NUMERO : 391

DATA : 17/10/2012

A P P U N T I

STUDENTE : Genta

MATERIA : Geometria
Prof. Spreafico

06/03/12

I LEZIONE:

DEFINIZIONE: Siano m e $n \in \mathbb{N}$. Una matrice A a coefficienti in $\mathbb{R}$ (o in $\mathbb{C}$) è un insieme di $m \cdot n$ numeri reali (o complessi) disposti su m righe e n colonne.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -4/5 \\ e & \pi & 0 \\ 1 & 10^{-13} & 7/2 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} e^2 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$\left.\begin{array}{l} \mathbb{R}^{m,n} \; (\mathbb{C}^{m,n}) \\ \mathbb{R}^{m \times n} \; (\mathbb{C}^{m \times n}) \end{array}\right\}$ è l'insieme di tutte le matrici $m \times n$ a coeff. in $\mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$)

Se m e n sono uguali la matrice si dice QUADRATA
Se $m = 1$ e n qualsiasi A si dice matrice (o vettore) RIGA
Se $n = 1$ e m qualsiasi A si dice matrice (o vettore) COLONNA
Se $m = n = 1$ A è un numero (o scalare)

NOTAZIONE: $\underbrace{A = (a_{ij})}_{\text{entrate o componenti di } A}$ $\quad 1 \leq i \leq m \quad 1 \leq j \leq n \quad i,j \in \mathbb{N}$ $\quad$ i: elemento di riga, j: elemento di colonna

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_{2,3} \quad \text{MATRICE NULLA in } \mathbb{R}^{2,3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 \quad \text{MATRICE IDENTITA' di ordine 3}$$

$$\begin{array}{cc} A \rightarrow -A \\ (a_{ij}) \quad (-a_{ij}) \end{array} \qquad -A = \begin{pmatrix} -5 & -3 & 4/5 \\ -e & -\pi & 0 \\ -1 & -10^{-13} & -7/2 \end{pmatrix}$$

Esempio:

$$H = \left(\frac{1}{i+j-1}\right) \quad i,j = 1, \ldots, 4 \qquad H = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 \end{bmatrix} \quad \text{MATRICE di HILBERT}$$

DEFINIZIONE: Due matrici A e $B \in \mathbb{R}^{m,n}$ si dicono uguali se $a_{ij} = b_{ij}$ $\quad \forall i = 1, \ldots, m \quad \forall j = 1, \ldots, n$

4) $-A$ è l'unico elemento di $\mathbb{R}$ opposto di A tale che $A+(-A)=O_{m,n}$
5) $(A+B)^T = A^T+B^T$

PRODOTTO DI UNA MATRICE PER UNO SCALARE:
Sia $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ $\quad \lambda A = \lambda(a_{ij}) = (\lambda a_{ij})$

PROPRIETÀ: Siano $A, B \in \mathbb{R}^{m,n}$ e $\lambda, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$
1) $1A = A$ $\qquad$ 2) $\lambda_1(\lambda_2 A) = (\lambda_1\lambda_2)A$ $\qquad$ 3) $(\lambda_1+\lambda_2)A = \lambda_1 A + \lambda_2 A$
4) $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$ $\qquad$ 5) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$ $\qquad$ 6) $\lambda A = O_{m,n} \iff \lambda = 0 \vee A = O_{m,n}$

Esempi:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Calcolare $3A + 2B - 4C$

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ -8 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 9 & -2 \end{pmatrix}$$

2) Risolvere $3X + 2(A-X) + B + 2(C+2X) = O \qquad X \in \mathbb{R}^{2,2}$

$$3X + 2A - 2X + B + 2C + 4X = O \qquad 5X + 2A + B + 2C = O$$

$$5\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$x_{11} = -\frac{4}{5} \quad x_{21} = \frac{3}{5}$
$x_{12} = -\frac{7}{5} \quad x_{22} = -\frac{3}{5}$

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & -\frac{7}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

Data $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ le si possono associare in maniera naturale una matrice simmetrica e antisimmetrica.

$A \longmapsto S = A + A^T \qquad S^T = (A+A^T)^T = A^T + A = S$
$A \longmapsto Z = A - A^T \qquad Z^T = (A-A^T)^T = A^T - A = -(A-A^T) = -Z$

PROPOSIZIONE
Ogni matrice quadrata $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ si decompone nella somma di una matrice simmetrica e di una antisimmetrica.

Dim: $A = X + Y \quad X$ simmetrica $(X = X^T) \quad Y$ antisimmetrica $(Y = -Y^T)$
$A = \frac{1}{2}(S+Z) \qquad X = \frac{1}{2}S \qquad Y = \frac{1}{2}Z$
$\hookrightarrow$ derivo facendo $\begin{array}{l} S = A + A^T \\ + Z = A - A^T \\ \hline S + Z = 2A \end{array} \to A = \frac{1}{2}(S+Z)$

PROPRIETÀ:

1) $(A+B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^{m,n}, \ C \in \mathbb{R}^{n,p}$

2) $D \cdot (A+B) = D \cdot A + D \cdot B \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^{m,n}, \ D \in \mathbb{R}^{p,m}$

3) $\alpha (A \cdot B) = (\alpha A) \cdot B = A \cdot (\alpha B) \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad \underset{m \times n}{A} \ \underset{n \times p}{B}$ compatibili

4) $\forall A \in \mathbb{R}^{m,n} \ \exists I_m \in \mathbb{R}^{m,m}, \ I_n \in \mathbb{R}^{n,n} : A \cdot I_n = A \quad I_m \cdot A = A$
quindi la matrice identità è l'elemento neutro del prodotto

5) ${}^t(A \cdot B) = {}^tB \cdot {}^tA$

MATRICE INVERSA (per noi non esistono matrici rettangolari invertibili, solo quadrate)

$A \in \mathbb{R}^{n,n}$ è invertibile se $\exists B \in \mathbb{R}^{n,n}$ tale che $A \cdot B = B \cdot A = I_n$

Esempio: verifichiamo che $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ è invertibile con $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2 \qquad \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$

PROPRIETÀ delle MATRICI INVERTIBILI:

1) se $A \cdot B = I \iff B \cdot A = I$

2) se $A \cdot B = I \wedge A \cdot C = I \Rightarrow B = C$ la matrice che inverte A è unica

DEFINIZIONE: se A è invertibile tramite B $(A \cdot B = I)$ si dice che B è inversa di A e $B = A^{-1}$

OSSERVAZIONE: Non tutte le matrici sono invertibili

DEFINIZIONE: A si dice nilpotente se $\exists p \in \mathbb{N}$ tale che $A^p = O_n \qquad \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{p \text{ volte}}$
le matrici nilpotenti non sono invertibili

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O_{2,2}$ nilpotente di ordine 2

<u>Dim</u>: A nilpotente, sia p il più piccolo intero per cui $A^p = O_n$
per assurdo $\exists B$ tale che $A \cdot B = I \quad A^{p-1} \cdot A \cdot B = A^{p-1} \cdot I \quad A^p \cdot B = A^{p-1} \quad O_n = A^{p-1}$
$\Rightarrow$ assurdo perché p era il più piccolo

OSSERVAZIONE:

1) $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$ entrambe invertibili $(\exists A^{-1}, B^{-1}) \Rightarrow A \cdot B$ è invertibile?
$A \cdot B \cdot B^{-1} \cdot A^{-1} = I \qquad (A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

2) $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$ infatti ${}^tA \cdot {}^t(A^{-1}) = (A^{-1} \cdot A)^t = {}^tI = I$

3) A, B e so che $A \cdot B$ è invertibile $\Rightarrow$ A (B) è invertibile?
$(A \cdot B) \cdot C = I \quad A \cdot (B \cdot C) = I \Rightarrow B \cdot C = A^{-1} \Rightarrow A$ è invertibile

$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ MATRICE delle INCOGNITE

S si può scrivere in forma matriciale $S: \underset{m \times n}{A} \cdot \underset{n \times 1}{X} = \underset{m \times 1}{B}$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n) \\ \vdots \\ (a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Esempi:

1) $\begin{cases} 3x - y + z = 0 \\ x - 2z = 1 \\ x + y + z = 3 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \qquad S = \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_4 = 3 \\ 4x_1 + 5x_3 + x_4 = 4 \end{cases}$

Supponiamo di avere il sistema lineare $AX = B$ dove la matrice $[A|B]$ è:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 4 & -7 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 5 & 1 \end{array}\right] \qquad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_5 = 0 \\ x_2 + x_3 + 4x_5 = -7 \\ -x_2 + x_4 + 5x_5 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = -2x_2 - 3x_5 \\ x_3 = -7 - x_2 - 4x_5 \\ x_4 = 1 + x_2 - 5x_5 \end{cases}$$

MATRICE FORTEMENTE RIDOTTA

compaiono in una sola eq.

le soluzioni sono allora: $(-2x_2 - 3x_5,\ x_2,\ -7 - x_2 - 4x_5,\ 1 + x_2 - 5x_5,\ x_5)$

x_2 e x_5 sono chiamate variabili LIBERE

DEFINIZIONE: $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ si dice FORTEMENTE RIDOTTA per righe se valgono le condizioni:

1) se R_{i_0} ha almeno un elemento non nullo $\Rightarrow \exists\, a_{i_0 j_0} = 1$ PIVOT tale che $a_{i j_0} = 0 \ \forall i \neq i_0$

2) se R_{i_0} è tutta nulla $\Rightarrow R_i$ è nulla per $i > i_0$

Esempio: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ NO $\qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ SI

DEFINIZIONE: $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ è RIDOTTA per righe se valgono le seguenti condizioni:

1) se R_{i_0} ha almeno un elemento non nullo $\Rightarrow \exists\, a_{i_0 j_0} \neq 0$ PIVOT

2) Se A' e A'' sono due matrici ridotte di A $\Rightarrow$ il numero di righe non nulle (o il numero dei pivots) è uguale nelle due

DEFINIZIONE: Si chiama RANGO di una matrice $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ il numero di righe non nulle (o di pivot) di una sua matrice ridotta.
$r(A)$ $rk(A)$ $\rho(A)$

Data $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ $r(A) \le \min\{m,n\}$ $\quad \underset{2\times3}{A}$ $0 \le r(A) \le 2$ $\quad \underset{3\times2}{A}$ $0 \le r(A) \le 2$

OSSERVAZIONE: 1) $\exists A : r(A)=0$? Sì, l'unica è la matrice nulla
le matrici identiche sono più fortemente ridotte e I_n ha $r(I_n)=n$

Se in una matrice ci sono due righe proporzionali una si annulla $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ R_2-2R_1

Esempi:

1) $AX=B$ $\quad (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -6 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2-2R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -6 & -4 \\ 0 & 3 & 1 & -6 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$r(A)=2$ $\quad r(A|B)=2$ il n° delle variabili libere = n° variabili − n° pivot
$\exists$ soluzione con due variabili libere

$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_4 = 2 \\ 3x_2 + x_3 - 6x_4 = -4 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x_1 = 2 + x_2 - 3x_4 \\ x_3 = -4 - 3x_2 + 6x_4 \end{cases}$ $\quad$ sol. $\begin{cases} x_1 = a - 3b + 2 \\ x_2 = a \\ x_3 = -4 - 3a + 6b \\ x_4 = b \end{cases}$ $\quad a,b \in \mathbb{R}$

2) $AX=B$ $\quad (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -6 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2-2R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -6 & -4 \\ 0 & 3 & 1 & -6 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right)$

non si può risolvere $0=5$ $\Rightarrow$ il sistema non ha soluzioni
$r(A)=2 \neq r(A|B)=3$

3) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 6 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2-R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$ $\quad x_2$ variabile libera
$r(A) = r(A|B) = 3$

n° parametri liberi = $n - r(A)$ se il sistema è compatibile

15/03/12

IV LEZIONE:

DEFINIZIONE: $AX=0_n$ il sistema si dice lineare omogeneo

I sistemi omogenei hanno sempre almeno una soluzione banale $X = 0_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[R_1-R_3]{R_2+2R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} x = 3z \\ y = -z \\ w = -4z \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3a \\ y = -a \\ z = a \\ w = -4a \end{cases} \quad X = \begin{pmatrix} 3a \\ -a \\ a \\ -4a \end{pmatrix}$$

2) Dato ora il sistema $S \begin{cases} x+y-2z=3 \\ x-y+w=0 \\ y+z=2 \end{cases}$ verificare che $(1\ 2\ 0\ 1)$ è soluzione e calcolarle tutte

$$\begin{cases} 1+2=3 \ \checkmark \\ 1-2+1=0 \ \checkmark \\ 2=2 \ \checkmark \end{cases} \qquad X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

3) $\begin{cases} x+y+w=0 \\ x-y+z=1 \\ 2x+z+w=0 \end{cases}$ $(A|B) = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3-R_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3-R_2}$

$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$ $r(A) = 2 \neq r(A|B) = 3$ il sistema non ha soluzioni

SISTEMI MATRICIALI

Risolviamo $AX=B$ dove $(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$ $\underset{2\times3}{A}\underset{3\times2}{X} = \underset{2\times2}{B}$

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \quad R_2-2R_1 \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \; R_2 \to -R_2 \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$R_1-R_2 \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -1 \end{array}\right) \quad \begin{cases} X_1 + 2X_3 = (1,1) \\ X_2 - 3X_3 = (0,-1) \end{cases} \quad \begin{cases} X_1 = (1,1) - 2X_3 \\ X_2 = (0,-1) + 3X_3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &= (1,1) - 2(x_{31}, x_{32}) \\ &= (0,-1) + 3(x_{31}, x_{32}) \end{aligned} \quad \begin{aligned} x_{31} &= a \\ x_{32} &= b \end{aligned} \quad X = \begin{pmatrix} 1-2a & 1-2b \\ 3a & -1+3b \\ a & b \end{pmatrix}$$

CALCOLO DELL'INVERSA

$AX = I_m$ supponiamo $(A|I_m) \xrightarrow{riduz.} (I_m|\bar{A})$ $I_m X = \bar{A}$ $X = \bar{A} \Rightarrow \bar{A} = A^{-1}$

$\exists A^{-1} \Leftrightarrow S: AX = I_m$ è compatibile $\Leftrightarrow r(A) = r(A|I_m) = m$

PROPOSIZIONE: $\exists A^{-1} \Leftrightarrow r(A) = m$

Verificare che se $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ è invertibile e calcolarne l'inversa.

sottomatrice che ottengo cancellando la riga i e la colonna j, moltiplicato per $(-1)^{i+j}$

4) A di ordine n $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ $\det(A) = a_{11} A_{11} + \dots + a_{1n} A_{1n}$
dove A_{ij} sono i complementi algebrici

Esempi:

1) calcolare il determinante di $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

$\det A = 1 \cdot 5 - 2 \cdot 4 = -3$

SVILUPPO DI LAPLACE RISPETTO ALLA PRIMA RIGA

2) calcolare il determinante $B = \begin{bmatrix} 1 & +1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

$\det B = 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} - 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} - 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 1 \cdot (-9) - 1 \cdot (-2) - 1 \cdot (-3) = -4$

3) $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ triangolare inferiore $\det(C) = 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$
cioè si moltiplica la diagonale

NOTA: Nelle matrici triangolari inferiori $T = [t_{ij}]$ $t_{ij} = 0$ $j > i$, $\det(T) = t_{11} \cdot t_{22} \cdot t_{33} \cdot \dots \cdot t_{nn}$. Vale anche per le diagonali. e triangolari superiori

FATTI UTILI:

PROPOSIZIONE 1: si può utilizzare la riga che si vuole per calcolare il determinante

Esempio:

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 5 & 6 & -2 \end{bmatrix} = D$ $\det(D) = -4 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = -4 \cdot (6 - 10) = 16$ sviluppo rispetto alla 2° riga

PROPOSIZIONE 2: operazioni elementari
$A \to A'$ utilizzando 1 op. elementare
1) $R_i \leftrightarrow R_j$ $\det(A') = -\det(A)$
2) $R_i \to hR_i$ $h \neq 0$ $\det(A') = h\det(A)$
3) $R_i \to R_i + KR_j$ $\det(A') = \det(A)$

CONSEGUENZA: se passo da A ad A' con una qualsiasi operazione elementare
$\det(A) \neq 0 \iff \det(A') \neq 0$

