NUMERO : 390

DATA : 17/10/2012

A P P U N T I

STUDENTE : Ventroni

MATERIA : Analisi Matematica II
Prof. Mazzi

Analisi 2

LUN 11.30 - 13.00 aula 3
MAR 14.30 aula 7S
GIO 8.30 aula 3
VEN 11.30 - 13.00 aula 3

http://calvino.polito.it/~mazzi/
esame scritto + orale

Topologia di $\mathbb{R}^n$

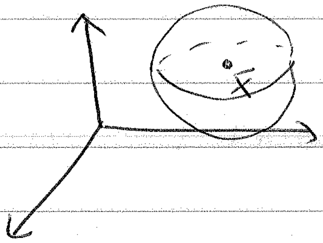
$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n\}$
$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ = piano
$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ = spazio
Su questi spazi si può definire una
distanza $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
$(X, Y) \longmapsto$ distanza fra i due p

PROP:
1) $\operatorname{dom} d = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ (TUTTO lo spazio)
2) $d(X,Y) = d(Y,X) \quad \forall X,Y \in \mathbb{R}^n$
3) $d(X,Y) \geq 0 \quad \forall X,Y \in \mathbb{R}^n$
4) $d(X,Y) = 0 \iff X = Y$
5) DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE
$\forall X, Y, Z$
$d(X,Y) \leq d(X,Z) + d(Z,Y)$

Tutti gli spazi in cui si può def. una distanza sono detti "spazi metrici"

DISTANZA EUCLIDEA
- se $n = 1$ (sono su $\mathbb{R}$)

• $n = 3$ $\{x \in \mathbb{R}^3 : d(x, \bar{x}) < \rho\}$ (sfera) senza contorno 3D



Insiemi di $\mathbb{R}^n$

$A \subseteq \mathbb{R}$

DEF. preso un pto $\bar{x}$ di A, $\bar{x}$ è interno ad A se oltre ad essere cont. in A, esiste un intorno di $\bar{x}$ contenuto in A.

$\bar{x} \in A$, $\bar{x}$ è int. ad A se
$$\exists B(\bar{x}, \rho) \ (\exists \rho > 0) : B(\bar{x}, \rho) \subseteq A$$

DEF: un insieme A è aperto in $\mathbb{R}^n$ se tutti i suoi punti sono interni ad A.

- gli intorni sono insiemi aperti.

es. un rettangolo preso in $\mathbb{R}^2$ è un insieme aperto mentre in $\mathbb{R}^3$ no, xke è una sfera.

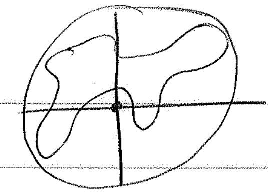
DEF. un punto $\bar{x}$ è di frontiera per A se ogni intorno interseca sia l'insieme A che il suo complementare.

- se $\forall B(\bar{x}, \rho)$ $\quad B(\bar{x}, \rho) \cap A \neq \phi$
$$B(\bar{x}, \rho) \cap \complement A \neq \phi$$

$\complement A = (\mathbb{R}^n \setminus A) = \{x \in \mathbb{R}^n : x \notin A\}$

↑

complem. di A

Insieme limitato in $\mathbb{R}^n$ se 

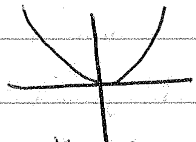
$\exists M>0 : A \subseteq \overset{\text{sfera}}{B}(0,M)$

o $\exists M>0 : x\in A \Rightarrow \|x\| = d(x,0) < M$

Se A non è limitato si dice che A è illimitato.

$\forall M>0 \quad \exists x \in A : \|x\| > M$

es.

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$ 

questo insieme è illimitato xkè qualsiasi sfera prendo ci sono punti della parabola che stanno fuori dalla sfera.

$\|x\| \to +\infty$

la norma (dist. dall'origine tende a $+\infty$)

Da $\mathbb{R}^2$ in poi non si può + parlare di insiemi limitati superiormente o inferiormente.

Un insieme $K \subseteq \mathbb{R}^n$ è compatto se è chiuso e limitato

- $\partial K \subseteq K$ chiuso
- limitato

TEO. di Weierstrass

$F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ continua su K compatto

$\Rightarrow$ allora F ha max e min assoluti su K

cioè $\exists \underline{x}, \bar{x} : \forall x \in K, \; F(\underline{x}) \le F(x) \le F(\bar{x})$

min max

TEO: degli zeri

$F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ cont su K compatto

$f(a) \cdot f(b) < 0$

$\Rightarrow$ la funzione ammette degli zeri oss. se un insieme ha punti di accumulazione questo insieme non può essere finito.

CALCOLO DIFFERENZIALE

$F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

F è continua in $\bar{x} \in \text{dom}F$ se

$\forall B(F(\bar{x}), \varepsilon) \; \exists B(\bar{x}, \delta)$

$x \in B(\bar{x}, \delta) \cap \text{dom}F \Rightarrow F(x) \in B(F(\bar{x}), \varepsilon)$

o si può dire anche che

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad x \in \text{dom}F$

e $\|x - \bar{x}\| = d(x, \bar{x}) < \delta$

$\Rightarrow \|F(x) - F(\bar{x})\| = d(F(x), F(\bar{x})) < \varepsilon$

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$F(x_1, \dots, x_n) = (F_1(x_1 \dots x_n), \dots, F_n(x_1 \dots x_n))$

TEO: F è cont. in $\bar{x} \Leftrightarrow F_1, \dots, F_n$ sono continue in $\bar{x}$

DERIVATA

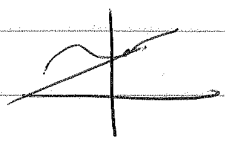
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\bar{x}$ interno a dom f

se $\exists$ finito

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(\bar{x}+h) - f(\bar{x})}{h}$$

allora il lim $= f'(x) \leftarrow$ coef. ang. della retta Tg.



per le funzioni di + variabili la formula della differenziabilità cambia:

f è differenziabile in $\bar{x}$ se $\exists$ un'applicazione lineare $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ t.c. $F(x) - F(\bar{x}) = L(x - \bar{x}) + o(\| x - \bar{x} \|)$ per $x \to \bar{x}$

numero

$L = (l_1, \dots, l_n)$

TEO: se f è differenziabile in un punto $\bar{x}$ valgono le proprietà:

1. f è continua in $\bar{x}$ (cosa non vera se $\exists$ solo le derivate)
2. $\exists$ le derivate parziali in $\bar{x}$
   $\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}) \ \forall i = 1, \dots, n$
3. $\forall \vec{v}$ vers., $\exists \frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x}) = \nabla f(\bar{x}) \cdot \vec{v}$

in 2 variabili se ho $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ $x_3 = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \nabla f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \cdot (x_1 - \bar{x}_1, x_2 - \bar{x}_2) =$

$=$ eq. del piano tg al grafico di f in $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, f(\bar{x}_1, \bar{x}_2))$

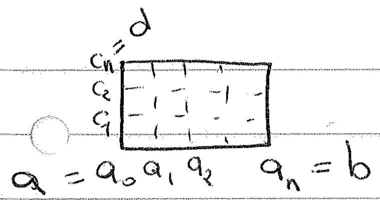
4. $L = \underset{\text{GRADIENTE}}{\nabla f(\bar{x})}$

$F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto (f(x_1 \dots x_n), \dots, F_n(\dots))$

$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\bar{x}) \quad \forall i = 1, \dots, m \quad \forall j = 1, \dots, n$

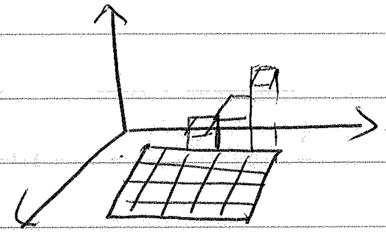
$$\underset{m \times n}{J_{\bar{x}} F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}) \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\bar{x}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\bar{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f_1(\bar{x}) \\ \vdots \\ \nabla f_m(\bar{x}) \end{pmatrix}$$



$R_{ij} = [a_i, a_{i+1}) \times [c_j, c_{j+1})$

$f(x,y) = c_{ij}$ ← valore della f. sul rettangolino

$(x,y) \in R_{ij}$



Come si definisce l'integrale di questa f. a scala sul rettangolo?

$$\iint_R f = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i)(c_{j+1} - c_j) \, R_{ij}$$

f limitata su R (rettangolo)

$H^+ = \{ h$ a scala su R : $f(x,y) \leq h(x,y)$

H^+ = maggioranti a scala.

$H^- = \{ g$ a scala su R , $g(x,y) \leq f(x,y) \}$

H^- = minoranti a scala

f limitata su un rettangolo R ⟹ ha sup e inf ⟹ c'è sempre ~~nessuno~~ almeno una f. a scala.

$$h(x,y) = \underset{\uparrow \atop \sup}{M} \in H^+ \qquad g(x,y) = \underset{\uparrow \atop \inf}{m} \in H^-$$

$$\iint_R h \geq \iint_R g \qquad h \in H^+, \; g \in H^-$$

$$\inf \left\{ \iint_R h \,,\, h \in H^+ \right\} = \overline{\int_R} f \quad \text{(integrale superiore di } f \text{ su } R\text{)}$$

$$\sup \left\{ \iint_R g \,,\, g \in H^- \right\} = \underline{\int_R} f \quad \text{(integrale inferiore di } f \text{ su } R\text{)}$$

$$\overline{\int_R} f \geq \underline{\int_R} f \qquad \forall f \text{ limitata su } R$$

- tutte le funzioni continue sono integrabili esempio:

$f(x,y) = \cos(x+y)$

$(x,y) \in [0,\pi/4] \times [0,\pi/2]$

$$\int_0^{\pi/4} \left(\int_0^{\pi/2} \cos(x+y)\,dy \right) dx = ?$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos(x+y)\,dy = \int_x^{x+\frac{\pi}{2}} \cos t\,dt = \sin T \Big]_x^{x+\frac{\pi}{2}} =$$

$T_y = x+y$

$dt = \frac{\partial}{\partial y}(x+y)dy = dy$

$y=0 \Rightarrow t = x$

$y = \frac{\pi}{2} \rightarrow t = x+\frac{\pi}{2}$

$$= \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) - \sin x$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x+y)dy \right) dx = \int_0^{\pi/4} \left[\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) - \sin x\right] dx =$$

$$= -\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) + \cos x \Big]_0^{\pi/4} = -\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right) - \cos\frac{\pi}{4} + \cancel{\cos\frac{\pi}{2}}^{\,0} - \cos 0 =$$

$$= -\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = \sqrt{2} - 1$$

esempio:

$f(x,y) = xe^{xy}$ $\quad (x,y) \in [0,1] \times [0,2]$

$$\int_0^2 \left(\int_0^1 xe^{xy}\,dx \right) dy = \int_0^1 \left(\int_0^2 xe^{xy}\,dy \right) dx$$

$$\int_0^1 \left(\int_0^2 xe^{xy}\,dy \right) dx = ?$$

$$\int_0^2 x e^{xy}\,dy = x \int_0^2 e^{xy}\,dy = \int_0^{2x} e^t\,dt =$$

$t_y = xy$

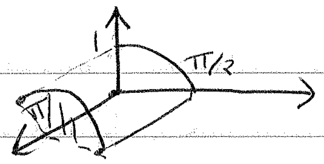
$dt_y = x\,dy$

$y=0 \rightarrow t=0$

$y=2 \rightarrow t = 2x$

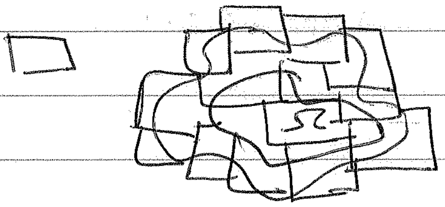
$$= e^t \Big]_0^{2x} = e^{2x} - 1$$

$= \pi \cdot 1 = \pi$



Insiemi misurabili (secondo Peano-Jordan) e integrali di Riemann

posso immaginare di calcolare l'area di una figura piana di forma non nota sovrapponendo dei rettangoli e calcolandone l'area x eccesso.



