}$ pari a $9{,}81\ \frac{m}{s^2}$. Il peso è definito:

$$\boxed{\vec{P} = m\vec{g}}$$

III PRINCIPIO DELLA DINAMICA (O DI AZIONE-REAZIONE)

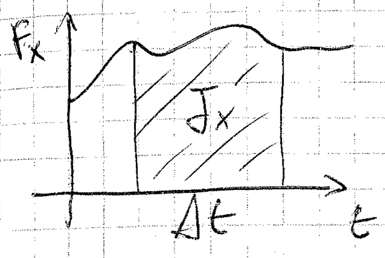
"Ad ogni forza applicata da un corpo A su un corpo B corrisponde una reazione che consiste in una forza uguale e contraria esercitata dal corpo B sul corpo A".



$$\bar{F}_{B\to A} = -\bar{F}_{A\to B}$$

$$F_{A\to B} = F_{B\to A}$$

Una forza impulsiva è una forza rapidamente variabile nel tempo (in ISTANTI) ed è difficilmente quantificabile.



Si definisce IMPULSO di UNA FORZA $\bar{F}$ nell'intervallo di tempo (t_1, t_2) la grandezza vettoriale:

$$\boxed{\bar{J} = \int_{t_1}^{t_2} \bar{F} dt} \quad \text{[IMPULSO]}$$

nella forma cartesiana si ha:

$$\bar{J} = \int_{t_1}^{t_2} \bar{F} dt = \bar{i} \int_{t_1}^{t_2} F_x dt + \bar{j} \int_{t_1}^{t_2} F_y dt + \bar{k} \int_{t_1}^{t_2} F_z dt$$

le componenti cartesiane dell'impulso hanno una semplice interpretazione grafica: ogni componente è data dall'area sottesa dalla curva che rappresenta $F_{componente}$ nell'intervallo temporale considerato. Se la forza è costante in tale intervallo Δt si ha $\bar{J} = \bar{F} \Delta t$.

Se su un punto materiale agiscono più forze $\bar{F}_i$, esercitando singolarmente l'impulso $\bar{J}_i$, in un dato intervallo temporale, si vede che, detta $\bar{F}$ la forza risultante, il corrispondente impulso $\bar{J}$ è uguale alla somma vettoriale degli impulsi delle singole forze

$$\bar{J} = \int_{t_1}^{t_2} \bar{F} dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \bar{F}_i dt = \sum_i \int_{t_1}^{t_2} \bar{F}_i dt = \sum_i \bar{J}_i$$

TEOREMA DELL'IMPULSO [T. della QUANTITÀ di MOTO]

EN. "L'impulso della forza risultante che agisce su un punto materiale, durante un intervallo di tempo Δt, è uguale alla variazione della quantità di moto in Δt."

Poiché $\vec{F} = \frac{d\bar{p}}{dt}$ (II PRINC. della DINAMICA)

si ha $\bar{F} dt = d\bar{p}$ e pertanto:

$$\boxed{\bar{J} = \int_{t_1}^{t_2} \bar{F} dt = \int_{t_1}^{t_2} d\bar{p} = \bar{p}_2 - \bar{p}_1 \equiv \Delta \bar{p}}$$

APPLICAZIONI DEI PRINCIPI DELLA DINAMICA

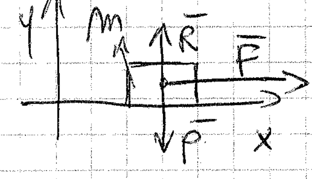
In generale una forza può dipendere dalla posizione, dalla velocità e dal tempo $\bar{F} = \bar{F}(\bar{r}, \bar{v}, t)$. Di conseguenza la relazione $\bar{F} = m\bar{a}$ eq. (per es. in coord. cartesiane) al sistema di 3 eq. differenziali:

$$\begin{cases} F_x(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z},t) = m\ddot{x} \\ F_y(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z},t) = m\ddot{y} \\ F_z(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z},t) = m\ddot{z} \end{cases}$$

Quando non è possibile risolvere questo sistema analiticamente la soluzione viene cercata per via numerica.

> FORZE COSTANTI

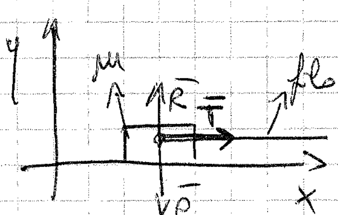
Forze applicate al corpo sono costanti ovvero non dipendono né da $\bar{r}, \bar{v}$ e t



Al corpo è applicata direttamente una forza costante:

$\bar{F} + \bar{R} + \bar{P} = m\bar{a}$ eq. vettoriale

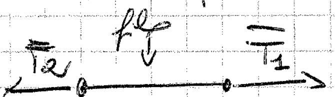
$$\begin{cases} F = m\ddot{x} \\ R - P = m\ddot{y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_x = \frac{F}{m} \\ R = P \end{cases}$$



Al corpo è applicata una forza costante attraverso un filo di massa trascurabile:

$\bar{T} + \bar{R} + \bar{P} = m\bar{a}$

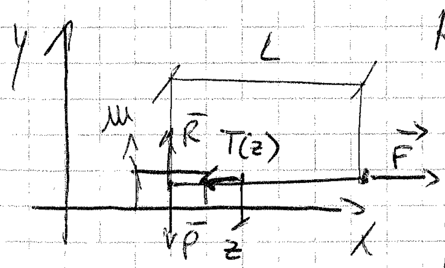
$$\begin{cases} T = m\ddot{x} \\ R - P = m\ddot{y} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a_x = \frac{T}{m} \\ R = P \end{cases}$$



Essendo il filo di massa trascurabile:

$\bar{T}_1 + \bar{T}_2 = m_{filo}\,\bar{a} \approx 0$ (essendo $m_{filo} \approx 0$) $\Rightarrow T_1 \approx T_2 = T$

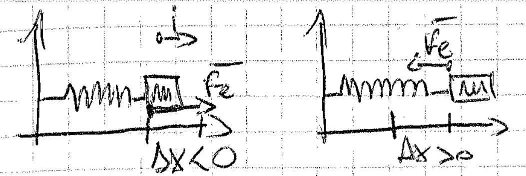
Un filo ideale di questo tipo si limita a trasmettere la forza applicata da un estremo all'altro.



Al corpo è applicata una forza costante attraverso un filo di massa NON trascurabile: la tensione varia da punto a punto del filo. Si consideri la m_{filo} distribuita in modo omogeneo ovvero la m per unità di lungh. sia la stessa per ogni punto $\left[\lambda = \frac{m_{filo}}{L}\right]$. Il sistema ha massa $M = m + m_{filo}$ al quale è applicata la forza $\bar{F}$ ottenendo l'accelerazione: $\bar{F} = M\bar{a} \Rightarrow a = \frac{F}{m + m_{filo}}$

Inoltre si può ricavare F_{filo} che il filo applica al corpo di massa m, se l'accelerazione del corpo è $\bar{a}$ allora: $\bar{F}_{filo} = m\bar{a}$

Con la stessa accelerazione si muove anche un elemento del filo, di lunghezza $(L-z)$ e massa $\lambda(L-z)$ [z è la distanza del punto di attacco sul



FORZA ELASTICA

> Un corpo di massa m, su cui agisce una forza elastica, si muove di moto oscillatorio armonico:

$$F_e = m a \Rightarrow -k\Delta x = m\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} = -k\frac{\Delta x}{m} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}\Delta x = 0$$

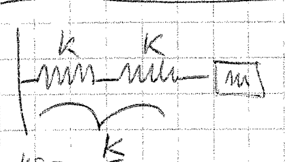
È l'eq. diff. del moto armonico e ha soluzione:

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad \text{con} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

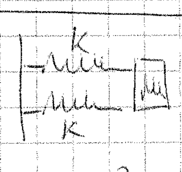
le due costanti sono legate alle C.I. tramite le relazioni:

$$A = \sqrt{\frac{v_0^2}{\omega_0^2} + x_0^2} \qquad \tan\varphi_0 = -\frac{v_0}{\omega_0 x_0}$$