PROPOSIZIONE 3: il determinante di A $\det(A) = \det({}^tA)$

COROLLARIO: Si può sviluppare il $\det(A)$ partendo da una colonna a scelta

$A \cdot \tilde{A} = \det(A) \cdot I$

COROLLARIO: $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, esiste la matrice inversa $\iff \det(A) \neq 0$, se esiste la matrice inversa $\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \tilde{A}$

Dim ($\Rightarrow$) se $\exists A^{-1}$ $\quad A \cdot A^{-1} = I$ per T. binet $\det(A \cdot A^{-1}) = \det(A) \cdot \det(A^{-1}) = \det(I) = 1$
$\Rightarrow$ non può essere nullo

($\Leftarrow$) supponiamo che $\det(A) \neq 0$ per teorema precedente (corollario) $A \cdot \tilde{A} = \det(A) \cdot I$

$\frac{1}{\det(A)} \cdot A \cdot \tilde{A} = 1 \cdot I \quad A \cdot \left(\frac{1}{\det(A)} \cdot \tilde{A}\right) = I \quad \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \tilde{A}$

Esempio:

$\det(A) = 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 3 \quad A^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$AX = B \quad A \in \mathbb{R}^{n,n}$ $\exists$ ed è unica la soluzione di $S \iff n - r(A) = 0 \Rightarrow r(A) = n$
$\Rightarrow r(A) = r(A|B) \iff \exists A^{-1} \iff \det(A) \neq 0$

TEOREMA DI CRAMER

$AX = B \quad \exists!$ sol $(\forall B) \iff \exists A^{-1}$ $(\det(A) \neq 0)$ $\quad A \in \mathbb{R}^{n,n}$

se $\exists A^{-1} \quad A^{-1}AX = A^{-1}B \quad \Rightarrow X = A^{-1}B$

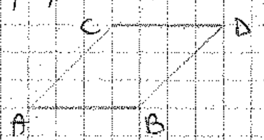
In particolare si può mostrare che $x_i = \dfrac{\det\begin{bmatrix} a_{11} & \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \end{bmatrix}}{\det(A)}$ sostituisco la colonna i-esima con quella dei termini noti

VETTORI GEOMETRICI

S_3 SPAZIO EUCLIDEO TRIDIMENSIONALE (punti, rette, sfere)

DEFINIZIONE: $(A,B) \, R_v \, (C,D)$ se valgono queste condizioni:

1) A, B, C non allineati $\iff ABDC$ è un parallelogramma



2) se C è allineato con A, B: $\exists (E,F)$ tale che $ABFE$ e $CDFE$ sono parallelogrammi

- $(x+y)\vec{v} = x\vec{v} + y\vec{v}$
- $x \cdot \vec{v} = \vec{0} \iff x = 0 \vee \vec{v} = \vec{0}$

CRITERI DI PARALLELISMO E COMPLANARITÀ

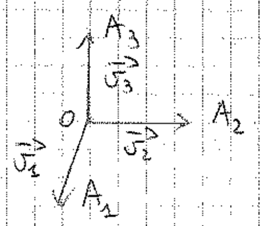
1) $\vec{v} \parallel \vec{u} \iff \vec{v} = x\vec{u}, \; x \in \mathbb{R}$

2) $\vec{v}, \vec{u}, \vec{t}$ sono complanari $\iff \exists\, a, b \in \mathbb{R} : \vec{t} = a\vec{u} + b\vec{v}$

SISTEMI DI COORDINATE

Fissiamo un punto $O \in S_3$ e scegliamo tre punti A_1, A_2, A_3 non allineati e non complanari

$\vec{v_1} \ni (O, A_1), \; \vec{v_2} \ni (O, A_2), \; \vec{v_3} \ni (O, A_3)$

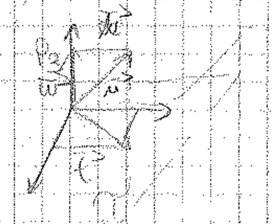


IMPORTANTE

TEOREMA: fissato il riferimento $\forall \vec{u}, \exists$ e sono unici $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$:

$$\vec{u} = a_1\vec{v_1} + a_2\vec{v_2} + a_3\vec{v_3}$$

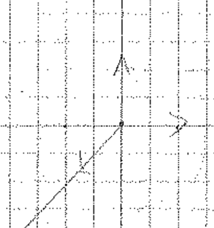
$\beta = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$ $\quad [\vec{u}]_\beta = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ componenti di $\vec{u}$ rispetto a β



$\vec{u} \ni (O, P) \quad (O, P_3) \in \vec{w} \parallel (O, A_3) \Rightarrow \vec{w} = a_3\vec{v_3}$

$\vec{u} = a_3\vec{v_3} + \vec{t} = a_3\vec{v_3} + a_2\vec{v}_2$

SISTEMA DI RIFERIMENTO



3 rette ortogonali a coppie

A_1, A_2, A_3 equidistanti da O (sfera)

$(O, A_1) \in \vec{i} \quad (O, A_2) \in \vec{j} \quad (O, A_3) \in \vec{k}$

SISTEMA ORTOGONALE MONOMETRICO DESTRORSO

$\mathcal{C} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ $\quad [\vec{v}]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

PROPOSIZIONE:

1) $[\vec{v} + \vec{u}]_{\mathcal{C}} = [\vec{v}]_{\mathcal{C}} + [\vec{u}]_{\mathcal{C}}$

2) $[x\vec{v}]_{\mathcal{C}} = x[\vec{v}]_{\mathcal{C}}$

CONSEGUENZE:
1) modulo $\vec{u}$
2) angolo tra $\vec{u}$ e $\vec{v}$

DEFINIZIONE: modulo di $\vec{u}$; $|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

OSSERVAZIONE: $|\vec{u}| = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$

PREMESSA: Vale che $|\vec{u}\cdot\vec{v}| \leq |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|$
valore assoluto ↙ ↘ moduli di vettori

DIMOSTRAZIONE: $|\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2 - |\vec{u}\cdot\vec{v}|^2 = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)\cdot(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 =$

$$= \cancel{a_1^2 b_1^2} + a_1^2 b_2^2 + a_1^2 b_3^2 + a_2^2 b_1^2 + \cancel{a_2^2 b_2^2} + a_2^2 b_3^2 + a_3^2 b_1^2 + a_3^2 b_2^2 + \cancel{a_3^2 b_3^2} -$$
$$- \cancel{a_1^2 b_1^2} - \cancel{a_2^2 b_2^2} - \cancel{a_3^2 b_3^2} - 2a_1 a_2 b_1 b_2 - 2a_1 a_3 b_1 b_3 - 2a_2 a_3 b_2 b_3 =$$
$$= (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 + (a_1 b_3 - a_3 b_1)^2 + (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 \geq 0$$

$\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$ $\quad \dfrac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|} \leq 1 \qquad -1 \leq \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} \leq 1$

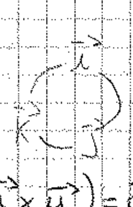
DEFINIZIONE: α angolo tra vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ è l'angolo $0 \leq \alpha \leq \pi$ per cui $\cos\alpha = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$

OSSERVAZIONE: α è acuto $\iff \vec{u}\cdot\vec{v} > 0$
α è ottuso $\iff \vec{u}\cdot\vec{v} < 0$
$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ (il vettore nullo è ortogonale a tutti i vettori)

ESEMPIO: $\vec{u} = (0,4,0)$ $\vec{v} = (1,1,0)$ stabilire se $\widehat{\vec{u}\,\vec{v}}$ è acuto o ottuso, calcolarlo
$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0\cdot 1 + 4\cdot 1 + 0\cdot 0 = 4 > 0$ acuto
$\cos\alpha = \dfrac{4}{\sqrt{16}\cdot\sqrt{2}} = \dfrac{4}{4\cdot\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{4}$

PRODOTTO VETTORIALE

DEFINIZIONE: Il prodotto vettoriale è l'unica funzione $\times : V(S_3)\times V(S_3) \to V(S_3)$ tale che:
1) $\vec{u}\times\vec{v} = -\vec{v}\times\vec{u} \quad \forall \vec{u},\vec{v}$
2) $(\vec{u}+\vec{v})\times\vec{w} = \vec{u}\times\vec{w} + \vec{v}\times\vec{w}$
3) $\alpha(\vec{u}\times\vec{v}) = (\alpha\vec{u})\times\vec{v} = \vec{u}\times(\alpha\vec{v})$
4) $\vec{i}\times\vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j}\times\vec{k} = \vec{i}$, $\vec{k}\times\vec{i} = \vec{j}$



OSSERVAZIONE: $\forall \vec{u}$ $\quad \vec{u}\times\vec{u}$ per (1) $\vec{u}\times\vec{u} = -\vec{u}\times\vec{u}$ $\quad 2(\vec{u}\times\vec{u}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{u}\times\vec{u} = \vec{0}$
In particolare: $\vec{i}\times\vec{i} = \vec{0}$, $\vec{j}\times\vec{j} = \vec{0}$, $\vec{k}\times\vec{k} = \vec{0}$
infatti sono // ($\sin 0 = 0$)

ESERCIZI

1) Nello spazio vettoriale V con base ortonormale positiva $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sono dati i vettori $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{v} = \vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{w} = 3\vec{i} - 6\vec{j} - 3\vec{k}$, quale è vera?

a) $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sono complanari

b) $\vec{w}$ sia $// \ \vec{u} + \vec{v}$

c) $\vec{w} \ // \ \vec{u} \times \vec{v}$

d) $\vec{u} \times \vec{v}$ e $\vec{w}$ hanno lo stesso modulo

$\vec{w}\,(3,-6,-3)$ $\quad \vec{u} + \vec{v}\,(1,0,1) \quad \Rightarrow$ b è falsa

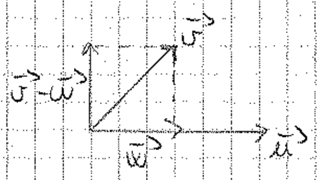
$$\vec{u} \times \vec{v} = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} = -\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \qquad \vec{u} \times \vec{v}\,(-1,2,1)$$

$\vec{w} = -3(\vec{u} \times \vec{v}) \Rightarrow$ c è vera

$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6} \qquad |\vec{w}| = \sqrt{9+36+9} \Rightarrow$ d è falsa

$$\det = \begin{bmatrix} 3 & -6 & -3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} = -6 - 6 = -12 \neq 0 \Rightarrow \text{a è falsa}$$

2) Proiezione ortogonale di $\vec{v}$ su $\vec{u}\ (\neq \vec{0})$

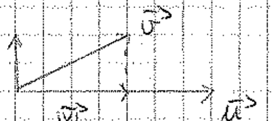


esiste ed è unico $\vec{w} // \vec{u}$ tale che $\vec{v} - \vec{w} \perp \vec{u}$

in questo caso $\vec{v} = \underbrace{\vec{w}}_{\text{proiezione lungo } \vec{u}} + \underbrace{(\vec{v} - \vec{w})}_{\text{proiezione lungo direzione} \perp \text{a } \vec{u}}$

DIMOSTRAZIONE: se $\exists\, \vec{w}$, sarà $\vec{w} = a\vec{u}$ per qualche $a \in \mathbb{R}$, cerco a tale che
$\vec{v} - \vec{w} \perp \vec{u} \iff (\vec{v} - a\vec{u}) \cdot \vec{u} = 0 \qquad \vec{v} \cdot \vec{u} - a|\vec{u}|^2 = 0$
eq. di 1° grado $\Rightarrow$ soluzione unica $\quad a = \dfrac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|^2} \Rightarrow \vec{w} = \dfrac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|^2}\, \vec{u}$

$\vec{u} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k} \qquad \vec{v} = \vec{j} + \vec{k}$



$$\vec{w} = \frac{(0,1,1) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}}{9+16+4} \cdot (3\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}) = -\frac{2}{29}(3\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k})$$

a, essendo negativo l'angolo è ottuso

$$\vec{v} - \vec{w} = \vec{j} + \vec{k} + \frac{2}{29}(3\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}) = \frac{6}{29}\vec{i} + \left(1 - \frac{8}{29}\right)\vec{j} + \left(1 + \frac{4}{29}\right)\vec{k}$$

ESERCIZIO: Calcolo del determinante di Vandermonde

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{vmatrix} = C_4 - x_1 C_3 \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & 0 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 - x_1 x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 - x_1 x_3^2 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 - x_1 x_4^2 \end{vmatrix} = C_3 - x_1 C_2 \begin{vmatrix} 1 & x_1 & 0 & 0 \\ 1 & x_2 & x_2^2 - x_1 x_2 & x_2^2(x_2 - x_1) \\ 1 & x_3 & x_3^2 - x_1 x_3 & x_3^2(x_3 - x_1) \\ 1 & x_4 & x_4^2 - x_1 x_4 & x_4^2(x_4 - x_1) \end{vmatrix}$$

ESEMPIO:

1) Dati $A(1,1,1)$ $B(-2,1,3)$, $C(4,0,0)$ calcolare l'area del triangolo ABC.

$A_{\hat{ABC}} = \frac{1}{2}|\vec{AB}\times\vec{AC}|$ $\quad \vec{AB} = (-2-1)\vec{i} + (1-1)\vec{j} + (3-1)\vec{k} = -3\vec{i} + 2\vec{k}$

$\vec{AC} = (4-1)\vec{i} + (0-1)\vec{j} + (0-1)\vec{k} = 3\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$

$$\vec{AB}\times\vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k} \qquad (2,3,3)$$

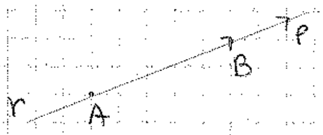
$$A_{\hat{ABC}} = \frac{1}{2}\sqrt{4+9+9} = \frac{\sqrt{22}}{2}$$

2) Preso anche $D(0,0,0)$ calcolare il volume del Tetraedro ABCD

$$V = \frac{1}{6}|(\vec{AB}\times\vec{AC})\cdot\vec{AD}| = \frac{1}{6}\left|(2,3,3)\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{6}|-2-3-3| = \frac{8}{6}$$

$\vec{AD} = -\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$

RETTE NELLO SPAZIO



$P \in r \iff \vec{AP} = t\vec{AB}$

$A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$, $P(x,y,z)$

$\vec{AP}\ (x-x_A, y-y_A, z-z_A) = t(x_B-x_A, y_B-y_A, z_B-z_A)$

$$\begin{cases} x-x_A = t(x_B-x_A) \\ y-y_A = t(y_B-y_A) \\ z-z_A = t(z_B-z_A) \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x_A + t(x_B-x_A) \\ y = y_A + t(y_B-y_A) \\ z = z_A + t(z_B-z_A) \end{cases}$$

EQUAZIONE PARAMETRICA DI UNA RETTA NELLO SPAZIO

componenti del vettore direzionale della retta

Al variare del parametro t vengono descritti i punti della retta $\vec{AP}$

ESEMPIO:

1) Scrivere le equazioni della retta passante per $A(1,2,3)$ e $B(-1,4,1)$

$\vec{AB} = (-2,2,-2)$ $\qquad \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 - 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

$t=0 \quad x=1,\ y=2,\ z=3 = A$

Scegliendo t negativi si prosegue per punti in direzione opposta a quella di $\vec{AB}$

$r \cap s$ $\exists t, h$? $\begin{cases} 2t = 2+3h \\ 1+t = 2+h \\ -1-t = -2+h \end{cases}$ $\begin{cases} 2t = 2 \\ 1+t = 2 \\ 2h = 0 \end{cases}$ per $t=1$ e $h=0$ $r(2,2,-2)$ e $s(2,2,-2)$

sostituisci normalmente come un sistema

OSSERVAZIONE: Nello spazio le rette possono, pur non essendo parallele, non incontrarsi.

DEFINIZIONE: Date due rette r e s se non sono parallele e non sono incidenti allora sono SGHEMBE.

