NUMERO : 392

DATA : 17/10/2012

# A P P U N T I

STUDENTE : Genta

MATERIA : Analisi Matematica I
Prof. Cortese

05/10/11

# I LEZIONE: INSIEME

È un concetto primitivo, collezione di oggetti, indicati con A, B, C ..... X, Z e gli elementi a, b, c ... x, z (minuscolo).

$a \in A$ l'elemento a è parte della collezione A (appartiene)

$a \notin A$ non appartiene

$\phi$ insieme vuoto $\forall x : x \notin \phi$ $\boxed{U}$: universo

$B = \{1, 2, 3, 17\}$ $C = \{x : x \geq 2\}$ proprietà di appartenenza

$A \subseteq B \overset{def}{\iff} \forall a \in A \Rightarrow a \in B$ INCLUSIONE

A è incluso in B (possono essere anche uguali) $A = B$

Concetto di uguaglianza: $A = B \overset{def}{\iff} A \subseteq B \land B \subseteq A$

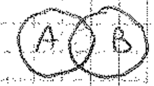
$A \subset B \overset{def}{\iff} (\forall a \in A \Rightarrow a \in B) \land (\exists b \in B : b \notin A)$ STRETTA INCLUSIONE

nota: $A \subset B \Rightarrow A \subseteq B$

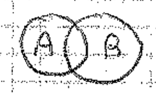
Es: $A = \{1, 2, 3\}$ $B = \{1, 2\}$ $B \subset A$ $B \subseteq A$

UNIONE: $\forall A, B$ definisco $A \cup B = \{x : x \in A \lor x \in B\}$

INTERSEZIONE: $\forall A, B$ definisco $A \cap B = \{x : x \in A \land x \in B\}$



DIFFERENZA: $\forall A, B$ definisco $A / B = \{x : x \in A \land x \notin B\}$



DIFFERENZA SIMMETRICA: $\forall A, B$ definisco $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

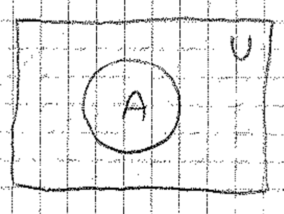
ma anche $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

COMPLEMENTO: $\forall A \subseteq U$ $\complement_U(A) = \{x \in U : x \notin A\}$

nota: 1) $\complement_U(U) = \phi$

2) $\complement_U(\phi) = U$

3) $\complement_U(\complement_U(A)) = A$



generano altri insiemi

PROPRIETÀ di $\subseteq$:

$\forall A : A \subseteq A$ riflessiva

$\forall A, B : A \subseteq B \land B \subseteq A \Rightarrow A = B$ antisimmetrica

$\forall A, B, C : A \subseteq B \land B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$ Transitiva

$\Rightarrow$ l'inclusione è una relazione d'ordine

B
A
I

NOTA: $X \subseteq Y \Leftrightarrow X \cap Y = X$
$X \subseteq Y \Leftrightarrow X \cup Y = Y$

$X \setminus Y = \mathcal{C}_J(Y) \cap X$

## ELEMENTI DI LOGICA ELEMENTARE

PROPOSIZIONE: enunciato al quale è possibile univocamente attribuire un valore di verità. a: "Paolo risiede a Fossano" (o è vera o è falsa)

CONNETTIVI LOGICI: agiscono sulle proposizioni generandone delle nuove

NEGAZIONE LOGICA: $\forall p$, $\neg p$

| $p$ | $\neg p$ |
|---|---|
| V | F |
| F | V |

rimanda al complemento
$(\neg(\neg p) = p)$

CONGIUNZIONE LOGICA: $\forall p,q$, $p \wedge q$

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | F |
| F | F | F |

DISGIUNZIONE LOGICA: $\forall p,q$, $p \vee q$ è falsa solo se sono false entrambe

① $(p) \wedge (\neg p)$ è sempre falsa PRINCIPIO DI NON CONTRADDIZIONE (assurdo)

② $(p) \vee (\neg p)$ è sempre vera PRINCIPIO DEL TERZO ESCLUSO

IMPLICAZIONE LOGICA: $\forall p,q$ $p \Rightarrow q$ equivale $(\neg p \vee q)$

| $p, q$ | $p \Rightarrow q$ |
|---|---|
| V V | V |
| V F | F |
| F V | V |
| F F | V |

| $p, q$ | $\neg p$ | $(\neg p \vee q)$ |
|---|---|---|
| V V | F | V |
| V F | F | F |
| F V | V | V |
| F F | V | V |

$p$ è condizione suff. per $q$

$q$ è condizione necess. per $p$

DOPPIA IMPLICAZIONE: $p \Leftrightarrow q$ $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow p)$

| $p, q$ | $p \Leftrightarrow q$ |
|---|---|
| V V | V |
| V F | F |
| F V | F |
| F F | V |

(se e solo se)
o
(equivalenza logica)

$p$ è condizione necessaria e sufficiente per $q$

PREDICATO: un enunciato che contiene una variabile o più variabili libere

$p(x)$: "x è un numero pari" ($p(2)$ è vera; $p(3)$ è falsa)

Diventa proposizione quando definisci le variabili

I quantificatori ($\forall$ universale) e ($\exists$ esiste) posti di fronte ad un predicato lo rendono proposizione.

$\forall x : p(x)$: "$x^2+1>0$" V $\quad \forall x: p(x)$: "$x^2-10>0$" F

$p(x;y)$: "lo studente x conosce il significato della parola inglese y"

$\forall x, \forall y : p(x;y)$ $\quad \exists x, \exists y : p(x,y)$

$\forall y, \forall x : p(x;y)$ $\quad \exists y, \exists x : p(x,y)$

$\exists x, \forall y : p(x,y)$ $\quad \forall x, \exists y : p(x,y)$

$\exists y, \forall x : p(x,y)$ $\quad \forall y, \exists x : p(x,y)$

NEGAZIONE:

$s = (\forall x : p(x))$ $\quad \neg s = (\exists x : \neg p(x))$

$r = (\forall x, \exists y : p(x,y))$ $\quad \neg r = (\exists x, \forall y : \neg p(x;y))$

$q = (\forall x, \exists y : p(x,y) \wedge r(x,y))$ $\quad \neg q = (\exists x, \forall y : \neg p(x,y) \vee \neg r(x,y))$

07/10/11

II LEZIONE: I NUMERI

OPERAZIONE SOMMA: è binaria e interna

$\forall a, b \in \mathbb{N} \quad (a+b) \to c \in \mathbb{N}$

1) $\forall a, b \in \mathbb{N} : a+b = b+a$ COMMUTATIVA

2) $\forall a, b, c \in \mathbb{N} : (a+b)+c = a+(b+c)$ ASSOCIATIVA

3) $\exists$ elemento neutro della somma detto 0: $a+0 = 0+a \quad \forall a \in \mathbb{N}$

$\forall a \in \mathbb{N}, \exists b \in \mathbb{N} : a+b = 0$ ? NO, si è passato così all'insieme $\mathbb{Z}$

L'insieme $\mathbb{Z}$ ha tutte le proprietà dell'insieme $\mathbb{N}$, ma anche:

4) $\forall a \in \mathbb{Z}, \exists b \in \mathbb{Z} : a+b = b+a = 0$

b prende il nome di opposto di a e si usa denotarlo con $b = -a$

NOTA: la sottrazione ordinaria $\forall a, b \in \mathbb{Z} : a-b \stackrel{def}{=} a+(-b)$

OPERAZIONE PRODOTTO: $\forall a, b \in \mathbb{N} : a \cdot b \to p$

1') $\forall a, b \in \mathbb{N} : a \cdot b = b \cdot a$ COMMUTATIVA

2') $\forall a, b, c \in \mathbb{N} : (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ ASSOCIATIVA

ASSIOMA DI COMPLETEZZA DI $\mathbb{R}$:

$\mathbb{R} / \forall x \in \mathbb{R}, \exists! P \in r$ che gli corrisponde
$\forall P \in r$ esiste unico $x \in \mathbb{R}$ che gli corrisponde | corrispondenza biunivoca

I razionali presentano un allineamento periodico o limitato se in $\frac{m}{n}$, $n$ è multiplo di 2 o 5.

$x = 5,\bar{9}$ $\quad 10x = 59,\bar{9}$ $\quad 9x = 10x - x = 59,\bar{9} - 5,\bar{9} = 54 \Rightarrow 9x = 54 \quad x = 6$

I razionali sono periodici mentre gli irrazionali sono aperiodici.
$\mathbb{R}$ = insieme di razionali e irrazionali
I razionali approssimano quanto si vuole i reali ($\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ tra due numeri reali esistono infiniti razionali).

I reali che soddisfano le proprietà viste (somma e prodotto) si dice che assumono la struttura di campo

OSSERVAZIONE:
4) $\forall a, b \in \mathbb{R}$: o $a \geq b$ o $a \leq b$ TOTALITÀ
1) $\forall a \in \mathbb{R}$: $a \leq a$ RIFLESSIVA
2) $\forall a, b \in \mathbb{R}$: $a \geq b \wedge a \leq b \Rightarrow a = b$ ANTISIMMETRICA
3) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$: $a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c$ TRANSITIVA
La relazione $\geq$ è relazione d'ordine di $\mathbb{R}$.
Se sono vere tutte e quattro si parla di relazione d'ordine TOTALE.
L'inclusione ad esempio non è una relazione d'ordine totale in quanto se prendiamo due sottoinsiemi $A = \{1\}$ e $B = \{2, 3\}$ è falso che $A \subseteq B$ o $B \subseteq A$.

$\mathbb{R}$ è un campo ordinato totalmente e corrisponde all'assioma di completezza.

PRINCIPIO DI INDUZIONE:
Sia $P(n)$ un predicato definito in $n \in \mathbb{N}$
i) $n_0 \Rightarrow P(n_0)$ VERA
ii) $P(n)$ vera $\Rightarrow P(n+1)$ VERA
$\Big\}$ $P(n)$ è vera $\forall n \in \mathbb{N}$

BERNOULLI: $(1+a)^n \geq 1 + na$, $\forall n$, $a > 0$ DIMOSTRAZIONE
i) $(1+a)^0 \geq 1$ $\quad a > 0$ VERA
ii) $(1+a)^n \geq 1 + na$ VERA $\Rightarrow (1+a)^{n+1} \geq 1 + (n+1)a$ VERA

$$(1+a)^{n+1} = (1+a)^n (1+a) \geq (1+na)(1+a) = 1 + na + a + na^2 \geq 1 + na + a = 1 + a(n+1)$$

Es: $3^n > n \cdot 2^n$ $\quad \forall n > 2$
i) $3^3 - 3 \cdot 2^3 > 0$ $\quad 27 - 24 > 0$ VERA
ii) $3^{n+1} - (n+1) \cdot 2^{n+1} > 0$ $\quad 3^{n+1} - (n+1) \cdot 2^{n+1} > 3n \cdot 2^n - (n+1) 2^{n+1} = 2^n (3n - 2n - 2) = 2^n (n-2) > 0$ VERA
c.v.d.

$$\mathcal{M}_A = \begin{cases} \phi \overset{def}{\Longleftrightarrow} \sup A = +\infty \\ \neq \phi \end{cases}$$

$\mathcal{M}_A = [3, +\infty)$ $\qquad$ $\mathcal{M}_B = [4, +\infty)$

Sia $A \subset \mathbb{R}$ superiormente limitato e non vuoto; diciamo che $l$ è l'<u>estremo superiore</u> di $A$ se $l$ è il minimo dei maggioranti di $A$.

Si denota: $l = \sup A$

$$A = \begin{cases} \text{LIMITATO} \\ \max A \text{ non esiste} \\ \sup A = 3 \\ \min A = \inf A = 0 \end{cases}$$

<u>NOTA</u>: Se $A$ ammette $\max A$ allora esso coincide con $\sup A$

$$l = \sup A \overset{def}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} l \in \mathcal{M}_A \\ \forall x \in \mathbb{R} \wedge x < l \Rightarrow x \notin \mathcal{M}_A \end{cases}$$

$$l = \sup A \overset{def}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \forall x \in A : x \leq l \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A : x > l - \varepsilon \end{cases}$$

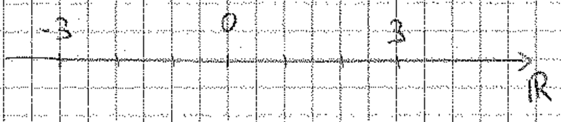
<u>COMPLETEZZA DI $\mathbb{R}$</u> $\quad I_4$

$\forall$ insieme $A \subset \mathbb{R}$ e superiormente limitato e non vuoto ammette in $\mathbb{R}$ estremo superiore (ciò non vale in $\mathbb{Q}$).

<u>Es.</u> $\{x \in \mathbb{Q} : x > 0 \wedge x^2 < 3\}$ non ammette sup in $\mathbb{Q}$

Con $I_1, I_2, I_3, I_4$ abbiamo trovato un modello matematico per la retta.

<u>MODULO O VALORE ASSOLUTO</u>:




$d(P, 0) = 3 \Rightarrow x_1 = 3, \ x_2 = -3$

$d(x, 0) = |x|$

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases} \qquad |x| = \sqrt{x^2} = \max\{x, -x\}$$

<u>PROPRIETÀ di $|x|$</u>:

1) $\forall a \in \mathbb{R} : |a| \geq 0$

2) $\forall a \in \mathbb{R} : a \leq |a|$

3) $\forall a \in \mathbb{R} : -|a| \leq a$

## FUNZIONE:

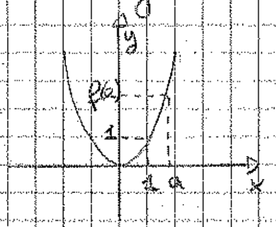
$f: A \to B$ $\qquad$ $A = \text{dom} f$

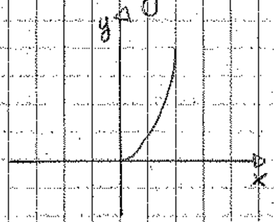
$x \in A \mapsto y \in B$ $\qquad$ $B = \text{codom} f$

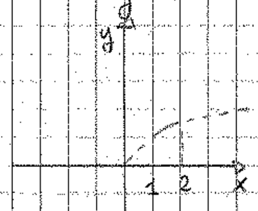
$f: \forall x \in A : \exists! \, y \in B \,/\, y = f(x)$

Es. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad$ $f_1: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ $\qquad$ $f: [1,2] \to \mathbb{R}$

$x \mapsto y = x^2$ $\qquad$ $x \mapsto y = x^2$ $\qquad$ $x \mapsto y = \sqrt{x}$




$f_1: \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ $\quad$ questo è il campo di esistenza

$x \mapsto y = \sqrt{x}$ $\quad$ il dominio è contenuto nel c.e. è scelto da noi

GRAFICO di $f$:

$\Gamma(f) = \{(x,y) \in X \times Y : x \in \text{dom} f \wedge y = f(x) \in \text{codom} f\}$

I punti del piano che soddisfano l'equazione $y = f(x)$

IMMAGINE DI UNA FUNZIONE:

$f: X \subseteq \mathbb{R} \to Y$

$x \in X \mapsto y = f(x)$

$x$ ha immagine $y = f(x)$

$f(X) = \text{im} f = \{y \in Y : \exists x \in \text{dom} f \,/\, y = f(x)\}$

CONTROIMMAGINE DI UN INSIEME:

$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad$ $\text{codom} g = \mathbb{R}$

$x \mapsto y = \text{sen} x$ $\qquad$ $\text{im} g = [-1; 1]$

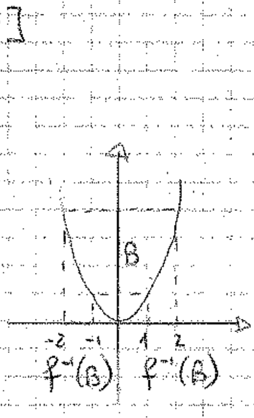
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

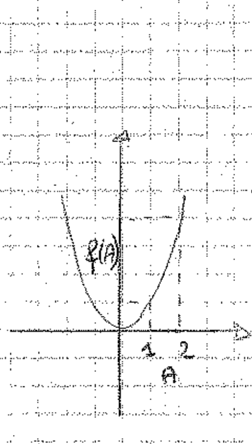
$x \mapsto y = x^2$

$A = [1,2] \subseteq X \equiv \mathbb{R}$

$f^{-1}(f(A)) = A \cup [-2, -1]$

$f^{-1}(f(A)) \supseteq A$




© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 13 di 108

OSSERVAZIONE:

Una funzione biettiva ammette FUNZIONE INVERSA

$f: A \subseteq \mathbb{R} \to B$ biettiva $\quad a \mapsto b = f(a)$

$f^{-1}: B \to A \quad b \mapsto a \,/\, f(a) = b$

$f: \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

$x \mapsto y = x^2$

f è biunivoca $\to$ ammette $f^{-1}: \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

$x \mapsto y = \sqrt{x}$

$G(f) = \{(a,b) \in A \times B : b = f(a)\}$

$G(f^{-1}) = \{(b,a) \in B \times A : b = f(a)\}$ La funzione e la sua inversa sono simmetriche alla bisettrice del primo quadrante.