MOLLE IN SERIE — MOLLE IN PARALLELO



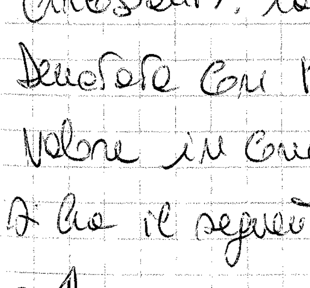
$K_{TOT} = \frac{k}{2}$



$K_{TOT} = 2k$

MATERIALI ELASTICI

Il comportamento dei materiali elastici è un riflesso del comportamento microscopico delle loro molecole. Si consideri un filo di lunghezza L e sezione di area A. Quando il filo non è sollecitato, le sue molecole si trovano in situazioni di equilibrio, sotto l'azione di quelle circostanti: la forza risultante che agisce su ogni molecola è nulla. Denotato con r la distanza media fra le molecole e con r_0 il suo valore in condizione di equilibrio, per $r \approx r_0$ (ove la forza è nulla) si ha il seguente andamento della parte scalare della forza:



DIPENDENZA della FORZA FRA MOLECOLE DALLA LORO DISTANZA NELL'INTORNO del PUNTO DI EQUILIBRIO

Approssimando l'andamento con la tangente in r_0:

$$f_r(r) = \left(\frac{df_r}{dr}\right)_{r_0}(r - r_0) = -C(r - r_0) \qquad C = \text{costante positiva}$$

La tensione in una sezione qualsiasi del corpo può essere espressa moltiplicando per il numero N di molecole della sezione:

$$T = CN|r - r_0|$$

Per def $\theta = \frac{s}{L}$, si riscrive: $\ddot{s} + g \operatorname{sen}\left(\frac{s}{L}\right) = 0$

Ma questa è un'eq. differenziale trascendente non risolvibile per via analitica! Pertanto bisogna "linearizzare" la funzione sen in un intorno di θ sufficientemente piccolo attraverso la serie di Taylor: al primo ordine $\operatorname{sen}\left(\frac{s}{L}\right) \simeq \frac{s}{L}$ per $\theta \to$ sufficientemente piccolo

E si ottiene:

$$\ddot{s} + g\frac{s}{L} = 0$$

Riconducibile all'eq. del moto oscillatorio armonico, di pulsazione $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$.

La legge oraria è pertanto $s(t) = s_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$

Cui periodo $\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}}$ [PERIODO PENDOLO di PICCOLE OSCILLAZIONI]

Le piccole oscillazioni sono ISOCRONE, cioè hanno periodo indipendente dalla loro lunghezza.

FORZE CHE DIPENDONO DALLA VELOCITA'

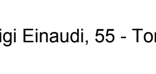
Si consideri un corpo in caduta libera che, muovendosi entro un fluido viene continuamente frenato dalla resistenza del mezzo. Si tratta di una forza che dipende da numerosi parametri che caratterizzano sia il corpo sia il fluido in cui è immerso e inoltre dipende dalla velocità relativa.

MOTO LAMINARE

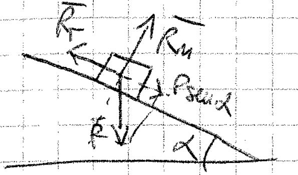
Corpo di forma semplice, bassa velocità, assenza di turbolenze: la forza di resistenza del mezzo è rappresentata dalla

LEGGE DI STOKES $\boxed{\bar{F}_R = -\beta \bar{v}}$ [LEGGE di STOKES]

Per un oggetto in caduta libera verticale da fermo rispetto a Te si può impostare la seguente equazione:



La forza di attrito non dipende dalla superficie macroscopica di contatto dei 2 corpi. Il peso del corpo esercita una pressione $p = \frac{P}{S}$ sul piano equivalente $\frac{R_N}{S}$ che differisce dalla superficie macroscopica S, tuttavia le sup. a contatto sono nel microscopico irregolari e quindi vi sarà un'area effettiva di contatto molto ridotta in cui vi sarà una pressione notevole che provocherà dei legami tra molecole dei 2 corpi.



In un piano inclinato l'oggetto andrà in moto solo se comp. tangenziale del peso $\bar{P}$ sarà maggiore di $F_{A_s}^{MAX}$:

$$R_T^{MAX} = \mu_s P \cos\alpha$$

Condizione di moto:

$$\boxed{P sen\alpha > \mu_s P \cos\alpha} \Rightarrow \boxed{\tan\alpha > \mu_s}$$

ATTRITO DINAMICO

Una volta che il corpo è stato messo in movimento l'attrito permane, tuttavia è necessaria una forza di modulo inferiore per mantenere costante la velocità $\Rightarrow \boxed{\mu_s \geq \mu_d}$ ciò è spiegabile in quanto col corpo in movimento i fenomeni di saldatura microscopica diventano meno probabili.

$$\boxed{R_T = F_{AD} = \mu_d R_N} \quad [\text{F. ATTRITO DINAMICO}]$$

In generale la forza di attrito $\bar{R}_T$ è sempre diretta in verso opposto al versore $\bar{u}_v$ della velocità $\bar{v}$.

DINAMICA NEI SISTEMI DI RIFERIMENTO NON INERZIALI

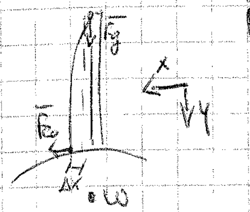
La legge fondamentale della dinamica $\bar{F} = m\bar{a}$ vale per tutti i S.R. inerziali ma essa non risulta valida nei riferimenti non inerziali, se $\bar{F}$ rappresenta la risultante delle forze dovute a corpi agenti sul punto materiale considerato.

Se si conoscono le caratteristiche del moto di un sist. non inerz. S' rispetto ad uno inerziale S si può scrivere:

$$\bar{F} = m\bar{a} = m(\bar{a}' + \bar{A}_T + \bar{a}_{co})$$

produrrà l'effetto di deviare progressivamente dalla verticale la caduta del grave verso Est. L'effetto combinato delle 2 forze sarà di deviare il grave verso Sud-Est (em. boreale) o Nord-Est (em. australe).

<u>DIMOSTRAZIONE</u> Dimostrare che un corpo in caduta libera sulla Terra non cade lungo la verticale ma risulta deviato verso Est di una distanza pari a $\frac{\omega}{3}(\cos\lambda) g t^3$. Si visualizzi come condizioni iniziali $h = 100\,m$, $\lambda = 45°$ lat. Si trascurano attr. aria



$$\bar F_g + \cancel{\bar F_f} + \bar F_{co} = m\bar a'$$

↳ F_{cf} trascurabile

$$\begin{cases} \bar F_g = m a'_y \\ \bar F_{co} = m a'_x \end{cases} \qquad \begin{cases} \cancel{m} g = \cancel{m} a'_y \\ -2\cancel{m}\bar\omega \times \bar v' = \cancel{m} a'_x \end{cases}$$

$$\begin{cases} a'_y = g \Rightarrow \ddot x_y = g \Rightarrow \int \ddot x'_y\,dt = \int g\,dt \Rightarrow \dot x'_y = gt + \dot x'_0 \\ -2\bar\omega \times \bar v' = a'_x \end{cases}$$

$(*) \Rightarrow v'_y = gt + 0$ ($\dot x'_0 = 0$ essendo all'inizio)

Sostituisco $\Rightarrow \begin{cases} 2\omega v' \cos\lambda = a'_x \\ v'_y = gt \end{cases} \Rightarrow 2\omega g t \cos\lambda = a'_x$

Integro rispetto al tempo

$$\int \ddot x' \,dt = \int 2\omega g \cos\lambda\, t\,dt \Rightarrow \dot x' = \omega g \cos\lambda\, t^2 + \dot x'_0$$

Integro ancora rispetto al tempo

$$\int \dot x'\,dt = \int \omega g \cos\lambda\, t^2\,dt \Rightarrow x = \frac{1}{3}\omega g \cos\lambda\, t^3 + x_0 \rightarrow = 0 \text{ per scelta assi}$$

Pertanto lo spostamento verso est è $\boxed{\frac{\omega}{3} g \cos\lambda\, t^3}$

Si ricavi ora il tempo di caduta dalla $(*)$:

$$\int \dot x'_y\,dt = \int gt\,dt \Rightarrow y = \frac{1}{2}gt^2 + \cancel{y_0} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2(y-y_0)}{g}}$$ imponendo C.I.