28/03/12

VIII LEZIONE:

OSSERVAZIONE: in S_2 (spazio euclideo bidimensionale) retta $= A(1,3), B(6,1)$

$\vec{AB} = 5\vec{i} - 2\vec{j}$

$\begin{cases} x = 1+5t \\ y = 3-2t \end{cases}$ $\begin{cases} t = \frac{x-1}{5} \\ y = 3 - \frac{2}{5}(x-1) \end{cases}$ retta $y = -\frac{2}{5}x + \frac{17}{5}$

$-\frac{2}{5} = \frac{v_y}{v_x}$ coeff. angolare

In S_3 $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-t \\ z = 3+4t \end{cases}$ $\begin{cases} t = x-1 \\ y = 2-x+1 \\ z = 3+4(x-1) \end{cases}$ $\begin{cases} x+y = 3 \\ -4x-z = -1 \end{cases}$ equazioni cartesiane della retta

PIANI NELLO SPAZIO

$P \in \alpha \Leftrightarrow \vec{AP} = a\vec{AB} + b\vec{AC}$ $a, b \in \mathbb{R}$

$(x-x_a)\vec{i} + (y-y_a)\vec{j} + (z-z_a)\vec{k} = a[(x_b-x_a)\vec{i} + (y_b-y_a)\vec{j} + (z_b-z_a)\vec{k}] +$
$b[(x_c-x_a)\vec{i} + (y_c-y_a)\vec{j} + (z_c-z_a)\vec{i}]$

$\begin{cases} x-x_a = a(x_b-x_a) + b(x_c-x_a) \\ y-y_a = a(y_b-y_a) + b(y_c-y_a) \\ z-z_a = a(z_b-z_a) + b(z_c-z_a) \end{cases}$ EQUAZIONI PARAMETRICHE DEL PIANO

ESEMPIO

1) Determinare il piano per $A(1,-1,0)$, $B(2,2,2)$, $C(3,0,4)$

$\vec{AB} = \vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$ $\vec{AC} = 2\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$

$\begin{cases} x = 1+a+2b \\ y = -1+3a+b \\ z = +2a+4b \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2-R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right] \quad r(A) = r(A|B) = 2 \Rightarrow \exists\, \infty^1 \text{ soluzioni}$$

1 parametro libero

$$\xrightarrow{R_1-R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right] \quad \begin{cases} y = t \\ x = -2-3t \\ z = 3+2t \end{cases}$$

eq. parametrica di una retta

$\Rightarrow \pi$ e π' sono le equazioni cartesiane della retta

OSSERVAZIONI:

1) per passare dalla scrittura cartesiana di una retta alla scrittura parametrica si risolve il sistema. (si può anche trovare un P della r e il vettore direzionale $= \vec{\pi} \times \vec{\pi}'$)

2) $\begin{cases} \pi & \vec{v}_\pi \\ \pi' & \vec{v}_{\pi'} \end{cases}$ non paralleli

$\downarrow$

$$\begin{cases} x = x_A + u_x t \\ y = y_A + u_y t \\ z = z_A + u_z t \end{cases} \quad \vec{u} \perp \vec{v}_\pi ,\ \vec{u} \perp \vec{v}_{\pi'} \Rightarrow \vec{u} \parallel \vec{v}_\pi \times \vec{v}_{\pi'}$$

ESEMPIO:

1) $$\vec{v}_\pi \times \vec{v}_{\pi'} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k} \quad (3,-1,-2)$$

ora bisogna trovare un punto che risolve il sistema, ad esempio $\left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, 0\right)$
ho cercato i punti con $z=0$ e risolto il sistema

$$\begin{cases} x = \frac{5}{2} + 3t \\ y = -\frac{3}{2} - t \\ z = -2t \end{cases}$$

2) $\begin{cases} x+y+z = 1 \\ x+y+z = 4 \end{cases}$ $\quad \vec{v}_\pi : (1,1,1)$, $\vec{v}_{\pi'} : (1,1,1)$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2-R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

$r(A) = 1 \neq r(A|B) = 2 \Rightarrow \nexists$ soluzione $\Rightarrow$ i due piani sono paralleli

3) $\begin{cases} x+y+z = 1 \\ 7x+7y+7z = 7 \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 7 & 7 & 7 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2-7R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad r(A) = r(A|B) = 1$$

$\Rightarrow \exists\, \infty^2$ soluzioni $\Rightarrow$ ci sono 2 parametri liberi $\Rightarrow$ i due piani sono lo stesso

$$\begin{cases} x = 1-a-b \\ y = a \\ z = b \end{cases}$$

$\Rightarrow r \cap s = \emptyset \Rightarrow r$ e s sono sghembe

2) $r: \begin{cases} x = 2-t \\ y = 3 \\ z = 4t \end{cases}$ $\quad s': \begin{cases} x+y-z=0 \\ x+z=5 \end{cases}$

verificare che non sono parallele

$\begin{cases} 2-t+3-4t=0 \\ 2-t+4t=5 \end{cases}$ $\begin{cases} t=1 \\ t=1 \end{cases}$ $\Rightarrow \exists P \in r \cap s'$

per $t=1$ $\begin{cases} x = 2-1 \\ y = 3 \\ z = 4 \cdot 1 \end{cases}$ $\Rightarrow P(1,3,4)$ punto di intersezione

PROBLEMA: se $r \cap s = P$ o $r // s \Rightarrow \exists$ piano α tale che $r \in \alpha$ e $s \in \alpha$

per trovare il piano si usa il metodo del fascio dei piani

$s: \begin{cases} ax+by+cz+d=0 & \pi=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 & \pi'=0 \end{cases}$

se α è un altro piano che contiene $s \Rightarrow \begin{cases} \pi=0 \\ \pi'=0 \\ \alpha=0 \end{cases}$ il sistema mi da s è equivalente al sistema $\begin{cases} \pi=0 \\ \pi'=0 \end{cases}$

$\Rightarrow \alpha = \lambda\pi + \mu\pi'$ cioè è combinazione lineare

$\lambda\pi + \mu\pi' = 0$ al variare di $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ descrive tutti i piani che contengono s

↳ FASCIO DI PIANI

Per trovare $\alpha \ni r$ basta prendere $P \in r$ e imporre $P \in \lambda\pi + \mu\pi' = 0$

FASCIO DI PIANI PER s': $\lambda(x+y-z) + \mu(x+z-5) = 0$

scelgo $P \in r$ $t=0$ $P(2,3,0)$ prende un punto $\in r$ e non a s perché altrimenti si annulla

$P \in \alpha \Leftrightarrow \lambda(2+3-0) + \mu(2+0-5) = 0 \quad 5\lambda - 3\mu = 0 \quad \lambda = \frac{3}{5}\mu$

$\frac{3}{5}\mu(x+y-z) + \mu(x+z-5) = 0 \quad 3x+3y-3z+5x+5z-25=0 \quad 8x+3y+2z-25=0$ α

3) $r: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 3-t \\ z = 4+2t \end{cases}$ $\quad s: \begin{cases} x = 3t \\ y = 4+t \\ z = 2+t \end{cases}$ $\quad r \cap s = P = (0,4,2) \Rightarrow \exists \alpha \supset r, s$

1° modo: riscrivo una delle rette in forma cartesiana

iv) r e s sghembe $\iff 3 = r(A) \neq r(A|B) = 4$

DISTANZA

X, Y insiemi di punti $x \in X$ $y \in Y$ $d(x,y)$ distanza tra i due punti

$$d(X,Y) = \inf\{d(x,y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

ESEMPIO

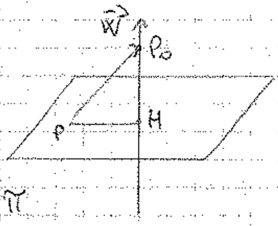
1) $Y = \{0\}$ $X = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$

$$d\left(0, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \qquad \inf\left\{d\left(0, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}\right\} = 0$$

DISTANZA PUNTO E PIANO

$\pi: ax+by+cz+d=0$ $P_0(x_0, y_0, z_0)$ $d(P_0, \pi)$

1° modo: $\overline{P_0H}$ la vedo come proiezione del segmento $\overline{PP_0}$ sulla retta $r \perp \pi$ passante per H



$$|\vec{PP_0}'| = \frac{|\vec{PP_0} \cdot \vec{w}|}{|\vec{w}^2|} \cdot |\vec{w}| = \overline{P_0H} = d(P_0, \pi)$$

$\Downarrow$ proiezione su $\vec{w}$

$P \in \pi$

$$d(P_0, \pi) = \frac{|\vec{PP_0} \cdot \vec{w}|}{|\vec{w}|} = \frac{\left|(x_0-x, y_0-y, z_0-z)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|ax_0-ax+by_0-by+cz_0-cz|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} =$$

$$= \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$ al posto di $ax+by+cz$ ho sostituito d perché per costruzione il punto P appartiene a $\pi \Rightarrow$ verifica l'equazione

ESEMPIO

1) $\pi: 3x-y+2z-4=0$ $P_0(1,1,8)$

$$d(P_0, \pi) = \frac{|3-1+16-4|}{\sqrt{9+1+4}} = \frac{14}{\sqrt{14}} = \sqrt{14}$$

2° modo: si calcola la retta per P_0, $\perp \pi$, poi si interseca r e π = H e $d(P_0, \pi) = d(P_0, H)$

ESEMPIO

1) $\pi: x+y+z-1=0$ $P_0(1,3,0)$

$$r: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 3+t \\ z = 0+t \end{cases}$$ essendo $\vec{v}_\pi: (1,1,1)$

$r \cap \pi$ $1+t+3+t+t-1=0$ $3t+3=0$ $t=-1$ $\Rightarrow H \in r$ per $t=-1$

DISTANZA RETTA E RETTA

i) $r = s$ $\quad d(r,s) = 0$

ii) $r \cap s = P$ $\quad d(r,s) = 0$

iii) $r // s$ costruisco $\pi \perp r$, $\pi \cap r = P$, $\pi \cap s = Q$, $d(P,Q)$

ESEMPIO

1) $r: \begin{cases} x = 0 + t \\ y = 0 + 2t \\ z = 0 + 3t \end{cases}$ $\quad s: \begin{cases} x = 1 + h \\ y = 1 + 2h \\ z = 1 + 3h \end{cases}$

$\pi \perp r \quad 1(x-0) + 2(y-0) + 3(z-0) = 0 \quad x + 2y + 3z = 0$

$\pi \cap r \quad t + 4t + 9t = 0 \quad t = 0$

$\pi \cap s \quad 1 + h + 2 + 4h + 3 + 9h = 0 \quad h = -\frac{3}{7}$

$Q \in s: \begin{cases} x = 1 - 3/7 = 4/7 \\ y = 1 - 6/7 = 1/7 \\ z = 1 - 9/7 = -\frac{2}{7} \end{cases}$

$d(Q,0) = d(r,s) = \sqrt{\left(\frac{4}{7}-0\right)^2 + \left(\frac{1}{7}-0\right)^2 + \left(-\frac{2}{7}-0\right)^2}$

oppure scegli un punto su una retta e fai distanza punto/retta

iv) r e s sghembe

Si può dimostrare che $\exists$ un solo punto $P \in r$ e un solo punto $Q \in s$ tale che $\vec{PQ}$ è $\perp r$ e $\perp s$, inoltre $d(P,Q)$ è la minima distanza tra le due rette

ESEMPIO

1) $r: \begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$ $\quad s: \begin{cases} x = 1 + h \\ y = 2 + h \\ z = 3 + 2h \end{cases}$ $\quad r$ e s sono sghembe

$\vec{v}_r\ (-1,1,1) \quad \vec{v}_s\ (1,1,2) \quad P \in r\ (-t,t,t) \quad Q \in s\ (1+h, 2+h, 3+2h)$

$\vec{PQ} = (1+h+t)\vec{i} + (2+h-t)\vec{j} + (3+2h-t)\vec{k}$

$\begin{cases} \vec{PQ} \perp \vec{v}_r \\ \vec{PQ} \perp \vec{v}_s \end{cases}$ $\begin{cases} \vec{PQ} \cdot \vec{v}_r = 0 \\ \vec{PQ} \cdot \vec{v}_s = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} -1-h-t+2+h-t+3+2h-t = 0 \\ 1+h+t+2+h-t+6+4h-2t = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2h - 3t = -4 \\ 6h - 2t = -9 \end{cases}$

$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & -4 \\ 6 & 2 & -9 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 - 3R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -7 & 3 \end{array}\right]$ $\begin{cases} 2h - 3t = -4 \\ t = 3/7 \end{cases}$ $\begin{cases} 2h - 9/7 = -4 \\ t = 3/7 \end{cases}$ $\begin{cases} h = -\frac{13}{14} \\ t = 3/7 \end{cases}$

$P\left(-\frac{3}{7}, \frac{3}{7}, \frac{3}{7}\right) \quad Q\left(\frac{5}{14}, \frac{9}{14}, \frac{4}{14}\right) \quad d(P,Q) = d(r,s)$

DEFINIZIONE: Fisso un piano π, $C \in \pi$, $R \geq 0$, la circonferenza è l'insieme dei punti del piano che distano R dal centro.

$\Gamma = \{P \in \pi \mid d(P,C) = R\}$

$$\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = R^2 \end{cases}$$ EQ. CARTESIANE DELLA CIRCONFERENZA

Vale il viceversa?

$\begin{cases} \pi \text{ piano qualsiasi} \\ S \text{ sfera qualsiasi} \end{cases} \Rightarrow \pi \cap S = \Gamma$?

$\pi \cap S = \Gamma \Leftrightarrow d(C,\pi) \leq R$

ESEMPIO:

$\pi: x+y+z=1$

$S: (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=4$

$C(1,1,1)$ $R=2$

$d(C,\pi) = \frac{|1+1+1-1|}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} < 2 \Rightarrow \pi \cap S = \Gamma$ circonferenza

$r = \sqrt{R^2-d^2(C,\pi)} = \sqrt{4-\frac{4}{3}} = \sqrt{\frac{8}{3}}$ C' trovo retta $s \perp \pi$, $C \in s \Rightarrow C' = \pi \cap s$

$s = \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+t \\ z = 1+t \end{cases}$ $1+t+1+t+1+t=1$ $3t=-2$ $t=-\frac{2}{3}$ $C'\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

DEFINIZIONE: $P_0 \in S$ chiamo piano tangente a S in P_0 l'unico piano passante per P_0 e ortogonale al vettore $\overrightarrow{CP_0}$

$(x-x_c)^2+(y-y_c)^2+(z-z_c)^2=R^2$ $P_0(x_0,y_0,z_0)$ $C(x_c,y_c,z_c)$

$\overrightarrow{CP_0}(x_0-x_c, y_0-y_c, z_0-z_c)$ $\pi_{tg}: (x_0-x_c)(x-x_0)+(y_0-y_c)(y-y_0)+(z_0-z_c)(z-z_0)=0$

ESEMPIO:

$S: (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=4$ $C=(1,1,1)$ $P_0(3,1,1)$ $P_0 \in S$

$\overrightarrow{CP_0}(2,0,0)$ $2(x-3)+0(y-1)+0(z-1)=0$ $x=3$

Le rette tangenti a S in P_0 sono tutte le rette appartenenti al piano tangente e passanti per P_0

la sfera cercata è: $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2-9(2x-y)=0$

$x^2-2x+1+y^2-4y+4+z^2-6z+9-18x+9y=0 \quad x^2+y^2+z^2-20x+5y-6z+14=0$

$(x-10)^2-100+(y+\frac{5}{2})^2-\frac{25}{4}+(z-3)^2-9+14=0 \qquad C\left(10,-\frac{5}{2},3\right) \quad R=\sqrt{\frac{405}{4}}$

2) Trovare le sfere tangenti a π in P di raggio 4.