Es. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

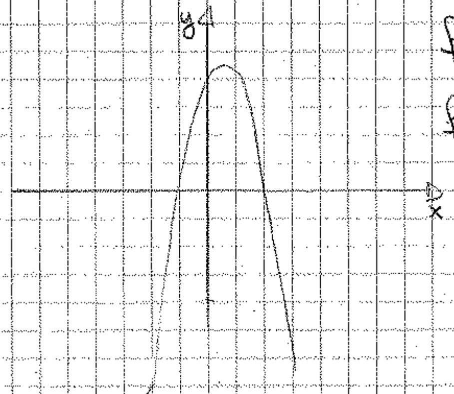
$x \mapsto y = (2-x)(x+|x+2|)$

studiare l'invertibilità e scrivere l'inversa

$$|x+2| = \begin{cases} x+2, & x+2 \geq 0 \to x \geq -2 \\ -x-2, & x+2 < 0 \to x < -2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} (2-x)(x+x+2), & x \geq -2 \\ (2-x)(x-x-2), & x < -2 \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} -2x^2+2x+4, & x \geq -2 \\ 2x-4, & x < 2 \end{cases}$$

$x_v = \frac{1}{2} \quad y_v = \frac{9}{2}$



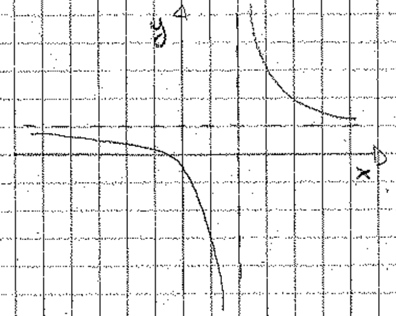
$f_1: \left(-\infty, \frac{1}{2}\right] \to \left(-\infty, \frac{9}{2}\right] \qquad f_1^{-1}: \left(-\infty, \frac{9}{2}\right] \to \left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$

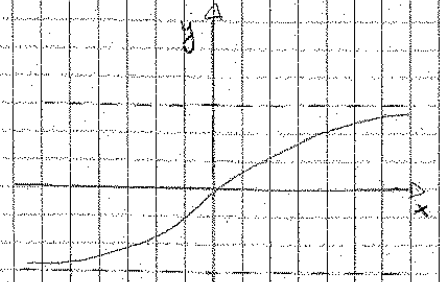
$f_2: \left[\frac{1}{2}, +\infty\right) \to \left(-\infty, \frac{9}{2}\right] \qquad f_2^{-1}: \left(-\infty, \frac{9}{2}\right] \to \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$

$$f_1 = \begin{cases} \text{se } x \in (-\infty, -2],\ y \in (-\infty, -8] \\ y = 2x-4 \Rightarrow x = \frac{y+4}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2}y + 2 \\ \text{se } x \in \left[-2, \frac{1}{2}\right],\ y \in \left[-8, \frac{9}{2}\right] \\ y = -2x^2+2x+4 \to -2x^2+2x+4-y = 0 \quad x = \frac{-1+\sqrt{1+8-2y}}{-2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{9-2y} \\ x \leftrightarrow y \end{cases}$$

$x \to y = g[f(x)] = \sqrt[p]{f(x)} = \sqrt[p]{x^2}$ $\qquad$ $x \to y = f[g(x)] = [g(x)]^2 = (\sqrt[p]{x})^2$

$f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ $\qquad g(x) = \operatorname{arctg} x \qquad g \circ f$





$f: (-\infty, 2) \cup (2, +\infty) \to (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ $\qquad$ $g: \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$x \mapsto y = \frac{x+1}{x-2}$ $\qquad$ $x \mapsto y = \operatorname{arctg} x$

$A = (\operatorname{im} f \cap \operatorname{dom} g) = ((-\infty, 1) \cup (1, +\infty)) \cap \mathbb{R} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

$\operatorname{dom} g \circ f = f^{-1}(A) = f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{1\}) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$\operatorname{im} g \circ f = g(A) = g(\mathbb{R} \setminus \{1\}) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$

$g \circ f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$

$x \to y = \operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)$

$g \circ f$ è invertibile essendo composizione di funzioni iniettive e tratti e suriettive

$(g \circ f)^{-1} : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R} \setminus \{2\} \qquad x \mapsto y = \frac{1 + 2 \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x - 1}$

$\operatorname{tg} y = \frac{x+1}{x-2} \qquad t = \operatorname{tg} y \qquad tx - 2t = x + 1 \qquad x = \frac{1+2t}{t-1}$

NOTA: $f: A \to B$
$g: B \to C$ biettive

$g \circ f : A \to C \qquad (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} : C \to A$

NOTA: $f \circ f^{-1} = i_Y$
$f^{-1} \circ f = i_X$

$$\begin{tikzcd} \underset{X}{\operatorname{dom} f} \arrow[r, bend left, "f"] & \underset{Y}{\operatorname{im} f} \arrow[l, bend left, "f^{-1}"] \end{tikzcd}$$

FUNZIONI MONOTONE

Sia $A \subset \mathbb{R}$ e sia $f: A \to \mathbb{R}$

$f$ è MONOTONA CRESCENTE su $A \overset{def}{\iff} \forall x_1, x_2 \in A : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

la somma di funzioni dispari è dispari.
Il prodotto di funzioni pari è pari.
Il prodotto di funzioni dispari è pari.
Il prodotto di funzioni pari e dispari o dispari e pari è dispari.

FUNZIONI PERIODICHE

$f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x)$ è T-periodica su A $\overset{def}{\iff}$ i) $\forall x \in A,\ x \in A \Rightarrow (x+T) \in A$
ii) $\forall x \in A: f(x+T) = f(x)$

NOTA: Se $f(x)$ è T-periodica su A allora $f\left(\frac{x}{\alpha}\right)$ è $\alpha T$ periodica

Dim: $f(x+T) = f(x) \quad \forall x \in A$

$$f\left(\frac{x}{\alpha}\right) = f\left(\frac{x+\alpha T}{\alpha}\right) = f\left(\frac{x}{\alpha} + \frac{\alpha T}{\alpha}\right) = f\left(\frac{x}{\alpha} + T\right) = f\left(\frac{x}{\alpha}\right)$$

Es: $y = \operatorname{sen} x \quad T = 2\pi$
$y = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \quad T = 4\pi$
$y = \operatorname{sen}(4x) \quad T = \frac{\pi}{2}$

NOTA: Siano $f_1, f_2: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
1) $f_1$ è $T_1$-periodica su $\mathbb{R}$
2) $f_2$ è $T_2$-periodica su $\mathbb{R}$

i) $f_1 + f_2$ è periodica se $m_1 T_1 = m_2 T_2 = T \quad m_1, m_2 \in \mathbb{N}$

$m_1 T_1 = m_2 T_2 \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{m_2}{m_1} \in \mathbb{Q}$

ii) il periodo $T$ = minimo comune multiplo di $T_1$ e $T_2$

Es: $f(x) = \sin 4x - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)$

$T_1 = \frac{\pi}{2} \qquad T_2 = 4\pi$

i) $\frac{T_1}{T_2} = \frac{1}{8} \in \mathbb{Q} \Rightarrow f$ è periodica

ii) mcm $= \frac{8}{2}\pi \Rightarrow T = 4\pi$

$g(x) = \operatorname{sen}(\pi x) + \cos x$

$T_1 = 2 \qquad T_2 = 2\pi$

i) $\frac{T_1}{T_2} = \frac{1}{\pi} \notin \mathbb{Q} \Rightarrow g$ non è periodica

# SUCCESSIONI

Sono particolari funzioni che hanno come dominio $\mathbb{N}$.

$a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ $\quad$ $b_n : A \subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ $\quad$ $a_n = \sqrt{n-4}\,,\ n \geq 4$

$n \mapsto a_n = f(n)$ $\quad$ $n \geq n_0 \mapsto b_n$

Una $P(n)$ è definitivamente verificata se lo è $\forall n \geq n_0$ (cioè se lo è per tutti gli $n$ fatto salvo per un numero finito di essi).

Es. $a_n = n^2$ $\quad$ $b_n = \frac{n^2}{n^2+1}$ $\quad$ $c_n = (-1)^n$

## DIVERGENZA DI UNA SUCCESSIONE

$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \overset{def}{\iff} \forall A>0,\ \exists n_A : n > n_A \Rightarrow a_n > A$

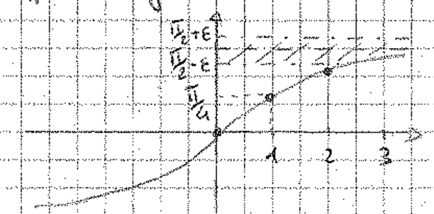
$\{a_n\}_{n\geq n_0}$ $\quad$ $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \overset{def}{\iff} \forall A>0,\ \exists n_A : n \geq n_0 \wedge n \geq n_A \Rightarrow a_n > A$

Es. $\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty \iff \forall A>0,\ \exists n_A : n > n_A \Rightarrow n^2 > A$

$n^2 > A$ $\quad$ $\cancel{n < -\sqrt{A}}$ v $n > \sqrt{A}$ $\quad$ $\forall n > [\sqrt{A}] \Rightarrow n^2 > A$

## CONVERGENZA DI UNA SUCCESSIONE

$a_n = \operatorname{arctg} n$




$\lim_{n\to+\infty} a_n = l \overset{def}{\iff} \forall \varepsilon>0 : \exists n_\varepsilon \,/\, n > n_\varepsilon \Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon$

$\overset{def}{\iff} \forall \varepsilon>0,\ \exists n_\varepsilon \,/\, n \in I_{n_\varepsilon}(+\infty) \Rightarrow a_n \in I_\varepsilon(l)$

Se una successione $a_n$ non è né convergente né divergente è INDETERMINATA ($d_n = \operatorname{sen}(n)$)

Una successione è REGOLARE se è divergente o convergente.

## SUCCESSIONI MONOTONE

$\{a_n\}_{n\geq n_0}$ è detta MONOTONA CRESCENTE $\overset{def}{\iff} \forall n \geq n_0 : a_{n+1} \geq a_n$

è detta MONOTONA STRETTAMENTE CRESCENTE $\overset{def}{\iff} \forall n \geq n_0 : a_{n+1} > a_n$

è detta MONOTONA DECRESCENTE $\overset{def}{\iff} \forall n \geq n_0 : a_{n+1} \leq a_n$

è detta MONOTONA STRETTAMENTE DECRESCENTE $\overset{def}{\iff} \forall n \geq n_0 : a_{n+1} < a_n$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 21 di 108

$$\left(\frac{n^2+1-1}{n^2-1}\right)^{n+1}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{n-1}}=\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{n-1}}\overset{\text{dis. B.}}{\geq}\left(1+\frac{n+1}{n^2-1}\right)\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{n-1}}=$$

$$=\cancel{1+\frac{1}{n-1}}\cdot\frac{1}{\cancel{1+\frac{1}{n-1}}}=1$$

$$\frac{b_{n-1}}{b_n}\geq 1\ \forall n \Rightarrow b_{n-1}\geq b_n\ \forall n\quad (1)$$

$$b_n=a_n\left(1+\frac{1}{n}\right)>a_n\ \forall n\quad (2)$$

$(1)+(2)$ $\quad b_{n-1}\geq b_n>a_n\ \forall n$

$4=b_1>a_n\ \forall n \Rightarrow \forall n: a_n<4$ c.v.d (t.c.r)

## TEOREMA DI UNICITÀ

$\lim_{n\to+\infty} a_n=\ell$ se esiste il limite $\Rightarrow \ell$ è unico

Dim per assurdo: $(1)\lim_{n\to+\infty} a_n=\ell_1$ DIMOSTRAZIONE

$(2)\lim_{n\to+\infty} a_n=\ell_2$ $\wedge\ \ell_1\neq\ell_2$

(1) $\forall\varepsilon>0,\ \exists n_\varepsilon: n>n_\varepsilon \Rightarrow |a_n-\ell_1|<\varepsilon$

(2) $\forall\bar\varepsilon>0,\ \exists n_{\bar\varepsilon}: n>n_{\bar\varepsilon} \Rightarrow |a_n-\ell_2|<\bar\varepsilon$

Scelgo $\bar\varepsilon=\varepsilon$ e $n_0=\max\{n_\varepsilon, n_{\bar\varepsilon}\}$

$$|\ell_1-\ell_2|=|\ell_1-a_n+a_n-\ell_2|\overset{\text{dis. Tr.}}{\leq}|\ell_1-a_n|+|a_n-\ell_2|<2\varepsilon\quad\forall n>n_0$$

$$|\ell_1-\ell_2|<2\varepsilon\quad\forall n>n_0,\ \forall\varepsilon>0 \Rightarrow |\ell_1-\ell_2|=0 \Rightarrow \ell_1=\ell_2$$

## TEOREMA DI LIMITATEZZA

Se una successione è convergente allora è LIMITATA $\Leftrightarrow (\exists M>0: |a_n|\leq M,\ \forall n\geq n_0)$

Dim. $\lim_{n\to+\infty} a_n=\ell \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall\varepsilon>0,\ \exists n_\varepsilon: n\geq n_0 \wedge n>n_\varepsilon \Rightarrow |a_n-\ell|<\varepsilon$

considero $|a_n|=|a_n-\ell+\ell|\overset{\text{dis. Tr.}}{\leq}|a_n-\ell|+|\ell|\leq 1+|\ell|\quad\forall n>n_\varepsilon\qquad \varepsilon=1$

$|a_n|\leq 1+|\ell|\quad\forall n>n_1$ DIMOSTRAZIONE

$$N=\max\{|a_{n_0}|, |a_{n_0+1}|, |a_{n_0+2}|, \dots, |a_{n_1}|\}$$

scelgo $M=\max\{N, 1+|\ell|\} \Rightarrow |a_n|\leq M\quad\forall n\geq n_0$

21/10/11

# VI LEZIONE: CRITERI DI SUCCESSIONE

## EQUIVALENZA:

Date $\{a_n\}_{n \geq n_0}$, $\{b_n\}_{n \geq n_0}$ : $a_n$ è equivalente a $b_n$ per $n \to +\infty \overset{def}{\iff} \lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$

$\iff a_n \sim b_n \quad n \to +\infty$

Es. $\{a_n\}_{n \geq n_0}$ $\quad a_n = \frac{n}{n^2+4}$ $\qquad \{b_n\}_{n > 0}$ $\quad b_n = \frac{1}{n}$

$a_n \sim b_n$ per $n \to +\infty \to \lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{n}{n^2+4}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^2}{n^2+4} =$

$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n^2}} = 1$

OSSERVAZIONE: (formula di Stirling)

$a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\qquad a_n \sim e^{-n} \cdot n^n \cdot \sqrt{2\pi n}$ per $n \to +\infty$

$n \mapsto n!$

$n! \sim e^{-n} \cdot n^n \cdot \sqrt{2\pi n}$ $\qquad \lim_{n \to +\infty} \frac{n!}{e^{-n} \cdot n^n \cdot \sqrt{2\pi n}} = 1$

## SUCCESSIONE GEOMETRICA

$\{a_n\}_{n \geq n_0} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$n \mapsto q^n$, $q \in \mathbb{R}$ $\qquad$ q si chiama ragione

$$\lim_{n \to +\infty} q^n = \begin{cases} 0 & |q| < 1 \\ \text{indet.} & q = -1 \\ 1 & q = 1 \\ +\infty & q > 1 \\ \text{n.e.} & q < -1 \end{cases}$$

(per n pari $\to +\infty$, n dispari $\to -\infty$, per t.u.l. $\nexists$)

## CRITERIO DEL RAPPORTO

Sia $\{a_n\}_{n \geq n_0}$

i) $a_n$ definitivamente positiva $\iff \exists n_1 : n \geq n_1 \Rightarrow a_n > 0$

ii) esiste $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = q$

Th. Se $q < 1$ allora $a_n$ è convergente a zero

Se $q > 1$ allora $a_n$ è divergente

Se $q = 1$ non si può dire nulla

$= \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow \frac{f}{f_n} \to 0$ C.V.V.