Ritrovo $t = \sqrt{\frac{2 \cdot 100\,m}{9{,}81\,\frac{m}{s^2}}} = 4{,}51\,s$

Calcolo la deviazione verso est:

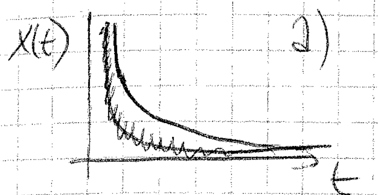
$$x = \frac{\omega}{3} g \cos\lambda\, t^3 \Rightarrow x = \frac{7{,}27 \cdot 10^{-5}\,\frac{rad}{s}}{3} \cdot 9{,}81\,\frac{m}{s^2} \cos 45° (4{,}51)^3 s^3 = 0{,}0154\,m$$

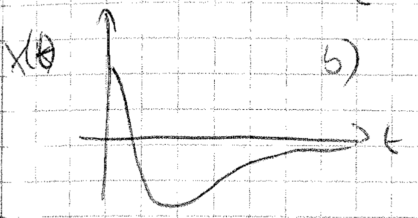
Lo spostamento dalla verticale verso Est risulta di 1,54 cm.

In generale la deviazione è: $\boxed{\frac{\omega}{3}\cos\lambda \sqrt{\frac{8h^3}{g}}}$

il sistema non compie oscillazioni attorno alla sua posizione di equilibrio, alla quale tende asintoticamente per $t \to \infty$.

(C) $\boxed{\beta^2 - 4mk = 0}$ SMORZAMENTO CRITICO





Le 2 radici della caratteristica sono uguali fra loro e la sol. generale della diff.:

$$x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-\frac{\beta}{2m}t}$$

In questo caso in cui $\beta \equiv \beta_{crit} = 2\sqrt{mk}$ il sistema tende asintoticamente alla posizione di equilibrio per $t \to \infty$ [caso a)]. Inoltre può transitare per la posizione $x = 0$ se rapporto $\frac{c_1}{c_2}$ risulta negativo [caso b)]. Infatti la soluzione trovata vale per valori positivi di t, cioè per istanti successivi a quello in cui è avvenuta la perturbazione.

Indicati con x_0 e $\dot{x}_0$ le C.I. dovute alla perturbazione iniziale risulta $C_1 = x_0$ e $C_2 = \dot{x}_0 + \frac{\beta}{2m}x_0$. Se x_0 e $\dot{x}_0$ hanno segni opposti e se $|\dot{x}_0| > \frac{\beta}{2m}|x_0|$ il sistema transita una volta per la posizione di equilibrio [caso b)] prima di tendervi asintoticamente. In caso contrario $x(t)$ tende a zero asintoticamente senza mai assumere il valore $x = 0$ [caso a)]. Il caso a) si differenzia dal moto supercritico in quanto tende più rapidamente possibile verso la cond. di equilibrio.

MOTO OSCILLATORIO ARMONICO FORZATO e RISONANZA

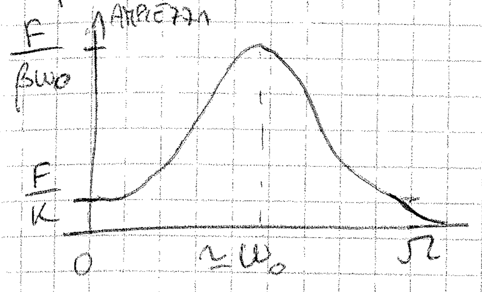
Se sull'oscillatore, oltre alla forza di richiamo elastico e a quella di smorzamento, agisce nella stessa direzione una forza eccitatrice del moto $f(t)$ che lo obbliga a spostarsi dalla posizione di equilibrio, l'eq. diventa:

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = f(t) \rightarrow \text{termine FORZANTE}$$

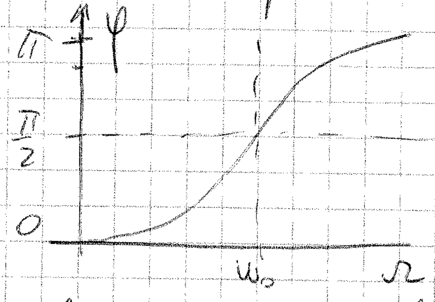
Essendo $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ la soluzione può anche espressa come

$$x(t) = \frac{F}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \beta^2 \frac{\Omega^2}{m^2}}} \cos(\Omega t - \varphi)$$

Si può così analizzare il comportamento dell'ampiezza e della fase del moto al variare della pulsazione della forza eccitante



Andamento del modulo dell'ampiezza di oscillazione



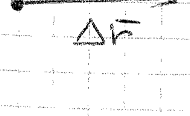
Andamento della fase del moto

RISONANZA Quando $\boxed{\Omega \simeq \omega_0}$ l'ampiezza delle oscillazioni ha un valore massimo approssimabile con $\frac{F}{\beta\omega_0}$ e si dice che il sistema è in RISONANZA.

LAVORO ED ENERGIA

LAVORO di UNA FORZA

Si consideri una forza $\bar{F}$ che non cambi da punto a punto, né col tempo, il cui punto di applicazione effettua uno spostamento $\overline{AB}$. Si definisce lavoro della forza $\bar{F}$ il prodotto scalare della forza $\bar{F}$ per lo spostamento del suo punto di applicazione:



$$W_{AB} = \bar{F} \cdot \overline{AB} = \bar{F} \cdot (\bar{r}_B - \bar{r}_A) = \bar{F} \cdot \Delta\bar{r} = F \cdot \Delta r \cdot \cos\alpha$$

$$W \begin{cases} \text{se } \alpha < \frac{\pi}{2} & W < 0 \quad \text{LAVORO RESISTENTE} \\ \text{se } \alpha = \frac{\pi}{2} & W = 0 \quad \text{LAVORO NULLO} \\ \text{se } \alpha > \frac{\pi}{2} & W > 0 \quad \text{LAVORO MOTORE} \end{cases}$$

Se la forza varia al variare della posizione, si suddivida la traiettoria γ in tanti spostamenti $\Delta\bar{r}_i$ sufficientemente piccoli:

$$W_{AB} \simeq \sum_i^n \bar{F}(\bar{r}_i) \cdot \Delta\bar{r}_i$$

Per II principio $\vec{F} = m\vec{a}$ $\quad \boxed{\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}}$

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{r} = m\vec{a} \cdot d\vec{r} = m\vec{a} \cdot \vec{v}\, dt$$

$\frac{dv}{dt} = \ddot{s} \Rightarrow d\dot{s} = \ddot{s}$

Esprimendo in coordinate intrinseche:

$$\delta W = m\left(\ddot{s}\, u_t + \frac{\dot{s}^2}{r} u_r\right) \cdot (\dot{s}\, u_t)\, dt = m\, \ddot{s}\, \dot{s}\, dt$$

Il risultato ottenuto rappresenta anche la variazione dK dell'energia cinetica nel tratto infinitesimo di traiettoria γ

$$\delta W = dK$$

Integrando sul percorso γ, da A a B si ottiene

$$\int_{\gamma A}^{B} \delta L = \int_{\gamma A}^{B} dK$$

$$\boxed{W_{AB} = K_B - K_A} \Rightarrow \boxed{W_{AB} = \Delta K} \quad [\text{TEOR. FORZE VIVE}]$$

$$K = \int_\gamma \delta W = \int_\gamma m\dot{s}\, d\dot{s} = m\int_\gamma \dot{s}\, d\dot{s} = \frac{1}{2} m \dot{s}^2 = \boxed{\frac{1}{2} m v^2} + cost$$

$$\boxed{W_{AB} = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2} + \cancel{cost} - \cancel{cost}$$

Il teorema delle forze vive basandosi sul II principio della dinamica, è valido anche nei sistemi di riferimento non inerziali purché, oltre al lavoro delle forze, si consideri anche il lavoro delle pseudoforze.

CAMPI (DI FORZE) CONSERVATIVI

In generale il lavoro di una forza dipende, oltre che dagli estremi del percorso, anche dall'effettiva traiettoria.

<u>FORZE CONSERVATIVE</u>: forze per le quali il lavoro dipende solo dagli estremi del percorso.

Perché questo accada è necessario e sufficiente che esista una funzione scalare della sola posizione $U(\vec{r})$ tale che sia verificata la relazione: $\boxed{\delta W = -dU}$

Ne consegue che le componenti della forza sono legate alle derivate parziali della funzione $U(\bar r)$.