Per ogni insieme limitato lo posso coprire con "piastrelle rettangolari" in infiniti modi. Prendo l'insieme numerico dato dalle aree di ke

R = insieme delle aree dei rett.

$\inf\{\text{Area}(R),\ R = \text{unione dei rett. t.c. } \Omega \subseteq R$

↑ ins. limitato.

Poi prendo tutti gli r (unione di rettangoli) contenuti in Ω e calcolo l'area delle piastrellature che non coprono tutto l'insieme.

$\sup\{\text{area}(r),\ r = \text{unione dei rett. t.c. } r \subseteq \Omega$

Faccio l'estremo inf. e sup. in modo da approssimare x eccesso e dif.

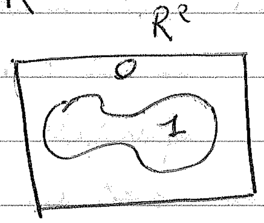
$A(r) \leq A(R) \Rightarrow \sup\{\text{area}(r)\} \leq \inf\{\text{area}(R)\}$

$\sup\{\text{area}(r)\}$ = misura inferiore di omega

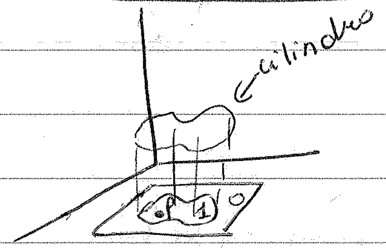
$\inf\{\text{area}(R)\}$ = misura superiore di Ω

$\exists$istono sempre se l'insieme iniziale non è vuoto.

TEO: Ω misurabile, Rettangolo t.c. $\Omega \leq R$
definisco la funz. caratteristica χ_Ω



$$\chi_\Omega = \begin{cases} 1 & \text{su } \Omega \quad (\text{se } x \in \Omega) \\ 0 & x \in \Omega \quad (\text{fuori da } \Omega) \end{cases}$$



$$0 \leq z \leq \chi(\Omega)$$
$$(x,y) \in \Omega$$

Ω misurabile $\Longleftrightarrow$ χ_Ω è Riem. Integrabile su R x ogni rett. che contiene Ω.

$$\int_R \chi_\Omega = \text{Volume cilindro} = |\Omega|$$

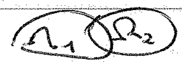
PROPRIETA' DEGLI INSIEMI MISURABILI

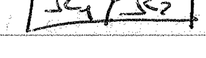
Considero 2 insiemi misurabili Ω_1 e Ω_2

① se $\Omega_1 \subseteq \Omega_2 \Rightarrow |\Omega_1| \leq |\Omega_2|$

② se Ω_1, Ω_2 misurabili (x ipotesi) $\Rightarrow \Omega_1 \cup \Omega_2$, $\Omega_1 \cap \Omega_2$ sono mis.

$|\Omega_1 \cup \Omega_2| = |\Omega_1| + |\Omega_2| = \text{Area}(\Omega_1) + \text{Area}(\Omega_2) - |\Omega_1 \cap \Omega_2|$



Se Ω_1 e Ω_2 hanno in comune solo un segmento


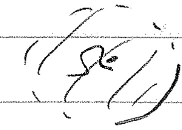
$\Rightarrow |\Omega_1 \cup \Omega_2| = |\Omega_1| + |\Omega_2|$

PROP. Preso Ω misurabile $\Rightarrow$ l'insieme dei pti interni e la chiusura di Ω sono misurabili.

$\Rightarrow$ 1. $\mathring{\Omega}$, $\overline{\Omega}$ sono "

$\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$

2. $\mathring{\Omega} \subseteq \tilde{\Omega} \subseteq \overline{\Omega}$



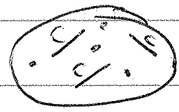
($\tilde{\Omega}$ è un insieme che contiene tutto l'interno + un pezzetto del bordo in pst. esempio)

$\Rightarrow \tilde{\Omega}$ è misurabile e $|\mathring{\Omega}| = |\tilde{\Omega}| = |\overline{\Omega}|$

Per ogni rettangolo che contiene Ω l' $\int_R \tilde{f}$ è uguale

funzioni sicuramente integrabili:
1. continue.
2. Se f è continua su $\Omega \setminus C$, dove C è un sottoins. di Ω di misura nulla $\Rightarrow$ f è int su Ω

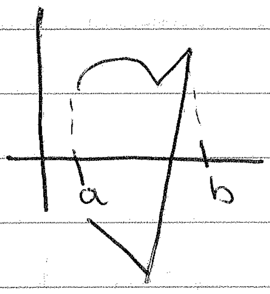
es. insieme unione di segmenti (misura nulla)



Insieme verticalmente convesso

Un ins. vert. conv. è un insieme in cui la x varia fra due numeri e la y varia fra 2 f. entrambe continue.

$\{ a \leq x \leq b, \quad g_1(x) \leq y \leq g_2(x), \quad g_1, g_2 \text{ cont} \}$

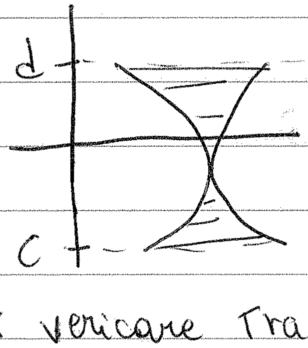


la y varia su un segmento

Insieme orizzontalmente convesso

Un insᵉ orizz. conv. se la y varia fra 2 n° c e d e la x varia fra due funzioni h_1 e h_2

$\{ c \leq y \leq d, \quad h_1(y) \leq x \leq h_2(y), \quad h_1, h_2 \text{ cont} \}$



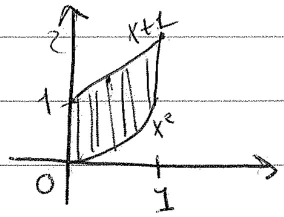
x verificare tracciare le linee e verificare quante intersez.

nel 1° caso si parla di "integrazione x verticali" e
nel 2° caso " " x orizzontali"
Nel caso di insiemi sia vert. che orizz. int scelgo rispetto a quale variabile integrare prima x comodità.

ESEMPIO:

$f(x,y) = 2xy$

$\Omega = \{(x,y) : 0 \le x \le 1 ,\ x^2 \le y \le x+1\}$



$$\int_\Omega f = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{x+1} (2xy)\,dy \right) dx$$

$$\int_{x^2}^{x+1} (2xy)\,dy = \frac{\cancel{2}xy^2}{\cancel{2}}\Big]_{x^2}^{x+1} = x(x+1)^2 - x(x^2)^2 = x(x^2+1+2x) - x^5 =$$

$$= x^3 + x + 2x^2 - x^5 = \cancel{2x}+x^3+2x^2+x-x^5$$

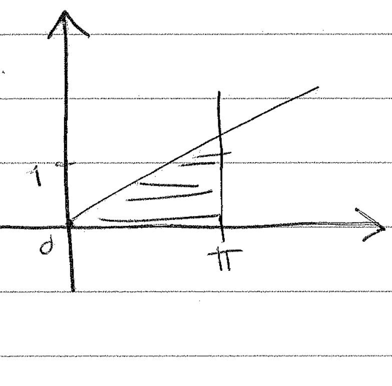
$$\int_\Omega f = \int_0^1 (2x^2+x+x^3-x^5)\,dx = \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^6}{6}\Big]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{3+8+6-2}{12} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$$

ESEMPIO

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & x \ne 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

$\Omega = \{(x,y) : 0 \le y \le 1 ,\ \pi y \le x \le \pi\}$



PROPRIETÀ DEGLI INTEGRALI

f, g integrabili su Ω misurabile

① linearità $\rightarrow f+g,\ \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha f$ sono integrabili

- $\int_\Omega (f+g) = \int_\Omega f + \int_\Omega g$
- $\int_\Omega \alpha f = \alpha \int_\Omega f$

$\iff \int_\Omega (\alpha f + g) = \alpha \int_\Omega f + \int_\Omega g$

② positività $\rightarrow$ se $f \geq 0$ su $\Omega \setminus C$, $|C| = 0 \Rightarrow \int_\Omega f \geq 0$

$\int_\Omega f$ = Volume della parte di spazio t.c. $0 \leq z \leq f(x,y)$ e $(x,y) \in \Omega$

- se $f \geq 0$ su Ω, $|\Omega| \neq 0$ e f è continua su Ω

$\Rightarrow \int_\Omega f = 0 \iff f = 0$ su Ω

③ Confronto $\rightarrow$ se $f \leq g$ su $\Omega \setminus C$, $|C| = 0$

$\Rightarrow \int_\Omega f \leq \int_\Omega g$

DIM: $g - f \geq 0$

$\int_\Omega g - f \geq 0 \Rightarrow \int_\Omega g - \int_\Omega f \geq 0 \Rightarrow \int_\Omega g \geq \int_\Omega f$