1° modo: uso il fascio di sfere $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2+k(2x-y)=0$ e impongo raggio 4. $x^2+y^2+z^2-2x+2kx-4y-ky-6z+14=0$ con il metodo del completamento dei quadrati trovo il raggio

2° modo. Trovo la retta $r \perp \pi$ e passante per P $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2-t \\ z=3 \end{cases}$, cerco C e $C' \in r$ che distano 4 da π

$C(1+2t, 2-t, 3) \quad d(C,\pi)=4 \quad \frac{|2+4t+t-2|}{\sqrt{5}}=4 \quad \frac{|5t|}{\sqrt{5}}=4 \quad |5t|=4\sqrt{5}$

$5t=\pm 4\sqrt{5} \quad t=\pm\frac{4\sqrt{5}}{5} \qquad C\left(1+\frac{8}{5}\sqrt{5}, 2-\frac{4\sqrt{5}}{5}, 3\right) \quad C'\left(1-\frac{8}{5}\sqrt{5}, 2+\frac{4\sqrt{5}}{5}, 3\right)$

13/04/12

XI LEZIONE: FUNZIONI A VALORI IN $\mathbb{R}^n$

$f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

$t \longmapsto (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$ — $(x_1, x_2, \dots x_n)$ — dove $f_i: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

ESEMPI:

1) $f(t)=(2+t, 1-t, t) \quad f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$

2) $f(t)=\left(\frac{1}{t}, \sqrt{t-1}, e^t\right) \quad \text{dom} f: t \geq 1$

- $\text{Dom} f = \bigcap_{i=1}^{n} \text{Dom} f_i$
- $\lim_{t\to t_0} f(t) = \left(\lim_{t\to t_0} f_1, \lim_{t\to t_0} f_2, \dots, \lim_{t\to t_0} f_n\right)$

limite $\exists \iff \exists$ tutti i limiti

- $f(t)$ è continua in $t_0 \iff f_i(t)$ sono continue in $t_0 \quad \forall i=1,\dots,n$
- $f(t)$ è derivabile in $t_0 \iff f_i(t)$ sono derivabili in $t_0 \quad \forall i=1,\dots,n$

DEFINIZIONE: $f: I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ è REGOLARE se $f\in C^1(I)$, $f'(t)\neq\vec{0} \quad \forall t\in I$ e f è iniettiva

L'iniettività ci dice che l'immagine non si autointerseca. (non passa per lo

$f' = (2t-1, 2t-1, 3t^2) \neq (0,0,0) \Rightarrow f$ è regolare e $\mathcal{C} = \text{im} f$ è regolare

$\mathcal{C}$ è piana? $ax+by+cz+d=0$ $\quad a(t^2-t+1)+b(t^2-t)+c(t^3)+d=0$

$\mathcal{C}$ è piana $\Leftrightarrow$ l'equazione è vera $\forall t$

$ct^3+(a+b)t^2+(-a-b)t+a+d=0$

$$\begin{cases} c=0 \\ a+b=0 \\ -a-b=0 \\ a+d=0 \end{cases} \quad \begin{cases} c=0 \\ b=-a \\ \diagup \\ d=-a \end{cases} \quad ax-ay-a=0 \quad x-y-1=0 \Rightarrow \text{la curva è piana}$$

il piano è $x-y-1=0$

Se f_i è iniettiva per almeno un valore di $i \Rightarrow (f_1, \dots f_m)$ è iniettiva

basta che una sola f_i cambi sempre, che i "vettori" non sono mai tutti uguali

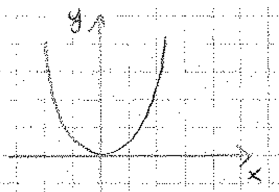
3) CUBICA GOBBA (SGHEMBA)

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \quad f(t) = (t, t^2, t^3)$ è regolare $\Rightarrow \text{im} f = \mathcal{C}$ è regolare

è piana? $ax+by+cz+d=0 \quad at+bt^2+ct^3+d=0$

$$\begin{cases} c=0 \\ b=0 \\ a=0 \\ d=0 \end{cases} \quad 0=0 \Rightarrow \text{non esiste un piano che contiene la curva}$$

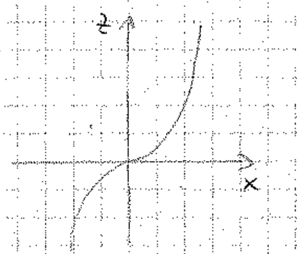
$\begin{cases} x=t \\ y=t^2 \\ z=t^3 \end{cases}$ la proiezione di $\mathcal{C}$ sul piano xy si ottiene eliminando la z $\begin{cases} x=t \\ y=t^2 \end{cases}$



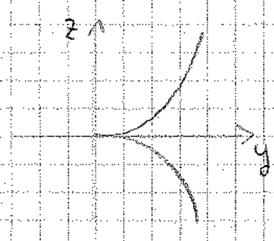
$y=x^2$

Sul piano xz $\begin{cases} x=t \\ z=t^3 \end{cases}$

$z=x^3$



Sul piano yz $\begin{cases} y=t^2 \\ z=t^3 \end{cases}$



CUBICA CUSPIDATA

non regolare

4) ELICA CILINDRICA

$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \\ z = ht \end{cases}$ $R, h \in \mathbb{R}$ fissati, R raggio, h passo $\quad \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \\ z = 3t \end{cases}$ $\quad P_0(2,0,0) \quad P_{2\pi}(2,0,3(2\pi))$

DEFINIZIONE: $\mathcal{C}$ regolare, $\mathcal{C}$ è immagine di $f = (f_1, f_2, f_3)$, (f regolare), $P_0 \in \mathcal{C}$, $P_0 = f(t_0)$ chiamo retta TANGENTE a $\mathcal{C}$ in P_0 la retta:

$$f' \times f'' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (0,0,2) \qquad 0(x-0)+0(y-0)+2(z-0)=0$$

$2z=0$ è il piano osculatore

OSSERVAZIONE: la cubica non è contenuta in questo piano ($t^3=0$ vale solo per $t=0$)
$\Rightarrow$ la curva non è piana

$f(0)$ è un punto che $\in$ piano, se anche tutti gli altri punti $\in$ al piano $\Rightarrow$ $\mathcal{C}$ è piana

2) $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(t) = (t, \varphi(t)) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$f'(t) = (1, \varphi'(t)) \quad f''(t) = (0, \varphi''(t))$

$$f' \times f'' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & \varphi'(t) & 0 \\ 0 & \varphi''(t) & 0 \end{vmatrix} = (0,0,\varphi''(t))$$

Non posso definire il piano osculatore se $\varphi''(t)=0$ (cioè nei punti di flesso)

OSSERVAZIONE: la definizione di piano osculatore e retta tangente non dipendono dalla parametrizzazione usata ma sono intrinseche per la curva.

ESERCIZIO:

$x^2+y^2=1 \quad (\cos t, \operatorname{sen} t) \quad t \in [0, 2\pi)$

oppure $(\operatorname{sen} t, \cos t)$ $t \in [0, 2\pi)$ oppure $(\cos \frac{t}{2}, \operatorname{sen} \frac{t}{2})$ $t \in [0, 4\pi)$

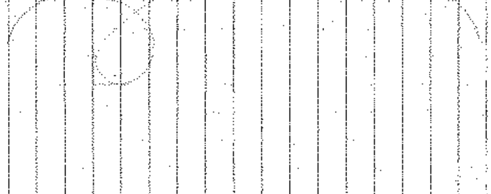
13/04/12

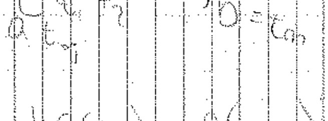
XII LEZIONE:

$f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ $\quad f$ parametrizzata

Sia $I = [a,b]$, $f(a) = P_0$, $f(b) = Q$

$[a,b]$ divido in n parti





$|t_i - t_{i-1}| = \Delta t$ uguali

$|P_1 - P_0| + |P_2 - P_1| + \dots + |P_n - P_{n-1}| = \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| = s_n$

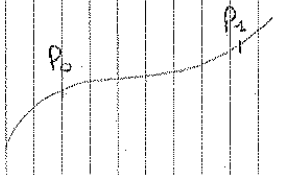
$|Q - P_0| = |P_1 - P_0| + |P_2 - P_1| + \dots + |P_n - P_{n-1}| = \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| = s_n$

Definizione: $\mathcal{C}$ è RETTIFICABILE se $\lim_{n \to \infty} s_n = L = \ell(\mathcal{C}, a, b)$

$\in \mathbb{R}$ lunghezza di $\mathcal{C}$ tra a e b

Per l'elica: $s(t) = 5t$ $\quad t = \frac{s}{5}$ $\Rightarrow$ l'elica parametrizzata con il parametro naturale

è $\begin{cases} x = 3\cos\left(\frac{s}{5}\right) \\ y = 3\operatorname{sen}\left(\frac{s}{5}\right) \\ z = 4\frac{s}{5} \end{cases}$ $\quad |f'(s)| = 1$



$f(s)$ con parametro d'arco

ds mi dà la lunghezza di una porzione infinitesima di curva

$m(s)$ massa punto per punto

la massa della porzione infinitesima è $m(s)ds$ $\Rightarrow$ la massa totale $\int_{s_0}^{s_1} m(s)ds$

$s = s(t) \Rightarrow \int_{t_0}^{t_1} m(t)|f'(t)|dt$ $\quad$ poiché $\frac{ds}{dt} = |f'(t)|$

DEFINIZIONE: $m: A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\mathcal{C} \subseteq A$, $f: I = [a,b] \to \mathbb{R}^3$, è INTEGRALE DI LINEA di 1° specie di m su f: $\int_a^b m(t) \cdot |f'(t)|\, dt$

ESEMPIO:

1) elica di prima, $m(x,y,z) = x^2 + y^2 + 5z^2$ calcolare la massa dell'elica in $[0, 2\pi]$

$|f'(t)| = 5 \quad m(t) = (3\cos t)^2 + (3\operatorname{sen} t)^2 + 5(4t)^2 = 9 + 80t^2$

massa totale $= \int_0^{2\pi} (9 + 80t^2) \cdot 5\, dt = \left[45t + \frac{400}{3}t^3\right]_0^{2\pi} = 90\pi + \frac{3200}{3}\pi^3$

SPAZI VETTORIALI

DEFINIZIONE: Dato un insieme V, dico che V è uno spazio vettoriale su K ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) se: posso introdurre due operazioni $S_V: V \times V \to V$, $P_V: K \times V \to V$ in modo tale che valgano queste proprietà:

1) somma commutativa $\underline{v}_1 + \underline{v}_2 = \underline{v}_2 + \underline{v}_1$

2) $\exists$ elemento neutro $\underline{w}$ tale che $\underline{v}_1 + \underline{w} = \underline{v}_1$ $\forall \underline{v}_1 \in V$
detto vettore nullo $\underline{w} = \underline{0}$

3) $\forall \underline{v}_1$, $\exists$ opposto cioè $\tilde{\underline{v}}_1$ tale che $\tilde{\underline{v}}_1 + \underline{v}_1 = \underline{0}$

4) prop. associativa $(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) + \underline{v}_3 = \underline{v}_1 + (\underline{v}_2 + \underline{v}_3)$

5) $\forall h, r \in K$, $h(r\underline{v}_1) = (hr)\underline{v}_1 = r(h\underline{v}_1)$

6) $\forall h$, $\forall \underline{v}_1, \underline{v}_2$, $h(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = h\underline{v}_1 + h\underline{v}_2$

ESEMPI:

1) $\mathbb{R}^{m,n} = \{$matrici $m \times n$, con coeff. in $\mathbb{R}\}$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$

3) $W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x+y+1=0\}$ $y=-2x-1$ $(x, -2x-1)$

W non è un sottospazio perché $\underline{0} = (0,0) \notin W$

OSSERVAZIONE: $\underline{w}_1 + \underline{w}_2 = (x_1+x_2, -2x_1-2x_2-2) = (x_1+x_2, -2(x_1+x_2)-2)$ non è chiuso

4) $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\}$

$(0,0) \in S$, $(x_1, y_1) + (x_2 + y_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2)$ $x_1+x_2 \geq 0 \Rightarrow S_v$ chiuso

$\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha(x_1, y_1) = (\alpha x_1, \alpha y_1)$ se α è negativo, $\alpha x_1 < 0$

$(1,2) \in S$ ma $-3(1,2) = (-3,-6) \notin S \Rightarrow$ non è un sottospazio

ESEMPIO:

retta passante per l'origine

2') Ogni $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax+by=0\}$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$ $(\forall a,b)$

PROPOSIZIONE:

$\mathbb{R}^n \supseteq V = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underline{0}_n$ con $A \in \mathbb{R}^{m,n}\}$ è un sottospazio

cioè formano un sottospazio le soluzioni di ogni sistema lineare omogeneo $\Leftarrow$

DIMOSTRAZIONE: $\underline{0} \in V$? ${}^t(0, \dots, 0) \Leftrightarrow A \cdot \underline{0} = \underline{0}_n$ questo è vero

$\underline{x}_1 \in V$ $(A\underline{x}_1 = \underline{0}_n)$ $\underline{x}_2 \in V$ $(A\underline{x}_2 = \underline{0}_n)$ $\underline{x}_1 + \underline{x}_2 \in V \Leftrightarrow$

$A(\underline{x}_1 + \underline{x}_2) = \underline{0}_n$ ma $A(\underline{x}_1 + \underline{x}_2) = A\underline{x}_1 + A\underline{x}_2 = \underline{0}_n + \underline{0}_n = \underline{0}_n$

è chiuso rispetto alla somma

$\underline{x}_1 \in V$, $\alpha \in \mathbb{R}$ $A(\alpha \underline{x}_1) = \alpha(A\underline{x}_1) = \alpha \underline{0}_n = \underline{0}_n$ chiuso rispetto P_v

In particolare in $\mathbb{R}^3$ sono sottospazi:

1) $V = \{\underline{0}\}$

2) $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax+by+cz=0\}$ piani per l'origine

3) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax+by+cz=0 \wedge a'x+b'y+c'z=0\}$ rette per l'origine

4) $V = \mathbb{R}^3$ sottospazio improprio

ESEMPIO:

1) $F = \{f : I \to \mathbb{R}\} \supseteq \mathcal{C}^0(I)$ le funzioni continue e derivabili sono un sottospazio

le $\mathcal{C}^p(I) = \{f : I \to \mathbb{R}\}$ formano sottospazi

OPERAZIONI TRA SOTTOSPAZI

$V \supseteq W', W''$ due sottospazi

$(4,2,1) \in V$? $\quad (4,2,1) = \alpha(1,1,0) + \beta(2,0,1) \quad (4,2,1) = (\alpha+2\beta, \alpha, \beta)$

$(4,2,1) \in V$ per $\alpha = 2 \wedge \beta = 1$

1° modo (visione geometrica)

$(4,2,1) = \alpha(1,1,0) + \beta(2,0,1) \iff (4,2,1)$ è complanare con $(1,1,0)$ e $(2,0,1)$

$$\iff rk\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \leq 2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[w-2v_1]{R_3-2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[w'-v_2]{R_3-R_2} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} v_1 \\ v_2 \\ w' \end{array}$$

$w' - v_2 = 0 \quad w - 2v_1 - v_2 = 0 \quad w = 2v_1 + v_2$

2° modo (algebrico)

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 4 \\ \alpha = 2 \\ \beta = 1 \end{cases} \quad \exists \text{ sol} \iff r\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{cioè } r(A) = r(A|B)$$

FATTO:

$$\mathcal{L}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m), \quad \underline{w} \in \mathcal{L}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m) \iff r\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \\ w \end{pmatrix}$$

Quando $\underbrace{(x,y,z)}_{\underline{w}} \in \mathcal{L}(\underbrace{(1,1,0)}_{\underline{v}_1}, \underbrace{(2,0,1)}_{v_2})$?

$$\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ w \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ \hline x & y & z \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - yR_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ \hline x-y & 0 & z \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - zR_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ \hline x-y-2z & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il rango non aumenta $\iff x - y - 2z = 0$ EQ. ESPLICITA DEL SOTTOSPAZIO, è l'equazione del piano contenente i tre vettori.