Dovendo $\bar F = -\nabla U(x,y,z)$ $\quad \bar F = -\left(\frac{dU(x,y,z)}{dx}\bar i + \frac{dU(x,y,z)}{dy}\bar j + \frac{dU(x,y,z)}{dz}\bar k\right)$

da cui:

$$\delta W = \bar F \cdot d\bar r = -\left(\frac{dU}{dx}dx + \frac{dU}{dy}dy + \frac{dU}{dz}dz\right) = -dU$$

In pratica, non è sempre comodo verificare che il lavoro è indipendente dal percorso su tutte le infinite linee possibili. In alcuni casi si può utilizzare una proprietà locale che una forza conservativa deve possedere: se una forza è conservativa ha rotore nullo:

$$\nabla \times \bar F = \begin{vmatrix} \bar i & \bar j & \bar k \\ \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = 0$$

Infatti quando $\bar F = -\nabla U$ si ha $\nabla \times \nabla U \equiv 0$.

> UN CAMPO È CONSERVATIVO SE:

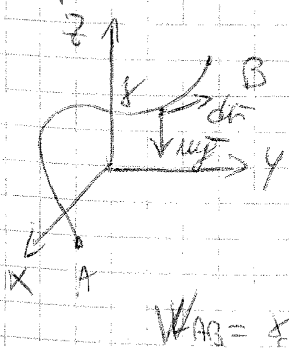
1. il lavoro non dipende dal percorso;
2. $\oint \bar F \cdot d\bar r \equiv 0$ (per ogni possibile linea chiusa del campo);
3. Esiste l'energia potenziale U.
4. $\nabla \times \bar F \equiv 0$ (e insieme di definizione semplicemente connesso).

ALCUNI CAMPI CONSERVATIVI

Un campo uniforme, cioè caratterizzato da una forza $\bar F$ indipendente da $\bar r$, è conservativo; tutte le derivate che figurano nel rotore risultano nulle. Si voglia verificare tale proprietà calcolando

FORZA PESO

Si prende in considerazione la forza costante $\bar P = m\bar g$ diretta



Si sceglie un opportuno sist. di riferimento. Si suppone che il corpo si sposti lungo la traiettoria γ da A a B.

Si ha: $\bar F \equiv (0,0,-mg)$ $\quad d\bar r \equiv (dx,dy,dz)$

$$\Rightarrow \bar F \cdot d\bar r = -mg\,dz$$

$$W_{AB} = \int_A^B -mg\,dz = -mg\int_A^B dz = -mg(z_B - z_A) = mg(z_A - z_B)$$

$$\bar{F} = F(r)\,\bar{u}_r$$

Poiché il vettore posizione è: $\bar{r} = r\,\bar{u}_r$, lo spostamento elementare è: $d\bar{r} = dr \cdot \bar{u}_r + d\bar{u}_r \cdot r$

Il lavoro elementare è: $dW = F(r)\,\bar{u}_r \cdot (dr \cdot \bar{u}_r + \underbrace{r \cdot d\bar{u}_r}_{\perp \Rightarrow \text{si} = 0}) = F(r)\,dr$

Se $F(r)$ ammette primitiva:

$$dW = F(r)\,dr = -dU(r) \Rightarrow \boxed{F(r) = \frac{-dU}{dr}}$$

Il lavoro da A a B è:

$$W_{AB} = \int_A^B f(r)\,dr = -\Delta U$$

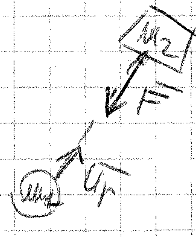
Pertanto le forze centrali a simmetria sferica sono conservative

> FORZA di ATTRAZIONE GRAVITAZIONALE

Fra 2 corpi puntiformi aventi masse m_1 e m_2, posti a distanza r, si esercita una forza attrattiva.

Questa forza è:

(forza agente su m_2) $\boxed{\bar{F} = -G\,\frac{m_1 m_2}{r^2}\,\bar{u}_r}$



avendo scelto l'origine nella posizione occupata dal corpo di massa m_1.

Si ottiene

$$W_{AB} = -\Delta U = \int_A^B -G\,\frac{m_1 m_2}{r^2}\,dr = G m_1 m_2 \int_A^B -\frac{dr}{r^2} = G m_1 m_2 \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right)$$

Se si pone $U_B \to 0$ quando $r_B \to \infty$ si ottiene:

$$\boxed{U(r) = -\frac{G m_1 m_2}{r}}$$

che esprime l'energia potenziale gravitazionale di 2 masse puntiformi m_1 e m_2 poste a distanza r tra loro.

Le forze centrali a simmetria sferica sono conservative in quanto soddisfano le seguenti proprietà:

1) la direzione della forza è radiale;
2) il loro modulo dipende solo da r.

CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA

Per tutti i corpi puntiformi di massa m costante vale il teorema delle forze vive: $\boxed{\delta W = dK}$

È possibile esprimere il lavoro di una forza conservativa attraverso la variazione di energia potenziale.

$$\boxed{\delta W = -dU}$$

Se tutte le forze agenti sono conservative si può scrivere:

$$dK = -dU \quad \text{da cui} \quad d(K+U) = 0$$

Integrando: $\boxed{K + U = \text{costante}}$ [EN. MECCANICA TOTALE]

$E_M = K + U$. Pertanto se tutte le forze agenti sono conservative l'energia meccanica totale è costante, ovvero si conserva.

Se le forze non sono conservative si ha:

$$dK = \delta W^{(c)} + \delta W^{(nc)} = -dU + \delta W^{(nc)}$$

da cui $\boxed{dE_M = \delta W^{(nc)}}$

Rende esplicito che la eventuale variazione di energia meccanica di un punto materiale è dovuta soltanto al lavoro delle forze non conservative.

TRASFORMAZIONI DELL'ENERGIA

L'E. meccanica, pur restando costante, in un generico moto o caduta di un grave si ripartisce in modi diversi tra la forma cinetica e quella potenziale.

Nell'oscillatore armonico si ha:

Nel caso di forza elastica

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad \text{con} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$U(t) = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)$$

regione all'altra perché si troverebbe a possedere una E_k negativa. Si dice che tra s_1 e s_2 esiste una Barriera di E_{pot}.
All'interno di ciascuna regione accessibile, poiché $F_s = -\frac{dU}{ds}$ la forza agente sul punto tende a riportarlo verso la posizione del minimo: ne segue che il punto materiale oscillerà attorno a tale posizione.
I valori di massimo e di minimo di U corrispondono ai valori $F_s = -\frac{dU}{ds} = 0$ e sono pertanto posizioni di equilibrio. Tuttavia il sistema può oscillare attorno alle posizioni di equilibrio stabile, caratterizzate dai minimi di $U(s)$, non può rimanere nelle vicinanze dei massimi, che caratterizzano le posizioni di equilibrio instabile.

$$V_s = \frac{ds}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2\,[E_M - U(s)]}{m}}$$

Da questa relazione si possono ricavare le posizioni di inversione del moto ($V_s = 0$): esse corrispondono alla condizione $U(s) = E_M$.
L'eq. di sopra si può riscrivere a variabili separate:

$$dt = \pm\frac{ds}{\sqrt{\frac{2(E_M - U(s))}{m}}}$$

Integrando si ha:

$$t - t_0 = \pm\int_{s_0}^{s}\frac{ds}{\sqrt{\frac{2[E_M - U(s)]}{m}}}$$

da cui, note le C.I., è possibile ottenere in linea di principio, l'espressione oraria $s = s(t)$.
Pertanto, diversamente dal caso generale, se la traiettoria è nota, la conservazione dell'energia meccanica permette di determinare anche l'espressione oraria.