④ Se f è integrabile su Ω misurabile $\Rightarrow \overset{\text{modulo}}{|f|}$ è int su Ω

e $\left|\int_\Omega f\right| \leq \int_\Omega |f|$ = volume

$0 \leq z \leq f(x,y)$ se $f(\cancel{x})>0$

$f(x,y) \leq z \leq 0$ se $f(x,y) < 0$

TEO Media integrale $\rightarrow$

$\rightarrow \Omega$ convesso e misurabile

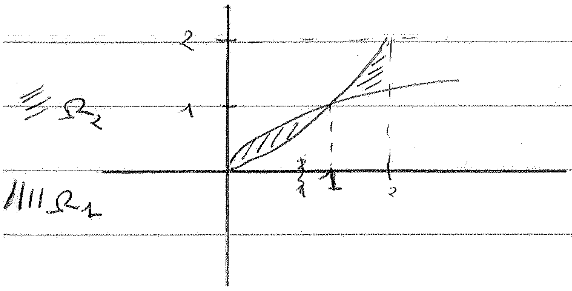
$m = \inf_{(x,y) \in \Omega} f(x,y)$ $\qquad$ $M = \sup_{(x,y) \in \Omega} f(x,y)$

$\int_a^b f = -\int_b^a f$

x semplificare i calcoli

$f(x,y) = x+2y$

$\Omega = \{$parte di piano compresa fra $y = x^2$ e $y=\sqrt{x}$ con $x \in [0,2]\}$



$\Omega_1 = \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ x^2 \le y \le \sqrt{x} \end{cases}$

$\Omega_2 = \begin{cases} 1 \le x \le 2 \\ \sqrt{x} \le y \le x^2 \end{cases}$

$\Omega_1 \cap \Omega_2 = \{(1,1)\}$ ha misura nulla

$\int_{\Omega} (x+2y) = \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} x+2y = \int_{\Omega_1} (x+2y) + \int_{\Omega_2} (x+2y) =$

$\int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x+2y)\,dy = xy + \frac{2y^2}{2}\Big]_{x^2}^{\sqrt{x}} =$

$= x\sqrt{x} + (\sqrt{x})^2 - x \cdot x^2 - x^4 =$

$= x\sqrt{x} + x - x^3 - x^4$

$= \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x+2y)\,dy \right) dx + \int_1^2 \left(\int_{\sqrt{x}}^{x^2} (x+2y)\,dy \right) dx =$

$= \int_0^1 (x\sqrt{x} + x - x^3 - x^4)\,dx + \int_1^2 (x^4 + x^3 - x - x\sqrt{x})\,dx =$

$= \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\Big]_0^1 + \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\Big]_1^2 =$

$= \frac{2}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{32}{5} - \frac{1}{5} + \frac{16}{4} - \frac{1}{4} - \frac{4}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2^5}}{\frac{5}{2}} + \frac{\sqrt{1}}{\frac{5}{2}} =$

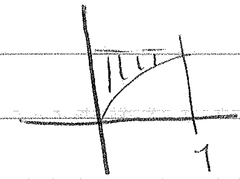
$= -\frac{2}{5} 4\sqrt{2} - 2 + 4 + \frac{32}{5} + \frac{2}{5} + \frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{4}} - \cancel{\frac{1}{5}} + \cancel{\frac{2}{5}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{4}} - \cancel{\frac{1}{5}} = -\frac{8}{5}\sqrt{2} \ldots$

$$= \int_{-1}^{0} \left(\frac{9y^3+9y+18y^2}{2} - \frac{y^3}{2} \right) dy = \left[4y^3 + 9y^2 + \frac{9}{2}y \right]_{-1}^{0} = +4 - 9 - \frac{9}{2}$$

$$= -3 + \frac{8}{3}$$

calcolare $f(x,y) = \operatorname{sen} y^3$

$\Omega = \{ 0 \leq x \leq 1, \sqrt{x} \leq y \leq 1 \}$



CAMBIAMENTO DI VARIABILI

$$f\ [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$\varphi(y) = x \uparrow \quad \uparrow \varphi$

$y \quad [c,d]$

$x = \varphi(y)$

φ di classe C^1

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(y)) \cdot \varphi'(y)\,dy$$

TEOREMA DELLA FUNZIONE INVERSA LOCALE

(DI INVERTIBILITA' LOCALE)

$F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

se F è lineare, e ho una base di $\mathbb{R}^n$

$\Rightarrow$ ad F si associa una matrice quadrata A $n \times n$

$F(x) = Ax$ è invertibile $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

e $F^{-1}(y) = A^{-1}(y)$

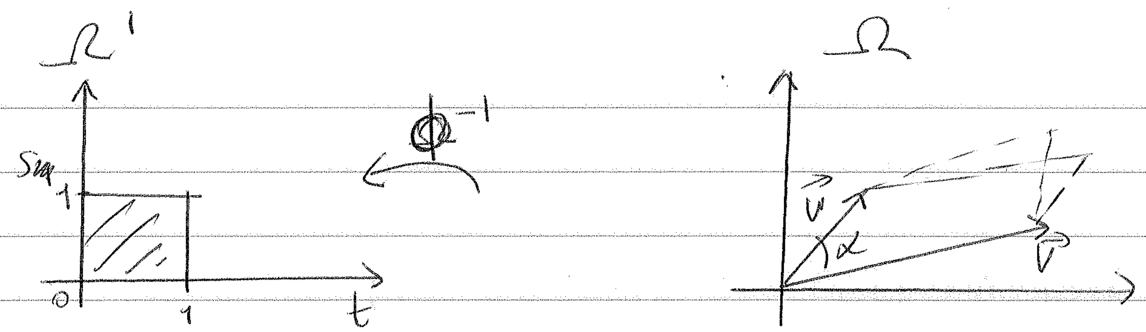
$J_x F$ (matrice Jacobiana di f in un pto) $= A \Leftrightarrow J_x F$ è invertibile $\forall x$

1. Φ è biunivoca (biiettiva); ad ogni pto di Ω corrisp un pto di Ω' e viceversa
2. Φ è di classe C^1 su $\mathring{\Omega}'$
3. $\forall P \in \mathring{\Omega}'$, $J_P\Phi$ è invertibile

si può dim che

1. $\Phi(\mathring{\Omega}') \subseteq \mathring{\Omega}$ ed è un insieme aperto
2. $\Phi(\partial\Omega') \subseteq \partial\Omega$ l'imm. del bordo di Ω' è cont in $\partial\Omega$
3. det $J\Phi$ ha lo stesso segno $\forall P \in \mathring{\Omega}'$
4. det $J\Phi$ è una f. continua $\Rightarrow$ vale il Teo. permanenza del segno.

$A \subseteq \Omega$, A misurabile
$\Rightarrow \Phi^{-1}(A) = A'$ misurabile



$$A(\Omega) = |\Omega| = |v| \cdot |w| |\operatorname{sen} \alpha| = |v \wedge w| = \det \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} = |v_1 w_2 - v_2 w_1|$$

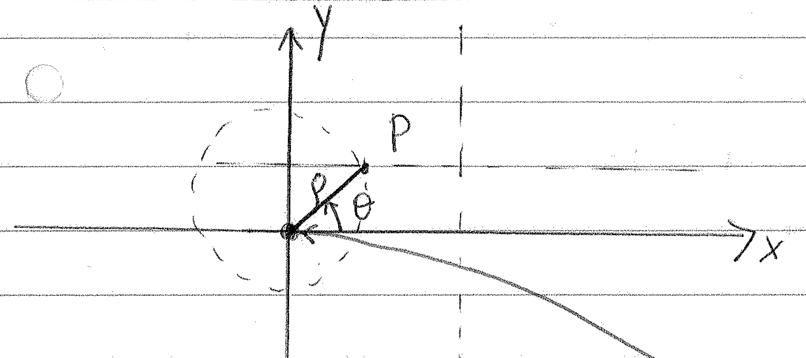
$$\int_{\Omega} 1\,dx\,dy = \int_{\Omega'} 1 \, |\det J\phi| \, ds\,dt$$

$$\| \quad |v_1 w_2 - v_2 w_1|$$

$$J\phi(s,t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial s} \\ \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix}$$

$$|\det J\phi(s,t)| = |v_1 w_2 - v_2 w_1|$$

CAMBIAMENTO DI VARIABILI IN COORDINATE POLARI

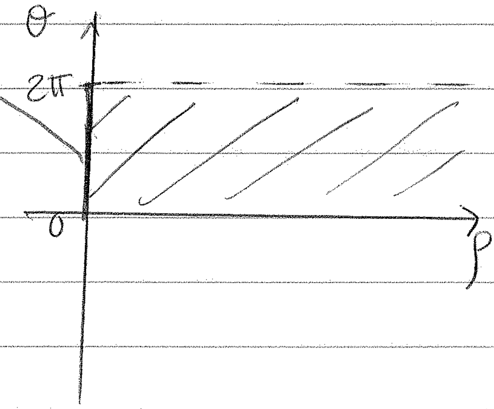


$0 \leq \theta \leq 2\pi$

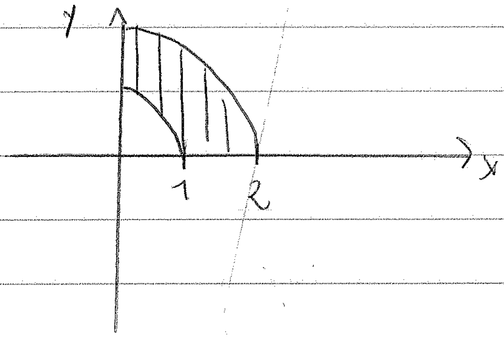
$\rho \geq 0$

se $\rho = 0$ la trasf non è biunivoca

la Trasf. prende il piano xy
e lo Trasf. in θ, ρ
dunque posso prendere coord.
polari xké lo o non mi
cambia nulla



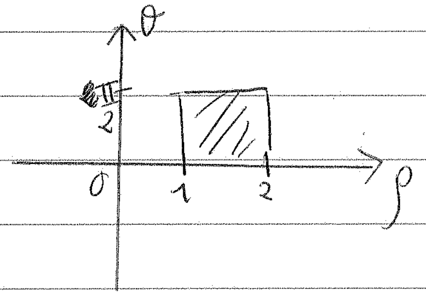
$\Omega = \{(x,y): 1 < x^2+y^2 < 4 \ , x>0, y>0\}$



se $0<x<1 \Rightarrow \sqrt{1-x^2} < y < \sqrt{4-x^2}$

se $1<x<2 \Rightarrow 0 < y < \sqrt{4-x^2}$

$\begin{cases} \sqrt{1} \le \rho \le \sqrt{4} \Rightarrow 1 \le \rho \le 2 \\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \end{cases} = \Omega'$ (dominio Ω' in coord polari)



$|\det J\phi|$

$$\int_\Omega \frac{xy^2}{x^2+y^2}\, dx dy = \int_{\Omega'} \frac{\rho\cos\theta \cdot \rho^2 \operatorname{sen}^2\theta}{\cancel{\rho^2}} \cdot \rho \, d\rho d\theta =$$

$$= \int_{\Omega'} \rho^3 \cos\theta \operatorname{sen}^2\theta \, d\rho d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\int_1^2 \underbrace{\rho^3}_{f(\rho)} \underbrace{\cos\theta \operatorname{sen}^2\theta}_{g(\theta)} d\rho \Big) d\theta =$$

Ω' = rettangolo.