CRITERIO DELLA RADICE

$\{a_n\}_{n \geq n_0}$ definitivamente positive

se $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = q \Rightarrow \begin{cases} q < 1 & a_n \text{ converge a } 0 \\ q > 1 & a_n \to +\infty \\ q = 1 & \text{nulla si può dire} \end{cases}$

Es. 1) $a_n = (-1)^n \cdot \frac{n+3}{n^2+3}$ $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$

$a_n = b_n \cdot c_n$

$b_n = (-1)^n$ certamente limitata $|(-1)^n| < 2$

$c_n = \frac{n+3}{n^2+3} \sim \frac{1}{n} \to 0$

2) $a_n = (-1)^n \left(\frac{n-3}{n+3}\right)$

$\forall n \in \mathbb{N}_p$ allora $a_n \to 1$
$\forall n \in \mathbb{N}_d$ allora $a_n \to -1$ | per T. unicità del limite il lim $\nexists$

3) $c_n = \sqrt[n]{1+3^n+5^n}$ $n > 0$

$c_n = 5\sqrt[n]{\left(\frac{1}{5}\right)^n + \left(\frac{3}{5}\right)^n + 1} \to 5$

4) $a_n = \frac{4^n + 10^n + \ln n}{2^n + n! + 35} = \frac{10^n\left[\left(\frac{4}{10}\right)^n + 1 + \frac{\ln n}{10^n}\right]}{n!\left[\frac{2^n}{n!} + 1 + \frac{35}{n!}\right]} \sim \frac{10^n}{n!} \to 0$

LIMITE

$f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall A > 0, \exists B_A > 0 : x \in \text{dom} f \wedge x > B_A \Rightarrow f(x) > A$

LIMITE A PIÙ INFINITO DIVERGENTE

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0, \exists B > 0 : x \in \text{dom} f \wedge x > B \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

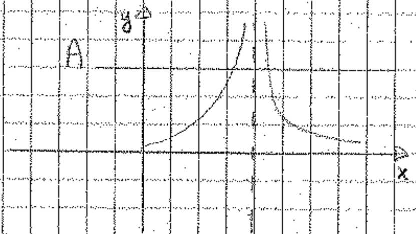
LIMITE A PIÙ INFINITO CONVERGENTE

Es. $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2+x}{x^2+1} = \frac{x^2\left(2+\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = 2$

$\left|\frac{2x^2+x}{x^2+1} - 2\right| < \varepsilon$

## LIMITE INFINITO

$f(x) = \frac{1}{(x-4)^2}$



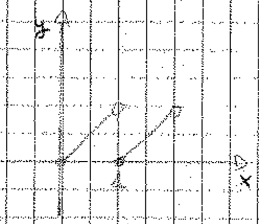
$\lim_{x \to 4} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \overset{def}{\iff} \forall A > 0, \exists \delta > 0 : x \in dom f \wedge 0 < |x - x_0| < \delta$

$\Rightarrow f(x) > A$ ($-\infty$ per $f(x) < -A$)

## LIMITE LATERALE

$y = \Pi(x)$ $\quad I(1)$



su $I(1)$: $\Pi(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1 \\ x-1, & 1 \le x < 2 \end{cases}$

$\lim_{x \to 1} \Pi(x) =$ non esiste $\quad \lim_{x \to 1^+} \Pi(x) = \Pi(1) = 0 \quad \lim_{x \to 1^-} \Pi(x) = 1 \neq \Pi(1)$

LIMITE SINISTRO

$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell \overset{def}{\iff} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : x \in dom f \wedge x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell \overset{def}{\iff} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : x \in dom f \wedge x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

LIMITE DESTRO

$f(x)$ è continua in $x_0 \overset{def}{\iff} \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

$f$ è continua in $x_0$, da destra $\iff \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

OSSERVAZIONE:

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \iff \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell \wedge \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$

$f$ continua in $x_0 \iff \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

DISCONTINUITÀ di I SPECIE: ($f$ definita almeno $\dot{I}(x_0)$)

$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell_1$

$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell_2 \quad \ell_1 \neq \ell_2 \quad \ell_1$ e $\ell_2$ sono numeri finiti $\in \mathbb{R}$

Si dice che $f$ ammette in $x_0$ discontinuità I specie di salto $\Delta = |\ell_1 - \ell_2|$

- $f(x) = \begin{cases} e^{1/x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$

$\lim_{x \to 0^-} e^{1/x} = 0 \quad \lim_{x \to 0^+} e^{1/x} = +\infty$ è una discontinuità di II specie (né I, né III)

## TEOREMA DI UNICITÀ

$\lim_{x \to c} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ allora $\ell$ è unico

Dim. (caso finito) DIMOSTRAZIONE

per assurdo se $\ell$ non è unico $\Rightarrow \lim_{x\to c} f(x) = \ell_1 \wedge \lim_{x \to c} f(x) = \ell_2 \wedge \ell_1 \neq \ell_2$

$\lim_{x\to c} f(x) = \ell_1 \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0 : 0 < |x-c| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - \ell_1| < \varepsilon$

scelgo $\varepsilon$: $\ell_1 - \varepsilon > \ell_2 + \varepsilon \Rightarrow 2\varepsilon < \ell_1 - \ell_2 \Rightarrow \varepsilon < \frac{\ell_1 - \ell_2}{2}$ ipotizzando $(\ell_1 > \ell_2)$

ad esempio $\varepsilon = \frac{|\ell_1 - \ell_2|}{3} > 0$

$\lim_{x\to c} f(x) = \ell_2 \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_2 > 0 : 0 < |x-c| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - \ell_2| < \varepsilon$

$\ell_1 - \varepsilon < f(x) < \ell_1 + \varepsilon \Rightarrow f(x) \in I_\varepsilon(\ell_1)$

$\ell_2 - \varepsilon < f(x) < \ell_2 + \varepsilon \Rightarrow f(x) \in I_\varepsilon(\ell_2)$

Se scelgo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} \Rightarrow \forall x \in I_\delta(c) \Rightarrow f(x) \in I_\varepsilon(\ell_1) \wedge f(x) \in I_\varepsilon(\ell_2)$

ma $I_\varepsilon(\ell_1) \cap I_\varepsilon(\ell_2) = \phi$ ASSURDO $\quad \pi \wedge \neg\pi$

## TEOREMA DI PERMANENZA DEL SEGNO

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$

i) sia $\ell > 0$

Th. allora esiste un $I(x_0) \setminus \{x_0\}$ sul quale $f(x) > 0$ DIMOSTRAZIONE

Dim. $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \overset{def}{\iff} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \wedge x \in \text{dom} f \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

scelgo $\varepsilon = \frac{\ell}{2}$ allora $|f(x) - \ell| < \varepsilon \iff \frac{\ell}{2} < f(x) < \frac{3}{2}\ell \quad \forall x \in \dot{I}_\delta(x_0)$

c.v.d

## TEOREMA DELLA PERMANENZA "ROVESCIATO"

$$\left.\begin{array}{l} \text{i) Se esiste } \lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \\ \text{ii) esiste } \dot{I}(x_0) : f(x) \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \ell \geq 0$$

## TEOREMA DEL CONFRONTO

$f(x), g(x) \qquad x_0 \in \mathbb{R}$

i) $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \wedge \lim_{x \to x_0} g(x) = m$

ii) $\exists \dot{I}(x_0) : f(x) \leq g(x)$

Th. $\ell \leq m$

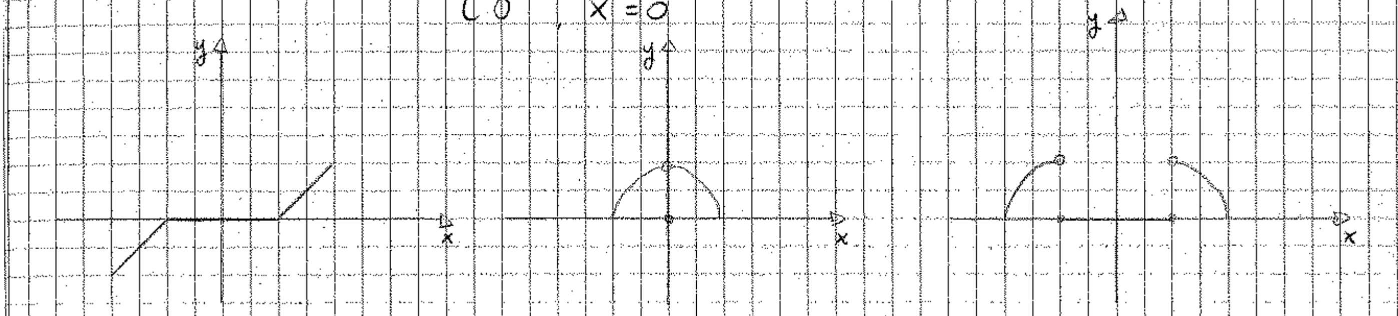
Controes.

$x(t): [-2,2] \to [-1,1]$

$$x(t) = t + \frac{1}{2}|t-1| - \frac{1}{2}|t+1| = \begin{cases} t+1, & -2 \le t < -1 \\ 0, & -1 \le t \le 1 \\ t-1, & 1 < t \le 2 \end{cases}$$

$f(x): [-1,1] \to [0,1)$

$$x \longmapsto \Pi(1-x^2) = \begin{cases} 1-x^2, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$




$f[x(t)]: [-2,2] \to [0,1)$

$$t \longmapsto \Pi(1-x(t^2))$$

$$\Pi(1-x(t^2)) = \begin{cases} -t^2-2t, & -2 \le t < -1 \\ 0, & -1 \le t \le 1 \\ -t^2+2t, & 1 < t \le 2 \end{cases}$$

$$t \to 0 \Rightarrow x(t) \to 0 \Rightarrow f \to 1 \neq \lim_{t\to 0} \Pi(1-x(t^2)) = 0$$

$g \circ f$ ben definita $\mathrm{im} f \cap \mathrm{dom}\, g \neq \emptyset$

i) $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$

ii) $\lim_{y \to y_0} g(y) = \ell$

iii) $g$ sia continua in $y_0$

Th. $\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = \ell = g(y_0)$

TEOREMA di SOSTITUZIONE

Es. $\lim_{x\to 0} \operatorname{arctg}(\ln(2+x)) = \operatorname{arctg}(\ln 2)$ si può fare perché $g$ è continua in $\ln 2$

$g\left[\lim_{x\to x_0} f(x)\right] = \ell$

## LIMITI NOTEVOLI

1) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ 2) $\lim_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

2') se $\{a_n\}_{n\geq n_0}$ diverge cioè $\lim_{n\to+\infty} a_n = \infty$ allora $\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$

3) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ 4) $\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

5) $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha \quad \alpha\in\mathbb{R}$ 6) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

7) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

Dim. 3. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2(1+\cos x)} =$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{2}$

4. $\frac{1}{x} = t \quad x\neq 0 \quad$ se $x\to 0^\pm \Rightarrow t\to\pm\infty \quad \lim_{x\to 0^\pm} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to\pm\infty} \left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e$

5. $y = (1+x)^\alpha - 1 \Rightarrow y+1 = (1+x)^\alpha \Rightarrow \left(y+1 = e^{\alpha \ln(1+x)} \Rightarrow y = e^{\alpha\ln(1+x)} - 1\right)$ inutile

$x\to 0 \Rightarrow y\to 0 \quad \ln(1+y) = \alpha\ln(1+x) \quad 1+x = e^{\frac{1}{\alpha}\ln(1+y)} \quad x = e^{\frac{1}{\alpha}\ln(1+y)} - 1$

$\lim_{y\to 0} \frac{y}{e^{\frac{1}{\alpha}\ln(1+y)} - 1} \cdot \frac{\frac{1}{\alpha}\ln(1+y)}{\frac{1}{\alpha}\ln(1+y)} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\frac{1}{\alpha}\ln(1+y)} \cdot \lim_{z\to 0} \frac{z}{e^z - 1} = \alpha$

$z = \frac{1}{\alpha}\ln(1+y) \quad$ se $y\to 0 \Rightarrow z\to 0$

6. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = (\ln$ è continua$) = \ln e = 1$

7. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\ln(1+y)} = 1$

$e^x - 1 = y \quad x = \ln(1+y) \quad x\to 0 \Rightarrow y\to 0$

OSSERVAZIONE

$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$ definita per $f(x) > 0$

es. $(x+1)^x = e^{x\ln(x+1)} \qquad x > -1$

$\lim_{x\to c} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x\to c} g(x)\ln f(x)}$

$a_n \leq b \quad b_n \geq a \implies$ sono limitate

per teorema regolarità $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell_1 \quad \lim_{n\to+\infty} b_n = \ell_2$

NOTA: $\left.\begin{array}{l}\lim_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{2^n} = 0 \\ \lim_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = \ell_2 - \ell_1\end{array}\right\} \implies \ell_1 = \ell_2 = \ell$

NOTA 2: $\lim_{n\to+\infty} f(a_n)\cdot f(b_n) = f(\ell)\cdot f(\ell) = f^2(\ell)$

essendo $f$ continua

$f(a_n)\cdot f(b_n) < 0 \ \forall n$ (per costruzione)

$\lim_{n\to+\infty} f(a_n)\cdot f(b_n) = f^2(\ell)$ per t. permanenza segno $f^2(\ell) \leq 0 \implies f(\ell) = 0$

allora $\ell = \bar{c}$

OSSERVAZIONE:

Se $f(c_1) = 0$ o $f(c_2) = 0$ o $f(c_n) = 0$ la dimostrazione era conclusa!

02/11/11

# IX LEZIONE: CONTINUITÀ

## TEOREMA DI WEIERSTRASS

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ (chiuso e limitato)

1) $f$ sia continua su $[a,b]$ $(f \in \mathcal{C}([a,b]))$

th. $\exists x_1, x_2 \in [a,b] : f(x_1) \geq f(x) \ \forall x \in [a,b]$, $f(x_2) \leq f(x) \ \forall x \in [a,b]$

ovvero la funzione ammette su $[a,b]$ massimo e minimo

$M = \max_{x\in[a,b]} f(x) = f(x_1) \qquad m = \min_{x\in[a,b]} f(x) = f(x_2)$

CONTROESEMPI

1) $f(x) = x$ su $\mathbb{R}$ $\quad \mathbb{R}$ è chiuso ma non è limitato $\implies$ non ammette massimo o minimo

2) $f(x) = M(x)$ su $[0,2]$ non è continua

$\min_{x\in[0,2]} f(x) = 0 \qquad \max_{x\in[0,2]} f(x) = $ n.e. ma $\sup_{x\in[0,2]} f(x) = 1$

COROLLARIO (al t. esistenza degli zeri)

$f, g$ definite in $[a,b]$ a valori in $\mathbb{R}$

$\left.\begin{array}{l}\text{i) } f,g \in \mathcal{C}([a,b]) \\ \text{ii) } f(a) > g(a) \wedge f(b) < g(b)\end{array}\right\} \implies$ TH $\exists \bar{x} \in (a,b) : f(\bar{x}) = g(\bar{x})$

TEOREMA CONTINUITÀ - INVERTIBILITÀ

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$

i) $f \in \mathcal{C}([a,b])$

allora $f$ invertibile su $[a,b] \iff f$ strett. monotona su $[a,b]$

NOTA: $f^{-1}$ è ancora continua e monotona strett. (stesso tipo)

CONFRONTO LOCALE (SIMBOLI DI LANDAU)

Siano $f$ e $g: I \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$ con $c$ = uno dei simboli $\{x_0, x_0^+, x_0^-, \pm\infty\}$

i) $g(x) \neq 0, \forall x \in I \setminus \{c\}$

Considero $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$ (finito o infinito)

D. I $f(x) = O\,g(x)$ per $x \to c \overset{def}{\iff}$ se $\ell$ è finito — $f$ è controllata da $g$

D. II $f(x) \asymp g(x)$ per $x \to c \overset{def}{\iff}$ se $\ell$ è finito e non nullo — $f$ è equigrande con $g$

D. III $f(x) \sim g(x)$ per $x \to c \overset{def}{\iff}$ se $\ell = 1$ — $f$ è equivalente a $g$

D. IV $f(x) = o\,g(x)$ per $x \to c \overset{def}{\iff}$ se $\ell = 0$ — $f$ è trascurabile rispetto a $g$

OSSERVAZIONE: $f \asymp g$ per $x \to c \Rightarrow f = O(g)$ per $x \to c$

$f \sim g$ per $x \to c \Rightarrow f = O(g)$ per $x \to c$

$f = o(g)$ per $x \to c \Rightarrow f = O(g)$ per $x \to c$

Se $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty \Rightarrow \lim_{x \to c} \frac{g(x)}{f(x)} = 0 \Rightarrow g(x) = o(f(x))$ per $x \to c$

NOTA:

Dire che $f(x) = O\,g(x)$ per $x \to c \Rightarrow \frac{f}{g}$ limitato su $\dot{I}(c)$

LIMITI NOTEVOLI

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \iff \sin x \sim x$ per $x \to 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0 \iff \sin x = o(x)$ per $x \to +\infty$

$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \iff 1-\cos x \asymp x^2$ per $x \to 0$

$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{\frac{1}{2}x^2} = 1 \iff 1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$ per $x \to 0$

$\lim_{x \to 0} \frac{\cosh(x)-1}{x^2} = \frac{1}{2} \iff \cosh(x)-1 \sim \frac{1}{2}x^2$ per $x \to 0$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sinh(x)}{x} = 1 \iff \sinh(x) \sim x$ per $x \to 0$

$\lim_{x\to c} \frac{g(x)}{\varphi(x)} = 0 \Rightarrow g(x) = o(\varphi(x))$ per $x \to c$

$\left( ? \; \lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} \frac{\lambda}{\lambda} = 0 \Rightarrow g(x) = o(f(x)) \text{ per } x \to c \right)$ $\quad o(\varphi(x)) = o(\lambda f(x)) = o(f)$ per $x \to c$

CONTINUITÀ in $X_0$ $\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

$\lim_{x\to x_0} f(x) - f(x_0) = 0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) = o(1)$ per $x \to x_0$