Scriviamo le eq. del moto per le 2 masse, indicando con x_1 e x_2 lo spostamento delle masse dalla posizione di equilibrio:

$$\begin{cases} -kx_1 + k_0(x_2 - x_1) = m\ddot{x}_1 \\ -kx_2 + k_0(x_1 - x_2) = m\ddot{x}_2 \end{cases}$$

le 2 eq. risultano accoppiate, si possono disaccoppiare attraverso le sostituzioni:

$$\underbrace{x_2 - x_1 = p}_{\text{Distanza tra le 2 masse}} \quad ; \quad \underbrace{x_1 + x_2 = q}_{\text{Doppio della distanza del punto medio tra le 2 masse dall'origine delle coordinate}}$$

Sostituendo e sommando:

$$m\frac{d^2(x_1+x_2)}{dt^2} = -kx_1 + k_0(x_2-x_1) - kx_2 + k_0(x_1-x_2)$$
$$= -k(x_1+x_2) + k_0(x_2 - x_1 + x_1 - x_2)$$
$$= -k(x_1+x_2)$$

$$\boxed{m\frac{d^2q}{dt^2} = -kq}$$

Sostituendo e sottraendo:

$$m\frac{d^2(x_2-x_1)}{dt^2} = -kx_2 + k_0(x_1-x_2) + kx_1 - k_0(x_2-x_1) =$$
$$= -k(x_2-x_1) - k_0(-x_1 + x_2 + x_2 - x_1)$$
$$= -k(x_2-x_1) - 2k_0(x_2-x_1)$$

$$\boxed{m\frac{d^2p}{dt^2} = -Kp} \quad \text{dove } K = k + 2k_0$$

Esse sono eq. del moto armonico e rappresentano 2 modi propri del sistema. Un generico moto delle masse è dato:

$$x_1 = \frac{1}{2}\left[q_0\cos(\omega_q t + \varphi_q) - p_0\cos(\omega_p t + \varphi_p)\right]$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\left[q_0\cos(\omega_q t + \varphi_q) + p_0\cos(\omega_p t + \varphi_p)\right]$$

dove $\omega_p = \sqrt{\dfrac{k+2k_0}{m}}$ e $\omega_q = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

POTENZA

In meccanica la potenza è la grandezza (scalare) che caratterizza la capacità delle macchine e dei sistemi (attraverso le forze che essi sviluppano) di compiere lavoro in un certo tempo.

Si definisce Potenza media:

$$P_m = \frac{\Delta W}{\Delta t} \qquad \left[\frac{J}{s} = W \ [\text{WATT}] \right]$$

Potenza istantanea:

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{\delta W}{dt} \qquad 1\ hp = 735{,}5\ W$$

Nel caso in cui il lavoro sia effettuato da una forza che agisce su un punto materiale si ha:

$$\boxed{P = \frac{\delta W}{dt} = \frac{\bar{F} \cdot d\bar{r}}{dt} = \bar{F} \cdot \bar{v}}$$

PRINCIPIO di CONSERVAZIONE dell'ENERGIA: in un sistema isolato la somma di tutte le energie, in qualunque forma esse compaiano, è costante.

DINAMICA DEI SISTEMI

La dinamica dei sistemi si occupa della descrizione del moto di sistemi estesi, che non possono essere semplificati schematizzandoli come punti materiali.

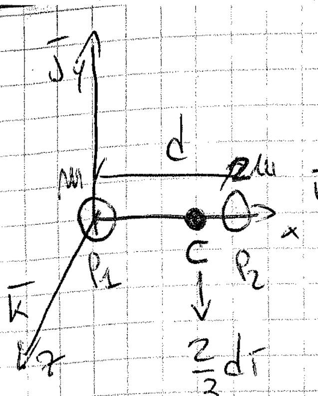
CENTRO di MASSA

> SISTEMI DISCRETI

Dato un sistema, schematizzato come se fosse costituito di N punti materiali di masse m_i, le cui posizioni sono individuate (in un dato sistema di riferimento) dai vettori $\bar{r}_i$, si definisce centro di massa C come il punto geometrico individuato dal vettore:

$$\bar{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \bar{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \cdot \bar{r}_i$$

ove $M = \sum m_i$ indica la massa totale del sistema.



Si trovi posizione del C, di 2 masse puntiformi una di massa doppia dell'altra, distanti d.

$P_1 = (0,0,0)$ $\quad P_2 = (d,0,0)$ $\quad P_1, m$ $\quad P_2, 2m$

$$\bar{r}_c = \frac{\sum_i^N m_i \bar{r}_i}{M} = \frac{0 + 2md}{3m} = \frac{2}{3} d \Rightarrow C\left(\frac{2}{3}d, 0, 0\right)$$

Regola generale: Il centro di massa è spostato sempre verso la regione in cui è distribuita la parte preponderante della massa del sistema.

> SISTEMI CONTINUI

L'estensione della definizione e delle proprietà del centro di massa ad un modello continuo può essere eseguita suddividendo il sistema in sottosistemi di massa Δm_i. Quando le dimensioni lineari dei sottosistemi sono piccole rispetto a quelle del sistema originale, essi possono essere approssimati come puntiformi:

$$\bar{r}_c \simeq \frac{\sum_i \Delta m_i \bar{r}_i}{\sum_i \Delta m_i} = \frac{1}{M} \sum_i \Delta m_i \bar{r}_i$$

Se si fanno tendere a zero le dimensioni lineari dei sottosistemi ciò implica anche $\Delta m_i \to 0$!

$$\bar{r}_c = \frac{\int \bar{r}\, dm}{\int dm} = \frac{1}{M} \int \bar{r}\, dm$$

In Cartesiane

$$x_c = \frac{\int x\, dm}{\int dm} \quad y_c = \frac{\int y\, dm}{\int dm} \quad z_c = \frac{\int z\, dm}{\int dm}$$

Generalmente per eseguire gli integrali si esprime la massa attraverso il volume e la densità:

Densità media

$$\rho_M = \frac{\Delta m}{\Delta V}$$

In generale, considerando un qualsiasi punto materiale appartenente al sistema, il risultante delle forze su di esso agenti può essere scomposto nella somma di 2 parti: il risultante delle forze interne $\bar{F}^{(i)}$, agenti su quel punto da parte degli altri punti del sistema, e il risultante delle forze esterne $\bar{F}$ dovute a punti non appartenenti al sistema.

Esiste una relazione tra la variazione nel tempo della quantità di moto del punto materiale e il risultante delle forze agenti sul punto (II PRINC. DINAMICA)

Derivando:

$$\frac{d\bar{P}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_i \bar{p}_i\right) = \sum_i \frac{d\bar{p}_i}{dt}$$

Per il II princ. dinamica:

$$\frac{d\bar{P}}{dt} = \sum_i \bar{F}_i = \underbrace{\sum_i \bar{F}_i^{(i)}}_{0} + \sum_i \bar{F}_i^{(e)}$$

Ma $\sum \bar{F}_i^{(i)} = 0$ per il III princ. della dinamica [il risultante è 0!]

Risulta quindi:

$$\boxed{\bar{F}^{(e)} = \sum_i \bar{F}_i^{(e)} = \frac{d\bar{P}}{dt}}$$ [I EQ. della DINAMICA dei SISTEMI]

Utilizzando il I Teor. del Centro di massa si può riscrivere se $M = cost$

$$\boxed{\bar{F}^{(e)} = M\bar{a}_c}$$ essendo $\bar{F}^{(e)} = \frac{d(M\bar{v}_c)}{dt}$

[II TEOREMA del CENTRO DI MASSA]

L'equazione dimostra che il centro di massa di un sistema si muove come un punto materiale nel quale sia concentrata l'intera massa del sistema e sul quale agisce il risultante delle forze esterne.

Per un sistema di punti materiali, il momento angolare totale è definito come la somma dei momenti angolari dei singoli punti che costituiscono il sistema:

$$\boxed{\underbrace{\bar{L}_\Omega = \sum_i \bar{r}_i^* \times \bar{p}_i = \sum_i \bar{L}_i}} \quad \text{[MOMENTO ANGOLARE TOTALE del SISTEMA]}$$

dove $\bar{r}_i^* = \bar{r}_i - \bar{r}_\Omega$

$\bar{L}_\Omega$ dipende dal polo, ove ciò non fosse verrà omesso Ω.