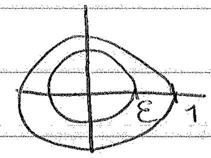
$$= \Big(\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2\theta \underbrace{\cos\theta \, d\theta}_{d(\operatorname{sen}\theta)} \Big) \cdot \Big(\int_1^2 \rho^2 d\rho \Big) = \Big(\frac{\operatorname{sen}^3\theta}{3} \Big]_0^{\pi/2} \Big) \cdot \Big(\frac{\rho^3}{3} \Big]_1^2 \Big) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \Big(\frac{8}{3} - \frac{1}{3} \Big) = \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{3} = \frac{7}{9}$$

$$\int_{\Omega} \log\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$$

f. non definita nell'origine quindi si può integrare solo in un dom. che non contiene l'origine.

$\Omega = \{(x,y) : \varepsilon^2 < x^2+y^2 < 1 ,\quad \varepsilon \neq 0\}$
$\varepsilon \in (0,1)$



$\Omega' = \{(\rho,\theta) : \quad 0 < \rho < 1 ,$
$\qquad 0 \leq \theta < 2\pi \}$ = rettangolo

$$\int_0^{2\pi}\left(\int_{\varepsilon}^{1}(\log\rho)\rho\, d\rho\, d\theta\right) = \left(\int_0^{2\pi} 1\, d\theta\right)\cdot\left(\int_{\varepsilon}^{1}\rho\log\rho\, d\rho\right) =$$

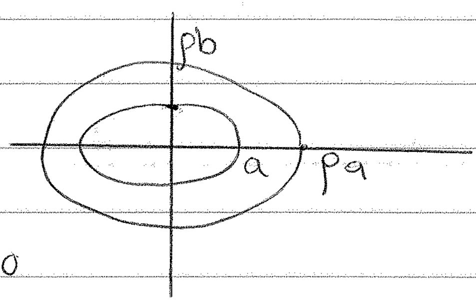
$$2\pi\int_{\varepsilon}^{1}(\rho\log\rho)\,d\rho = 2\pi\left[\left[\frac{\rho^2}{2}\log\rho\right]_{\varepsilon}^{1} - \int_{\varepsilon}^{1}\frac{\rho^2}{2}\cdot\frac{1}{\cancel{\rho}}\,d\rho\right] =$$

$$= 2\pi\left(-\varepsilon^2\log\varepsilon - \frac{1}{4} + \frac{\varepsilon^2}{4}\right]$$

COORDINATE POLARI

$X = X_0 + \rho\cos\theta$

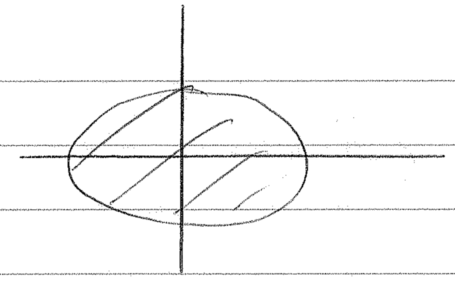
$Y = Y_0 + \rho\,\mathrm{sen}\theta$



$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellisse centrata in 0

$$\begin{cases} x = \rho a\cos\theta & \rho \geq 0 \\ y = \rho b\,\mathrm{sen}\theta & \theta \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

$\det J\phi = ab\rho$



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$$

se metto $\begin{cases} x = a\rho\cos\theta \\ y = b\rho\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$ con $0 < \rho \leq 1$

$$\frac{\cancel{a^2}\rho^2\cos^2\theta}{\cancel{a^2}} + \frac{\cancel{b^2}\rho^2\text{sen}^2\theta}{\cancel{b^2}} = \rho^2(\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta) = \rho^2 \cdot 1 = \rho^2 \leq 1$$

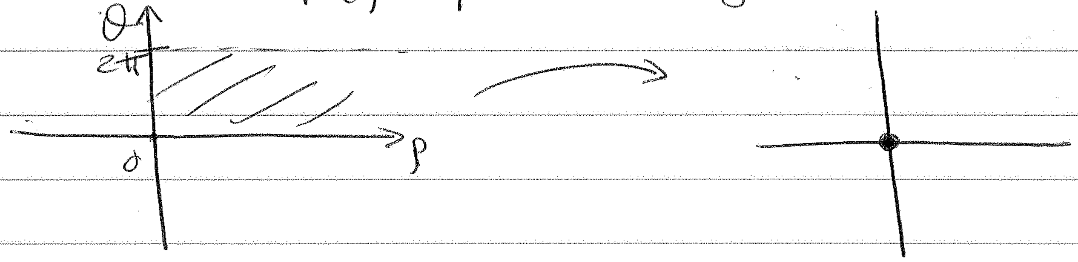
la diseq. è soddisfatta, ottengo tutti i punti interni all'ellisse.

Se prendo $\rho > 1$?

(con $\rho < 1$ sono dentro l'ellisse, con $\rho = 1$ sono sulla frontiera e quindi con $\rho > 1$ sono fuori dall'ellisse)

Se ρ varia ovunque ho tutte le ellissi concentriche $\forall\, a, b$.

$\rho = 0 \implies \forall\theta$, $(\rho = 0, \theta) \longrightarrow$ origine



Coordinate ellittiche

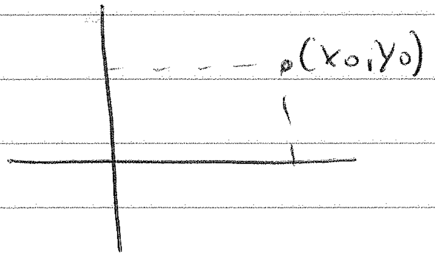
$\varphi \begin{cases} x = a\rho\cos\theta \\ y = b\rho\cos\theta \end{cases}$ riferite a un'ellisse di centro origine e semiassi a e b

θ varia fra 0 e 2π e $\rho \geq 0$

il det della Jacob. di φ in un pto (ρ, θ)

$$\det J\varphi_{(\rho,\theta)} = a \cdot b \cdot \rho \geq 0$$

$$\boxed{\det J\varphi = 0 \iff \rho = 0}$$



$$\begin{cases} x = x_0 + a\rho\cos\theta \\ y = y_0 + b\rho\,\text{sen}\,\theta \\ \rho \geq 0 \quad \theta \in [0, 2\pi) \end{cases}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 39 di 282

$$= \left(\int_0^{\pi} sen^2\theta \, d\theta\right) \cdot \left(\int_0^1 24\rho^3 d\rho\right) = \left.\frac{\theta - sen\theta\cos\theta}{2}\right]_0^{\pi} \cdot \left.\frac{24\rho^4}{4}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{\pi - sen\pi\cos\pi}{2} \cdot \left. 6\rho^4 \right]_0^1 = \frac{\pi}{2} \cdot 6 = 3\pi$$

$$\int sen^2\theta \, d\theta = \int sen\theta \cdot sen\theta \, d\theta =$$ 1. x PARTI

$$= -\cos\theta \, sen\theta - \int (-\cos\theta)\cos\theta \, d\theta =$$

$$= -\cos\theta \, sen\theta + \int \cos^2\theta \, d\theta =$$

$$= -\cos\theta \, sen\theta + \int 1 - sen^2\theta \, d\theta =$$

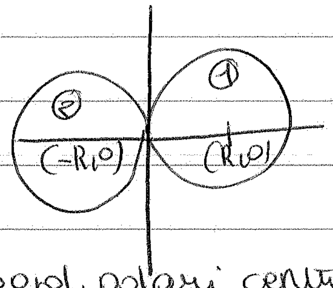
$$= -\cos\theta \, sen\theta + \int 1 \, d\theta - \int sen^2\theta \, d\theta = \int sen^2\theta \, d\theta$$

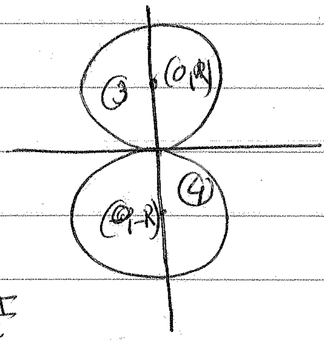
$$2\int sen^2\theta \, d\theta = -\cos\theta \, sen\theta + \theta + c$$

$$\int sen^2\theta \, d\theta = \frac{\theta - \cos\theta \, sen\theta + c}{2}, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\int \cos^2\theta \, d\theta = \frac{\theta + \cos\theta \, sen\theta + c}{2}, \quad c \in \mathbb{R}$$

ρ = semiretta con centro sull'origine delle coord. polari





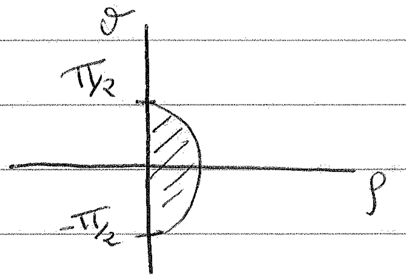
Coord. polari centrate in O

② $(x+R)^2+y^2 \le R^2$ $\quad \frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

③ $x^2+(y-R)^2 \le R^2$ $\quad 0 \le \theta \le \pi$

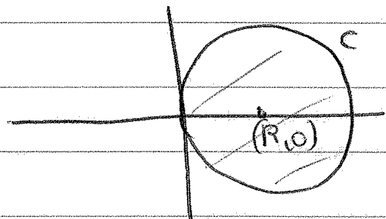
④ $x^2+(y+R)^2 \le R^2$ $\quad \pi \le \theta \le 2\pi$

①: $0 \le \rho \le 2R\cos\theta$, $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$