$f(x) = f(x_0) + o(1)$ per $x \to x_0$ definizione di continuità

ALGEBRA DEGLI o PICCOLO

i) $o(f) + o(f) = o(f)$ per $x \to c$

ii) $o(o(f)) = o(f)$ per $x \to c$

iii) $o(f + o(f)) = o(f)$ per $x \to c$

iv) $o(f) \cdot o(g) = o(f \cdot g)$ per $x \to c$

v) $f \cdot o(g) = o(f g)$ per $x \to c$

vi) $[o(f)]^K = o(f^K)$ per $x \to c$, $K > 0$

vii) $[f + o(f)]^K = f^K + o(f^K)$ per $x \to c$, $K > 0$

viii) $\frac{o(f)}{g} = o\left(\frac{f}{g}\right)$ per $x \to c$

Dim iii) $g = o(f + h)$ essendo $h(x) = o(f(x))$ per $x \to c$ DIMOSTRAZIONE

$$\lim_{x\to c} \frac{g(x)}{f(x)+h(x)} = 0 = \lim_{x\to c} \frac{g(x)}{f(x)\Big[1 + \underbrace{\frac{h(x)}{f(x)}}_{0}\Big]} = \lim_{x\to c} \frac{g(x)}{f(x)} \Rightarrow g(x) = o(f(x))$$

$g(x) = o(f(x))$ per $x \to c$ $\quad o(f(x) + h(x)) = o(f(x) + o(f(x))) = o(f)$

v) $\varphi(x) = f(x) \cdot h(x)$ essendo $h(x) = o(g(x))$ DIMOSTRAZIONE

$$\lim_{x\to c} \frac{\varphi(x)}{f(x) \cdot g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{\cancel{f(x)} \cdot h(x)}{\cancel{f(x)} \cdot g(x)} = 0 \quad \varphi(x) = o(f(x) \cdot g(x)) = f(x) \cdot h(x) = f(x) \cdot o(g(x))$$

CASO PARTICOLARE $x \to 0$

$o(x^n) \pm o(x^m) = o(x^k)$ $\quad K = \min\{n, m\}$

$o(x^2) + o(x) = o(x)$

$(o(x^n))^K = o(x^{nK})$

$x^n o(x^m) = o(x^{n+m})$

$\varphi(x) \cdot o(x^n) = o(x^n)$ se $\varphi(x)$ è limitata in $I(0)$

04/11/11

# X LEZIONE: INFINITI E INFINITESIMI

OSSERVAZIONE:

Siano $f, g, f_1, g_1 : I(c) \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$

$f \sim f_1 \wedge g \sim g_1$ per $x \to c$

$\lim_{x \to c} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to c} [f_1(x) \pm g_1(x)]$ NO!

CONTROESEMPIO

$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2+1} = [\infty - \infty]$ $\quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+x+1-x^2-1}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)} = \frac{1}{2}$

metodo errato

$\sqrt{x^2+x+1} \sim x \quad x \to +\infty$

$\sqrt{x^2+1} \sim x \quad x \to +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2+1} = \lim_{x \to +\infty} (x - x) = 0$ errato!

ESEMPIO

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{tg} x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x - x}{x^2} = 0$ errato!

$\sin x \sim x$ per $x \to 0 \iff \operatorname{sen} x = x + o(x)$

$\operatorname{tg} x \sim x$ per $x \to 0 \iff \operatorname{tg} x = x + o(x)$

$\lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x} + o(x) - \cancel{x} - o(x)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{o(x)}{x^2}$ non si può andare avanti perché $o(x) = x^2, x^3, x^4$

ES. $f(x) = \sqrt[3]{x} + x^2 + x^5 + o(x) + o(x^3) - 2\,o(x^2)$

$x \to 0 \quad f = x^{1/3} + o(x^{1/3})$ $\qquad x \to +\infty \quad f = x^5 + o(x^5)$

$\sin(2x^2) \sim 2x^2$ per $x \to 0$ $(2x^2 \to 0 \Rightarrow x \to 0)$ $\quad \sin(2x^2) = 2x^2 + o(x^2)$

$\sin(2x+1) \sim 2x+1$ per $x \to 0$ NO! perché $2x+1 \to 1$

$\sin(x-1)^2 \sim (x-1)^2$ per $x \to 1$

$\ln(1+t) \sim t$ per $t \to 0 \Rightarrow \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \sim \frac{1}{x}$ per $x \to +\infty$

$e^x = 1 + x + o(x)$ per $x \to 0$ $\qquad e^{\operatorname{sen} x} - 1 \sim \operatorname{sen} x \sim x \Rightarrow e^{\operatorname{sen} x} \sim x$ per $x \to 0$

$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ $\qquad e^{\cos x} = e^{1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)} - 1 \sim e^1 - 1$

## INFINITESIMI ed INFINITI

Siano $f(x), g(x) : I(c) \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$

i) $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in I(c) \setminus \{c\}$

ii) $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = 0$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 43 di 108

$x \to x_0^- \quad \varphi(x) = x_0 - x$

$x \to \infty \quad \varphi(x) = 1/x \quad \varphi(x) = \frac{1}{|x|}$

INFINITI CAMPIONE

$x \to x_0 \quad \varphi(x) = \frac{1}{x - x_0}$

$x \to +\infty \quad \varphi(x) = x$

Es. $y = \sin x$

$y = x(1 + \cos(\frac{1}{x})) = f(x)$

$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} g(x) = 0$

$\lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(1+\cos(\frac{1}{x}))} \Rightarrow$ non esiste

$x_k = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi} \quad \bar{x}_h = \frac{1}{\pi + 2h\pi} \quad x_k \to 1 \quad \bar{x}_h \to \infty$

ESEMPI:

- $f(x) = 3x^3 - 2x^2 - x$

$x \to 0 \quad \lim_{x \to 0} f(x) = 0$ è un infinitesimo

$g(x) = x \quad f(x) \sim -x \quad f(x) = -x + o(x)$

$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{[g(x)]^\alpha} = \lim_{x \to 0} \frac{-x}{x^\alpha} = \lim_{x \to 0} -x^{1-\alpha} = -1 \quad \alpha = 1$

$f(x)$ è un infinitesimo di ordine 1 rispetto a $g(x)$

PP: $-1 \cdot x^1 = -x$

- $x \to \infty \quad f(x) \sim 3x^3$

$g(x) = x \quad \lim_{x \to \infty} \frac{3x^3}{x^\alpha} = 3 \quad \alpha = 3$

PP: $3x^3$

- $x \to 1 \quad \lim_{x \to 1} f(x) = 0$ è un infinitesimo

$t = x - 1 \quad 3(t+1)^3 - 2(t+1)^2 - (t+1) = 3(1 + t^3 + 3t^2 + 3t) - 2(t^2 + 2t + 1) - t - 1 =$

$= 3t^3 + \cancel{3} + 9t^2 + 9t - 2t^2 - 4t - \cancel{2} - t - \cancel{1} = 3t^3 + 7t^2 + 4t \sim 4t \quad (t \to 0)$

$f(x) \sim 4(x-1)$ per $x \to 1$

$\lim_{x \to 1} \frac{4(x-1)}{(x-1)^\alpha} = 4$ se $\alpha = 1$

PP $4(x-1)$ per $x \to 1$

$f(x) = x^2+2 \quad g(x) = x^2$ sono equivalenti ma non asintotiche

$f(x) = x^3+\sin x \quad g(x) = x^3$ sono equivalenti ma non asintotiche

MA due funzioni asintotiche sono equivalenti

TEOREMA

Siano $f, g \quad (a, +\infty) \to \mathbb{R}$

i) $\left(\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = \infty\right)$

$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - g(x)] = 0$

TH. allora $f \sim g$ per $x \to +\infty$

Dim. $f \sim g$ per $x\to+\infty \overset{def}{\iff} \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \iff \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} - 1 = 0 \iff \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)-g(x)}{g(x)} = 0$ (0 per i)

c.v.d

$f: I(\infty) \to \mathbb{R}$

$y = mx+q$ è asintoto per $f(x) \overset{def}{\iff} \lim_{x\to+\infty} f(x) - mx - q = 0$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x) - mx - q}{x} = 0 \quad \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - m - \frac{q}{x}\right) = 0 \iff \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m$ se esiste finito

$q = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx]$ se esiste finito

$f(x) = mx+q+o(1)$ per $x\to+\infty$

ASINTOTO ORIZZONTALE: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = K \qquad y = K$ a.o.

ASINTOTO VERTICALE: $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty \qquad x = x_0$ a.v.

Es. 1) $g(x) = x\, e^{\frac{x+2}{x-1}}$

$\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{x+2}{x-1}} = e = m \qquad q = \lim_{x\to+\infty} \left(x e^{\frac{x+2}{x-1}} - ex\right) \qquad e^{\frac{x+2}{x-1}} = e^{1+\frac{3}{x-1}}$

$q = \lim_{x\to+\infty} ex\left(e^{\frac{3}{x-1}} - 1\right) \qquad e^{\frac{3}{x-1}} = 1 + \frac{3}{x-1} + o\left(\frac{1}{x-1}\right) \quad x\to+\infty$

$= \lim_{x\to+\infty} ex \cdot \frac{3}{x-1} = 3e \qquad$ asintoto: $y = ex+3e$

2) $f(x) = \sqrt{|x^2-4|} - x$

$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{|x^2-4|} - x = [\infty - \infty] = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-4-x^2}{\sqrt{x^2-4}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x\left(\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}+1\right)} = 0$

$y=0$ asintoto orizzontale destro $\qquad y = -2x$ asintoto obliquo

$= \lim_{x \to x_0} f'(x_0)(x - x_0) = 0$ c.v.d.

ESEMPIO NOTEVOLE

$f(x) = |x|$

in $x_0 = 0$ è continua $\lim_{x \to 0} |x| = |0| = 0 = f(0)$

è derivabile se esiste finito $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ => non esiste

=> $|x| = y$ non è derivabile in $x_0 = 0$

Non tutte le funzioni continue in un punto sono derivabili in quel punto!

Derivabilità => continuità Continuità $\not\Rightarrow$ derivabilità

ESEMPIO 2 NOTEVOLE

$g(x) = \sqrt[3]{x-1}$ dom $g = \mathbb{R}$

$x_0 = 1$ è derivabile in $x_0$?

$\lim_{x \to 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{x-1} - 0}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{(x-1)^{2/3}} = +\infty$ non è derivabile in $x_0 = 1$

Si assume $g'(1) = +\infty$ (anche se in realtà non esiste) sapendo che in questo caso $g(x)$ ammette tangente verticale in $x_0 = 1$ che ha equazione $x = 1$

PRIMA FORMULA DELL'INCREMENTO FINITO

Se $f(x)$ è derivabile in $x_0 \in$ dom $f$ allora esiste finito $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \in \mathbb{R}$

$f(x) - f(x_0) \sim f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ $(f'(x_0) \neq 0)$ $f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$

$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$

Se $f$ è derivabile in $x_0$ $f(x) = t(x) + o(x - x_0)$ $x \to x_0$

CALCOLO DELLE DERIVATE FONDAMENTALI

(1) $f(x) = x^\alpha$ $\alpha \in \mathbb{R}$

scelto un $x_0$ si tratta di calcolare $\lim_{x \to x_0} \frac{x^\alpha - x_0^\alpha}{x - x_0}$ $x - x_0 = t$ $x \to x_0$ $t \to 0$ $x = x_0 + t$

$\lim_{t \to 0} \frac{(x_0 + t)^\alpha - x_0^\alpha}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{x_0^\alpha (1 + \frac{t}{x_0})^\alpha - x_0^\alpha}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{x_0^\alpha (1 + \frac{\alpha}{x_0} t + o(t)) - x_0^\alpha}{t} =$

$= \lim_{t \to 0} \frac{\cancel{x_0^\alpha} + \alpha x_0^{\alpha - 1} t + o(t) - \cancel{x_0^\alpha}}{t} = \lim_{t \to 0} (\alpha x_0^{\alpha - 1} + o(1)) = \alpha x_0^{\alpha - 1}$ $\begin{cases} \text{se } \alpha - 1 \geq 0 & \forall x_0 \\ \text{se } \alpha - 1 < 0 & \forall x_0 \setminus \{0\} \end{cases}$

$f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ => $f'(x) = \alpha x_0^{\alpha - 1}$ $\forall \alpha \geq 1$, $\forall x_0 \in$ dom $f$

$f'(x) = \alpha x_0^{\alpha - 1}$ $\forall \alpha < 1$ ma $x_0 \neq 0$

iv) $\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{f^2(x_0)}$ con $f(x_0) \neq 0$

**Dim.** i) $\lim_{x\to x_0} \frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{f'(x_0)} + \underbrace{\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}}_{g'(x_0)}$

$= f'(x_0) + g'(x_0)$ c.v.d.

D I M O S T R A Z I O N I

ii) $\lim_{x\to x_0} \frac{(f\cdot g)(x)-(f\cdot g)(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)\cdot g(x) - f(x_0)\cdot g(x_0) + f(x)g(x_0) - f(x)\cdot g(x_0)}{x-x_0} =$

$= \lim_{x\to x_0} \left[\underbrace{f(x)}_{f(x_0)} \cdot \underbrace{\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}}_{g'(x_0)} + g(x_0)\cdot \underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{f'(x_0)}\right] = f(x_0)\cdot g'(x_0) + g(x_0)\cdot f'(x_0)$ c.v.d.

essendo d. ⇒ cont.

iv) $\lim_{x\to x_0} \frac{\left(\frac{1}{f}\right)(x) - \left(\frac{1}{f}\right)(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{f(x_0)}}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x_0)-f(x)}{(x-x_0)f(x_0)f(x)} =$

$= \lim_{x\to x_0} -\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)f(x_0)f(x)}$ $f(x)$ essendo derivabile è continua $\Rightarrow = -\frac{f'(x_0)}{f^2(x_0)}$ c.v.d.

iii) $D\left(\frac{f}{g}\right)(x_0) = D\left[f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right]_{x=x_0} \overset{ii)}{=} \left\{f(x)\cdot D\left[\frac{1}{g(x)}\right] + D[f(x)]\cdot\frac{1}{g(x)}\right\}_{x=x_0} \overset{iv)}{=}$

$= \left\{f(x)\cdot\left(-\frac{g'(x)}{g^2(x)}\right) + f'(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right\}_{x=x_0} = \frac{-f(x_0)g'(x_0)+f'(x_0)g(x_0)}{g^2(x_0)}$ c.v.d.

<u>NOTA</u>: $D(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha f'(x) + \beta g'(x) \quad \forall x \in \text{dom} f \cap \text{dom} g$

$D(k) = 0$

<u>COROLLARIO</u>: Se $f, g$ sono derivabili su $I$ allora $f+g$ è derivabile su $I$ e
$D(f+g) = f'(x) + g'(x) \quad \forall x \in I$

$f\cdot g$ è deriv. $D(f\cdot g) = f'(x)g(x) + f(x)\cdot g'(x) \quad \forall x \in I$

$\frac{f}{g}$ è deriv. $D\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2} \quad \forall x \in I \quad g \neq 0$

<u>OSSERVAZIONE</u>:

Siano $f, g, h$ funzioni derivabili in $x_0$
allora la funzione $y = f(x)\cdot g(x)\cdot h(x)$ è derivabile in $x_0$ e risulta

$D(f\cdot g\cdot h)(x_0) = f'(x_0)g(x_0)\cdot h(x_0) + f(x_0)\cdot g'(x_0)\, h(x_0) + f(x_0)\cdot g(x_0)\cdot h'(x_0)$

<u>NOTA</u>: $f(x) = |x|$

$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{|x|-|x_0|}{x-x_0}$ se $x>0$ $|x| = x$ $\ell = 1$; se $x<0$ $|x| = -x$ $\ell = -1$ $\quad D(|x|) = \text{sign}\,x, \ x \neq 0$

2) $y = \arcsin x \quad x \in [-1, 1], \; y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$x = \sin y$

$$D[\arcsin x] = \frac{1}{D \sin y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

11/11/11

# XII LEZIONE: NON DERIVABILITÀ

$y = f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$

i) $f, g$ siano derivabili in $x_0$

ii) $f(x) > 0$

$$y' = e^{g(x) \ln f(x)} \cdot \left( g'(x) \cdot \ln f(x) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} \right)$$

$$y' = \left[ f(x)^{g(x)} \cdot \left( g'(x) \cdot \ln f(x) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} \right) \right]_{x = x_0}$$

ESEMPIO

1) $f(x) = (x^2-1)^{\operatorname{arctg} x} \quad x^2 - 1 > 0 \quad f(x) = e^{\operatorname{arctg} x \ln(x^2-1)}$

$$f'(x) = e^{\operatorname{arctg} x \ln(x^2-1)} \cdot \left( \frac{1}{1+x^2} \ln(x^2+1) + \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2-1} \cdot 2x \right)$$

NOTA:

$y = f(x)$ derivabile e $f(x) > 0$

DERIVATA LOGARITMICA di $f(x) \overset{def}{\Longleftrightarrow} D \ln f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$