ESEMPIO:

1) $\mathbb{R}^3 = \mathcal{L}((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1))$ infatti $(a,b,c) = a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1)$

2) $\mathbb{R}^n$
$$\left.\begin{array}{l} \underline{e}_1 (1,0,0,\dots 0) \\ \underline{e}_2 (0,1,0,\dots 0) \\ \vdots \\ \underline{e}_n (0,0,\dots\dots,1) \end{array}\right\} \text{GENERATORI CANONICI}$$

3) $\mathbb{R}^{2,2} = \mathcal{L}(E_1, E_2, E_3, E_4)$

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} = E_1 - E_2 + 7E_4$$

3) $\underline{v}_1 = (1,0,0)$ $\underline{v}_2 = (0,0,0)$ $\underline{v}_3 = (0,1,0)$
$0\cdot(1,0,0) + \alpha\cdot(0,0,0) + 0\cdot(0,1,0) = \underline{0}$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Se in $v_1 \dots v_n$ c'è il vettore nullo $\Rightarrow$ sono sempre linearmente dipendenti

IN GENERALE:

1) $\underline{v}_1$, se $\underline{v}_1 = \underline{0}$ è lin. dipendente, se $\underline{v}_1 \neq \underline{0}$ è lin. indipendente

2) se $\underline{v}_1 \dots \underline{v}_n$ e $v_i = \underline{0}$ sono lin. dipendenti

3) se ho $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ sono lin. dipendenti se $v_2 = h v_1$ (in $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow$ entrate proporzionali)

4) $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ sono lin. dipendenti se $\exists\, \alpha_1 \neq \underline{0}$ tale che $\alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \alpha_3 \underline{v}_3 = \underline{0}$

$$\underline{v}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\underline{v}_2 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1}\underline{v}_3 \Longleftrightarrow r\begin{pmatrix}\underline{v}_2\\ \underline{v}_3\end{pmatrix} = r\begin{pmatrix}\underline{v}_2\\ \underline{v}_3\\ \underline{v}_1\end{pmatrix}$$

METODO DEGLI SCARTI

Come salvare i generatori lin. indipendenti (e buttare quelli superflui)

$V = \mathcal{L}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$

$\underline{v}_1 \begin{cases} = \underline{0} & \text{lo butto} \\ \neq \underline{0} & \text{lo tengo}\end{cases}$ $\quad \underline{v}_1 \neq \underline{0}, \underline{v}_2 \begin{cases} \underline{v}_2 = h\underline{v}_1 & \text{lo butto} \\ \underline{v}_2 \neq h\underline{v}_1 & \text{lo tengo}\end{cases}$

$\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3 \begin{cases} \text{è combinazione lineare} \rightarrow \text{lo butto} \\ \text{non è combinazione lineare} \rightarrow \text{lo tengo}\end{cases}$

$\underbrace{\underline{v}_1 \dots \underline{v}_i}_{\text{lin. ind.}}, \underline{v}_{i+1} \begin{cases} \underline{v}_{i+1} \in \mathcal{L}(\underline{v}_1, \underline{v}_i) & \text{lo butto} \\ \underline{v}_{i+1} \notin \mathcal{L}(\underline{v}_1, \underline{v}_i) & \text{lo tengo}\end{cases}$

ESERCIZIO:

1) $\mathcal{L}((1,0,-1,0), (0,0,0,0), (2,1,1,-1), (0,1,3,-1), (0,0,0,1))$

26/04/12

XIV LEZIONE:

$V = \mathcal{L}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$ $\underline{v}_1 \dots \underline{v}_n$ generatori, lin. indipendenti

generatori $\Rightarrow \forall \underline{v} \in V, \exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_n : \underline{v} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n$

cioè ogni $\underline{v}$ dipende da $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ (allora $\underline{v}_1 \dots \underline{v}_n$ sono il massimo numero di generatori indipendenti)

linearmente indipendenti $\Rightarrow$ nessun $\underline{v}_i$ si scrive usando i rimanenti cioè $\underline{v}_i \notin \mathcal{L}(\underline{v}_1, \underline{v}_{i-1}, \underline{v}_{i+1} \dots \underline{v}_n) \Rightarrow$ sono il numero minimo di generatori

DEFINIZIONE: $V = \mathcal{L}(\underline{v}_1, \dots \underline{v}_n)$ $\underline{v}_1 \dots \underline{v}_n$ generatori, linearmente indipendenti
$\Rightarrow \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\} = \beta$ BASE di V (insieme ordinato).

$\mathcal{L}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n, \underline{w}_1, \dots, \underline{w}_r) = V$, ora applico il punto 1) ed estraggo una base partendo da $(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$, $\underline{v}_1, \dots \underline{v}_n$ ci sono sicuramente perché sono linearmente indipendenti.

ESEMPIO:

1) $V = \mathcal{L}((1,2,0),(0,1,0),(2,3,0),(0,0,1))$ $V \leq \mathbb{R}^3$

a) mostrare che $V = \mathbb{R}^3$

b) estrarre da $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4\}$ una base per $\mathbb{R}^3$

a) basta mostrare che $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3 \in W$

$\underline{e}_1 = \underline{v}_1 - 2\underline{v}_2 \in W$ $\quad \underline{e}_2 = \underline{v}_2 \in W$ $\quad \underline{e}_3 = \underline{v}_4 \in W$

b) $(1,2,0) \neq (0,0,0)$ lo tengo, $(1,2,0)$ e $(0,1,0)$ non proporzionali $\Rightarrow$ li tengo

$(1,2,0),(0,1,0),(2,3,0)$, $\underline{v}_3 = 2\underline{v}_1 - \underline{v}_2 \Rightarrow \underline{v}_3$ lo butto

$(1,2,0),(0,1,0),(0,0,1)$ sono indipendenti

OSSERVAZIONE:

$$\begin{bmatrix} \underline{v}_1 \\ \underline{v}_2 \\ \underline{v}_3 \\ \underline{v}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\underline{v}_3 - 2\underline{v}_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \underline{v}_3' = -\underline{v}_2 \quad \underline{v}_3 - 2\underline{v}_1 = -\underline{v}_2$$

$$\underline{v}_3 = 2\underline{v}_1 - \underline{v}_2$$

$$R_3 + R_2 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$\underline{v}_3$ è combinazione lineare

$\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_4$ sono invece lin. indipendenti

ESEMPIO:

2) $\mathcal{L}((1,-1,0),(0,1,1)) \leq \mathbb{R}^3$

a) completare i due generatori ad una base di $\mathbb{R}^3$

$\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ sono lin. indipendenti

considero $\mathcal{L}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ e riparto con es 1)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_5 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_5 + R_3]{R_4 - R_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ la base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ è $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{e}_1\}$

DIMENSIONE DI SOTTOSPAZI

PROPOSIZIONE: $W \subseteq V$ finitamente generati, $\dim W \leq \dim V$ e $\dim W = \dim V \Leftrightarrow W = V$

PROPOSIZIONE: $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, $R_1(a_{11}, \dots, a_{1n})$, $R_m(a_{m1}, \dots, a_{mn}) \in \mathbb{R}^{1,n}$

$\mathcal{L}(R_1, \dots, R_m) \subseteq \mathbb{R}^{1,n}$

$C_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, C_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \subseteq \mathbb{R}^{m,1}$ vale che $r(A) \overset{(1)}{=} \dim \mathcal{L}(R_1, \dots, R_m) \underset{(3)}{=} \dim \mathcal{L}(C_1, \dots, C_n) \underset{(2)}{=} r({}^tA)$

DIMOSTRAZIONE: (1) $A \rightsquigarrow A'$ ridotta per righe $r(A) = n°$ righe non nulle di A'

$\mathcal{L}(R_1, \dots, R_m) = \mathcal{L}(R'_1, \dots, R'_m)$, $\dim \mathcal{L}(R'_1, \dots R'_m) = r(A)$

$\Rightarrow \dim \mathcal{L}(R_1, \dots, R_m) = r(A)$

(2) ${}^tA = \begin{bmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix}$ per (1) si ha $\mathcal{L}(C_1, \dots, C_n) = r({}^tA)$

(3) $\dim \mathcal{L}(R_1, \dots, R_m) = r$ $\quad \mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_r\}$ una sua base

$R_1 = (a_{11}, \dots, a_{1n}) = p_{11}\underline{v}_1 + \dots + p_{1r}\underline{v}_r$

$R_2 = (a_{21}, \dots, a_{2n}) = p_{21}\underline{v}_1 + \dots + p_{2r}\underline{v}_r$

$\vdots$

$R_m = (a_{m1}, \dots a_{mn}) = p_{m1}\underline{v}_1 + \dots + p_{mr}\underline{v}_r$

$$C_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11}c_{11} + p_{12}c_{21} + \dots + p_{1r}c_{r1} \\ p_{21}c_{11} + \dots + p_{2r}c_{r1} \\ \vdots \\ p_{m1}c_{11} + \dots + p_{mr}c_{r1} \end{pmatrix} =$$

$$= c_{11} \underbrace{\begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ \vdots \\ p_{m1} \end{pmatrix}}_{\underline{w}_1} + \dots + c_{r1} \underbrace{\begin{pmatrix} p_{1r} \\ p_{2r} \\ \vdots \\ p_{mr} \end{pmatrix}}_{\underline{w}_r}$$

$C_1 = \mathcal{L}(\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_r)$ quindi ho che $C_1, \dots, C_n \in \mathcal{L}(\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_r)$

$\Rightarrow \mathcal{L}(C_1, \dots, C_n) \subseteq \mathcal{L}(\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_r) \Rightarrow \dim \mathcal{L}(C_1, \dots, C_n) \leq$

$\leq \dim \mathcal{L}(\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_r) \leq r = \dim \mathcal{L}(R_1, \dots, R_m)$

Partendo da ${}^tA$ con lo stesso ragionamento dimostro che

$\dim \mathcal{L}(R_1, \dots, R_m) \leq \dim \mathcal{L}(C_1, \dots, C_n)$

$\Rightarrow \dim \mathcal{L}(R_1, \dots, R_m) = \dim \mathcal{L}(C_1, \dots, C_n)$

CONSEGUENZE: 1) $r(A) = r({}^tA)$

2) $r(A)$ non cambia usando le operazioni elementari

$$\begin{cases} x_1 = h-2a \\ x_2 = -h-b \\ x_3 = h \\ x_4 = a \\ x_5 = b \end{cases} \quad \begin{bmatrix} h-2a \\ -h-b \\ h \\ a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h \\ -h \\ h \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2a \\ 0 \\ 0 \\ a \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -b \\ 0 \\ 0 \\ b \end{bmatrix} = h \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + a \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

APPLICAZIONI LINEARI

DEFINIZIONE: Siano V, W due spazi vettoriali su K

Sia $f: V \to W$, dico che f è un'applicazione lineare se

1) $f(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = f(\underline{v}_1) + f(\underline{v}_2) \quad \forall \ \underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V$

2) $f(\alpha \underline{v}_1) = \alpha f(\underline{v}_1) \quad \forall \alpha \in K, \forall \underline{v}_1 \in V$

In particolare succede che:

a) $f(\underline{o}_V) = f(0 \cdot \underline{o}_V) = 0 f(\underline{o}_V) = 0_W \quad \Rightarrow \operatorname{Ker} f \neq \phi$ dove almeno esiste $\operatorname{Ker} f = \{0\}$

b) $f(-\underline{v}) = -f(\underline{v}) \quad (\alpha = -1)$

ESEMPI:

1) $V = W = \mathbb{R} = \mathcal{L}(1)$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = \cos x$ non è lineare perché $f(0) = 1$

$f(x) = \log(1+x^2) \quad f(0) = 0 \quad f(x_1+x_2) = \log(1+(x_1+x_2)^2)$

$f(x_1) + f(x_2) = \log(1+x_1^2) + \log(1+x_2^2) \quad \neq$ non è lineare

$f(x) = 3x \quad f(0) = 0 \quad f(x_1+x_2) = 3(x_1+x_2) = f(x_1) + f(x_2) = 3x_1 + 3x_2 \quad \checkmark$

$f(\alpha x_1) = 3(\alpha x_1) = \alpha(3x_1) = \alpha f(x_1)$ è lineare

In generale: $f(x) = hx$, $h \in \mathbb{R}$, sono applicazioni lineari (uniche $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$)

2) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \quad f(x, y, z) = (3x - z, x+y+z)$ è un'applicazione lineare

$f((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)) = f(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2) = (3(x_1+x_2) - (z_1+z_2), (x_1+x_2) + (y_1+y_2) + (z_1+z_2)) = (3x_1 - z_1 + 3x_2 - z_2, x_1+y_1+z_1 + x_2+y_2+z_2) =$

$= (3x_1 - z_1, x_1+y_1+z_1) + (3x_2 - z_2, x_2+y_2+z_2) = f((x_1, y_1, z_1)) + f((x_2, y_2, z_2))$

$f(\alpha(x, y, z)) = \alpha f((x, y, z)) \quad f((\alpha x, \alpha y, \alpha z)) = (3\alpha x - \alpha z, \alpha x + \alpha y + \alpha z) =$

$= \alpha(3x - z, x+y+z) = \alpha f((x, y, z))$

3) $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$z \to \bar{z}$ è un'applicazione lineare

4) $f: \mathcal{C}^1 \to \mathcal{C}^1 \qquad \tilde{f}: \mathcal{C}^\infty \to \mathcal{C}^\infty$

$f \longmapsto f(f) = f' \qquad f \to \int^t f$

03/05/12

XVI LEZIONE:

PROPOSIZIONE A: $f: V \to W$
dim: n m
basi β β'
$\Rightarrow$ a f resta associata $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ (sulle colonne di A ci sono le componenti rispetto a β' delle immagini $\underline{v} \in \beta$)

OSSERVAZIONE: in $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{C}$ base canonica $[\underline{v}]_{\mathcal{C}} = \underline{v}$ si identificano con $\underline{v}$ stesso

$\mathbb{R}^3$ $(1,2,-4) = 1(1,0,0)+2(0,1,0)-4(0,0,1)$

$[(1,2,-4)]_{\mathcal{C}} = (1,2,-4)$

ESEMPIO:

1) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ $\quad$ $\mathcal{C}$ base $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{C}'$ base $\mathbb{R}^4$

$f(1,0,0) = (2,1,-1,0)$
$f(0,1,0) = (0,0,0,0)$
$f(0,0,1) = (1,0,3,5)$

- calcolare A rispetto alle basi canoniche
- calcolare $f(1,3,-1)$

$$A \in \mathbb{R}^{4,3} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad f(1,3,-1) = A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \\ -5 \end{bmatrix} \qquad f(1,3,-1) = (1,1,-4,-5)$$

2) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ $\quad f(x,y,z) = (2x-z, x+y)$

$f(1,0,0) = (2,1)$
$f(0,1,0) = (0,1)$
$f(0,0,1) = (-1,0)$

$$A \in \mathbb{R}^{2,3} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

PROPOSIZIONE B: V, W con base β, β', $\dim V = n$, $\dim W = m$
$\Rightarrow$ se $A \in \mathbb{R}^{m,n} \Rightarrow \exists f: V \to W$ che si rappresenta con A

ESEMPIO:

1) $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ con basi canoniche

2) $f(\underline{v}_1), \dots, f(\underline{v}_n) \in \mathrm{Im} f \Rightarrow \mathcal{L}(f(\underline{v}_1), \dots, f(\underline{v}_n)) \subseteq \mathrm{Im} f$

viceversa $\underline{w} \in \mathrm{Im} f \Rightarrow \exists\, \underline{v} \in V : \underline{w} = f(\underline{v}) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underline{v}_i\right) =$

$= \sum \lambda_i f(\underline{v}_i) \in \mathcal{L}(f(\underline{v}_1) \dots, f(\underline{v}_n))$

3) $\underline{w}$, $f(\underline{v}_0) = \underline{w}$ $\quad f^{-1}(\underline{w}) \subseteq \{\underline{v}_0 + \underline{v}' \mid f(\underline{v}') = \underline{0}\}$

$\underline{t} \in f^{-1}(\underline{w}) \Leftrightarrow f(\underline{t}) = \underline{w}$

$f(\underline{t} - \underline{v}_0) = f(\underline{t}) - f(\underline{v}_0) = \underline{w} - \underline{w} = \underline{0}_W$

$\Rightarrow \underline{t} - \underline{v}_0 = \underline{v}' \Rightarrow \underline{t} = \underline{v}_0 + \underline{v}'$ con $f(\underline{v}') = \underline{0}_W$

viceversa $f^{-1}(\underline{w}) \supseteq \{\underline{v}_0 + \underline{v}' \mid f(\underline{v}') = \underline{0}\}$