ESEMPIO

$$\iint_C \sqrt{x^2+y^2}\, dxdy =$$



$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_0^{2R\cos\theta} \rho\rho\, d\rho \right) \cdot d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^{2R\cos\theta} d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{3} 8R^3 \cos^3\theta\, d\theta =$$

$$= \frac{8}{3}R^3 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3\theta\, d\theta = \frac{16}{3}R^3 \int_0^{\pi/2} \cos^3\theta\, d\theta =$$

xké il cos è pari, interv. simm. rispetto all'origine

$$= \frac{16}{3}R^3 \int_0^{\pi/2} \underbrace{\cos^2\theta}_{1-\operatorname{sen}^2\theta} \cdot \cos\theta\, d\theta = \frac{16}{3}R^3 \int \left(\cos^2\theta \cdot (1-\operatorname{sen}^2\theta)\right) d\theta =$$

$$f = (x^2+y^2)^{3/2} = (\rho^2)^{3/2} = \rho^3$$

$$\iint_\Omega f = \int_0^{2\pi}\int_0^2 \rho^3 \rho \, d\rho \, d\theta - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2}\int_0^{\cos\theta} \rho^4 \, d\rho \, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^2 d\theta - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} \left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^{\cos\theta} = \int_0^{2\pi} \frac{32}{5} d\theta - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos^5\theta}{5} d\theta =$$

$$= \left.\frac{32}{5}\theta\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{5}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos\theta(\cos^4\theta) = \frac{2^6\pi}{5} - \frac{1}{5}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos\theta \cdot (\cos^2\theta)^2 d\theta =$$

$$= \frac{2^6\pi}{5} - \frac{2}{5}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta\,(1-\mathrm{sen}^2\theta)^2 d\theta =$$

$t = \mathrm{sen}\,\theta$ $\quad \theta = 0 \to t = 0$

$\theta = \frac{\pi}{2} \to t = 1$

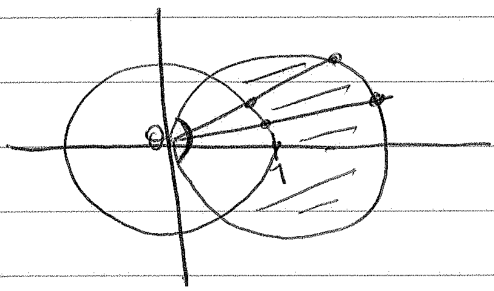
$$= \frac{2^6\pi}{5} - \frac{2}{5}\int_0^1 (1-\mathrm{sen}^2\theta)^2 \, d(\mathrm{sen}\,\theta) =$$

$$= \frac{2^6\pi}{5} - \frac{2}{5}\int_0^1 (1-2t^2+t^4)\,dt = \frac{2^6\pi}{5} - \frac{2}{5}\left[t - \frac{2t^3}{3} + \frac{t^5}{5}\right]_0^1 \ldots$$

ho due circonf. con stesso raggio

$1 \le \rho \le 2\cos\theta$

(2)



$$\begin{cases} \rho = 2\cos\theta \\ \rho = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad 2\cos\theta = 1 \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \pm\frac{\pi}{3}.$$

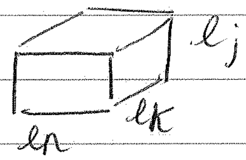
dominio: $\quad 1 \le \rho \le 2\cos\theta$

$$-\frac{\pi}{3} \le \theta \le \frac{\pi}{3}$$

Integrali tripli

f a scala

R_{hkj}



$f(x,y,z) = c_{hkj}$ su R_{hkj}

$$\iiint_{R_{hkj}} f = c_{hkj} \cdot l_h \cdot l_k \cdot l_j$$

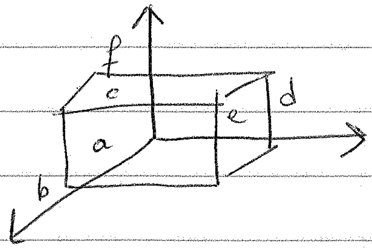
$$R = \bigcup_{h,k,j} R_{hkj} \qquad \iiint_R f = \sum_{h,k,j} c_{hkj} \cdot l_h \cdot l_k \cdot l_j$$

se f limitata, la approssimo ad una f. a scala

$f(x,y,z)$ continua su un parallelepipedo
$R = [a,b] \times [c,d] \times [e,f]$

$\Downarrow$

$$\int_R f = \int_e^f \left(\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y,z)\, dx \right) dy \right) dz$$



↑

TEOREMA DI RIDUZIONE PER F. IN 3 VARIABILI

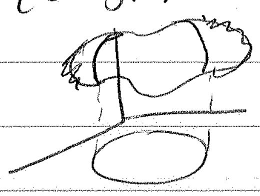
Esempio

$f(x,y,z) = x^2 z - xyz^2$
su $R = [0,2] \times [-1,2] \times [0,1]$

$$\int_0^1 \left(\int_{-1}^2 \left(\int_0^2 (x^2 z - xyz^2)\, dx \right) dy \right) dz$$

– sostegno di calotta superficiale regolare

– $\{(x,y,z) : z = f(x,y) \quad f$ è continua, $(x,y) \in D$ misurabile in $\mathbb{R}^2\}$



-- $f(x,y) = K$ (costante)

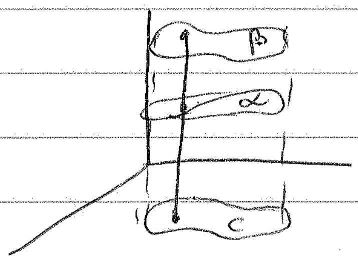
Integrale "per fili"

dominio piano

$C \subseteq \mathbb{R}^2$ misurabile, $|C| \neq 0$

$\alpha, \beta : C \longrightarrow \mathbb{R}$ continue

$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in C, \ \alpha(x,y) \leq z \leq \beta(x,y)\}$



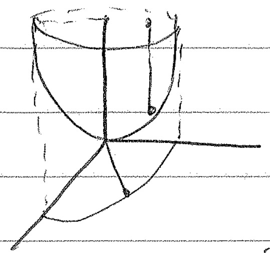
Ω è misurabile

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ continua su Ω

$$\boxed{\iiint_\Omega f = \iint_C \left(\int_\alpha^\beta f(x,y,z)\,dz \right) dx\,dy}$$

integrazione "per fili"

esempio $\left\{ \begin{array}{l} z \geq x^2+y^2 \\ 0 \leq z \leq 2 \end{array} \right\} = \Omega$



$z = x^2+y^2$ paraboloide di rotaz

$z = 2$

$z = x^2+y^2$

$x^2+y^2 = 2$

$C = \{x^2+y^2 \leq 2\} \subseteq \mathbb{R}^2 \qquad x^2+y^2 \leq z \leq 2$

$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in C, \ x^2+y^2 \leq z \leq 2\}$

$$\iint_{G_z} x \, dx \, dz = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{z}} (\rho\cos\theta)\rho \, d\rho \, d\theta =$$

$x^2+y^2 \le z$

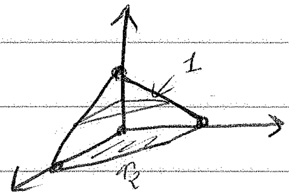
$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$ $\quad 0 \le \theta \le 2\pi$, $\quad 0 \le \rho \le \sqrt{z}$

$$= \left(\int_0^{2\pi} \cos\theta \, d\theta\right) \cdot \left(\int_0^{\sqrt{z}} \rho^2 \, d\rho\right) = \Big[\mathrm{sen}\,\theta\Big]_0^{2\pi} \left(\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^{\sqrt{z}}\right) = 0 \cdot \left(\frac{z\sqrt{z}}{3}\right) = 0$$

~

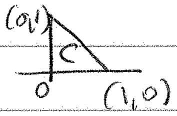
$$\iiint_\Omega x \, dx \, dy \, dz$$

Ω Tetraedro di vertici $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, $(0,0,0)$



① Per strati: $0 \le z \le 1$, Ω_z = triangoli

② Per fili: C = Triangolo



$(x,y) \in C : 0 \le z \le$ piano

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

piano: $x-1+y+z=0 \Rightarrow z = x+y-1$

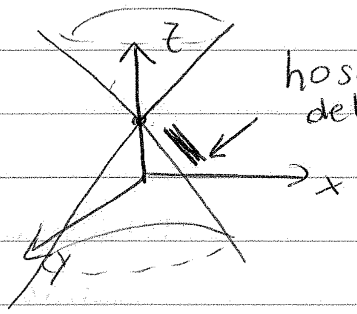
$(x,y) \in C$, $0 \le z \le x+y-1$

$$\iint_C \left(\int_0^{x+y-1} x \, dz\right) dx \, dy = \iint_C (x+y-1) \, dx \, dz$$

ESERCIZIO

$\Omega = \{ x^2+y^2 \le (1-z)^2 , \quad 0 \le z \le 1 \}$

$f(x,y,z) = z$



$x^2+y^2-(1-z)^2=0$

$x^2+y^2-(z-1)^2=0$

$x^2+y^2-(z-1)^2 \ge 0$

$x^2+y^2-(z-1)^2=0$ è un chiuso

$f(x,y,z) = x^2+y^2 (z-1)^2$ è continua

al di fuori del cono il Teo della permanenza del segno ci assicura che se è positiva in un punto dell'insieme aperto (il fuori del cono) allora lo è in tutto l'insieme.

Prendo un punto fuori dal cono comodo, in cui x es. due variabili sono 0.

$x=0 \quad z=1 \quad ; \quad f(0,y,1) = y^2 > 0 \quad \forall y \ne 0$

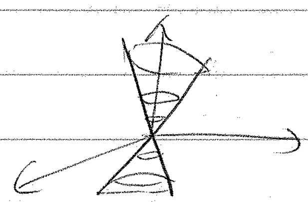
in un pto fuori dal cono f è pos $\Rightarrow$ lo è in tutto l'insieme aperto.

Ora prendo un punto all'interno (sull'asse z x comodità)

$y=0, x=0 \Rightarrow -(z-1)^2 < 0$

$x^2+y^2 \le (1-z)^2$ circonf.