In un sistema continuo

$$\bar{L} = \int \bar{r}^* \times d\bar{p} \qquad \text{dove } d\bar{p} = \bar{v}\,dm$$

Derivando invece:

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_i \bar{L}_i = \sum_i \frac{d\bar{L}_i}{dt} = \left[\frac{d\bar{L}}{dt} = \bar{M}_\Omega - \bar{v}_\Omega \times \bar{p}\right] = \sum_i M_i - \sum_i \bar{v}_\Omega \times \bar{p}_i =$$

$$= \sum_i \bar{M}_i - \bar{v}_\Omega \times \bar{P} \qquad \text{Inoltre } \bar{P} = M\bar{v}_c \text{ (I Teor. centro di massa)}$$

si ottiene

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = \underbrace{\bar{M}}_{\text{MOMENTO RISULTANTE di tutte le forze agenti sul sistema}} - M\bar{v}_\Omega \times \bar{v}_c$$

$$\boxed{\bar{M} = \sum_i \bar{M}_i = \sum_i \bar{r}_i^* \times \bar{F}_i}$$

Separando le forze interne da quelle esterne al sistema:

$$\bar{M} = \underbrace{\bar{M}^{(i)}}_{0 \text{ per il III princ. della dinamica}} + \bar{M}^{(e)}$$

Si ottiene

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = \bar{M}^{(e)} - M\bar{v}_\Omega \times \bar{v}_c$$

Nei casi particolari in cui il polo Ω sia <u>fisso</u> (nel sistema di coordinate), oppure <u>coincida col centro di massa C</u>, oppure abbia <u>velocità parallela a quella del c. di m. C</u>, l'eq. diventa:

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = \bar{M}^{(e)} \longrightarrow \boxed{\bar{M}^{(e)} = \frac{d\bar{L}}{dt}} \quad \text{[II eq. della DINAMICA DEI SISTEMI]}$$

corrisponde una forza che agisce sul secondo, parallela e con verso opposto; se i 2 corpi non interagissero, entrambe le forze sono opp… tale relazione sarebbe soddisfatta anche da una coppia di forze che tuttavia non soddisferebbe la 2ª eq: questa implica che le 2 forze devono agire sulla stessa retta di azione, ovvero che la coppia abbia braccio nullo.

SISTEMI DI FORZE PARALLELE E BARICENTRO

Possono essere considerati equivalenti, per i loro effetti sui sistemi materiali rigidi, 2 sistemi di forze che hanno il medesimo risultante e il medesimo momento risultante.
Si consideri il caso particolare in cui le forze del sistema siano parallele. Si può dimostrare che tale sistema di forze è equivalente ad una forza uguale al loro risultante applicato nel centro delle forze parallele.
Siano $\bar{F}_i = F_i \cdot \bar{u}$ le forze del sistema; $\bar{u}$ versore comune e $\bar{r}_i$ i vettori posizione dei loro punti di applicazione.
Si dimostra che questo sistema di forze è equivalente a semplice sistema costituito dalla forza: $\bar{F} = \sum_i F_i \cdot \bar{u}$ applicata nel punto individuato dal vettore posizione

$$\bar{r}_f = \frac{\sum_i F_i \cdot \bar{r}_i}{\sum_i F_i}$$

Ovviamente i 2 sistemi di forze hanno lo stesso risultante; per dimostrarlo basta verificare che abbiano lo stesso momento risultante $\bar{M}$ rispetto un polo qualsiasi.
Rispetto polo O:

$$\bar{M} = \sum_i (\bar{r}_i \times F_i \bar{u}) = \left(\sum_i F_i \bar{r}_i\right) \times \bar{u} = \left(\sum_i F_i\right) \bar{r}_f \times \bar{u} = \bar{r}_f \times \bar{F}$$

Nel caso delle forze peso si ha: $\bar{F}_i \equiv \bar{P}_i = m_i \bar{g} = -m_i g \bar{k}$ $F_i = -m_i g$
da cui $\bar{P} = M\bar{g}$ ed è applicata nel punto $\bar{r}_G = \frac{1}{M} \sum_i m_i \bar{r}_i \equiv \bar{r}_c$
Il punto di app. individuato da $\bar{r}_G$ è il BARICENTRO, e per corpi non

Si dimostri che è lo stesso sia che venga calcolato in S o in S':

$$\boxed{\overline{L}'_c = \overline{L}'_c}$$

Per def: $\overline{L}'_c = \sum_i \overline{r}_i' \times m_i \overline{v}_i'$

Inoltre: $\overline{L}'_c = \sum_i \overline{r}_i' \times m_i(\overline{v}_i - \overline{v}_c) = \underbrace{\sum_i (\overline{r}_i - \overline{r}_c) \times m_i \overline{v}_i}_{L_c} - \underbrace{\sum_i m_i \overline{r}_i' \times \overline{v}_c}_{0} =$

$= \overline{L}_c$

Il momento angolare rispetto al centro di massa è quindi una grandezza intrinseca del sistema, che può essere calcolato in modo equivalente sia in un generico sistema di rif. S che nel particolare sist. S' con origine nel centro di massa (in traslazione rispetto al S).

Il terzo teorema del centro di massa può essere riscritto

$$\boxed{\overline{L}_O = \overline{L}'_c + \overline{r}_c \times \overline{P}}$$ [TEOREMA di KÖNIG per il MOMENTO ANGOLARE]

Evidenzia la separazione del momento angolare in una parte intrinseca (cioè rispetto al centro di massa) e in una che riguarda il moto del centro di massa.

⇒ Una conseguenza molto importante data da $\overline{L}'_c = \overline{L}_c$ è la validità della 2a eq. cardinale anche nel sistema di riferimento S', che ha l'origine nel centro di massa benché esso sia in generale un sistema di riferimento non inerziale.

Si deduce $\frac{d\overline{L}'_c}{dt} = \frac{d\overline{L}_c}{dt} = \overline{M}_c^{(e)}$

Per def. il momento di ciascuna forza dipende dal polo e non dal sistema di riferimento si ha:

$$\overline{M}'^{(e)}_c = \overline{M}^{(e)}_c = \frac{d\overline{L}'_c}{dt} = \overline{M}'^{(e)}_c$$

Si può usare in S' la 2a eq. cardinale considerando solo il momento risultante delle forze esterne vere, trascurando pseudo forze

Separandole:

$$d\left(K+U^{(i)}+U^{(e)}\right)=\delta W^{(nc)}$$

Si definisce E_M energia meccanica totale del sistema:

$$\boxed{E_M = K + U^{(i)} + U^{(e)}}$$

L'E_M si conserva in assenza di forze (interne e/o esterne) non conservative, o di loro lavoro.

Essa non rappresenta una caratteristica ~~del~~ del sistema, ma questo riflette anche interazioni con l'ambiente descritte da l

Evidenziando le forze esterne:

$$(*)\quad d\left(K+U^{(i)}\right)-\delta W^{(i,nc)}=\delta W^{(e)}$$

Se infatti nel sistema $\delta W^{(i,nc)}=0$

si attribuisce $\boxed{E^{(0)} = K + U^{(i)}}$ ENERGIA PROPRIA del sistema

L'energia propria si mantiene costante in assenza di lavoro lavoro a forze esterne e di forze interne non conservative.

Per il Teorema di König dell'E_K si ha:

$$E^{(0)} = K' + K_c + U^{(i)} = U_{INT} + K_c$$

dove $\boxed{U_{INT} = K' + U^{(i)}}$ ENERGIA INTERNA del sistema

L'U_{INT} coincide con l'$E^{(0)}$ nel sistema di riferimento del centro di massa, nel quale l'$E^{(0)}$ assume valore minimo.

Si può riscrivere la $(*)$ come:

$$\boxed{dE^{(0)} = \delta W^{(e)} + \delta W^{(i,nc)} = dU_{INT} + dK_c}$$

ATTENZIONE: la variazione dell'~~E~~K del centro di massa del sistema NON È UGUALE ~~alla~~ lavoro complessivo delle forze esterne!

TEORIA DEGLI URTI

È lo studio delle collisioni tra corpi. Per urto si intende collisione di breve durata temporale dove le forze che si esercitano tra i corpi risultano relativamente elevate. Durante un urto l'effetto di eventuali forze esterne, causate da interazioni con altri corpi, può essere in molti casi trascurato, e il sistema può così essere considerato isolato. In questo caso, in un sist. inerziale, si ha la conservazione della quantità di moto, del momento angolare e dell' $E^{(c)}$ del sistema.