è vera $\Leftrightarrow f(\underline{v}_0 + \underline{v}') = \underline{w}$

$f(\underline{v}_0 + \underline{v}') = f(\underline{v}_0) + f(\underline{v}') = \underline{w} + \underline{0}_W = \underline{w}$

$$f^{-1}(\underline{w}) = \{\underline{v}_0 + \underline{v}' \mid f(\underline{v}') = \underline{0}_W\} = \{\underline{v}_0\} + \underbrace{\{\underline{v}' \mid f(\underline{v}') = \underline{0}_W\}}_{= f^{-1}(\underline{0}_W)}$$

DEFINIZIONE: Si dice NUCLEO dell'applicazione lineare $f: V \to W$, l'insieme $f^{-1}(\underline{0}_W) = \mathrm{Ker}(f) \subseteq V$

PROPOSIZIONE: 1) $\mathrm{Ker}(f)$ è un sottospazio

2) $f: V \to W$ e $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\} = \beta$ base di V, vale che:

$n = \dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Im}(f)$

è solo una formula numerica perché $\mathrm{Im}(f) \subseteq W$, $\mathrm{Ker}(f) \subseteq V$

DIMOSTRAZIONE: 2) $\mathrm{Ker}(f) \subseteq V \Rightarrow$ ha dimensione finita t, base di $\mathrm{Ker}(f) = \{\underline{k}_1, \dots, \underline{k}_t\}$

li completo ad una base di V $\beta' = \{\underline{k}_1, \dots, \underline{k}_t, \underline{v}_1, \dots \underline{v}_r\}$

$t + r = n \quad t = \dim \mathrm{Ker}(f)$ questi sono nulli

$\mathrm{Im} f = \mathcal{L}(f(\underline{k}_1), \dots, f(\underline{k}_t), f(\underline{v}_1), \dots, f(\underline{v}_r)) = \mathcal{L}(f(\underline{v}_1), \dots, f(\underline{v}_r))$

ora devo dimostrare che sono indipendenti

$a_1 f(\underline{v}_1) + \dots + a_r f(\underline{v}_r) = \underline{0}_W \quad f(a_1 \underline{v}_1 + \dots + a_r \underline{v}_r) = \underline{0}_W$

$a_1 \underline{v}_1 + \dots + a_r \underline{v}_r \in \mathrm{Ker} f = \mathcal{L}(\underline{k}_1, \dots, \underline{k}_t)$

$\Rightarrow a_i = 0$ perché $\underline{v}_i, \underline{k}_j$ sono linearmente indipendenti

quindi $\dim \mathrm{Im} f = r$

04/05/12

XVII LEZIONE:

$f^{-1}(\underline{w}) = \{\underline{v} \in V \mid f(\underline{v}) = \underline{w}\} = \{\underline{v}_0\} + \mathrm{Ker}(f)$

non è un sottospazio (lo è solo se $\underline{w} = \underline{0}_W$)

$= \mathcal{L}(\vec{i}, \vec{j}, -\vec{k})$ perché $r(A) = 3$

$Ker(f)$: $\dim Ker(f) = 3 - r(A) = 3 - 3 = 0 \Rightarrow Ker(f) = \{\underline{0}\}$

non posso calcolare la base poiché è un generatore dipendente

2) $f: V_3 \to \mathbb{R}$ fisso $\tilde{\underline{v}} \in V_3$ $f(\underline{v}) = \underline{v} \cdot \tilde{\underline{v}}$

$\dim(\mathbb{R}) = 1$

CASO $\tilde{\underline{v}} \neq \underline{0}$

$Ker(f) = \{\underline{v} \in V_3 \mid \underline{v} \cdot \tilde{\underline{v}} = 0\} = \{\underline{v} \in V_3 \mid \underline{v} \perp \tilde{\underline{v}}\}$

$\dim Ker(f) = 2$ (forma un piano)

$\dim Im(f) = 1$ infatti se $\underline{v} = \tilde{\underline{v}}$ $f(\tilde{\underline{v}}) = \tilde{\underline{v}} \cdot \tilde{\underline{v}} > 0$ $|\tilde{\underline{v}}|^2 \in \mathbb{R} \to$ base di $Im(f)$

3) $f: \mathbb{R}_4 \to \mathbb{R}_3$ che rispetto alle basi canoniche

$$\underset{3\times 4}{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- trovare $Im f$ (dim e base)
- trovare $Ker f$ (dim e base)

$\dim Im(f) = r(A)$ $\quad R_3 - R_1 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \\ -2 & -4 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ $\quad \dim Im(f) = 2$

$Im f = \mathcal{L}((1,2,-1), (2,4,-2), (1,0,1), (2,2,0))$

$(2,4,-2)$ lo butto perché $2\underline{v}_1$

$(2,2,0)$ lo butto perché combinazione $\underline{v}_1 + \underline{v}_3$

base di $Im f = \{(1,2,-1), (1,0,1)\}$

$\dim Ker(f) = 4 - 2 = 2$

per trovare una base del nucleo risolvo $A\underline{v} = \underline{0}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x = a \\ y = b \\ z = -a - 2b - 2(-a + 2b) \\ t = -a - 2b \end{cases} \quad \begin{cases} x = a \\ y = b \\ z = a + 2b \\ t = -a - 2b \end{cases} \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ a + 2b \\ -a - 2b \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

base di $Ker(f) = \{(1,0,1,-1), (0,1,2,-2)\}$

ENDOMORFISMI

DEFINIZIONE: V spazio vettoriale, si chiama ENDOMORFISMO una qualsiasi applicazione lineare $f: V \to V$

ESEMPI:

1) $\mathscr{C}^\infty(I) \to \mathscr{C}^\infty(I)$
$f \longmapsto f'$

non è iniettiva poiché $\forall h,\ h \in \mathbb{R}\quad dh = 0$
è suriettiva

2) $\mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$
$p(x) \longmapsto x\,p(x)$

è iniettiva
non è suriettiva perché le costanti non hanno controimmagini

COROLLARIO: Se $\dim V = n$, $f: V \to V$
f è iniettiva $\iff$ f è suriettiva

negli esempi di prima non era così perché non hanno dimensione finita

ESERCIZIO:

1) Sia dato l'endomorfismo $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$
$f(1,2,3) = (2,4,6)$
$f(0,2,3) = (0,-2,-3)$
$f(0,0,6) = (0,0,18)$

- verificare che $\{v_1, v_2, v_3\}$ formano una base β di $\mathbb{R}^3$
- scrivere la matrice di f rispetto a β
- scrivere la matrice di f rispetto alla base canonica

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad rk = 3 \Rightarrow \text{formano una base}$$

$(2,4,6) = \alpha(1,2,3) + \beta(0,2,3) + \gamma(0,0,6) \qquad [(2,4,6)]_\beta = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$(0,-2,-3) = \alpha(1,2,3) + \beta(0,2,3) + \gamma(0,0,6) \qquad [(0,-2,-3)]_\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$(0,0,18) = \alpha(1,2,3) + \beta(0,2,3) + \gamma(0,0,6) \qquad [(0,0,18)]_\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

componenti di $f(v_i)$ rispetto a β

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = A \quad r(A) = 3 \Rightarrow \dim \operatorname{Im}(f) = 3 \Rightarrow f \text{ è suriettiva} \Rightarrow f \text{ è iniettiva}$$
$\Rightarrow \operatorname{Ker}(f) = \{0\} \Rightarrow f$ è biunivoca

$\underline{v} \in E_\lambda$ $\underline{v}$ si chiama AUTOVETTORE RELATIVO A λ

$f(\underline{v}) = \lambda \underline{v}$ $\quad f(\underline{v}) = \lambda id(\underline{v})$ $\quad f(\underline{v}) - \lambda id(\underline{v}) = \underline{0}$ $\quad (f - \lambda id)(\underline{v}) = \underline{0}$

$\exists \lambda : \exists \underline{v} \neq \underline{0} : (f - \lambda id)(\underline{v}) = \underline{0}$

PROPOSIZIONE: λ è un autovalore $\Leftrightarrow$ $f - \lambda id$ non è iniettiva ↗ altrimenti solo $\underline{0}$ verifica l'equazione

in questo caso $E_\lambda = \ker(f - \lambda id)$ ed è quindi un sottospazio

Siccome $f \rightsquigarrow A$ e $id \rightsquigarrow I_m$ $\Rightarrow$ λ è un autovalore $\Leftrightarrow$ $A - \lambda I_m$ non ha rango massimo $(r(A - \lambda I_m) < m)$ $\Leftrightarrow$ $\det(A - \lambda I_m) = 0$

ESEMPIO:

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$

i) voglio verificare se le entrate sono autovalori

ii) verificare se $\lambda = -5$ è un autovalore

$r(A - 1 \cdot I) = r\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = r\left(\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}\right) = 2 \Rightarrow 1$ non è autovalore

$r(A - 2I) = r\left(\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}\right) = 1 \Rightarrow \lambda = 2$ è un autovalore

$r(A - 3I) = r\left(\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}\right) = 2 \Rightarrow \lambda = 3$ non è un autovalore

$r(A + 4I) = r\left(\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\right) = 2 \Rightarrow \lambda = -4$ non è un autovalore

$r(A + 5I) = r\left(\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\right) = 1 \Rightarrow \lambda = -5$ è un autovalore

$f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ $\quad f \rightsquigarrow A$

λ è un autovalore $\Leftrightarrow r(A - \lambda I) < m \Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0$

$P_A(t) = \det(A - tI)$ POLINOMIO CARATTERISTICO di A

$$A - tI = \begin{bmatrix} a_{11} - t & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} - t & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & \dots & a_{mm} - t \end{bmatrix}$$

$P_A(t) = (-1)^m t^m + a_1 t^{m-1} + a_2 t^{m-2} + \dots + a_{m-1} t + a_m$

$t^2-2t-3=0 \quad t = \begin{smallmatrix}-1\\3\end{smallmatrix} \quad t-3=0 \quad t=3 \quad m_a(-1)=1 \quad m_a(3)=2$

$E_3 = \ker(B-3I) \quad B-3I = \begin{bmatrix}-2 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ 2 & 0 & -2\end{bmatrix} \quad r(B-3I)=1 \quad \dim E_3 = 2$

$\begin{cases} x=a \\ y=b \\ z=a \end{cases} \quad X = a\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \quad E_3 = \mathcal{L}((1,0,1),(0,1,0)) \quad m_g(3)=2$

$E_{-1} = \ker(B+I) \quad B+I = \begin{bmatrix}2 & 0 & 2\\ 0 & 4 & 0\\ 2 & 0 & 2\end{bmatrix} \quad r(B+I)=2 \quad \dim E_{-1} = 1$

$\begin{cases} x=-a \\ y=0 \\ z=a \end{cases} \quad X = a\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \quad E_{-1} = \mathcal{L}((-1,0,1)) \quad m_g(-1)=1$

3) $C = \begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 2\end{bmatrix} \quad \begin{vmatrix}1-t & 2 & 0\\ 0 & 1-t & 1\\ -1 & 0 & 2-t\end{vmatrix} = (1-t)(1-t)(2-t)-2(1) = (1-t)^2(2-t)-2 =$

$= (1-2t+t^2)(2-t)-2 = \cancel{2}-4t+2t^2-t+2t^2-t^3-\cancel{2} = -t^3+4t^2-5t = -t(t^2-4t+5)$

$t=0 \;,\; t = 2 \pm \sqrt{4-5} \not\exists \; \mathbb{R}$, in $\mathbb{R}$ ho un solo autovalore

DEFINIZIONE: chiamo $sp_K(A) = \{\lambda \in K \mid \lambda \text{ autovalori di } A\}$, SPETTRO di A

$sp_{\mathbb{R}}(C) = \{0\} \;,\; sp_{\mathbb{C}}(C) = \{0, 2+i, 2-i\}$

17/05/12

XIX LEZIONE: DIAGONALIZZAZIONE

$A \in K^{n,n}$

$p_A(t) = \det(A-tI) \quad p_A(t)=0 \quad \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$

$E_\lambda = \{\underline{v} \in V \mid (A-\lambda I)\underline{v} = \underline{0}\}$

$1 \le m_g(\lambda) \le m_a(\lambda)$

$\quad \dim E_\lambda = n - r(A-\lambda I)$

DEFINIZIONE: $A \in K^{n,n}$ è diagonalizzabile se trovo n autovettori linearmente indipendenti ($\Leftrightarrow$ base di autovettori)

ESEMPIO

1) $A = \begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ è diagonale $\Rightarrow$ A è diagonalizzabile

quindi $m_g(\lambda_1) + \dots + m_g(\lambda_h) = n \Rightarrow p_A(t)$ ha n radici in K
siccome $n = m_g(\lambda_1) + \dots + m_g(\lambda_h) \leq m_a(\lambda_1) + \dots + m_a(\lambda_h) \leq n$
per forza $m_g(\lambda) = m_a(\lambda)$

$\Leftarrow$ $\lambda_1, \dots, \lambda_h$ radici distinte del polinomio caratteristico
E_{λ_1} considero una base $\{\underline{v}_{11}, \dots, \underline{v}_{1m_1}\}$ $(m_a(\lambda_i) = m_g(\lambda_i) = m_i)$
$\vdots$
E_{λ_h} base $\{\underline{v}_{h1}, \dots, \underline{v}_{hm_h}\}$

$m_1 + m_2 + \dots m_h = n$
dico che gli n autovettori indipendenti che sto cercando sono dati dall'unione delle basi di tutti gli autospazi.
Dimostro che sono indipendenti:

$$\underbrace{(\alpha_{11}\underline{v}_{11} + \dots + \alpha_{1m_1}\underline{v}_{1m_1})}_{\in E_{\lambda_1}} + \dots + \underbrace{(\alpha_{h1}\underline{v}_{h1} + \dots + \alpha_{hm_h}\underline{v}_{hm_h})}_{\in E_{\lambda_h}} = \underline{0}$$

per il lemma
$$\begin{cases} \alpha_{11}\underline{v}_{11} + \dots + \alpha_{1m_1}\underline{v}_{1m_1} = \underline{0} & \Rightarrow \alpha_{1j} = \underline{0} \\ \vdots \\ \alpha_{h1}\underline{v}_{h1} + \dots + \alpha_{hm_h}\underline{v}_{hm_h} = \underline{0} & \Rightarrow \alpha_{hj} = \underline{0} \end{cases}$$

poiché le equazioni sono combinazione lineare di vettori di una base

Se A è diagonalizzabile siano $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ gli autovettori indipendenti relativi agli autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

$$P = \left[\underline{v}_1 \middle| \underline{v}_2 \middle| \dots \middle| \underline{v}_n\right] \quad r(P) = n \Rightarrow \text{è invertibile}$$

$$A \cdot P = P \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$ matrice diagonale degli autovalori

In più: $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$

$$A \cdot P = A \cdot \left[\underline{v}_1 \middle| \dots \middle| \underline{v}_n\right] = \left[\lambda_1\underline{v}_1 \middle| \lambda_2\underline{v}_2 \middle| \dots \middle| \lambda_n\underline{v}_n\right]$$

$$P \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} = \left[\underline{v}_1 \middle| \dots \middle| \underline{v}_n\right] \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} = \left[\lambda_1\underline{v}_1 \middle| \dots \middle| \lambda_n\underline{v}_n\right]$$

18/05/12

XX LEZIONE:

PRODOTTI SCALARI

DEFINIZIONE: V spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ chiamo prodotto scalare su V, $\langle \, , \, \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ tale che $\forall \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3 \in V$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$:

1) $\langle \underline{v}_1, \underline{v}_2 \rangle = \langle \underline{v}_2, \underline{v}_1 \rangle$
2) $\langle \underline{v}_1, \underline{v}_2 + \underline{v}_3 \rangle = \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2 \rangle + \langle \underline{v}_1, \underline{v}_3 \rangle$
3) $\alpha \cdot \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2 \rangle = \langle \alpha \underline{v}_1, \underline{v}_2 \rangle$
4) $\forall \underline{v} \neq 0 \quad \langle \underline{v}, \underline{v} \rangle > 0$