$0 \le z \le 1$



$$\iiint_\Omega z\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 \left(\iint_{\Omega_z} z\,dx\,dy \right) dz = \qquad r = (1-z)$$

$$= \int_0^1 \left(z \underbrace{\iint_{\Omega_z} dx\,dy}_{\text{area cerchio } \Omega_z} \right) dz = \int_0^1 z\,\pi (1-z)^2\,dz = \ldots$$

linearità

$\alpha \in \mathbb{R}$, f, g int su Ω mis.

$$\int_\Omega \alpha f + g = \alpha \int_\Omega f + \int_\Omega g$$

se $f(X) = g(X)$ su $\Omega \setminus \tilde{C}$ dove $|C| = 0$ $\Rightarrow \int_\Omega f = \int_\Omega g$

se $f \geq 0$ su $\Omega \setminus \tilde{C}$, $|C| = 0 \Rightarrow \int_\Omega f \geq 0$

se f continua su Ω, $f \geq 0 \Rightarrow \int_\Omega f = 0 \Leftrightarrow f(X) = 0$ su Ω

! se f è integrabile $\Rightarrow |f|$ è integrabile

$$\left| \int_\Omega f \right| \leq \int_\Omega |f|$$

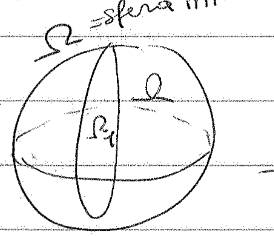
Addività rispetto al dominio

$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ $\qquad \Omega_1, \Omega_2$ misurabili

$$\Rightarrow \int_\Omega f = \int_{\Omega_1} f + \int_{\Omega_2} f - \int_{\Omega_1 \cap \Omega_2} f$$

se $|\Omega_1 \cap \Omega_2| = 0$

$$\int_\Omega f = \int_{\Omega_1} f + \int_{\Omega_2} f$$



$\Omega_2 = \Omega \setminus \Omega_1$

$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$

$$\int_{\Omega_2} f = ? \quad , \quad \int_\Omega f = \int_{\Omega_1} f + \int_{\Omega_2} f$$

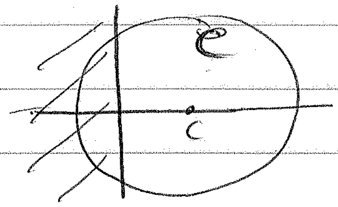
$$\int_{\Omega_2} f = \int_\Omega f - \int_{\Omega_1} f$$

ES.

Volume D : $x^2+y^2-4x \leq 12$ con $x \geq 0$, $3 \leq z \leq 5$

volume = calcolare $\int_D 1 \, dx\,dy\,dz$

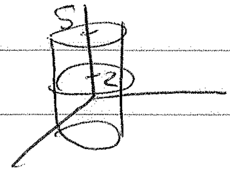
$(x-2)^2 + y^2 \leq 16$



calc.

Volume di un cilindro di base

C e altezza = area(base) $\cdot h = |C| \cdot 3$



ES.

$\int_\Omega \frac{1}{3-z}$

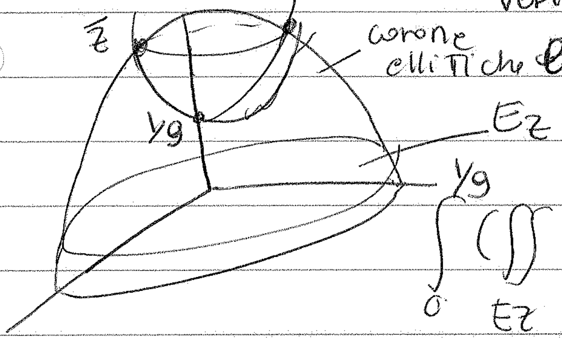
$\Omega : \begin{cases} 9z \leq 1+y^2+9x^2 \\ 0 \leq z \leq \sqrt{9-(y^2+9x^2)} \end{cases}$

$z \geq 0$ $\quad z^2 \leq 9 - y^2 - 9x^2$

$9x^2+y^2+z^2 \leq 9$

$x^2 + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{9} \leq 1$ ellissoide con semiassi 1,3,3

$z \leq \frac{1}{9} + \frac{y^2}{9} + x^2$ paraboloide a sezioni ellittiche con Vertice in $\frac{1}{9}$



$\int_0^{1/9} \left(\iint_{E_z} f \, dx\,dy \right) dz + \int_{1/9}^{\bar{z}} \left(\iint_{C_z} f \, dx\,dy \right) dz$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\text{sen}\,\theta \\ z = t \end{cases} \qquad 0 \leq t \leq 4$$

cerco l'intersezione fra i due coni

$$\begin{cases} (z-4)^2 = x^2+y^2 \\ z^2 = x^2+y^2 \end{cases} \Rightarrow (z-4)^2 = z^2 \Rightarrow \cancel{z^2}+16-8z = \cancel{z^2}$$

$$\Rightarrow z = 2$$

per $0 \leq t \leq 2$ sono nel cono $z^2 \geq x^2+y^2$

quindi $x^2+y^2 \leq t^2$, $x^2+y^2=\rho^2$

$$\Rightarrow t \geq \rho^2$$

$0 \leq z = t \leq 2 \Rightarrow \rho^2 = t^2$ in coord polari

$x^2+y^2 \leq z^2$ in coord. cartesiane

se prendo

$2 \leq z = t \leq 4$ sono nel cono $(z-4)^2 \geq x^2+y^2$

$$\rho^2 \leq (t-4)^2$$
$$\Downarrow$$
$\rho \leq |t-4|$ e xke quando T è tra 2 e 4 T-4 è negativo

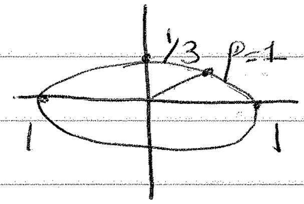
$$\int_\Omega f = \int_{\Omega_1} f + \int_{\Omega_2} f$$

$$\int_0^2\int_0^{2\pi}\left(\int_0^t \rho^2\cdot\rho\, d\rho\right) d\theta\, dt = \int_{\Omega_1} f = \int_0^{2\pi}\int_0^2 \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^t dt\, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \frac{t^4}{4}\, dt\, d\theta = \int_0^{2\pi}\left[\frac{t^5}{20}\right]_0^2 d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{32}{20}\, d\theta = \left.\frac{8}{5}\theta\right]_0^{2\pi} = \frac{16\pi}{5}$$

ESEMPIO

$$\Omega : \begin{cases} x^2+9y^2 \le 1 \\ 3 \le z \le 5 \end{cases}$$



$$f(x,y,z) = x z^2$$

$x^2+9y^2 \le 1 \rightarrow$ ellisse piena con semiassi $1/3$ e 1

$0 \le \rho \le 1$, $0 \le \theta \le 2\pi$

$3 \le t \le 5$

sono utili le coord. polari traslate.

$$\begin{cases} x = 1 \cdot \rho\cos\theta \\ y = \frac{1}{3}\cdot \rho\cos\theta \\ z = t \end{cases}$$

$$\int_\Omega x z^2 \, dx dy dz = \int t^2 \rho \cos\theta \cdot \frac{1}{3} \rho \, d\rho \, d\theta \, d\theta$$

Su questo dominio l'ins. diventa un parallelogramma

$$\frac{1}{3}\left(\int_3^5 t^2 dt\right)\cdot\left(\int_0^{2\pi} \cos\theta \, d\theta\right)\cdot\left(\int_0^1 \rho^2 d\rho\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{t^3}{3}\Big]_3^5\right) \cdot \underbrace{\left(\int \operatorname{sen}\theta \Big]_0^{2\pi}\right)}_{0} \cdot \left(\frac{\rho^3}{3}\Big]_0^1\right) = 0$$

esercizio.

Calcolare il volume di una sfera $\mathcal{S}$ di raggio R

$$\iiint_{\mathcal{S}} dx\,dy\,dz = \iiint_{\Omega'} \rho^2 \operatorname{sen}\varphi \, d\rho\, d\theta\, d\varphi =$$

$$= \left(\int_0^R \rho^2 d\rho\right)\cdot\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\cdot\left(\int_0^{\pi}\operatorname{sen}\varphi\, d\varphi\right) =$$

$$= \left(\frac{\rho^3}{3}\Big]_0^R\right)\cdot\left(\theta\Big]_0^{2\pi}\right)\cdot\left(-\cos\varphi\Big]_0^{\pi}\right) =$$

$$= \frac{R^3}{3}\cdot 2\pi \cdot 1+1 = \frac{2\pi R^3}{3}$$

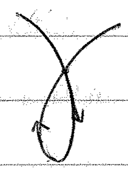
CURVE E INTEGRALI

$\gamma: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$t \longmapsto (\gamma_1(t), .., \gamma_n(t))$

Sostegno di $\gamma = \{\gamma(t), t\in[a,b]\} \subseteq \mathbb{R}^n$

continua



① γ iniettiva $t_1\neq t_2 \Rightarrow \gamma(t_1)\neq\gamma(t_2)$

$\Rightarrow$ semplice   se $\gamma(t)=(\gamma_1(t),\dots,\gamma_n(t)) \in C^1$, cioè $\gamma_i(t)$ sono derivabili con deriv. cont. su I

② γ regolare: γ_i di classe C^1 cioè $\exists\, \gamma_i'(t)$ continue $\forall i, \forall t\in(a,b)$

$\vec{\gamma}'(t)\neq\vec{0} \quad \forall t$

una curva regolare non è necessariamente semplice

e $\gamma'(t) = (\gamma_1'(t),\dots,\gamma_n'(t)) \neq (0,0,0) \ \forall t\in I$

$\gamma'(t) = (\gamma_1'(t),\dots,\gamma_n'(t))$

$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{(\gamma_1')^2(t)+\dots+(\gamma_n')^2(t)}$

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\,dt$$

lunghezza dell'arco di curva γ

$$\begin{array}{ccc} \gamma : [a,b] & \xrightarrow{\gamma} & \mathbb{R}^n \\ \alpha \uparrow & \nearrow \delta & \\ [c,d] & & \end{array}$$

$$\gamma \circ \alpha(s) = \gamma(\alpha(s)) = \delta(s)$$

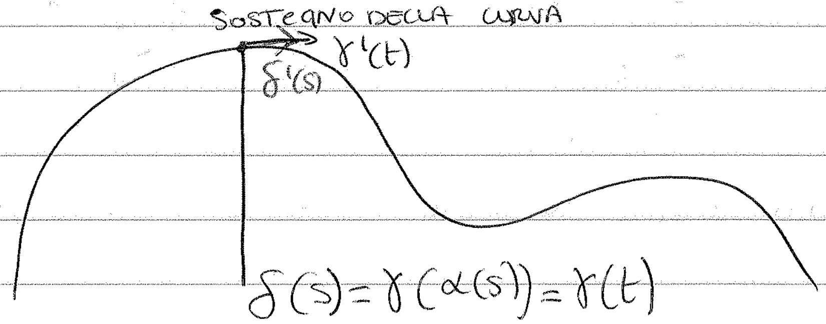
1. $\alpha(s)$ e $\gamma(t)$ hanno lo stesso sostegno