TEOREMA

Sia $f: I \to \mathbb{R}, \; I \subseteq \mathbb{R}$

i) $f$ sia derivabile su $I$ (aperto) e simmetrico

ii) $f$ sia pari su $I$ (dispari)

TH. allora $f'(x)$ è dispari su $I$ (pari)

Dim. Se $f(x)$ è pari su $I \overset{def}{\Longleftrightarrow} f(-x) = f(x), \; \forall x \in I$ DIMOSTRAZIONE

Derivando ambo i membri si ottiene: $\forall x \in I, \; -f'(-x) = f'(x) \Rightarrow f'(-x) = -f'(x)$

# NON DERIVABILITÀ

$f: [x_0, b) \to \mathbb{R} \quad b > x_0$

$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ se esiste finito è uguale a $f'_+(x_0)$ DERIVATA DESTRA di $f$ in $x_0$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 53 di 108

CASO 3. (cuspide)

$\ell_1$ e $\ell_2 \in \overline{\mathbb{R}}$ $\wedge$

a) $\ell_1 = +\infty$, $\ell_2 = -\infty$ (minimo relativo)

b) $\ell_1 = -\infty$, $\ell_2 = +\infty$ (massimo relativo)

Esiste tangente verticale $x = x_0$

ESEMPIO:

1) $f(x) = \sqrt[5]{x^2|x-1|}$ determinare i punti di non derivabilità

$\text{dom} f = \mathbb{R}$ ed è ovunque continua

I METODO. $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ punti che annullano la radice

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{\sqrt[5]{x^2|x-1|}}{x} = \frac{x^{2/5} \cdot |x-1|^{1/5}}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{|x-1|^{1/5}}{x^{3/5}} = -\infty$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt[5]{x^2|x-1|}}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x-1|^{1/5}}{x^{3/5}} = +\infty$$

CUSPIDE in $x = 0$

$$\lim_{x \to 1^\pm} \frac{\sqrt[5]{x^2|x-1|}}{x-1} = \begin{cases} \lim_{x \to 1^+} \frac{x^{2/5} \cdot (x-1)^{1/5}}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^{2/5}}{(x-1)^{4/5}} = +\infty \\ \lim_{x \to 1^-} \frac{x^{2/5} \cdot (1-x)^{1/5}}{-(1-x)} = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^{2/5}}{-(1-x)^{4/5}} = -\infty \end{cases}$$

CUSPIDE in $x = 1$

II METODO. derivo con regole di derivazione su $\text{dom} f'$

$$f'(x) = \frac{1}{5} \cdot (x^2|x-1|)^{-4/5} \cdot \left(2x \cdot |x-1| + x^2 \cdot \frac{|x-1|}{x-1}\right) = \frac{1}{5} \cdot \frac{|x-1|^{1/5}}{(x^2)^{4/5}} \cdot \left(2x + \frac{x^2}{x-1}\right)$$

$\text{dom} f' = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ $\complement(\text{dom} f \cap \text{dom} f')$ = punti di non derivabilità

CRITERIO DI DERIVABILITÀ LOCALE

$f: I(x_0) \to \mathbb{R}$

i) $f$ è continua su $I(x_0)$

ii) $f$ è derivabile su $\dot{I}(x_0)$

iii) esiste finito $\lim_{x \to x_0} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$

TH. Allora $f'(x_0) = \ell$

ESEMPIO:

1) $f(x) = \begin{cases} a \sin 2x - 4a & x < 0 \\ b \log(x+1) + bx^2 & x \geq 0 \end{cases}$

$x = 0$ $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} a \sin 2x - 4a = -4a$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} b \log(x+1) + bx^2 = 0$

$f$ è continua se $a = 0$

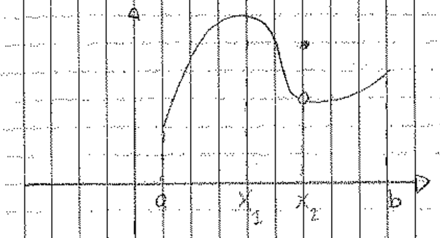
16/11/11

# XIII LEZIONE: MASSIMI E MINIMI

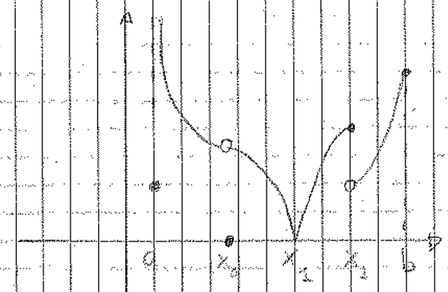
$f: [a,b] \to \mathbb{R}$

$x_0 \in [a,b]$ è punto di MASSIMO ASSOLUTO $\overset{def}{\iff} \forall x \in [a,b] : f(x_0) = M \geq f(x)$

$x_0 \in [a,b]$ è punto di MASSIMO RELATIVO $\overset{def}{\iff} \exists I_\delta(x_0) : \forall x \in I_\delta(x_0) \cap [a,b] \Rightarrow f(x_0) = M \geq f(x)$




a punto di minimo relativo e assoluto
$x_1$ punto di massimo relativo e assoluto
$x_2$ punto di massimo relativo
b punto di massimo relativo




a punto di minimo relativo
$x_0$ punto di minimo rel. e ass.
$x_1$ punto di minimo rel. e ass.
$x_2$ punto di massimo relativo
b punto di massimo relativo

I punti di minimo sono più di uno ma il minimo è uno!
I punti di massimo e minimo possono non essere punti di continuità e derivabilità.

## TEOREMA DI FERMAT

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$

i) $x_0 \in (a,b)$ sia punto di derivabilità di $f$
ii) $x_0$ sia estremo (punto di min o max rel)

TH $f'(x_0) = 0$ ($x_0$ è punto critico o stazionario)

Dim. per hp. $x_0$ è punto di max. relativo

$x < x_0 \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$

$x - x_0 < 0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) \leq 0$

$\left(\dfrac{\Delta f}{\Delta x}\right)^- = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad \forall x \in I^-(x_0)$

$$\lim_{x \to x_0^-} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\right)^-_{x_0} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \overset{\text{esiste finito per i}}{=} f'_-(x_0) \geq 0 \quad (\text{t.p.s.})$$

$x > x_0 \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$

$x - x_0 > 0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) \leq 0$

TEOREMA DI LAGRANGE (o DEL VALOR MEDIO)

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$

i) $f \in \mathcal{C}[a,b]$

ii) $f \in \mathcal{D}(a,b)$

TH. $\exists c \in (a,b) : \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$

Dim. $r_{AB} : r(x) = f(a) + \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x-a)$

definisco la funzione ausiliaria $g(x) = f(x) - r(x) = f(x) - f(a) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x-a)$

i) $g(x) \in \mathcal{C}[a,b]$ ii) $g(x) \in \mathcal{D}(a,b)$

$g(a) = f(a) - r(a) = f(a) - f(a) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (a-a) = 0$

$g(b) = f(b) - f(a) - \dfrac{f(b)-f(a)}{\cancel{b-a}} \cdot \cancel{(b-a)} = 0$

iii) $g(a) = g(b)$

Alla $g(x)$ si può applicare t. Rolle su $(a,b) \Rightarrow \exists c \in (a,b) : g'(c) = 0$

$g'(c) = f'(c) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 \qquad f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

TEST DI MONOTONIA

$f : (a,b) \to \mathbb{R}$

i) $f$ sia derivabile su $(a,b)$

TH. I) $f$ crescente su $(a,b) \Leftrightarrow f'(x) \geq 0, \ \forall x \in (a,b)$

I') $f$ decrescente su $(a,b) \Leftrightarrow f'(x) \leq 0, \ \forall x \in (a,b)$

II) $f'(x) > 0, \ \forall x \in (a,b) \Rightarrow f$ strett. crescente su $(a,b)$

Dim. I $f$ crescente su $(a,b) \Rightarrow f'(x) \geq 0, \ \forall x \in (a,b)$

$\forall x_0 \in (a,b)$ se scelgo un punto $x > x_0$, $x \in (a,b) \Rightarrow f(x) \geq f(x_0)$

$x - x_0 > 0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) \geq 0 \Rightarrow \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$

$\lim_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_+(x_0) \geq 0$

se scelgo $x < x_0$, $x \in (a,b) \Rightarrow \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$

$\lim_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_-(x_0) \geq 0$

$\Rightarrow f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0) \geq 0 \quad \forall x_0 \in (a,b)$

c.v.d.$_1$

I $f'(x) \geq 0, \ \forall x \in (a,b) \Rightarrow f(x)$ è crescente su $(a,b)$

scelgo $x_1, x_2 \in (a,b) : x_1 < x_2$

SECONDA FORMULA DELL'INCREMENTO FINITO

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$

i) $f \in \mathcal{C}[a,b]$

ii) $f \in \mathcal{D}(a,b)$

scelti due punti $x_1, x_2 \in (a,b)$ è possibile sull'intervallo chiuso $[x_1, x_2]$ applicare il teorema di Lagrange

$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(c)$, $c \in (x_1,x_2) \subset (a,b) \Rightarrow \forall x_1, x_2 \in (a,b)$ $f(x_2)-f(x_1) = f'(c)(x_2-x_1)$

per un opportuno $c \in (a,b)$

MASSIMI E MINIMI PER FUNZIONI DERIVABILI

TEOREMA

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$

i) $f \in \mathcal{C}[a,b]$

ii) $f \in \mathcal{D}(a,b)$

iii) $f'(x_0) = 0$, $x_0 \in (a,b)$

TH. Se a sinistra di $x_0$ $f'(x) \geq 0$, a destra di $x_0$ $f'(x) \leq 0$ $\Big\}$ $x_0$ è punto di MASSIMO RELATIVO

Se a destra di $x_0$ $f'(x) \geq 0$, a sinistra di $x_0$ $f'(x) \leq 0$ $\Big\}$ $x_0$ è punto di MINIMO RELATIVO

NOTA: Se non cambia segno nell'intorno di $x_0$ si ha un punto di flesso a tg orizzontale

18/11/11

XIV LEZIONE: DERIVATE SUCCESSIVE

$f(x) = \operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ $\qquad f'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$

$g(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ $\qquad g'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{senh} x$

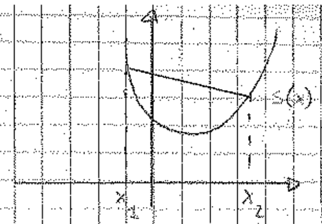
$f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Se $f$ è derivabile in $I_r(x_0) \to f'(x)$, $x \in I$

$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = f''(x_0)$ se esiste finito

Se $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ammette su $I$ la $f''(x)$, $\forall x \in I \overset{def}{\Longleftrightarrow} f''(x)$ DERIVATA SECONDA di $f$

$\ddot{f}(x_0)$ $\quad D^2 f(x_0)$ $\quad f''(x_0)$ $\quad \left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right)_{x_0}$




**CONCAVITÀ (per corde)**

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ presi $x_1, x_2 \in (a,b)$ su $[x_1, x_2] \Rightarrow f(x) \leq s(x)$

**NOTA:** Se $f$ è convessa per Tg $\Rightarrow$ è convessa per corde, se $f$ è convessa per corde non è detto che lo sia per tangenti (es. $|x|$)

**TEOREMA**

$f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

i) derivabile 2 volte su $I$

I. $f''(x) \underset{(\leq)}{\geq} 0, \ \forall x \in I \Leftrightarrow f$ $\underset{\text{(CONCAVA)}}{\text{CONVESSA}}$ su $I$

II. $f''(x) > 0, \ \forall x \in I \Rightarrow f$ CONVESSA su $I$

**TEOREMA II**

$f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

i) derivabile 2 volte su $I$

I. Se $x_0$ è punto di flesso $\Rightarrow f''(x_0) = 0$

II. Se $x_0 \in I \wedge f''(x_0) = 0 \Rightarrow$ se $f''(x)$ cambia segno in $I(x_0) \Rightarrow x_0$ è punto di flesso

se $f''(x)$ non cambia segno in $I(x_0) \Rightarrow x_0$ non è punto di flesso

**OSSERVAZIONE**

1) $f(x) = x^4 - x^2$

$f'(x) = 4x^3 - 2x$

$f''(x) = 12x^2 - 2$ $\quad f''(x) = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}$ $\quad f''(x) \geq 0 \Rightarrow x \leq -\frac{1}{\sqrt{6}} \vee x \geq \frac{1}{\sqrt{6}}$

$\Rightarrow x = -\frac{1}{\sqrt{6}}$ è punto di flesso discendente $\quad x = \frac{1}{\sqrt{6}}$ è punto di flesso ascendente

2) $f(x) = \sqrt[5]{x-2} = (x-2)^{1/5}$ $\quad f'(x) = \frac{1}{5}(x-2)^{-4/5}$ $\quad f''(x) = -\frac{4}{25}(x-2)^{-9/5} = -\frac{4}{25(x-2)^{9/5}}$ $\quad x \neq 2$

in $x = 2$ c'è un flesso ma $f''(2) \neq 0$ perché non esiste, $f$ non è deriv. 2 volte su $I$ !

**TEOREMA DELL'HOPITAL**

$f, g: \dot{I}(c) \to \mathbb{R}$ $\quad I(c), \ c \in \overline{\mathbb{R}}$

i) $f, g$ derivabili $\dot{I}(c)$

ii) $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in \dot{I}(c)$

iii) $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = \ell = \begin{cases} 0 \\ \pm\infty \end{cases}$

TH. se esiste $\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda \in \overline{\mathbb{R}}$ allora esiste $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda$

TEOREMA DI TAYLOR (resto di Lagrange)

$f$ è continua su $[a,b]$

$f$ è derivabile su $(a,b)$

TH. $\exists c \in (a,b) : f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Se lo applico al precedente problema su $(x_0, x)$ : $\exists \bar{c} \in (x_0, x) : f'(\bar{c}) = \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

$f(x) - f(x_0) = f'(\bar{c})(x-x_0)$ $\quad f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(\bar{c})(x-x_0)}_{\text{resto di Lagrange}}$ con $c \in (x_0, x)$, $c$ dipende da $x$

TEOREMA DI TAYLOR (resto di Lagrange)

$f: I \to \mathbb{R}$ essendo $I = I(x_0)$ intorno di $x_0$

i) $f \in C^{(n)}$ su $I(x_0)$

ii) esiste la $f^{(n+1)}(x)$ su $\dot{I}(x_0)$

TH. $\forall x \in \dot{I}(x_0) : f(x) = T_{n,x_0}(x) + \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ essendo $c \in (x_0, x)$

OSSERVAZIONE: Si parla di polinomio di MACLAURIN quando $x_0 = 0$

OSSERVAZIONE: Una funzione pari contiene solo potenze pari, le derivate di potenze dispari si annullano; le funzioni dispari contengono potenze dispari.