PROPRIETÀ: 1) se fisso $\underline{v}_0 \in V$, $\langle \cdot , \underline{v}_0 \rangle : V \to \mathbb{R}$, $\underline{v} \mapsto \langle \underline{v}, \underline{v}_0 \rangle$ è un'applicazione lineare
anche $\langle \underline{v}_0, \cdot \rangle : V \to \mathbb{R}$ è un'applicazione lineare $\Rightarrow \langle \, , \, \rangle$ è BILINEARE
2) $\langle \underline{0}, \underline{v} \rangle = 0$ e inoltre $\langle \underline{v}, \underline{v} \rangle = 0 \Leftrightarrow \underline{v} = \underline{0}$
3) $W \subseteq V$, W sottospazio, $\langle \, , \, \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ si restringe a $W \times W \to \mathbb{R}$

CONSEGUENZE:

DEFINIZIONE: $\forall \underline{v} \in V$ definisco modulo di $\underline{v}$, $|\underline{v}| = \sqrt{\langle \underline{v}, \underline{v} \rangle}$
chiamo versore $\underline{v}$: $|\underline{v}| = 1$

PROPOSIZIONE: $\underline{v}, \underline{w} \in V$ 1) $|\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle| \leq |\underline{v}| \cdot |\underline{w}|$
2) $|\underline{v} + \underline{w}|^2 \leq (|\underline{v}| + |\underline{w}|)^2$

Dalla (1) deduco, se $\underline{v}, \underline{w} \neq \underline{0}$, $\frac{|\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle|}{|\underline{v}| \cdot |\underline{w}|} \geq 1 \Rightarrow -1 \leq \frac{\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle}{|\underline{v}| \cdot |\underline{w}|} \leq 1$

DEFINIZIONE: $\cos \hat{\alpha} = \frac{\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle}{|\underline{v}| \cdot |\underline{w}|}$, in particolare $\underline{v} \perp \underline{w} \Leftrightarrow \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = 0$

ESEMPI:

1) in $V(S_3)$ è definito il prodotto scalare (vedi lezione VI)
2) in $\mathbb{R}^n$ si introduce il prodotto scalare euclideo
$\underline{v}_1 = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad \underline{v}_2 = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$

$$\langle \underline{v}_1, \underline{v}_2 \rangle = (x_1, \ldots, x_n) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$$

con questo prodotto scalare $\mathbb{R}^n$ si dice SPAZIO VETTORIALE EUCLIDEO

3) in $\mathbb{R}^2$ $\underline{v}_1 = (x_1, x_2)$, $\underline{v}_2 = (y_1, y_2)$

$$\langle \underline{v}_1, \underline{v}_2 \rangle = (x_1, x_2) \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (3x_1, 6x_2) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 3x_1 y_1 + 6x_2 y_2$$

si verifica che è un prodotto scalare

$|\underline{v}_1| = \sqrt{3\cdot 4+6} = \sqrt{18}$ $\quad \underline{t}_1 = \frac{1}{\sqrt{18}}(2,-1)$

$|\underline{v}_2| = \sqrt{3+6} = 3$ $\quad \underline{t}_2 = \frac{1}{3}(1,1)$

$\Rightarrow \underline{t}_1, \underline{t}_2$ formano una base ortonormale

a) $V = \{ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid$ continue e periodiche di $T = 2\pi \}$ funzioni

$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f \cdot g$

Si può dimostrare che l'insieme $\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos px, \operatorname{sen} qx \}$ è ortonormale $\quad p, q \in \mathbb{Z}$

PROPOSIZIONE (a): $V \neq \{\underline{0}\}$ su $\mathbb{R}$, $\langle , \rangle$
$\Rightarrow \exists$ sempre basi ortonormali

PROPOSIZIONE (b): $V \neq \{\underline{0}\}$ su $\mathbb{R}$, $\langle , \rangle$
$\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_h\}$ insieme ortonormale, allora:

1) sono linearmente indipendenti
2) se V è finitamente generato e $\beta = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m\}$ è ortonormale
$\forall \underline{v} \in V$, $\underline{v} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_m \underline{v}_m$ dove $\alpha_i = \langle \underline{v}, \underline{v}_i \rangle$
coefficienti di FOURIER

infatti $\langle \underline{v}, \underline{v}_1 \rangle = \langle \alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_m \underline{v}_m, \underline{v}_1 \rangle = \langle \alpha_1 \underline{v}_1, \underline{v}_1 \rangle + \dots + \langle \alpha_m \underline{v}_m, \underline{v}_1 \rangle$
$= \alpha_1 \underbrace{\langle \underline{v}_1, \underline{v}_1 \rangle}_{|\underline{v}_1|^2 = 1 \text{ per Hp.}} + \dots + \alpha_m \underbrace{\langle \underline{v}_m, \underline{v}_1 \rangle}_{0 \text{ per Hp.}} = \alpha_1$

ESEMPIO:

1) Verificare che $\underline{v}_1 = (2,2,1)$, $\underline{v}_2 = (1,-2,2)$, $\underline{v}_3 = (-2,1,2)$ formano un insieme ortogonale e calcolare base ortonormale e scrivere $\underline{v} = (1,1,1)$ come loro combinazione lineare.

$\mathbb{R}^3$ euclideo

$\langle \underline{v}_1, \underline{v}_2 \rangle = 2-4+2 = 0 \quad \langle \underline{v}_1, \underline{v}_3 \rangle = -4+2+2 = 0 \quad \langle \underline{v}_2, \underline{v}_3 \rangle = -2-2+4 = 0$

$\Rightarrow \underline{v}_1 \perp \underline{v}_2$, $\underline{v}_2 \perp \underline{v}_3$, $\underline{v}_1 \perp \underline{v}_3$ $\Rightarrow$ sono un insieme ortogonale

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 - \frac{1}{2}R_1]{R_3 + R_1} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 3/2 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 + R_2} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 3/2 \\ 0 & 0 & 9/2 \end{pmatrix} \quad r = 3 \Rightarrow \text{sono lin. ind.}$$

per proposizione (b) se trovo insieme ortonormale sono lin. ind.

$|\underline{v}_1| = \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3 \quad |\underline{v}_2| = 3 \quad |\underline{v}_3| = 3$

$\beta = \{ \frac{1}{3}\underline{v}_1, \frac{1}{3}\underline{v}_2, \frac{1}{3}\underline{v}_3 \}$ base ortonormale

$(1,1,1) = \alpha \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) + \beta \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) + \gamma \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

$= (1+t)\left[(-t)[t-1] - 1(-2)\right] = (1+t)\left[(-t^2+t+2)\right] = 0 \quad t_1 = -1 \quad t_2 = 2 \quad t_3 = -1$

$m_a(-1) = 2 \quad m_a(2) = 1$

$t = -1 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2-R_1]{R_3-R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{cases} x = -a-b \\ y = a \\ z = b \end{cases} \quad X = a\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$E_{-1} = \mathcal{L}\left((\underbrace{-1,1,0}_{\underline{v}_1}), (\underbrace{-1,0,1}_{\underline{v}_2})\right) \qquad m_g(-1) = 2$

$t = 2 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2+\frac{1}{2}R_1]{R_3+\frac{1}{2}R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 \to R_2]{R_3+R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad X = a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$E_2 = \mathcal{L}((\underbrace{1,1,1}_{\underline{w}_1}))$

$\underline{w}_1 \perp \underline{v}_1$ e $\underline{w}_1 \perp \underline{v}_2$ ma $\underline{v}_1 \not\perp \underline{v}_2$

Il problema è trovare una base ortonormale di E_{-1}.

Fissiamo $\underline{v}_1$ e cerchiamo $\underline{t} \in E_{-1} : \underline{v}_1 \perp \underline{t}$

$\underline{t} \in E_{-1} \iff \underline{t} = \alpha \underline{v}_1 + \beta \underline{v}_2 \quad \alpha \neq 0$ perché $\underline{v}_2 \not\perp \underline{v}_1 \Rightarrow$ posso considerare $\alpha = 1$

$\underline{t} = (-1,1,0) + \beta(-1,0,1) = (-1-\beta, 1, \beta)$

ora impongo $\underline{v}_1 \perp \underline{t}$ cioè $(-1,1,0)\cdot(-1-\beta,1,\beta) = 1+\beta+1 = 0 \Rightarrow \beta = -2$

$\underline{t} = (1,1,-2) \quad |\underline{t}| = \sqrt{6} \quad |\underline{v}_1| = \sqrt{2} \quad |\underline{w}_1| = \sqrt{3}$

$$P = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

FORME QUADRATICHE

$\underline{X} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

DEFINIZIONE: Una forma quadratica in n variabili è una funzione $q(x_1, \dots, x_n)$ definita da $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ associata ad una matrice $A = {}^tA = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,n}$ definita ponendo:

$$q(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

CASO $n = 2$

$$(x_1 \; x_2) \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \, , \, a_{12}x_1 + a_{22}x_2) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} =$$

TEOREMA: $q(\underline{v}) = \underline{v} A^t \underline{v}$, $A = {}^tA$

siano $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_h$ gli autovalori di A (eventualmente ripetuti con molteplicità), vale che:

1) $q(\underline{v})$ è definita positiva $\Leftrightarrow \lambda_i > 0 \quad \forall i = 1, \dots, h$
2) $q(\underline{v})$ è semidefinita positiva $\Leftrightarrow \lambda_i \geq 0$ con almeno un $\lambda_i = 0$
3) $q(\underline{v})$ è definita negativa $\Leftrightarrow \lambda_i < 0 \quad \forall i = 1, \dots, h$
4) $q(\underline{v})$ è semidefinita negativa $\Leftrightarrow \lambda_i \leq 0$ con almeno un $\lambda_i = 0$,
5) $q(\underline{v})$ è indefinita $\Leftrightarrow \exists\, \lambda_1 > 0 \wedge \lambda_2 < 0$

24/05/12

XXI LEZIONE:

DIMOSTRAZIONE: $A = {}^tA \Rightarrow A$ è diagonalizzabile con P ortogonale (${}^tP = P^{-1}$)

$${}^tPAP = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m \end{bmatrix} \qquad \lambda_i \in \mathbb{R} \quad i = 1, \dots, m$$

$P = {}^tN \qquad {}^tPAP = NA^tN$

$N: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ è biunivoca (perché P è invertibile)

$_{m\times m}$ ${}^t\underline{x} \longmapsto {}^t\underline{x}' = N\,{}^tx$ N rappresenta una rotazione e/o ribaltamento

${}^t\underline{x} = N^{-1}\,{}^t\underline{x}' = {}^tN\,{}^t\underline{x}'$ trasponendo tutto $\underline{x} = \underline{x}'N$ $(\underline{x}' = P\underline{x} \Rightarrow P^t\underline{x}' = \underline{x})$

sostituisco in $q(\underline{x}) = \underline{x} A\,{}^t\underline{x} = \underline{x}' NA\,{}^tN\,{}^t\underline{x}' = \underline{x}' D\,{}^t\underline{x}' =$

$$= \underline{x}' \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_h \end{bmatrix} {}^t\underline{x}' = q(\underline{x}')$$

$\Rightarrow$ posso vedere se $q(\underline{x})$ è positiva considerando $q(\underline{x}')$ a cui è associata la matrice diagonale di cui è facile vedere il segno

$q(\underline{x}') > 0 \Leftrightarrow \forall\, \underline{x} \neq \underline{0} \quad \lambda_1 > 0, \dots, \lambda_m > 0$

ma $q(\underline{x}) = q(\underline{x}') \Rightarrow q(\underline{x}) > 0 \Leftrightarrow \forall\, \underline{x} \neq \underline{0} \quad \lambda_1 > 0, \dots, \lambda_m > 0$

CONICHE

DEFINIZIONE: Una conica è il luogo dei punti del piano $\mathbb{R}^2$ che soddisfano un'equazione di secondo grado in x e y, cioè:

$$\gamma = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \text{ con } a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R} \}$$

Alla conica γ posso associare due matrici:

$$\underset{3\times 3}{B} \quad \begin{array}{c|ccc} & x & y & 1 \\ \hline x & a & b/2 & d/2 \\ y & b/2 & c & e/2 \\ 1 & d/2 & e/2 & f \end{array} \qquad \underset{2\times 2}{A} = \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix}$$

termini di 2° grado

matrice della forma quadratica

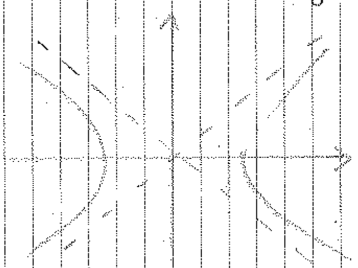
1) ha un centro di simmetria $((0,0))$
2) ha due assi di simmetria
3) è limitata
4) non sempre è a punti reali
$2x^2+3y^2+4=0$ non è degenere ($\det B \neq 0$) ma non ha punti reali
5) $\det(A)>0$ e vale che

È il luogo dei punti del piano la cui somma delle distanze da due punti detti fuochi è costante.

② IPERBOLE $ax^2+by^2+f=0$ $a \cdot b<0$ (discordi) $f \neq 0$

1) $\det A = ab < 0$

ESEMPIO: $2x^2-3y^2=1$



$\begin{cases} x=0 \\ \nexists y \end{cases}$ $\begin{cases} y=0 \\ x=\pm 1/\sqrt{2} \end{cases}$ $\begin{cases} y=mx \\ (2-3m^2)x^2=1 \end{cases}$

se $(2-3m^2)\neq 0$ $x^2=\frac{1}{2-3m^2}$ $\exists$ sol $\Leftrightarrow$ $-\sqrt{\frac{2}{3}}<m<\sqrt{\frac{2}{3}}$

per questi valori ho intersezione, $y=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$ asintoti

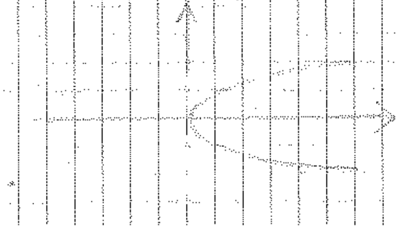
2) non è limitata
3) ha un centro di simmetria $((0,0))$
4) ha due assi di simmetria
5) ha due asintoti
6) è sempre a punti reali

È il luogo dei punti del piano la cui differenza delle distanze da due punti detti fuochi è costante $\{P : |d(P,F_1)-d(P,F_2)|=c\}$

③ PARABOLA $by^2+dx=0$ oppure $ax^2+ey=0$ $b,d \neq 0$ $a,e \neq 0$

$B=\begin{bmatrix} 0 & 0 & d/2 \\ 0 & b & 0 \\ d/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\det(B)=-\frac{bd^2}{4}$ $\det(A)=0$

ESEMPIO: $3y^2=x$



25/05/12

XXII LEZIONE:

1) $3x^2+2xy+3y^2-8=0 \quad \Gamma$

PROBLEMA 1.

Dare un criterio per riconoscere Γ.

PROBLEMA 2.

Costruire una rotazione e/o una traslazione per portare Γ in forma canonica (Costruire un nuovo sistema di riferimento $(Ox'y')$).

PROBLEMA 3.

Scrivere Γ in una forma canonica senza calcolare la rototraslazione.

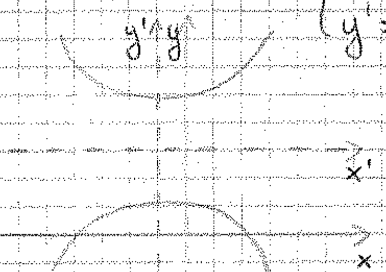
PROBLEMA 2.

I CASO: nell'equazione della conica non compare xy (termine misto)

$\Rightarrow$ basta una traslazione per trovare la forma canonica usando il completamento dei quadrati.

$\Gamma: x^2-2y^2+2x+12y=0 \quad (x+1)^2-1-2(y-3)^2+18=0 \quad (x+1)^2-2(y-3)^2+17=0$

è un'iperbole $\quad \begin{cases} x'=x+1 \\ y'=y-3 \end{cases} \quad x'^2-2y'^2+17=0$



$\begin{cases} x=x'-1 \\ y=y'+3 \end{cases}$

II CASO: nell'equazione della conica compare xy

$\Rightarrow$ occorre usare una rotazione per eliminare xy e poi applico I caso

$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0 \quad \Gamma$

$(x\ y)\, A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+dx+ey+f=0$ essendo $A={}^tA \Rightarrow A$ si diagonalizza con N ortogonale: ${}^tNAN=D$

Posso sempre scegliere N con $\det(N)=1$, cambiando eventualmente segno ad un autovettore (colonna) in modo da rimanere nello stesso autospazio.