$\delta(s) = \gamma(\alpha(s))$

$\delta([c,d]) = \gamma([a,b]) \Rightarrow$ l'insieme dei punti sarà lo stesso

$$\frac{d}{ds}\Big(\underset{\substack{\| \\ (\delta_1(s), \dots, \delta_n(s))}}{\vec{\delta_i}(s)}\Big) = \frac{d}{ds}\,\delta_i(\gamma(t)) = \gamma'(\alpha(s)) \cdot \alpha'(s)$$

$$\begin{pmatrix} \delta_1'(s) \\ \vdots \\ \delta_n'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha'(s)\,\gamma_1'(\alpha(s)) \\ \vdots \\ \alpha'(s)\,\gamma_n'(\alpha(s)) \end{pmatrix} = \alpha'(s) \begin{pmatrix} \gamma_1'(\alpha(s)) \\ \vdots \\ \gamma_n'(\alpha(s)) \end{pmatrix}$$



$\delta(s) = \gamma(\alpha(s)) = \gamma(t)$

$t' = \alpha(s)$

Se $\alpha'(s) > 0 \Rightarrow$ il vett. Tg a δ = vett. Tg γ x cost. positiva

hanno lo stesso sostegno e lo stesso orientamento

cioè sono percorse nello stesso verso

Se $\alpha'(s) < 0 \Rightarrow$ δ e γ hanno orientamento opposto

$\alpha(c) = b$, $\alpha(d) = a$

$\delta(c) = \gamma(\alpha(c)) = \gamma(b)$

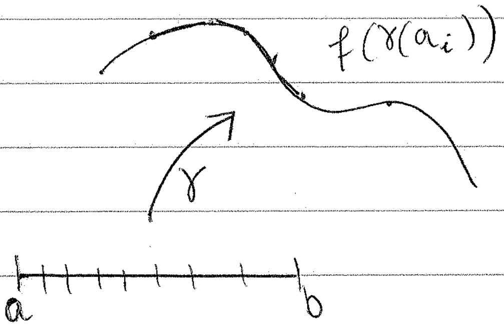
INTEGRALI CURVILINEI

$f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ cont. , A aperto e connesso

$\gamma : [a,b] \to A \subseteq \mathbb{R}^n$ $\Rightarrow$ il sostegno della curva è ben definito in A

arco di curva regolare

voglio definire $\int_\gamma f ds$ l'integrale di f lungo gamma (curvilineo)



divido l'intervallo in tanti intervallini; approssimo la curva con dei segmenti e calcolo f x es. calcolato solo in uno degli estremi e faccio tend. a 0 l'ampiezza dell'interv.

Il segmento viene sost. dal vett. tg.

$$\int_\gamma f ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\| dt$$

lungh. del vett. Tg

se f è continua e γ è regolare

se $f(\gamma(t)) = 1 \to$ lungh. arco

$f(\gamma(t)) \geq 0 \to$ (f è densità quindi) l'int. è la massa

TEOREMA:

Sia f una funz. continua su A, siano γ e δ due curve con sost. contenuto in A e che differiscono x un cambiamento di parametrizzazione.

$$\Rightarrow \int_\gamma f ds = \int_\delta f ds$$

DIM

dimostrare che questi int sono =

differiscono x un camb. di param. $\Rightarrow \exists \alpha : [c,d] \to [a,b]$

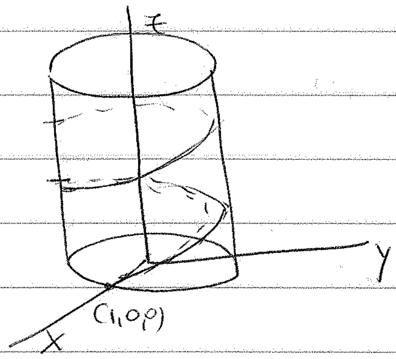
α di classe C^1, $\alpha'(s) \neq 0$, α suriettiva

TESI: l'orientamento non ha importanza xkè viene assorbito dal fatto che si scambiano gli estremi
quindi posso scegliere a piacere la parametrizzazione della curva

ESERCIZI:

1. lunghezza elica cilindrica

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \operatorname{sen} t \\ z = t \end{cases} \qquad 0 \le t \le 4\pi$$



2. Calcolare la lunghezza di un arco di curva

$$\begin{cases} x = \sqrt{2}\operatorname{sen} t \cos t \\ y = 4 \operatorname{sen} t \end{cases} \qquad 0 \le t \le \pi/2$$

$$\gamma'(t) = (\underbrace{\sqrt{2}\cos^2 t - \sqrt{2}\operatorname{sen}^2 t}_{x'}, \underbrace{4\cos t}_{y'}) = (\sqrt{2}(\cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t), 4\cos t) =$$
$$= (\sqrt{2}(\cos^2 t - (1-\cos^2 t)), 4\cos t) = (\sqrt{2}(\cos^2 t + \cos^2 t - 1), 4\cos t) =$$
$$= (\sqrt{2}(2\cos^2 t - 1), 4\cos t)$$

$$\|\gamma'(t)\|^2 = 2(2\cos^2 t - 1)^2 + 16\cos^2 t = 8\cos^4 t + 2 - 8\cos^2 t + 16\cos^2 t =$$
$$= 8\cos^4 t + 8\cos^2 t + 2 = 2(4\cos^4 t + 4\cos^2 t + 1) =$$
$$= 2(2\cos^2 t + 1)^2$$

$$\int_\gamma ds = \int_0^{\pi/2} \sqrt{2(2\cos^2 t + 1)^2} = \int_0^{\pi/2} \sqrt{2}(\cos^2 t + 1)\, dt$$

$$\frac{1}{L(\gamma_1)}\int_{\gamma_1} x\,ds = x_{\text{baricentro di }\gamma_1} \quad , \quad \rho(x,y)=1$$

$$L(\gamma_1) = \pi r = \pi \cdot \frac{1}{2}$$; mi aspetto che il baric. di una circ. sia nel C.

$$\gamma_2 : \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases} \quad 0 \le t \le 1$$

$$\gamma_2'(t) = (1, 2t)$$
$$\|\gamma_2'(t)\| = \sqrt{1+4t^2}$$

$$\int_{\gamma_2} x\,ds = \int_0^1 t\sqrt{1+4t^2}\,dt = \qquad u = 1+4t^2 \quad du = 8t\,dt$$

$$= \int_1^5 \frac{1}{8} u^{1/2} du = \frac{1}{8}\cdot \left.\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_1^5 =$$

$$= \frac{1}{8}\cdot\frac{5^{3/2}}{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{8}\sqrt{5^3}\cdot\frac{2}{3} - \frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3} = \frac{5\sqrt{5}}{12} - \frac{1}{12} = \frac{5\sqrt{5}-1}{12}$$

$$\gamma_3 : \begin{cases} x = 1 \\ y = t \end{cases} \quad 0 \le t \le 1$$

$$\gamma_3'(t) = (0,1)$$
$$\|\gamma_3'(t)\| = \sqrt{1} = 1$$

$$\int_0^1 1\,dt = 1$$

$$\gamma_1 : \begin{cases} x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos t \\ y = \frac{1}{2}\operatorname{sen} t \end{cases} \quad 0 \le t \le \pi$$

$$\gamma_1'(t) = \left(-\frac{1}{2}\operatorname{sen} t, \frac{1}{2}\cos t\right)$$

$$= \frac{1}{2}\int ch^2 u \, du$$

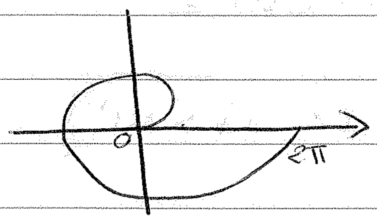
DA FINIRE

$$L(\gamma) = L_1(\gamma) + L_2(\gamma) + L_3(\gamma)$$

ESERCIZIO

Calcolare la massa di un carro di densità $f = b\theta$ e forma descritta da $\rho = a\theta$, $\theta \in [0, 4\pi]$, $a, b > 0$

$\rho = a\theta$ è la spirale di Archimede, funz. già espressa in coordinate polari



$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases} \quad \text{ho } \rho = a\theta \Rightarrow \begin{cases} x = a\theta\cos\theta \\ y = a\theta\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases} \quad 0 \le \theta \le 4\pi$$

$$\gamma'(\theta) = (a\cos\theta - a\theta\,\mathrm{sen}\,\theta,\ a\,\mathrm{sen}\,\theta + a\theta\cos\theta)$$

$$\|\gamma'(\theta)\|^2 = a^2\left[\cos^2\theta - \cancel{2\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta} + \theta^2\mathrm{sen}^2\theta + \mathrm{sen}^2\theta + \cancel{2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta} + \theta^2\cos^2\theta\right] =$$

$$= a^2(1 + \theta^2)$$

$$\text{massa} = \int_0^{4\pi} b\theta \cdot \|\gamma'(t)\|\, d\theta = \int_0^{4\pi} b\theta \cdot a\sqrt{1+\theta^2}\, d\theta = ab\int_0^{4\pi} \theta\sqrt{1+\theta^2}\, d\theta =$$

$$= \frac{ab}{2}\int_1^{1+16\pi^2} \sqrt{u}\, du = \frac{ab}{2}\left(\left[\frac{u^{3/2}}{3/2}\right]_1^{1+16\pi^2}\right) =$$

$$= \frac{ab}{3}\left((1+16\pi^2)^{3/2} - 1\right)$$

$1 + \theta^2 = u$

$2\theta\, d\theta = du$

$\theta\, d\theta = \frac{1}{2} du$

$\theta^2 = u - 1$

$\theta = \sqrt{u-1}$

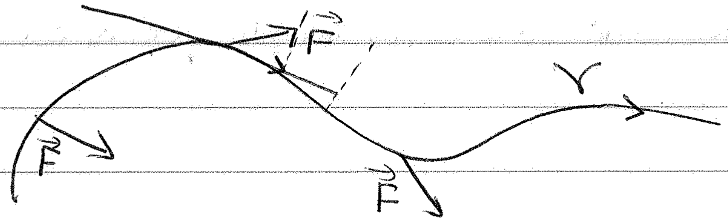
$d\theta = \frac{1}{2} du$

Integrali di linea

$$F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$x \longmapsto (F_1(x), \dots, F_n(x))$$

F campo vettoriale
(F continua)

ho una curva γ e un campo di forze applicato punto x punto



$\vec{\tau}(t)$ = versore tangente a γ in $\gamma(t)$

PROIEZIONE : $\underbrace{(F \cdot \vec{\tau}(t))}_{\text{modulo}}\underbrace{\vec{\tau}(t)}_{\text{versore Tg.}}$

Per calcolare il lavoro faccio la proiez. della forza lungo la retta Tg. e integro.

$$\int_\gamma (F \cdot \vec{\tau}(t))\, ds$$

← integrale curvilineo (del lavoro) e x convenzione

$$\int_\gamma (F \cdot \vec{\tau}(t))\, ds = \int_\gamma F\, dP = \int_\gamma F \cdot \vec{\tau}$$

← notazioni ~

$\vec{\tau}(t)$ si calcola prend. il vers. tg a γ parametrizzata e lo divido x la norma.

$$\vec{\tau}(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$$

$$F \cdot \vec{\tau} = F(\gamma(t)) \cdot \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$$

$$\int_a^b \Big(\underbrace{F(\gamma(t)) \cdot \frac{\gamma'(t)}{\cancel{\|\gamma'(t)\|}}}_{\text{f. scalare}}\Big) \cancel{\|\gamma'(t)\|}\, dt =$$

γ va da "a" a "b"

è comodo x assecondare la scelta di orientamento.
le prop. degli integrali curvilinei valgono anche qui.