$\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + o(x^5)$ $\quad \cos x = 1 - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{x^4}{4!} + o(x^4)$ $\quad$ in $x_0 = 0$

$T_{5,0}(x) = f(0) + f'(0)x + \dfrac{f''(0)}{2}x^2 + \dfrac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dfrac{f^{IV}(0)}{4!}x^4 + \dfrac{f^{V}(0)}{5!}x^5$

TEOREMA DI UNICITÀ DEL POLINOMIO DI TAYLOR

$f: (a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$

i) $f$ sia derivabile $n$ volte in $x_0$

ii) $\exists$ un $P_n(x)$, grado$(P_n(x)) \leq n$ tale che $f(x) = P_n(x) + o(x-x_0)^n$ $\quad x \to x_0$

TH. allora $P_n(x) \equiv T_{n,x_0}(x)$

Dim. $P_n - T_{n,x_0}$ è un polinomio il cui grado è $\leq n$ $\qquad$ DIMOSTRAZIONE

se la tesi è vera allora equivalentemente dovrei dimostrare:

$P_n - T_{n,x_0} = \sum_{k=0}^{n} c_k (x-x_0)^k = c_0 + c_1(x-x_0)^1 + c_2(x-x_0)^2 \ldots + c_n(x-x_0)^n$

la TH $\iff c_k = 0 \quad \forall k = 0, 1, 2 \ldots n$

Per assurdo $\exists \bar{k} : c_{\bar{k}} \neq 0$

Indico con $m$ il più piccolo indice che nega la tesi cioè per il quale $c_m \neq 0$

(1) Allora $P_n - T_{n,x_0} = \sum_{k=m}^{n} c_k(x-x_0)^k = c_m(x-x_0)^m + \sum_{k=m+1}^{n} c_k(x-x_0)^k$ $\qquad m \leq n$

4) $f(x) = \cos x \quad x_0 = 0$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \dots + (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2k+1})$$

5) $f(x) = (1+x)^\alpha \quad x_0 = 0$ sviluppo binomiale

$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} \quad f''(x) = \alpha\cdot(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} \quad f'''(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3}$

$f'(0) = \alpha \quad f''(0) = \alpha(\alpha-1) \quad f'''(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1)\cdot\frac{x^2}{2} + \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdot\frac{x^3}{3!} + \dots + \binom{\alpha}{n} x^n + o(x^n)$$

ESEMPIO:

1) $f(x) = (1+x)^{1/2}$

$$(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$$

25/11/11

## XVI LEZIONE:

### ALGEBRA DEGLI SVILUPPI DI TAYLOR

$f(x) = T_{n,x_0}(x) + o(x-x_0)^n$

$g(x) = P_{n,x_0}(x) + o(x-x_0)^n$

i) $y = f(x) \pm g(x) \to T_n(x) \pm P_n(x)$

ii) $y = f(x)\cdot g(x) \to T_n(x)\cdot P_n(x)$

iii) $y = f[g(x)]$ supposto che esista e che $g(x) \to 0$ per $x \to x_0$

I. scrivo il polinomio di M.L. di $f(x)$ nel quale ad $x, x^2, x^3 \dots x^n$ sostituisco $g, g^2, g^3 \dots g^n$

II. sostituisco a $g, g^2, g^3 \dots g^n$ i rispettivi polinomi non considerando i termini di grado superiore non rilevanti

### TEOREMA I

Se $f(x)$ è derivabile 2 volte in $x_0$ e se $x_0$ è punto di flesso allora $f''(x_0) = 0$

Dim. $f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)}_{t(x)} + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + o(x-x_0)^2$ DIMOSTRAZIONE

$$f(x) - t(x) = \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + o(x-x_0)^2 = (x-x_0)^2\underbrace{\left[\frac{f''(x_0)}{2!} + o(1)\right]}_{H(x)} = (x-x_0)^2 H(x)$$

Se calcolo $\lim_{x\to x_0} f(x) - t(x) = \lim_{x\to x_0} (x-x_0)^2 H(x) = \ell$

il quadrato è sempre positivo

$$\lim_{x\to x_0} H(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{f''(x_0)}{2} + o(1) = \frac{f''(x_0)}{2} = 0$$

se $f''(x_0) > 0 \Rightarrow H > 0$ in $\dot{I}(x_0)$ se $f''(x_0) < 0 \Rightarrow H < 0$ in $\dot{I}(x_0)$

$= x^2 - \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{2}(x^4) + o(x^4) = x^2 - \frac{5}{6}x^4 + o(x^4)$

$\lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x^2} - \frac{5}{6}\cancel{x^4} + o(x^4) - \cancel{x^2}}{2\cancel{x^4}} = -\frac{5}{12}$

2) Scrivere lo sviluppo di ordine 6 di $f(x) = \sin x^2 (e^x - 1)^2$ $\quad T_{6,0}$

$\sin t = t - \frac{t^3}{6} + o(t^3) \qquad \sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{6} + o(x^6)$

$(e^x - 1)^2 = \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{4!}\right)^2 + o(x^6) = x^2 + \frac{x^4}{4} + x^3 + \frac{x^4}{3} + o(x^4) = x^2 + x^3 + \frac{7}{12}x^4 + o(x^4)$

$f(x) = \left(x^2 - \frac{x^6}{6} + o(x^6)\right)\left(x^2 + x^3 + \frac{7}{12}x^4 + o(x^4)\right) = x^4 + x^5 + \frac{7}{12}x^6 + o(x^6) = T_{6,0}$

$f'(0) = 0 \quad f''(0) = 0 \quad f'''(0) = 0 \quad \frac{f^{IV}(0)}{4!} = 1 \Rightarrow f^{IV}(0) = 24$ in $x = 0$ c'è un minimo

30/11/11

## XVII LEZIONE:

ESEMPI:

1) $\lim_{x \to +\infty} x^\alpha \left(e^{tg(\frac{1}{x})} - e^{(\frac{1}{x})}\right) \quad \alpha \in \mathbb{R} \qquad y = \frac{1}{x} \quad \begin{matrix} x \to +\infty \\ y \to 0^+ \end{matrix}$

$tg x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \quad x \to 0 \qquad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \quad x \to 0$

$e^{tg y} = 1 + y + y^3 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\left(y + \cancel{\frac{y^3}{3}}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(y + \cancel{\frac{y^3}{3}}\right)^3 + o(y^3) = 1 + y + \frac{y^3}{3} + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{6}y^3 + o(y^3) =$

$= 1 + y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}y^3 + o(y^3)$

$e^{tg y} - e^y = \cancel{1} + \cancel{y} + \cancel{\frac{1}{2}y^2} + \frac{1}{2}y^3 - \cancel{1} - \cancel{y} - \cancel{\frac{y^2}{2}} - \frac{y^3}{6} + o(y^3) = \frac{1}{3}y^3 + o(y^3) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}\right)^3 + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \quad x \to +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} x^\alpha \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{3} \cdot x^{\alpha - 3} + o(x^{\alpha-3})\right) = \begin{cases} +\infty, & \alpha > 3 \\ 1/3, & \alpha = 3 \\ 0, & \alpha < 3 \end{cases}$

2) $y = \ln(x^2 + 2) \qquad x_0 = 1 \qquad \begin{matrix} t = x - 1 \\ t \to 0 \end{matrix} \qquad T_{2,1}$

$\ln((t+1)^2 + 2) = \ln(t^2 + 2t + 3) = \ln 3\left(\frac{t^2}{3} + \frac{2}{3}t + 1\right) = \ln 3 + \ln\left(1 + \frac{t^2}{3} + \frac{2}{3}t\right) = \ln 3 + \ln(1 + y) =$

$= \ln 3 + y - \frac{y^2}{2} + o(y^2) = \ln 3 + \frac{2}{3}t + \frac{t^2}{3} - \frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{3} + \frac{2t}{3}\right)^2 + o(t^2) = \ln 3 + \frac{2}{3}t + \frac{t^2}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9}t^2 + o(t^2) =$

$= \ln 3 + \frac{2}{3}(x-1) + \frac{1}{9}(x-1)^2 + o(x-1)^2$

$$F(x) = \begin{cases} F_1 & \text{su } I_1 \\ F_2 & \text{su } I_2 \end{cases}$$ sono derivabili e quindi certamente continue

$$\lim_{x \to 0^-} F_1(x) = \lim_{x \to 0^-} -\frac{x^3}{3} + c_1 = c_1$$
$$\lim_{x \to 0^+} F_2(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^3}{3} + c_2 = c_2$$
$$\Rightarrow c_1 = c_2 \qquad F(x) = \begin{cases} -\frac{x^3}{3} + c, & x < 0 \\ \frac{x^3}{3} + c, & x \geq 0 \end{cases}$$

INTEGRALI FONDAMENTALI

I) $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$ se $\alpha \neq -1$ $\qquad$ i) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$ (su $x<0$ o $x>0$)

II) $\int e^x dx = e^x + c$

III) $\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x + c$ $\qquad$ VIII) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c$ $\quad \cos x \neq 0$

IV) $\int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + c$ $\qquad$ IX) $\int -\frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{cotg} x + c$ $\quad \sin x \neq 0$

V) $\int \operatorname{senh} x \, dx = \cosh x + c$ $\qquad$ X) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$ $\quad |x| < 1$

VI) $\int \cosh x \, dx = \operatorname{senh} x + c$

VII) $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + c$

PROPRIETÀ

Siano $f(x)$, $g(x)$ funzioni integrabili (in senso indefinito cioè ammetto primitive su I) allora anche $y = \alpha f(x) + \beta g(x)$ è una funzione integrabile su I (conseguenza immediata della linearità delle derivate).

ESEMPIO

1) $\int \left(2x^2 + \frac{a}{x}\right) dx = 2\int x^2 dx + a \int \frac{dx}{x} = \frac{2}{3}x^3 + a \ln|x| + c$

INTEGRAZIONE PER PARTI

Siano $f(x)$ e $g(x)$ funzioni definite e derivabili su I.
Se la funzione $f'(x) \cdot g(x)$ è integrabile su I
allora anche la funzione $f(x) \cdot g'(x)$ è integrabile su I e risulta

$$\int f'(x) g(x) dx = f(x) g(x) - \int f(x) \cdot g'(x) dx$$

DIMOSTRAZIONE

Dim. Indico con $H(x)$ una primitiva della funzione integrabile su I per Hp, $f'(x)g(x)$
$\Leftrightarrow H'(x) = f'(x) g(x) \quad \forall x \in I$
Considero $\frac{d}{dx}\left[f(x)g(x) - H(x)\right] = \cancel{f'(x)g(x)} + f(x)g'(x) - \cancel{H'(x)}$

4) $\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx \qquad t=\sqrt{x} \quad dt=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx \quad dx=2\sqrt{x}\,dt = 2t\,dt$

$\int \operatorname{arctg}t \cdot 2t\,dt = 2\int t\operatorname{arctg}t\,dt = 2\left(\frac{t^2}{2}\operatorname{arctg}t - \frac{1}{2}\int\frac{t^2+1-1}{1+t^2}dt\right) = 2\left(\frac{t^2}{2}\operatorname{arctg}t - \frac{1}{2}\int dt + \frac{1}{2}\int\frac{dt}{1+t^2}\right) =$

$f=t \quad dg=\operatorname{arctg}t\,dt \quad df=dt \quad g=? \qquad f=\operatorname{arctg}t \quad dg=t\,dt \quad df=\frac{1}{1+t^2}dt \quad g=\frac{t^2}{2}$

$= t^2\operatorname{arctg}t - t + \operatorname{arctg}t + c = x\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \sqrt{x} + \operatorname{arctg}\sqrt{x} + c$

ESEMPI NOTEVOLI

1) $\int \operatorname{tg}x\,dx = \int\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}dx \qquad t=\cos x \quad dt=-\operatorname{sen}x\,dx \qquad -\int\frac{dt}{t} = -\ln|t|+c = -\ln|\cos x|+c$

$\sqrt{x^2+1} \quad \Delta<0,\ a>0$

$\sqrt{x^2-1} \quad \Delta>0,\ a>0$

$\sqrt{1-x^2} \quad \Delta>0,\ a<0$

CASO I

$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$

CASO II

$\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \qquad y=\sqrt{1+x^2}\pm x \qquad y'=\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\pm 1 = \frac{x\pm\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{y}{\sqrt{1+x^2}}$

$t=x+\sqrt{1+x^2} \quad dt=\frac{t}{\sqrt{1+x^2}}dx \quad \frac{dt}{t}=\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \quad \int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+c=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+c$

CASO III

$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \int -\frac{dt}{t} = -\ln|t|+c = -\ln\left|\sqrt{x^2-1}-x\right|+c$

$t=\sqrt{x^2-1}-x \quad dt=\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}dx \qquad -\frac{dt}{t}=\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$

CASO IV (integrazione per parti)

$\int\sqrt{1+x^2}\,dx = x\sqrt{1+x^2} - \int\frac{x^2+1-1}{\sqrt{1+x^2}}dx = x\sqrt{1+x^2} - \int\frac{x^2+1}{\sqrt{1+x^2}}dx + \int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = x\sqrt{1+x^2} - \int\sqrt{1+x^2}\,dx + \int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} =$

$f=\sqrt{1+x^2} \quad dg=dx \quad df=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx \quad g=x$

$\Rightarrow 2\int\sqrt{1+x^2}\,dx = x\sqrt{1+x^2} + \int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{2}\sqrt{1+x^2} + \frac{\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|}{2} + c$

ESEMPIO:

1) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-6x}} = \int\frac{3\,dt}{\sqrt{9(t^2-1)}} = \int\frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} = -\ln\left|\sqrt{\left(\frac{x}{3}-1\right)^2-1}-\left(\frac{x}{3}-1\right)\right|+c$

$x^2-6x+9-9 = (x-3)^2-9 = 9\left[\left(\frac{x-3}{3}\right)^2-1\right] = 9\left[\left(\frac{x}{3}-1\right)^2-1\right] \qquad t=\frac{x}{3}-1 \quad dt=\frac{dx}{3}$

I) $\int \frac{dx}{x-x_0} = \ln|x-x_0| + c$

II) $\int \frac{dx}{(x-x_0)^k}$ $k \neq 1 \wedge k>0$ $t=(x-x_0)$ II') $\int \frac{P(x)}{(x-x_0)^k} \cdot dx$ $t=x-x_0$

III) $\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,dx = \ln|ax^2+bx+c| + k$

IV) si riconduce a $\int \frac{dx}{x^2+1} = \arctan x + c$

V) si integra per parti (vedere libro) no esame

ESEMPI NOTEVOLI:

1) $\int \frac{x^3+2}{x(x^2-4)}\,dx$

$$\begin{array}{r|l} x^3+2 & x^3-4x \\ x^3-4x & 1 \\ \hline // \; 4x+2 & \end{array}$$

$\frac{x^3+2}{x(x^2-4)} = 1 + \frac{4x+2}{x^3-4x}$

$I = \int 1\,dx + \int \frac{4x+2}{x^3-4x}\,dx = x + \int \frac{4x+2}{x^3-4x}\,dx$ $D_3(x) = x^3-4x = x(x-2)(x+2)$

$\frac{4x+2}{x^3-4x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x+2}$ $\forall x \neq 0, \pm 2$ $= \frac{A(x-2)(x+2) + B(x+2)x + C(x-2)x}{x^3-4x} =$

$= \frac{Ax^2 - 4A + Bx^2 + 2Bx + Cx^2 - 2Cx}{x^3-4x}$ $\begin{cases} A+B+C=0 \\ 2B-2C=4 \\ -4A=2 \end{cases}$ $\begin{cases} B+C=\frac{1}{2} \\ B-C=2 \\ A=-\frac{1}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} B=\frac{5}{4} \\ C=-\frac{3}{4} \\ A=-\frac{1}{2} \end{cases}$

$\int \frac{4x+2}{x^3-4x}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} + \frac{5}{4}\int \frac{dx}{x-2} - \frac{3}{4}\int \frac{dx}{x+2} = -\frac{1}{2}\ln|x| + \frac{5}{4}\ln|x-2| - \frac{3}{4}\ln|x+2| + c$

$I = x - \frac{1}{2}\ln|x| + \frac{5}{4}\ln|x-2| - \frac{3}{4}\ln|x+2| + c$

OSSERVAZIONE:

Moltiplico per x ambo i membri $(x \neq 0)$ $\frac{4x+2}{\cancel{x}(x-2)(x+2)} \cdot \cancel{x} = \frac{A\cancel{x}}{\cancel{x}} + \frac{Bx}{x-2} + \frac{Cx}{x+2}$

$\lim_{x\to 0} \frac{4x+2}{x^2-4} = \lim_{x\to 0}\left(A + \frac{Bx}{x-2} + \frac{Cx}{x+2}\right) = -\frac{1}{2} = A$

$B = \lim_{x\to 2} \frac{4x+2}{x(x+2)} = \frac{5}{4}$ $C = \lim_{x\to -2} \frac{4x+2}{x(x-2)} = -\frac{3}{4}$

ESEMPIO

1) $\frac{x+7}{x(x-1)(x+1)(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{x-3}$

$\lim_{x\to 0} \frac{x+7}{(x-1)(x+1)(x-3)} = \frac{7}{3} = A$ $\lim_{x\to 1} \frac{x+7}{x(x+1)(x-3)} = -2 = B$

$\lim_{x\to -1} \frac{x+7}{x(x-1)(x-3)} = -\frac{3}{4} = C$ $\lim_{x\to 3} \frac{x+7}{x(x-1)(x+1)} = \frac{5}{12} = D$

ii) $\sqrt{ax^2+bx+c} = tx - \sqrt{c}$, $c>0$

iii) $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\,x - t$, $a>0$

ESEMPIO:

1) $\int \frac{\sqrt{2x^2+x+1}}{x}\,dx$   ii) $\sqrt{2x^2+x+1} = tx-1$   $2x^2+x+\cancel{1} = t^2x^2+\cancel{1}-2tx$   $x\neq 0$   $2x+1 = t^2x-2t$

$x = \frac{1+2t}{t^2-2}$   $dx = \frac{2(t^2-2)-2t(1+2t)}{(t^2-2)^2}dt$   $dx = \frac{-2t^2-2t-4}{(t^2-2)^2}\,dt$

$x^2$ deve andarsene

$\sqrt{2x^2+x+1} = t\cdot\frac{1+2t}{t^2-2} - 1 = \frac{t+2t^2-t^2+2}{t^2-2} = \frac{t^2+t+2}{t^2-2}$

$I = \int \frac{t^2+t+2}{\cancel{t^2-2}}\cdot\frac{\cancel{t^2-2}}{1+2t}\cdot\frac{-2\,(t^2+t+2)}{(t^2-2)^2}\,dt = -2\int\frac{(t^2+t+2)^2}{(1+2t)(t^2-2)^2}\,dt$

FUNZIONI TRASCENDENTI

I) $R(e^x)$   $e^x=t$   $dt=e^x dx$   $dx=\frac{dt}{t}$   $R(\sinh x, \cosh x)$

II) $R(\sin x, \cos x)$   $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$   $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$   $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$   $dt=\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)\frac{dx}{2}$   $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$

III) $R(\sin^2 x, \cos^2 x, \sin x\cos x)$   $t=\operatorname{tg}x$   $dt=(1+\operatorname{tg}^2x)dx$   $dx=\frac{dt}{1+t^2}$

ESEMPI:

1) $\int\frac{e^x-1}{e^x+1}\,dx$   $e^x=t$   $dx=\frac{dt}{t}$   $\int\frac{t-1}{t+1}\cdot\frac{dt}{t} = \int\frac{t-1}{t(t+1)}\,dt$

2) $\int\frac{\sin x}{\cos x+3\sin x}\,dx$   $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$   $\int\frac{\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{6t}{1+t^2}}\cdot\frac{2dt}{1+t^2} = \int\frac{4t(1+t^2)}{(-t^2+6t+1)(1+t^2)}\,dt$

3) $\int\frac{dx}{4-3\cos^2x+5\sin^2x} = \int\frac{dx}{9\sin^2x+\cos^2x} = \int\frac{\sin^2x+\cos^2x}{9\sin^2x+\cos^2x}\,dx$   $\cos x\neq 0$   $\int\frac{\operatorname{tg}^2x+1}{9\operatorname{tg}^2x+1}$   $t=\operatorname{tg}x$

$dx=\frac{dt}{1+t^2}$   $\int\frac{\cancel{1+t^2}}{9t^2+1}\cdot\frac{dt}{\cancel{1+t^2}} = \int\frac{dt}{9t^2+1}$   $z=3t$   $dz=3dt$   $\int\frac{1}{1+z^2}\cdot\frac{dz}{3} = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}(3\operatorname{tg}x)$

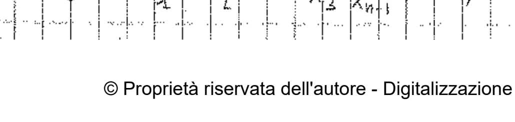
09/12/11

XIX LEZIONE:

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$

i) f limitata su [a,b] limitato

PARTIZIONE di [a,b]: insieme finito di punti che denotiamo con $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ i quali suddividono [a,b] in n intervallini che denoto con $I_k = [x_{k-1}, x_k]$




$\mathcal{P}$   $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}_{[a,b]}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 77 di 108

Introduco questi due insiemi

$S^+ f = \{ h(x) \in S([a,b]) : h(x) \geq f(x), \ \forall x \in [a,b] \}$ insieme delle f a scala su $[a,b]$ MAGGIORANTI di $f(x)$

$S^- f = \{ g(x) \in S([a,b]) : g(x) \leq f(x), \ \forall x \in [a,b] \}$ insieme delle f a scala su $[a,b]$ MINORANTI di $f(x)$

$A = \{ \int_{[a,b]} h(x), \ h(x) \in S^+ f \}$ insieme numerico dei valori delle aree (inferiormente limitato)

$B = \{ \int_{[a,b]} g(x), \ g(x) \in S^- f \}$ superiormente limitato

1) L'insieme A non è vuoto $M \cdot (b-a) = \varphi_1 \in A$
L'insieme B non è vuoto $m \cdot (b-a) = \psi_1 \in B$

2) Definisco $\overline{\int}_{[a,b]} f = \text{Inf} \{ \int_{[a,b]} h(x), \ h(x) \in S^+_f \}$ non è infinito visto che $\varphi_1 \in A$

Definisco $\underline{\int}_{[a,b]} f = \text{Sup} \{ \int_{[a,b]} g(x), \ g(x) \in S^-_f \}$

DEFINIZIONE:

Se $\overline{\int}_{[a,b]} f = \underline{\int}_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} f = \int_a^b f(x)dx$

Si dice che $f(x)$ è R-integrabile su $[a,b]$ e $f(x) \in R([a,b])$

PROPRIETÀ:

f è limitata $\underline{\int}_{[a,b]} f \leq \overline{\int}_{[a,b]} f$

Dim: Considero due f a scala su $[a,b]$ denotate con g e h

Sia $g(x) \in S^- f$ e sia $h(x) \in S^+ f$

$\Rightarrow$ allora $g(x) \leq f(x) \ \forall x \in [a,b]$ e $h(x) \geq f(x) \ \forall x \in [a,b] \Rightarrow g(x) \leq f(x) \leq h(x) \ \forall x \in [a,b]$

Se $g(x) \leq h(x) \ \forall x \in [a,b]$ per prop. isotonia $\Rightarrow \underbrace{\int_{[a,b]} g}_{\text{elemento generico di } B} \leq \underbrace{\int_{[a,b]} h}_{\text{elemento generico di } A} \quad \forall g, h \in S$

A e B sono due insieme separati (non necessariamente contigui)

$\underline{\int}_{[a,b]} f = \text{Sup } B \leq \text{Inf } A = \overline{\int}_{[a,b]} f$ c.v.d.

ESEMPIO DI FUNZIONE NON R-INTEGRABILE

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \text{ (razionali)} \\ 1 & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \text{ (irrazionali)} \end{cases}$$

Comunque si suddivida $[0,1]$ in intervallini, sul singolo intervallo $I_k$ la f assumerà

PROPRIETÀ DELL'INTEGRALE DI R

Siano $f$ e $g \in R([a,b])$

I) Se $f$ è integrabile su $[a,b] \Rightarrow |f|$ è integrabile su $[a,b]$

II) $y = \alpha f(x) + \beta g(x)$ è integrabile su $[a,b]$ e $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$

PROP. DI LINEARITÀ

OSSERVAZIONE:

Non vale il contrario della I.

$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ -1, & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ integrale di $f(x)$ su $[0,1]$ non esiste (richiamo Dirichlet)

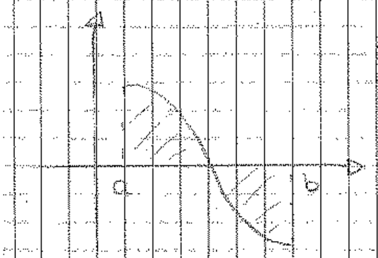
$|f(x)| = 1 \quad x \in [0,1] \quad \int_{[0,1]} |f| = 1$ $f$ non è R-integrabile su $[0,1]$, ma $|f|$ lo è!

PROPRIETÀ DI POSITIVITÀ

$\left.\begin{array}{l} f \in R([a,b]) \\ i)\ f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a,b] \end{array}\right\} \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$

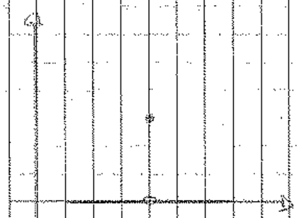
NOTA: Se $f \in ([a,b])$

$\left.\begin{array}{l} i)\ f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a,b] \\ ii)\ f(x) \in \mathcal{C}([a,b]) \end{array}\right\}$ se $\int_{[a,b]} f = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \quad \forall x \in [a,b]$



$f \in \mathcal{C}([a,b])$
ma $f(x)$ non è
sempre $\geq 0$

$\int_{[a,b]} f = 0$ ma $f(x) \neq 0 \ \forall x$



$\int_{[a,b]} f = 0$ ma $f(x) \neq 0$
è venuta meno l'ipotesi
di continuità

PROPRIETÀ DI MONOTONIA

Siano $f, g \in R([a,b])$

i) $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a,b]$

allora $\int_{[a,b]} f(x) \leq \int_{[a,b]} g(x)$

Dim. $d(x) = g(x) - f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a,b] \Rightarrow s(x) = 0 \in S_d$

$\int_{[a,b]} d(x) \geq 0 \Rightarrow \int_{[a,b]} d(x) \geq 0 \Rightarrow \int_{[a,b]} g(x) - f(x) \geq 0 \overset{\text{prop. linearità}}{\Rightarrow} \int_{[a,b]} g(x) - \int_{[a,b]} f(x) \geq 0$

$\Rightarrow \int_{[a,b]} f(x) \leq \int_{[a,b]} g(x)$ c.v.d.

# TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $\quad x_0, x \in (a,b)$

1) $f$ è continua su $[a,b]$

TH. la funzione integrale $F_{x_0}(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)dx$ è una funzione derivabile su $(a,b)$ e risulta

$F'_{x_0}(\bar{x}) = f(\bar{x})$ $\forall \bar{x} \in (a,b)$ cioè $F_{x_0}(\bar{x})$ è una primitiva

Dim. Scrivo il rapporto incrementale di $F_{x_0}(x)$ nel punto $\bar{x} \in (a,b)$

$$\frac{F_{x_0}(x) - F_{x_0}(\bar{x})}{x - \bar{x}} = \frac{1}{x-\bar{x}} \cdot \left[F_{x_0}(x) - F_{x_0}(\bar{x})\right] = \frac{1}{x-\bar{x}} \left[\int_{x_0}^{x} f(x)dx - \int_{x_0}^{\bar{x}} f(x)dx\right] =$$

$$= \frac{1}{x-\bar{x}} \left[\int_{x_0}^{x} f(x)dx + \int_{\bar{x}}^{x_0} f(x)dx\right] = \frac{1}{x-\bar{x}} \cdot \int_{\bar{x}}^{x} f(x)dx$$

essendo $f(x)$ continua per t. della media $\frac{1}{x-\bar{x}} \int_{\bar{x}}^{x} f(x)dx = f(z)$ con $z \in (\bar{x}, x)$

Calcolo $\lim_{x \to \bar{x}} \frac{\Delta F}{\Delta x} = \lim_{x \to \bar{x}} f(z) = \lim_{z \to \bar{x}} f(z)$ (essendo $f$ continua) $= f(\bar{x})$

se $x \to \bar{x}$ anche $z \to \bar{x}$ $\quad$ (3) $F'_{x_0}(\bar{x}) = f(\bar{x})$ $\quad$ c.v.d.

## COROLLARIO

La funzione integrale $F_{x_0}(x)$ può essere sempre scritta come $F_{x_0}(x) = G(x) - G(x_0)$ dove $G(x)$ è una qualsiasi primitiva di $f(x)$.

Dim. $F'_{x_0}(x) = f(x)$ (3) $\forall x \in I$

$G'(x) = f(x)$ $\forall x \in I$

$d(x) = F'_{x_0}(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$ $\forall x \in I$

$\Rightarrow$ la funzione $\varphi(x) = F_{x_0}(x) - G(x)$ ha come derivata $\varphi'(x) = F'_{x_0} - G' = 0$ $\forall x \in I$

per corollario t. Lagrange $\varphi(x) = \text{cost} = F_{x_0}(x) - G(x)$ $\forall x$

ma $F_{x_0}(x_0) = 0 \Rightarrow c = -G(x_0)$

Allora $F_{x_0}(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)dx = G(x) + c = G(x) - G(x_0)$

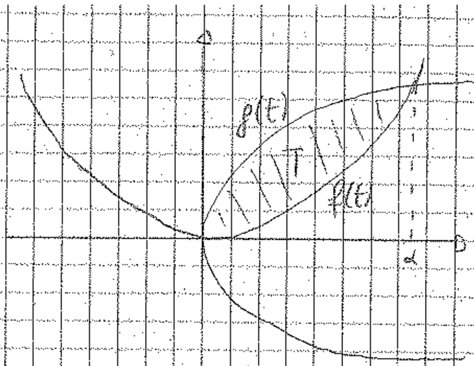
In generale $\int_{a}^{b} f(x)dx = G(b) - G(a)$

CALCOLO DI AREE

$\gamma_1: y = 9x^2$

area T compresa tra $\gamma_1$ e $\gamma_2$

$\gamma_2: x = 9y^2$




$\begin{cases} y = 9x^2 \\ x = 9y^2 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 9(9x^2)^2 \\ x = 9y^2 \end{cases}$ $x(9^3x^3 - 1) = 0$ $x_1 = 0 \quad x_2 = \frac{1}{9} = \alpha$

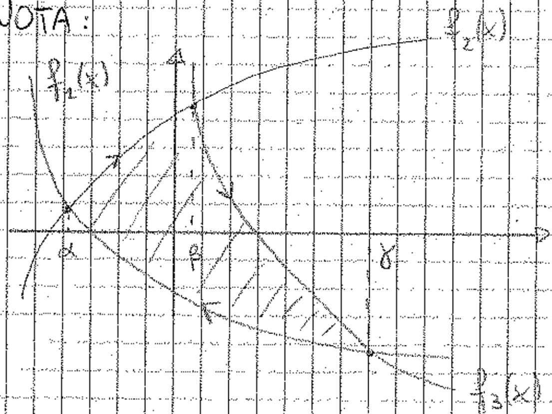
$\gamma_2: y^2 = \frac{1}{9}x \quad y = \pm\frac{1}{3}\sqrt{x} \quad x \geq 0 \quad y = \frac{1}{3}\sqrt{x} \quad x \geq 0$

$\int_0^x f(t)\,dt = F_0(x) \qquad \int_0^x g(t)\,dt = G_0(x) \qquad \Delta = -F_0(x) + G_0(x)$

$G_0\left(\frac{1}{9}\right) - F_0\left(\frac{1}{9}\right) = \int_0^{1/9} g(t)\,dt - \int_0^{1/9} f(t)\,dt = \int_0^{1/9} (g(t) - f(t))\,dt = \int_0^{1/9}\left(\frac{1}{3}\sqrt{x} - 9x^2\right)dx = \left[\frac{1}{3}\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - \frac{9x^3}{3}\right]_0^{1/9}$

$= \left[\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{1}{9}\right)^{3/2} - 3\left(\frac{1}{9}\right)^3 - 0 - 0\right]$

NOTA:

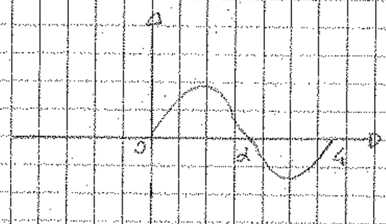



I) Trovo le intersezioni α, β, γ

$\text{Area } T = \int_\alpha^\beta f_2(x)dx + \int_\beta^\gamma f_3(x)dx + \int_\gamma^\alpha f_1(x)dx$

NOTA:

$\int_0^4 f(t)\,dt$ NON è l'area cercata (area con segno)




$\int_0^\alpha f(t)\,dt - \int_\alpha^4 f(t)\,dt$ = Area geometrica

NOTA:

$\int_{-1}^1 \frac{dx}{4+x|x|} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{4-x^2} + \int_0^1 \frac{dx}{4+x^2} = \frac{1}{4}\ln 3 + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$

$\int \frac{dx}{4-x^2} = -\int \frac{dx}{x^2-4} \qquad \frac{1}{x^2-4} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-2} \qquad A = \lim_{x\to-2} \frac{1}{x-2} = -\frac{1}{4} \qquad B = \lim_{x\to 2}\frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}$

$= \frac{1}{4}\int\frac{1}{x+2} - \frac{1}{4}\int\frac{1}{x-2} = \frac{1}{4}\ln|x+2| - \frac{1}{4}\ln|x-2| = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+2}{x-2}\right| \qquad \left[\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+2}{x-2}\right|\right]_{-1}^0 = \frac{1}{4}\ln 3$

$\int\frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{4}\int\frac{dx}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1} = \frac{1}{2}\int\frac{\frac{1}{2}dx}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} \qquad \left[\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 85 di 108

NOTA: trovare il numero $z_r = \alpha + i\beta$ tale che $z_r \cdot z = z \cdot z_r = 1 + i0$

$(x+iy)(\alpha+i\beta) = 1+i0 \qquad (x\alpha - y\beta) + i(x\beta + y\alpha) = 1+i0$

$$\begin{cases} x\alpha - y\beta = 1 \\ x\beta + y\alpha = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x^2\frac{\beta}{y} - y\beta = 1 \\ \alpha = -x\frac{\beta}{y}\end{cases} \quad y\neq 0 \qquad \begin{cases} -x^2\beta - y^2\beta = y \\ \alpha = -x\frac{\beta}{y}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\beta = -\frac{y}{x^2+y^2} \\ \alpha = \frac{x}{x^2+y^2}\end{cases} \quad (x,y)\neq(0,0)$$

$z_r = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2} = \frac{1}{z}$ con $z \neq 0+i0$

Dato uno $z\in\mathbb{C} \wedge z\neq 0+i0$ allora il reciproco di $z$ è $\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$ ed è tale che $z\cdot\frac{1}{z} = \frac{1}{z}\cdot z = 1+0i$

DIVISIONE IN $\mathbb{C}$: $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \wedge z_2\neq 0$ $\quad \frac{z_1}{z_2} \overset{def}{=} z_1\cdot\frac{1}{z_2} = (x_1+iy_1)\left(\frac{x_2}{x_2^2+y_2^2} - i\frac{y_2}{x_2^2+y_2^2}\right) =$

$$= \frac{x_1x_2}{x_2^2+y_2^2} + \frac{y_1y_2}{x_2^2+y_2^2} + i\left(\frac{x_2y_1}{x_2^2+y_2^2} - \frac{x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\right)$$

$|z| \overset{def}{=} \sqrt{x^2+y^2} \qquad |z|=0 \iff z=0+i0 \qquad$ Se $z = x+i0 \in\mathbb{R}$ allora $|z| = \sqrt{x^2} = |x|$

PROPRIETÀ DEL MODULO

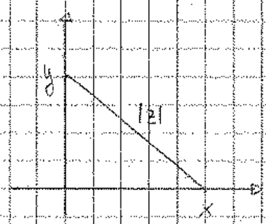
i) $|z|\ge 0 \quad \forall z\in\mathbb{C}$

ii) $|z|^2 = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2 \quad \forall z\in\mathbb{C}$

iii) $\max\{\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z\} \le |z| \le |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|, \ \forall z$ (conseguenza geometrica)

iv) $\forall z_1, z_2 \in\mathbb{C} \quad ||z_1|-|z_2|| \le |z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$

v) $\operatorname{Im} z \le |z|$, $\operatorname{Re} z \le |z|$ caso particolare (iii)




Dim. $z_1 = x_1+iy_1 \qquad z_2 = x_2+iy_2$

$||z_1|-|z_2|| = \left|\sqrt{x_1^2+y_1^2} - \sqrt{x_2^2+y_2^2}\right|$

$|z_1+z_2| = |(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)| = \sqrt{(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2}$

Ipotizzo $|z_1|\ge|z_2|$

$\sqrt{x_1^2+y_1^2} - \sqrt{x_2^2+y_2^2} \le \sqrt{(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2}$ elevo al quadrato

$x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2 - 2\sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)} \le (x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2 = x_1^2+x_2^2+2x_1x_2+y_1^2+y_2^2+2y_1y_2$

$\Rightarrow -\cancel{2}\sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)} \le \cancel{2}(x_1x_2+y_1y_2) \qquad \sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)} \ge (-x_1x_2 - y_1y_2) = K \quad (2)$

Se $K<0$ è vera la (2) se $K\ge 0$ $\quad (x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2) \ge x_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2 + 2x_1x_2y_1y_2$

$\cancel{x_1^2x_2^2} + \cancel{y_1^2y_2^2} + y_1^2x_2^2 + y_2^2x_1^2 \ge \cancel{x_1^2x_2^2} + \cancel{y_1^2y_2^2} + 2x_1x_2y_1y_2 \qquad x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2 - 2x_1x_2y_1y_2 \ge 0$

$(x_1y_2 - y_1x_2)^2 \ge 0$ è vera la (2) c.v.d.