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=N\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ rotazione

Sostituendo in Γ $\quad (x'\ y')\,{}^tNAN\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}+d'x'+e'y'+f'=0$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 83 di 114

$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + f' = 0$

λ_1 e λ_2 sono gli autovalori di A

$$\det(A - tI) = \begin{bmatrix} 3-t & 1 \\ 1 & 3-t \end{bmatrix} = (3-t)^2 - 1 = t^2 - 6t + 8 = 0 \quad t = \begin{cases} 2 \\ 4 \end{cases} \quad \lambda_1 = 4 \quad \lambda_2 = 2$$

$4x'^2 + 2y'^2 + f' = 0 \quad \det B' = 8f' = -64 = \det B \Rightarrow f' = -8$

Γ in forma canonica $4x'^2 + 2y'^2 - 8 = 0$ l'ellisse è reale

c) N ortogonale ($\det N = 1$)

$$E_4 = Ker(A - 4I) \quad \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad X = a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_1$$

$E_2 = \mathcal{L}((1,-1))$ siccome deve essere ortogonale c'è solo un vettore $\perp \underline{v}_1$

$$\underline{v}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt2}, \frac{1}{\sqrt2}\right) \quad \underline{v}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt2}, -\frac{1}{\sqrt2}\right) \quad N = \begin{bmatrix} 1/\sqrt2 & 1/\sqrt2 \\ 1/\sqrt2 & -1/\sqrt2 \end{bmatrix}$$

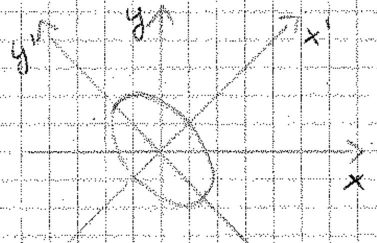
ma $\det(N) = -1 \Rightarrow$ cambio segno $N = \begin{bmatrix} 1/\sqrt2 & -1/\sqrt2 \\ 1/\sqrt2 & 1/\sqrt2 \end{bmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt2 & -1/\sqrt2 \\ 1/\sqrt2 & 1/\sqrt2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt2}x' - \frac{1}{\sqrt2}y' \\ y = \frac{1}{\sqrt2}x' + \frac{1}{\sqrt2}y' \end{cases}$$

sostituiamo in Γ $3\left(\frac{1}{\sqrt2}x' - \frac{1}{\sqrt2}y'\right)^2 + 2\left(\frac{1}{\sqrt2}x' - \frac{1}{\sqrt2}y'\right)\left(\frac{1}{\sqrt2}x' + \frac{1}{\sqrt2}y'\right) + 3\left(\frac{1}{\sqrt2}x' + \frac{1}{\sqrt2}y'\right)^2 - 8 = 0$

$\frac{3}{2}(x'^2 + y'^2 - 2x'y') + (x'^2 - y'^2) + \frac{3}{2}(x'^2 + y'^2 + 2x'y') - 8 = 0$

$4x'^2 + 2y'^2 - 8 = 0$



posso trovare gli assi sia guardando gli autovettori sia l'angolo $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$

il vettore (1,0) mi da la direzione di x'

$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt2 & -1/\sqrt2 \\ 1/\sqrt2 & 1/\sqrt2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt2 \\ 1/\sqrt2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

QUADRICHE

DEFINIZIONE: Una quadrica è il luogo dei punti che soddisfano un'equazione di 2° grado in x, y z.

$$\Gamma = \{(x,y,z) \mid ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + kz + l = 0\}$$

Essendo una sola equazione è una superficie.

PROPRIETÀ: 1) $O(0,0,0)$ è centro di simmetria
$(x_0, y_0, z_0) \in \Gamma \Rightarrow (-x_0, -y_0, -z_0) \in \Gamma$
2) ha tre assi coordinati e sono assi di simmetria
$(x_0, y_0, z_0) \in \Gamma \Rightarrow (-x_0, -y_0, z_0) \in \Gamma$
3) ha tre piani coordinati e sono piani di simmetria
$(x_0, y_0, z_0) \in \Gamma \Rightarrow (x_0, y_0, -z_0) \in \Gamma$

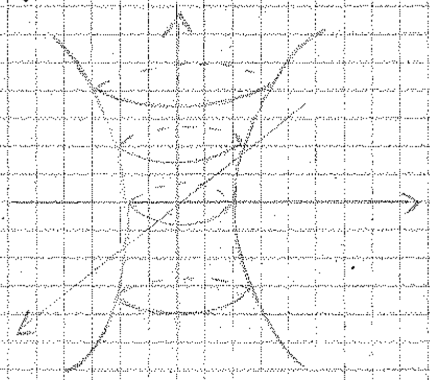
$\begin{cases} z = h \\ 9x^2 + y^2 = 1 - 4h^2 \end{cases}$ piani // $z=0$ interseco $\Rightarrow$ per $1-4h^2 \geq 0$ $\quad -\frac{1}{2} \leq h \leq \frac{1}{2}$

per quei valori di h trovo delle ellissi, per $h = \pm\frac{1}{2}$ trovo un solo punto

IPERBOLOIDE IPERBOLICO (1° falda)
$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = \delta$

$\alpha, \beta, \delta > 0 \quad \gamma < 0$ uno tra α, β, γ è < 0 gli altri sono positivi

$4x^2 + y^2 - 9z^2 = 1$



Valgono le stesse proprietà (1), (2), (3).

$\begin{cases} z = h \\ 4x^2 + y^2 = 1 + 4h^2 \end{cases} \Rightarrow$ sono ellissi $\forall h$

Intersecando con piani // x, y si ottengono delle iperboli.

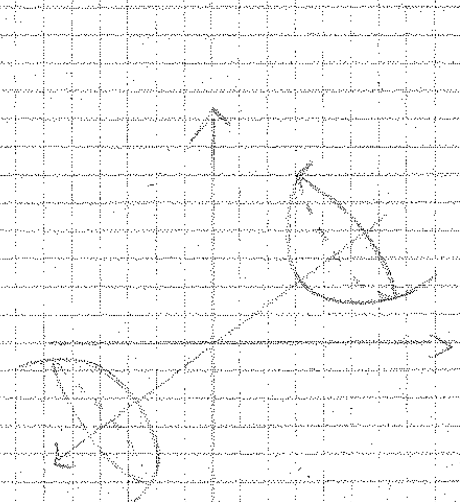
IPERBOLOIDE ELLITTICO (2° falde)
$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = \delta$

$\alpha, \delta > 0 \quad \beta, \gamma < 0$ due tra α, β, γ sono < 0

$4x^2 - y^2 - 9z^2 = 1$

Valgono le stesse proprietà (1), (2), (3).

$\begin{cases} x = h \\ 4h^2 - 1 = y^2 + 9z^2 \end{cases} \Rightarrow$ sono ellissi per $h \leq -\frac{1}{2} \vee h \geq \frac{1}{2}$



Intersecando con piani // y, z si ottengono delle iperboli.

Il cono è un'equazione omogenea di 2° grado

$P(x_0, y_0, z_0) \in \Gamma \qquad 3x_0^2 + y_0^2 - z_0^2 = 0$

retta per O e P $\begin{cases} x = 0 + x_0 t \\ y = 0 + y_0 t \\ z = 0 + z_0 t \end{cases}$

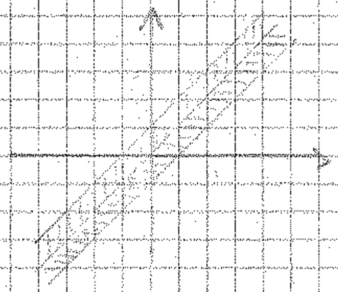
$3(x_0 t)^2 + (y_0 t)^2 - (z_0 t)^2 = 0 \qquad t^2 \underbrace{(3x_0^2 + y_0^2 - z_0^2)}_{=0 \text{ per Hp.}} = 0 \quad \Rightarrow 0 = 0 \ \forall t$

cioè la retta è tutta nel cono.

CILINDRI (vedi quad esercitazioni)

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 89 di 114

2) $\{(x,y) \mid |y-x| \leq 1\}$



$\begin{cases} y-x \geq 0 \\ y-x \leq 1 \end{cases}$ $\begin{cases} y=x \\ y=x+1 \end{cases}$ I CASO

$\begin{cases} y-x \leq 0 \\ -y+x \leq 1 \end{cases}$ $\begin{cases} y=x \\ y=x-1 \end{cases}$ II CASO

Punti Interni: quelli dentro
Punti di frontiera: rette $y=x+1$, $y=x-1$
Punti di accumulazione: tutti

DEFINIZIONI: $U \in \mathbb{R}^2$

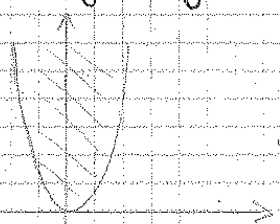
1) U si dice APERTO se $\forall \underline{\tilde{x}} \in U$ $\underline{\tilde{x}}$ è interno
2) U si dice CHIUSO se U^c è aperto ($\Leftrightarrow U$ contiene tutti i suoi punti di accumulazione)
3) U è LIMITATO se $\exists B(\underline{0}, \delta) : U \subseteq B(\underline{0}, \delta)$
2)+3) U è COMPATTO se è chiuso e limitato
4) U è CONNESSO PER ARCHI se $\forall \underline{x}_1, \underline{x}_2 \in U$ $\exists$ una curva che congiunge $\underline{x}_1$ e $\underline{x}_2$ tutta contenuta in U.

OSSERVAZIONE: $\mathbb{R}^2$ è aperto, è connesso per archi, non è limitato
$\Rightarrow \phi$ è chiuso ma ϕ è anche aperto $\Rightarrow \mathbb{R}^2$ è chiuso

OSSERVAZIONE: $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) \lessgtr 0\} \Rightarrow A$ è aperto
anche unioni infinite di insiemi di questo tipo sono aperti
$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) \lesseqqgtr 0\} \Rightarrow C$ è chiuso
unione finita di chiusi è chiusa

ESEMPI:

1) Calcolare il dominio delle seguenti funzioni e dare le proprietà topologiche.
a. $f(x,y) = \sqrt{y-2x^2}$



C.E. $y-2x^2 \geq 0$
$y = 2x^2$

Il dominio è chiuso, non è limitato, è connesso per archi.

01/06/12

XXIV LEZIONE:

LIMITI
- coordinate cartesiane
  - provando curve diverse
    - limiti $\neq$ $\nexists$
    - limiti $=$?
  - provare che $\exists$ usando delle disuguaglianze
- coordinate polari $\lim_{\rho \to 0} f(\rho, \alpha)$
  - dipende da α $\Rightarrow$ $\nexists$
  - non dipende da α $\Rightarrow$ $\exists$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\alpha \\ y = \rho\sin\alpha \end{cases} \quad \rho > 0$$

ESEMPIO:

1) $f = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ sostituisco con coordinate polari

$\lim_{\rho \to 0} \dfrac{2\rho^2\cos\alpha\sin\alpha}{\rho^2} = 2\cos\alpha\sin\alpha$ dipende da α $\Rightarrow$ limite $\nexists$

2) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{|x|+|y|}$

in coordinate polari $\lim_{\rho\to 0} \dfrac{\rho^2}{|\rho\cos\alpha| + |\rho\sin\alpha|} = \lim_{\rho \to 0} \dfrac{\rho^{\cancel{2}}}{\cancel{\rho}(|\cos\alpha| + |\sin\alpha|)} = 0 \quad \forall \alpha$

in coordinate cartesiane $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2+m^2x^2}{|x|+|mx|} = \lim_{x\to 0} \dfrac{x^2(1+m^2)}{|x|(1+|m|)} = \lim_{x\to 0}\dfrac{|x|(1+m^2)}{(1+|m|)} = 0$

in questo caso non posso dire niente

dimostro che esiste: $0 \leq \dfrac{x^2+y^2}{|x|+|y|} = \dfrac{x^2}{|x|+|y|} + \dfrac{y^2}{|x|+|y|} \leq \dfrac{x^2}{|x|} + \dfrac{y^2}{|y|} = |x| + |y| \to 0$

$\Rightarrow$ per teorema confronto $f(x,y) \to 0$

DEFINIZIONE: $f: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, (x_0, y_0) interno a U

f è CONTINUA in (x_0,y_0) se $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$

ESEMPIO:

1) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{|x|+|y|} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ $\Rightarrow$ è continua in $(0,0)$

2) $f(x,y) = e^{x^2} + y + \cos\sqrt{x^2+y^2}$ è continua in $\mathbb{R}^2$

TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI

U compatto e connesso per archi

$f \in \mathcal{C}^0(U)$, sia x_m minimo assoluto con $f(x_m) = m$

x_M massimo assoluto con $f(x_M) = M$

$\Rightarrow Im f = [m, M]$ (f assume tutti i valori tra m e M)

DIMOSTRAZIONE: U connesso per archi $\Rightarrow \exists\, g : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ continua tale che

$g(a) = x_m$ e $g(b) = x_M$

compongo f con g: $f(g(t)) : [a,b] \to \mathbb{R}$

una composizione di funzioni continue è continua va da

$[a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ vale teorema dei valori intermedi di Analisi I

$Im(f \circ g) = [m, M]$ ma $Im(f \circ g) \subseteq Im f \subseteq [m, M]$

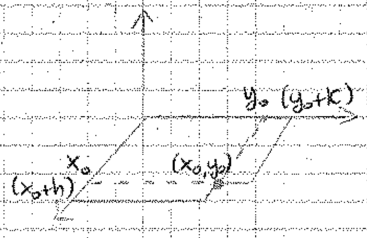
DERIVATE PARZIALI

$f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad (x_0, y_0)$ interno a U

se $\exists$ finito $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = f'_x(x_0, y_0)$ DERIVATA PARZIALE di f RISPETTO A X in (x_0, y_0)

$f'_x \quad \dfrac{\partial f}{\partial x}$ oppure $f'_y \quad \dfrac{\partial f}{\partial y}$

se $\exists$ finito $\lim_{k \to 0} \dfrac{f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0)}{k} = f'_y(x_0, y_0)$ DERIVATA PARZIALE di f RISPETTO A Y



ESEMPIO:

1) $f(x,y) = xy^2$

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{(x_0+h)y_0^2 - x_0 y_0^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h y_0^2}{h} = y_0^2$$

$\Rightarrow f'_x(x,y) = y^2 \qquad f'_y(x,y) = 2xy$

DERIVATE SUCCESSIVE

$f(x,y) = \cos x + y \cdot e^x + x^3$

$f_x = -\operatorname{sen} x + y e^x + 3x^2 \qquad f_y = e^x$

$f_x \nearrow \frac{\partial}{\partial x}(f_x) = f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

$f_x \searrow \frac{\partial}{\partial y}(f_x) = f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ più a destra si trova la variabile derivata per prima

$f_{xx} = -\cos x + y e^x + 6x \qquad f_{yx} = e^x$

$f_y \nearrow \frac{\partial}{\partial x}(f_y) = f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \qquad f_{xy} = e^x$

$f_y \searrow \frac{\partial}{\partial y}(f_y) = f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \qquad f_{yy} = 0$

TEOREMA DI SCHWARTZ

$f: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ sono continue $\Rightarrow$ sono uguali

In 1 variabile

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad x_0$ interno al Dominio

g è derivabile in $x_0 \iff \lim_{h \to 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} = g'(x_0)$

$\iff \lim_{h \to 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0) - g'(x_0)h}{h} = 0 \qquad x = x_0 + h \qquad h = x - x_0$

$\iff \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0) - g'(x_0)(x-x_0)}{x - x_0} = 0$

In 2 variabili

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad (x_0, y_0)$ interno al Dominio

f è differenziabile in $(x_0,y_0) \iff$ (a) $\exists\ f_x(x_0,y_0),\ f_y(x_0,y_0)$

(b) $\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) - f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} =$

PROPOSIZIONE: Se f è differenziabile in $(x_0,y_0) \Rightarrow f$ è continua in (x_0,y_0)

DIMOSTRAZIONE: vale (b) e siccome il denominatore tende a 0 anche il numeratore deve tendere a 0 poiché se tendesse ad un numero andrebbe a ∞.