Caso N=2 particelle

$\bar{r}_1 = \bar{r}_2$ COND. DI URTO $\quad \boxed{\bar{R}^{(e)} \simeq 0}$ forze esterne trascurabili

$$\frac{d\bar{P}}{dt} = 0 \Rightarrow \bar{P} = cost \Rightarrow \boxed{\text{quantità di moto del sistema si conserva.}}$$

Per il teorema dell'impulso

$$\bar{J} = \underbrace{\bar{p}(t) - \bar{p}(t_0)}_{\text{variazione quantità di moto}} = \int_{t_0}^{t} \bar{F} \cdot dt = \int_{t_0}^{t} \bar{F}_{\substack{1\to 2\\ 2\to 1}} \cdot dt + \cancel{\int_{t_0}^{t} \bar{F}^{(e)} \cdot dt}$$

↳ se le $\bar{F}^{(e)}$ non sono impulsive $= 0$

Pertanto nel caso N=2 p. $\Delta \bar{p}_1 \simeq -\Delta \bar{p}_2 \Leftrightarrow \Delta \bar{P} = 0$

In sintesi: in un sistema inerziale, quando il sistema è isolato o le forze esterne non sono impulsive, nell'urto si conserva $\bar{P}$:

$$\bar{P}(t_i) \simeq \bar{P}(t_f) \quad \text{e si ha anche:} \quad \bar{L}(t_i) \simeq \bar{L}(t_f)$$

Se uno dei corpi è vincolato, le reazioni vincolari assumono spesso carattere impulsivo e la conservazione della quantità di moto non è generalmente assicurata. Invece il momento angolare si conserva anche in presenza di reazioni vincolari impulsive se il loro momento è costantemente nullo durante l'urto (per es. quando la loro direzione è sempre diretta verso il punto fisso considerato come polo).

per cui: $\bar{P}$ del sistema è: $\bar{P}(t) = M(t)\,\bar{v}(t)$

$\bar{v}(t)$ = velocità istantanea razzo in sistema inerziale.

Si indichi con $\bar{u}$ la velocità delle particelle espulse che si muovono rispetto ad un sistema di rif. solidale col razzo: essa è indipendente dalla velocità del razzo e può considerarsi costante.

Nel riferimento inerziale all'istante $t+dt$:

① il razzo ha velocità $\bar{v}(t+dt) = \bar{v}(t) + d\bar{v}$

② la velocità del gas espulso è $\bar{v}_g = \bar{v}(t+dt) + \bar{u} = \bar{v}(t) + d\bar{v} + \bar{u}$

Nell'intervallo dt la massa del razzo è diminuita di dm

la $\bar{P}$ sistema totale è in tale istante:

$$\bar{P}(t+dt) = [(M(t) - dm)\cdot(\bar{v} + d\bar{v}) + dm\,(\bar{v} + d\bar{v} + \bar{u})]$$

la variazione $d\bar{P}$ nel corrispondente dt è:

$$d\bar{P} = \bar{P}(t+dt) - \bar{P}(t) = M\,d\bar{v} + \bar{u}\,dm$$

Per la I eq cardinale $\frac{d\bar{P}}{dt} = \bar{F}^{(e)} \Rightarrow d\bar{P} = \bar{F}^{(e)}dt$, che è l'impulso totale fornito a tutto il sistema dalle eventuali forze esterne:

$$d\bar{P} = M\,d\bar{v} + \bar{u}\,dm = \bar{F}^{(e)}dt \Rightarrow M\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F}^{(e)} - \bar{u}\frac{dm}{dt} = \bar{F}^{(e)} + \bar{S}$$

dove $\bar{S}$ = forza di spinta

$$\bar{S} = -\bar{u}\frac{dm}{dt} = \bar{u}\frac{dM}{dt}$$

$$\boxed{\bar{F}^{(e)} + \bar{S} = M\,\bar{a}(t)}$$ Eq. del moto dei razzi

L'eq. permette di ricavare l'acc. istantanea del razzo, se ne è nota la massa $M(t)$ all'istante considerato; inoltre bisogna conoscere le $\bar{F}^{(e)}$, il ritmo di espulsione dei gas di scarico e la loro velocità rispetto al razzo.

Moti traslatori

Se $\bar\omega = 0$, tutti i punti P_i del sistema possiedono la stessa velocità, che coincide con quella del centro di massa:

$$\text{Se } \bar\omega = 0 \Rightarrow \boxed{\bar v_i = \bar v_c}$$

La quantità di moto totale risulta: $\bar P = M\bar v_c$

Il momento angolare, scegliendo come polo il centro di massa risulta nullo!

$$\bar L_c = \sum_i (\bar r_i - \bar r_c)\times \bar p_i = \sum_i (\bar r_i - \bar r_c)\times m_i \bar v_i = (\underbrace{\sum_i m_i \bar r_i - M\bar r_c}_{=0})\times \bar v_c = 0$$

essendo $\bar v_i = \bar v_c$ e $\sum_i m_i \bar r_i = M\bar r_c$

Quindi $\boxed{\bar L_c = 0}$

Il momento angolare rispetto qualsiasi altro polo può essere ottenuto mediante Teor. di König:

$$\bar L_\Omega = \bar L_c + (\bar r_c - \bar r_\Omega)\times \bar P \Rightarrow \boxed{\bar L_\Omega = (\bar r_c - \bar r_\Omega)\times \bar P}$$

Moti rotatori con asse fisso

Se $\bar V(t) = 0$ e $\bar R(t) = 0$, l'origine O coincide con l'origine O'

$$\text{Se } \bar V = 0,\ \bar R = 0 \Rightarrow \boxed{\bar v_i = \bar\omega \times \bar r_i}$$

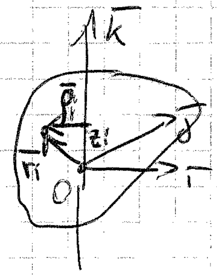
Pertanto i punti ruotano.

La quantità di moto totale risulta nulla o $\neq$ da zero a seconda che il centro di massa si trovi ovvero sull'asse di rotazione

Scelto O come polo si calcola:

$$\bar L = \sum \bar r_i \times \bar p_i = \sum_i \bar r_i \times m_i(\bar\omega \times \bar r_i)$$

Ogni vettore $\bar r_i$ può essere decomposto nella somma $\bar r_i = z_i \bar k + \bar\rho_i$



dove ogni $\bar\rho_i$ è $\perp$ a $\bar\omega$; si può riscrivere

$$\bar L = \sum_i (z_i \bar k + \bar\rho_i)\times m_i(\bar\omega \times \bar\rho_i) = \sum_i m_i z_i \bar k \times (\bar\omega \times \bar\rho_i) + \sum_i m_i \rho_i^2 \bar\omega$$

$$= -\sum_i m_i z_i \omega \bar\rho_i + \sum_i m_i \rho_i^2 \bar\omega$$

Il momento angolare totale non è in generale // a $\bar\omega$:

$$\bar L = \bar L_\parallel + \bar L_\perp$$

Per la quantità di moto totale vale $\bar{P} = M\bar{v}_c$
Per $\bar{L}$ può essere utilizzato $\bar{L} = I\bar{\omega} + \bar{L}_\perp$ purché il polo si trovi sull'asse usando come polo il punto di contatto P^*

MOMENTO D'INERZIA

Per un sistema continuo

$$I = \int \rho^2 dm$$

Per definizione I cambia al variare della posizione, relativa al sistema, dell'asse ~~...~~ rispetto al quale viene calcolato. In particolare se l'asse viene allontanato dal centro di massa del sistema, I aumenta. Ciò è dimostrabile mediante il:

TEOREMA di HUYGENS-STEINER

Permette un collegamento fra i momenti d'inerzia relativi ad assi paralleli: il momento d'inerzia I rispetto ad una retta qualsiasi si può scrivere come la somma di 2 termini:

① I calcolato rispetto alla retta parallela alla prima, passante per il centro di massa C del sistema

② il prodotto della massa totale del sistema per il quadrato della distanza dei 2 assi

$$\boxed{I = I_C + Md^2}$$ [TEOR. di HUYGENS-STEINER]

In un sistema ~~...~~ piano, esiste una relazione tra i momenti d'inerzia relativi ad assi fra loro perpendicolari:

$$I_z = I_x + I_y$$

Il momento d'inerzia dipende dalle caratteristiche geometriche del corpo rigido in esame.