ESEMPIO

1) $e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos\frac{\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$

2) $5\cdot e^{i2} = 5(\cos 2 + i\,\mathrm{sen}\,2) = 5\cos 2 + i\,5\,\mathrm{sen}\,2$

NOTA:

$e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\,\mathrm{sen}(-\theta) = \cos\theta - i\,\mathrm{sen}\,\theta$

$e^{i\theta}\cdot e^{-i\theta} = (\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)(\cos\theta - i\,\mathrm{sen}\,\theta) = \cos^2\theta - i\sin\theta\cos\theta + i\sin\theta\cos\theta + \sin^2\theta = 1 = e^0$

$e^{i\theta}\cdot e^{-i\theta} = 1 \Rightarrow e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$

$z = |z|e^{i\theta},\ z \neq 0 \qquad \frac{1}{z} = \frac{1}{|z|}\cdot e^{-i\theta}$

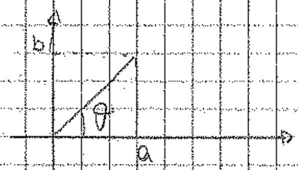
RAPPORTO

$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \wedge z_2 \neq 0 + i0$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|\cdot e^{i\theta_1}}{|z_2|\cdot e^{i\theta_2}} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\, e^{i(\theta_1-\theta_2)} \qquad z = \frac{z_1}{z_2} \begin{cases} |z| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \\ \arg z = \theta_1 - \theta_2 = \arg z_1 - \arg z_2 \end{cases}$

ESEMPIO:

1) $z_1 = 5 - i5 \qquad z_2 = 2i \qquad |z_1| = \sqrt{5^2+(-5)^2} = 5\sqrt{2} \qquad |z_2| = \sqrt{0^2+2^2} = 2$




$z = a + ib$

$\mathrm{tg}\,\theta = \frac{b}{a} \qquad \theta = \mathrm{arctg}\frac{b}{a}$ se $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

Se $a > 0$ $\theta = \mathrm{arctg}\frac{b}{a}$

Se $a < 0$ $\theta = \pi + \mathrm{arctg}\frac{b}{a}$

Se $a = 0$ $\begin{cases} \theta = \frac{\pi}{2}, & b > 0 \\ \theta = -\frac{\pi}{2}, & b < 0 \end{cases}$

$\mathrm{arctg}\, z_1 = \mathrm{arctg}\left(-\frac{5}{5}\right) = -\frac{\pi}{4} \qquad \arg z_2 = \frac{\pi}{2}$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}\, e^{i\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{5}{\sqrt{2}}\cdot e^{-i\left(\frac{3}{4}\pi\right)} = \frac{5}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(-\frac{3}{4}\pi\right) + i\,\mathrm{sen}\left(-\frac{3}{4}\pi\right)\right) = \frac{5}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{5}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}i = -\frac{5}{2} - i\frac{5}{2}$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5-5i}{2i}\cdot\frac{i}{i} = \frac{5i - 5i^2}{2i^2} = \frac{5i+5}{-2} = -\frac{5}{2} - \frac{5}{2}i$

POTENZE (formula di De Moivre)

$z = r\cdot e^{i\theta} \qquad w = z^n$

$w = z^n = \rho\cdot e^{i\varphi} \begin{cases} \rho = r^n \\ \varphi = n\theta \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N}$

11/04/12

# XXII LEZIONE: INTEGRALI IMPROPRI

Nell'integrale di Riemann la funzione era definita e limitata su $[a,b]$ chiuso e limitato.
I. $f$ limitata
II. $[a,b]$ chiuso e limitato

II. $[a,+\infty)$

Introduco l'insieme delle funzioni localmente integrabili che denoto con $R_{loc}([a,+\infty))$

$f \in R_{loc}([a,+\infty)) \overset{def}{\iff}$ $f$ è definita su $[a,+\infty)$
$f$ è R-integrabile su ogni intervallo chiuso e limitato $[a,K]$, $K \geq a$

Se $f \in R_{loc}([a,+\infty))$ è certamente definita la $F_a(K) = \int_a^K f(x)\,dx$, $K \geq a$

Pongo formalmente: $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \overset{def}{=} \lim_{K \to +\infty} F_a(K) = \lim_{K \to +\infty} \int_a^K f(x)\,dx$ (1)

$$\lim_{K\to+\infty} \int_a^K f(x)\,dx = \begin{cases} i) \text{ esiste finito} \\ ii) \text{ esiste infinito} \\ iii) \text{ non esiste} \end{cases}$$

i) $\Rightarrow$ l'integrale (1) CONVERGE su $([a,+\infty))$
ii) $\Rightarrow$ l'integrale (1) DIVERGE
iii) $\Rightarrow$ l'integrale (1) è OSCILLANTE

NOTA: Nel caso i) si dice che $f \in R([a,+\infty))$

Es.

1) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}$

$f(x) \in R_{loc}([2,+\infty))$ (solitamente sono $f$ continue o continue a tratti)

$\lim_{K\to+\infty} \int_2^K \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{K\to+\infty} \left[\operatorname{arctg} x\right]_2^K = \lim_{K\to+\infty} \operatorname{arctg} K - \operatorname{arctg} 2 = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} 2$ converge

$\Rightarrow f \in R([2,+\infty))$

2) $\int_4^{+\infty} \frac{dx}{x+5}$ $f(x) = \frac{1}{x+5} \in R_{loc}([4,+\infty))$

$\lim_{K\to+\infty} \int_4^K \frac{dx}{x+5} = \lim_{K\to+\infty} \left[\ln|x+5|\right]_4^K = \lim_{K\to+\infty} \ln(K+5) - \ln 9 = +\infty$ diverge

3) $\int_\pi^{+\infty} \cos x\,dx$ $\lim_{K\to+\infty} \int_\pi^K \cos x\,dx = \lim_{K\to+\infty} \left[\operatorname{sen} x\right]_\pi^K = \lim_{K\to+\infty} \operatorname{sen} K$ n.e. oscilla

$f_+(x) = \max\{0, f(x)\}$ $\quad f_-(x) = \max\{0, -f(x)\}$ $\quad f_+ \geq 0 \quad f_- \geq 0$

Si osserva che: $f(x) = f_+(x) - f_-(x)$ (1)

$|f(x)| = f_+(x) + f_-(x)$ (2)

(1) + (2) $\quad 2f_+(x) = f(x) + |f(x)| \Rightarrow f_+(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}|f(x)|$

(2) − (1) $\quad 2f_-(x) = |f(x)| - f(x) \Rightarrow f_-(x) = \frac{1}{2}|f(x)| - \frac{1}{2}f(x)$

$f_+(x) = \frac{f+|f|}{2} \qquad f_-(x) = \frac{|f|-f}{2}$

Visto che per Hp, $f \in R_{loc}([a,+\infty))$ e $|f| \in R([a,+\infty)) \Rightarrow |f| \in R_{loc}([a,+\infty))$ allora anche $f_+(x)$ e $f_-(x) \in R_{loc}([a,+\infty))$ per prop. di linearità

Osservo che: $0 \leq f_+(x) \leq |f(x)| \quad \forall x \in [a,+\infty)$

$0 \leq f_-(x) \leq |f(x)| \quad \forall x \in [a,+\infty)$

e $f_+(x), f_-(x), |f(x)| \in R_{loc}([a,+\infty))$ e $|f(x)| \in R([a,+\infty))$ per Hp.

$\overset{T.C.}{\Rightarrow} 0 \leq \underset{\text{conv.}}{\int_a^{+\infty} f_+(x)dx} \leq \underset{\text{conv per i)}}{\int_a^{+\infty} |f(x)|dx} \quad \overset{T.C.}{\Rightarrow} 0 \leq \underset{\text{conv.}}{\int_a^{+\infty} f_-(x)dx} \leq \underset{\text{conv. per i)}}{\int_a^{+\infty} |f(x)|dx}$

Ma allora $\int_a^{+\infty} f(x)dx \overset{(1)}{=} \int_a^{+\infty} f_+(x)dx - \int_a^{+\infty} f_-(x)dx \Rightarrow$ CONVERGE

c.v.d.

Dim I. $\left|\int_a^k f(x)dx\right| \leq \int_a^k |f|dx$ dimostrata per prop. maggiorazione e T. confronto del limite

OSSERVAZIONE:

L'assoluta convergenza è condizione sufficiente alla semplice convergenza ma non necessaria.

$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}x}{x}dx$ converge $\qquad \int_1^{+\infty} \left|\frac{\operatorname{sen}x}{x}\right|dx$ diverge

$|f|$ converge $\Rightarrow f$ converge $\qquad f$ converge $\not\Rightarrow |f|$ converge

CRITERIO ASINTOTICO (I)

Sia $f \in R_{loc}([a,+\infty))$

i) $f(x) \sim \frac{1}{x^\alpha}$ per $x \to +\infty$

$\Rightarrow$ se $\alpha > 1 \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge

se $\alpha \leq 1 \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$ non converge

CRITERIO ASINTOTICO (II)

Siano $f, g \in R_{loc}([a,+\infty))$

i) $f(x) \geq 0 \wedge g(x) > 0, \forall x \in [a,+\infty)$

ESEMPIO

1) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(x^\alpha+2)}{\sqrt[3]{x^2+1}\,(x^4+1)}\,dx$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$

$x \to +\infty$ $\quad f(x) \sim \dfrac{\frac{\pi}{2}\cdot x^\alpha}{x^{2/3}\cdot x^4} = \dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{1}{x^{(4+\frac{2}{3}-\alpha)}}$ $\quad 4+\frac{2}{3}-\alpha > 1 \quad \alpha < \frac{11}{3}$ converge

13/01/12

XXIII LEZIONE

$f \in R_{loc}([a,b))$

i) $f$ è definita su $[a,b)$

ii) $f$ è integrabile su ogni intervallo $[a,k]$ con $a<k<b$

Se $f \in R_{loc}([a,b))$ ha senso parlare di $F_a(k) = \int_a^k f(x)dx \quad \forall k \in [a,b)$

Che cosa significa calcolare $\lim_{k\to b^-} F_a(k)$ ?

$$\lim_{k\to b^-} F_a(k) \overset{def}{=} \int_a^b f(x)dx = \lim_{k\to b^-}\int_a^k f(x)dx = \begin{cases} i) & \ell \in \mathbb{R} \quad \text{l'integrale improprio converge} \\ ii) & \infty \quad \text{l'integrale diverge} \\ iii) & \text{n.e.} \quad \text{l'integrale è oscillante (indet, ind.)} \end{cases}$$

ESEMPIO NOTEVOLE

$\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ $\quad \alpha>0$ $\quad$ converge $\alpha<1$, diverge $\alpha \geq 1$

CRITERIO DEL CONFRONTO

Siano $f, g \in R_{loc}([a,b))$

i) $0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a,b)$

allora: $0 \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$ cioè se $\int_a^b f$ diverge $\Rightarrow \int_a^b g$ diverge $\left(\int_a^b g \text{ converge} \Rightarrow \int_a^b f \text{ c.}\right.$

CRITERIO ASINTOTICO

Se $f \in R_{loc}([a,b))$

i) $f(x) \sim \dfrac{1}{(b-x)^\alpha}$ $\quad x \to b^-$

allora se $\alpha<1$ $f \in R([a,b))$ (cioè converge)

$\alpha \geq 1$ $\int_a^b f(x)dx$ diverge (non converge)

ESEMPI

1) $\displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{dx}{x\ln x}$ $\quad \displaystyle\int_{1/2}^k \frac{dx}{x\ln x} = \int_{1/2}^k \frac{dt}{t} = \Big[\ln|\ln x|\Big]_{1/2}^k = \ln|\ln k| - \ln|\ln \tfrac{1}{2}|$

ESEMPIO NOTEVOLE:

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x} = \begin{cases} \text{se } p>1 & \text{converge} \\ \text{se } p=1 & \text{converge } q>1 \\ \text{se } p<1 & \text{diverge} \end{cases}$$

ESERCIZI NUMERI COMPLESSI

1) $z^{13}+5z^4+2=0$ almeno una soluzione è reale (perché le soluzioni complesse sono a coppie)

2) $z^{13}+5z^4+2i=0$ non posso dire nulla perché i coeff. non sono tutti reali

3) $z^4 \cdot \bar{z} = \frac{1+i}{1-i}$ $\quad z=\rho e^{i\theta} \quad \bar{z}=\rho e^{-i\theta}$

$\rho^4 \cdot e^{i4\theta} \cdot \rho\, e^{-i\theta} = \frac{\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}\cdot e^{-i\frac{\pi}{4}}}$ $\quad \rho^5 e^{i3\theta} = e^{i\frac{\pi}{2}}$ $\quad \begin{cases} \rho^5 = 1 \\ 3\theta = \frac{\pi}{2}+2k\pi \end{cases} \quad k\in\mathbb{Z} \quad \begin{cases} \rho = 1 \\ \theta = \frac{\pi}{6}+2k\frac{\pi}{3} \end{cases} \quad k=0,1,2$

$z_1 = 1\cdot e^{i\frac{\pi}{6}} = \cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}$

$z_2 = 1\cdot e^{i\frac{5}{6}\pi} = \cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi$

$z_3 = 1\cdot e^{i\frac{3}{2}\pi}$

4) $|z| = \mathrm{Re}\, z + 3$ $\quad z=x+iy$

$\sqrt{x^2+y^2} = x+3$ $\quad x^2+y^2=(x+3)^2$ $\quad \cancel{x^2}+y^2=\cancel{x^2}+6x+9$ $\quad x=\frac{1}{6}y^2-\frac{3}{2}$

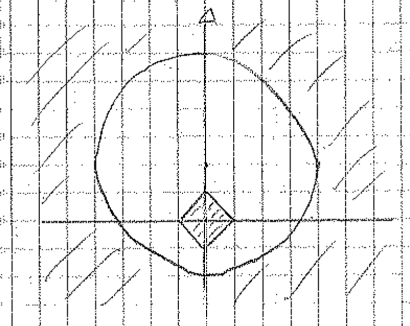
5) $z-\bar{z}=z^2$ $\quad z=x+iy$

$x+iy-x+iy=(x+iy)^2$ $\quad 2iy=x^2-y^2+2ixy$ $\quad \begin{cases} x^2-y^2=0 \\ 2y=2xy \end{cases} \quad \begin{cases} x=0 \ \vee \ y=\pm 1 \\ y_1=0 \ \vee\ x_1=1 \end{cases}$

6) $\begin{cases} |z-2i|\geq 4 \\ |z+\bar{z}|+|z-\bar{z}|\leq 2 \end{cases}$ $\quad z=x+iy$

$|x+iy-2i|\geq 4$ $\quad |x+i(y-2)|\geq 4$ $\quad \sqrt{x^2+(y-2)^2}\geq 4$

$|x+iy+x-iy|+|x+iy-x+iy|\leq 2$ $\quad |2x|+|2iy|\leq 2$ $\quad |x|+|y|\leq 1$



7) $|z-z_0|-r>0$ $\qquad |z-z_0|+|z-z_1|=k$

$|z-3i+4|\leq 5$ $\qquad |z-3i|+|z+3i|\leq 10$

circonferenza $\qquad$ ellisse

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 97 di 108