MOM. D'IN. I per UN DISCO OMOGENEO

di massa m e raggio R rispetto all'asse passante per il centro O

DINAMICA dei SISTEMI RIGIDI CON ASSE FISSO

L'Eq del moto

L'unico grado di libertà è espresso mediante rotazione di angolo θ. Scelto l'asse z coincidente con quello di rotazione si ha:

$$L_z = \bar{L}\cdot\bar{k} = (I\bar{\omega} + \bar{L}_\perp)\cdot\bar{k} = I\omega \quad \text{[MOMENTO ASSIALE]}$$

L'eq assiale diventa:

$$M_z^{(e)} = \frac{d\bar{L}}{dt}\cdot\bar{k} = \frac{d}{dt}(\bar{L}\cdot\bar{k}) = \frac{d}{dt}I\omega$$

Nei sistemi rigidi I è costante:

$$M_z^{(e)} = I\frac{d\omega}{dt} \quad \text{e poiché} \quad \omega = \frac{d\theta}{dt}$$

si ha:

$$\boxed{M_z^{(e)} = I\frac{d^2\theta}{dt}}$$

Il momento assiale $M_z^{(e)}$ delle forze esterne può essere ottenuto proiettando sull'asse della rotazione il momento polare delle forze esterne, calcolato rispetto un polo qualunque scelto sull'asse. Se il momento polare è $\perp$ all'asse, il momento assiale si annulla. Quando le azioni esterne sono riconducibili ad un'unica forza, il momento assiale risulta nullo nei 2 casi in cui:

1- la forza risulti // all'asse

2- la ~~forza~~ retta d'azione della forza incontri l'asse.

REGOLA DI CALCOLO del MOMENTO ASSIALE:

Una generica forza $\bar{F}$ applicata ad un corpo contribuisce al momento assiale con un termine additivo, dato dal prodotto del modulo del suo componente $\bar{F}_\perp$ perpendicolare all'asse moltiplicato per il corrispondente braccio rispetto all'asse: a tale termine si attribuisce il segno positivo o negativo a seconda che la forza, agendo da sola, tende a far ruotare il corpo attorno all'asse in senso antiorario o orario, rispettivamente.

CONSERVAZIONE DEL MOMENTO ANGOLARE ASSIALE

Se $M_z^{(e)} = 0 \Rightarrow \frac{dL_z}{dt} = 0 \Rightarrow L_z = cost$ ovvero si conserva!

Pertanto si può scrivere $\boxed{\underset{\text{iniziale}}{I_1 \omega_1} = \underset{\text{finale}}{I_2 \omega_2}}$

ENERGIA CINETICA DI UN SISTEMA RIGIDO

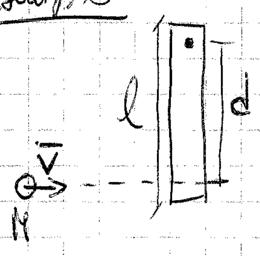
Essendo per definizione $\bar{v} = \bar{v}_c + \bar{\omega} \times (\bar{r} - \bar{r}_c)$ la velocità di ogni punto di un sistema rigido, si ricava

$$\boxed{K = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} I_c \omega^2}$$ [E. CINETICA del CORPO RIGIDO]

I_c è il momento d'inerzia rispetto all'asse passante per il centro di massa // al vettore $\bar{\omega}$. Né la direzione né il modulo di $\bar{\omega}$ sono necessariamente costanti nel sistema di riferimento con origine nel centro di massa.

MOTO SOLO TRASLATORIO	MOTO SOLO ROTATORIO	MOTO GENERALE VARIO
$K = \frac{1}{2} M v_c^2$	$K = \frac{1}{2} I \omega^2$	$K = K_c + \frac{1}{2} I_c \omega^2$

Esempio



Un'asta rigida di massa m, omogenea, di dimensioni trasversali trascurabili rispetto alla lunghezza l, può ruotare attorno ad un asse fisso orizzontale, privo di attrito. Essa viene colpita ad una distanza d dall'asse di rotazione da una sferetta di massa M, e velocità $\bar{v} \perp$ all'asse. L'urto è elastico, determinare $\bar{v}'$ e $\bar{\omega}$ dell'asta dopo l'urto, trovare d affinché l'asse non eserciti forze alcune sull'asta.

Essendo privo di attrito l'asse si ha $M_z^{(e)} = 0 \Rightarrow \frac{dL_z}{dt} = 0 \Rightarrow L_z = cost$

Pertanto il momento angolare totale si conserva:

$$Mvd + \cancel{I\omega_0} = Mv'd + I\omega$$

si ricava $v - v' = \frac{I}{Md}\omega$ Essendo l'urto elastico $\frac{1}{2}Mv^2 + \cancel{\frac{1}{2}I\omega_0^2} = \frac{1}{2}Mv'^2 + \frac{1}{2}I$ si conserva EK

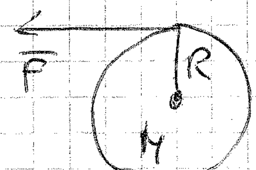
Lavoro delle forze agenti sui sistemi rigidi

Il lavoro complessivo delle forze operanti su un sistema rigido è determinato unicamente dalle forze esterne.

Caso moto rotatorio

$$\boxed{\delta W = M_z^{(e)} d\theta} \qquad d\theta = \omega dt$$

Esempio: Un disco omogeneo di massa M e raggio R è libero di ruotare attorno ad un asse orizzontale fisso passante per il centro del disco e perpendicolare ad esso. Al disco, inizialmente fermo viene applicata, mediante una corda avvolta su di esso, una forza orizzontale costante $\bar{F}$. Determinare il modulo ω_n della velocità angolare acquistata dopo n giri attorno all'asse.



L'unica forza agente esterna è F per cui possiamo scrivere

$$M_z^{(e)} = FR$$

Il lavoro elementare di tale forza è $\delta W = FR\,d\theta$. Calcoliamo il lavoro dopo n giri:

$$W = \int_0^{2\pi n} FR\,d\theta = FR\,2\pi n$$

Per il teorema delle forze vive si ha: $W = \Delta K$

$$FR\,2\pi n = \frac{1}{2} I \omega_n^2 - 0 \qquad I = \frac{1}{2} MR^2$$

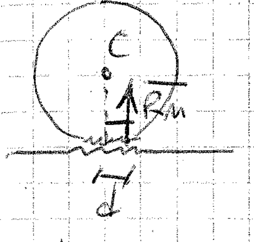
Sostituendo: $FR\,2\pi n = \frac{1}{4} MR^2 \omega_n^2 \Rightarrow \omega_n^2 = \frac{8F\cancel{R}\pi n}{MR^{\cancel{2}}}$

da cui $\omega_n = \sqrt{\frac{8F\pi n}{MR}}$

Energia e moto dei sistemi rigidi

Se le forze esterne che fanno lavoro su un sistema rigido sono conservative, l'energia meccanica del sistema si conserva.

quello della rotazione e determina il rotolamento del sistema. Si può schematizzare che la reazione $\bar{R}_n$ sia applicata a distanza d dall'asse $\perp$ a C:



$$\boxed{\bar{M}_z^{(e)} = d\,\bar{R}_n}$$ [MOMENTO ATTRITO VOLVENTE]

Il valore di d dipende dai materiali.

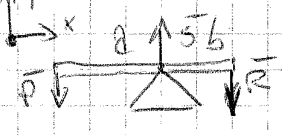
STATICA DEI SISTEMI RIGIDI

Un sistema rigido in equilibrio, vale a dire fermo nel sistema di riferimento rispetto al quale viene studiato, è caratterizzato dal fatto che tutte le velocità dei punti che lo costituiscono sono nulle. Pertanto se $\bar{P}_{tot}$ e $\bar{L}_{tot}$ sono nulli, segue

$$\begin{cases} \bar{F}^{(e)} = 0 \\ \bar{M}^{(e)} = 0 \end{cases}$$ [EQ. FONDAMENTALI della STATICA]

» Se il risultante di un sistema di vettori (in questo caso le forze) è nullo, il momento non dipende dal polo. Pertanto è possibile scegliere un polo qualsiasi per il calcolo del momento delle forze, di solito si usa un polo che permetta di annullare il contributo di una reazione.

ESEMPIO



LEVA DI PRIMO GENERE

Determinare condizione d'equilibrio e reazione vincolare del fulcro.

Detti a, b i rispettivi bracci delle forze $\bar{P}$ e $\bar{R}$ rispetto al fulcro, possiamo scrivere cond. d'equilibrio:

$$\begin{cases} \bar{F}^{(e)} = 0 \\ \bar{M}^{(e)} = 0 \end{cases} \text{ ovvero } \begin{cases} S_x = 0 \quad S_y - P - R = 0 \quad S_z = 0 \\ Pa - Rb = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S_y = P + R \\ Pa = Rb \end{cases}$$

Reazione vincolare diretta su asse y $S_y = P + R$

Cond. d'equilibrio $\frac{P}{R} = \frac{b}{a}$ ovvero le forze per essere equilibrate devono stare in rapporto come il rapporto dei loro bracci.