ESERCIZIO

$F(x,y,z) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}, -1\right)$ calc. $\int_\gamma F \cdot dP$

γ elica

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \operatorname{sen} t \\ z = t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 3\pi$$

$\gamma'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t, 1)$

$$\int_0^{3\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt$$

$$F(\gamma(t)) = \left(\frac{\cos t}{\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t}, \frac{\operatorname{sen} t}{\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t}, -1\right) = (\cos t, \operatorname{sen} t, -1)$$

$$F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, -1) \cdot (-\operatorname{sen} t, \cos t, 1) =$$
$$= \cancel{-\cos t \operatorname{sen} t} + \cancel{\operatorname{sen} t \cos t} - 1 = -1$$

$$\int_0^{3\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt = \int_0^{3\pi} -1\,dt = -t\Big]_0^{3\pi} = -3\pi$$

Non ha importanza il punto da cui parto xke è una curva chiusa

$$\int_\gamma F \cdot dP = \int_0^{2\pi} (-2\cos t, 2\,\text{sen}\,t) \cdot (2\cos t, -2\,\text{sen}\,t)\, dt$$

$$\int_\gamma F\,dP = -\int_{-\gamma} F \cdot dP =$$ potevo anche usare l'orientamento iniziale e ricordarmi di cambiare il segno.

$$= -\int (-2\,\text{sen}\,t, 2\cos t) \cdot (-2\,\text{sen}\,t, 2\cos t)\, dt = -\int_0^{2\pi} (4\,\text{sen}^2 t + 4\cos^2 t)\, dt = -8\pi$$

ES. $F(-y, x) \quad \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

γ: arco di $\rho = \theta \qquad \theta \in [0, 2\pi]$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta = \theta\cos\theta \\ y = \rho\,\text{sen}\,\theta = \theta\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$$

$$\gamma'(\theta) = (\cos\theta - \theta\,\text{sen}\,\theta, \text{sen}\,\theta + \theta\cos\theta)$$

$$F(\gamma(\theta)) \cdot \gamma'(\theta) = (-\theta\,\text{sen}\,\theta, \theta\cos\theta) \cdot (\cos\theta - \theta\,\text{sen}\,\theta, \text{sen}\,\theta + \theta\cos\theta) =$$

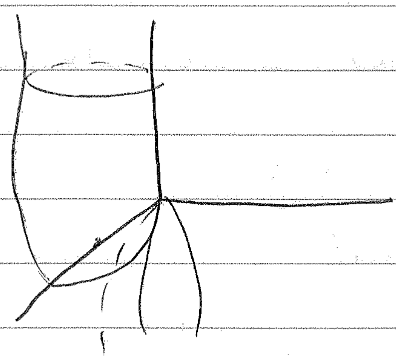
$$= -\theta\,\text{sen}\,\theta\cos\theta + \theta^2\text{sen}^2\theta + \theta\cos\theta\,\text{sen}\,\theta, \theta^2\cos^2\theta = \theta^2$$

$$\int_\gamma F \cdot dP = \int_0^{2\pi} \theta^2\, d\theta = \left.\frac{\theta^3}{3}\right]_0^{2\pi} = \frac{8\pi^3}{3}$$

ESERCIZIO

$F = (2x^2y, xz, -x)$

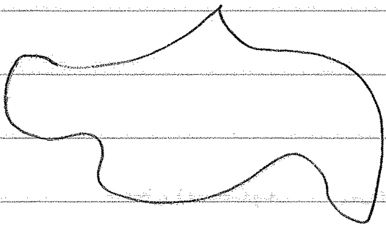
$$\gamma: \begin{cases} z = -2y^2 & \text{parabola} \\ (x-1)^2 + y^2 = 1 & \text{cilindro} \end{cases}$$



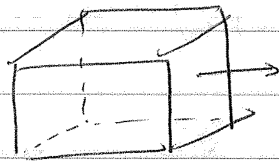
$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta + 1 \\ y = \rho\,\text{sen}\,\theta \\ z = t \end{cases}$$ coordinate cilindriche nello spazio $\qquad \rho = 1$

Integrali di superficie - Integrali di flusso

disp: Si calcolano su una superficie, non dipendono dalla parametrizzazione ma dipendono dalla geometria di flusso:



può essere entrante, uscente, dipende



dall'orientamento, cioè in quale verso mi muovo attraverso la superficie; dipende dall'orientamento.

Superficie in forma parametrica.

σ: A aperto connesso $\neq \emptyset \longrightarrow \mathbb{R}^3$

- σ continua $\qquad \sigma(A) \subseteq \mathbb{R}^3$
- σ di classe C^1 su A

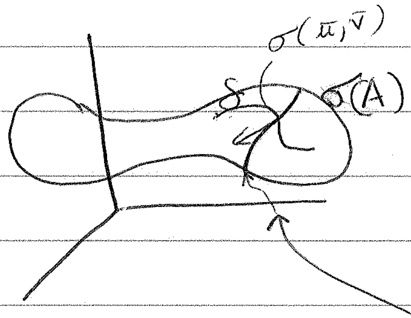
$\sigma(u,v)$ ha 3 componenti:

$$\begin{cases} x = \sigma_1(u,v) \\ y = \sigma_2(u,v) \\ z = \sigma_3(u,v) \end{cases} \qquad (u,v) \in A$$

$$J\sigma(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_1}{\partial u} & \frac{\partial \sigma_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \sigma_2}{\partial u} & \frac{\partial \sigma_2}{\partial v} \\ \frac{\partial \sigma_3}{\partial u} & \frac{\partial \sigma_3}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

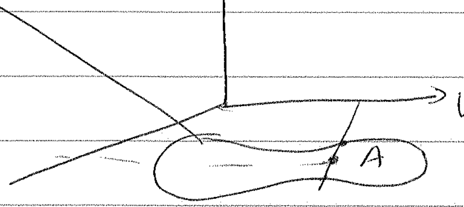
$\longrightarrow$ σ regolare

- $J\sigma(u,v)$ ha rango max su A



$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial u}(\bar{u},\bar{v}) = \lim_{h \to 0} \frac{\sigma_1(\bar{u}+h,\bar{v}) - \sigma_1(\bar{u},\bar{v})}{h}$$

$$\sigma(u,\bar{v}) = \gamma_1(u)$$



Superficie in forma parametrica

$\sigma : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ Aperto, connesso

σ è **regolare** se

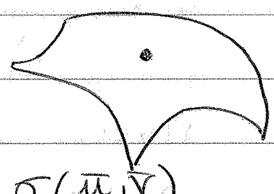
$\sigma \in \mathcal{C}^1(A)$

$J\sigma(u,v)$ ha rango max $\forall (u,v) \in A$

σ è **semplice** se

σ è una f. iniettiva

$\vec{N}(u,v) = \frac{\partial \sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}$



Eq. piano tg. a $\sigma(A)$ in $\sigma(\bar{u},\bar{v})$

$$\left(x - \sigma_1(\bar{u},\bar{v}), y - \sigma_2(\bar{u},\bar{v}), z - \sigma_3(\bar{u},\bar{v})\right) \cdot$$
$$\cdot \left(\frac{\partial \sigma}{\partial u}(\bar{u},\bar{v}) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(\bar{u},\bar{v})\right) = 0$$

luogo di tutti i punti che sono perpendicolari al vettore N

ESEMPIO:

prendo la sup. cilindrica $x^2+y^2=1$

$$\begin{cases} x = \cos\theta & = \sigma_1 \\ y = \operatorname{sen}\theta & = \sigma_2 \\ z = t & = \sigma_3 \end{cases}$$

← coordinate cilindriche

$t \in \mathbb{R}$

$0 \le \theta \le 2\pi$

$\sigma : (\theta, t) \to \mathbb{R}^3$

$A : \mathbb{R}^2 \to [0,2\pi] \times \mathbb{R}$

σ è di classe $\mathcal{C}^1$ su tutto $\mathbb{R}^2$ ($\sigma \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$)

$$J\sigma(\theta,t) = \begin{vmatrix} -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \cos\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \sigma_1}{\partial \theta} & \frac{\partial \sigma_1}{\partial t} \\ \frac{\partial \sigma_2}{\partial \theta} & \frac{\partial \sigma_2}{\partial t} \\ \frac{\partial \sigma_3}{\partial \theta} & \frac{\partial \sigma_3}{\partial t} \end{vmatrix}$$

$\rho(J\sigma(\theta,t)) = \max = 2$

σ è regolare xke

- $\sigma \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$,
- $J\sigma(\theta,t)$ ha rango max (2) $\forall(\theta,t)$

prendo $2u = 0$

$\vec{N}(0,0) = (0,0,1)$

$\vec{N}$ è rivolto verso l'interno del paraboloide

$z = f(x,y)$

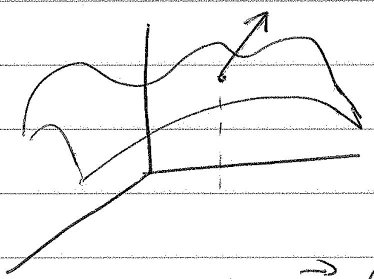
$f \in \mathcal{C}^1(A)$

posso prendere
$$\begin{cases} x = u & = \sigma_1 \quad (u,v) \in A \\ y = v & = \sigma_2 \\ z = f(u,v) & = \sigma_3 \end{cases}$$

$$\vec{N}(u,v) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial u}(u,v) \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial v}(u,v) \end{vmatrix} = -\frac{\partial f}{\partial u}\vec{i} - \frac{\partial f}{\partial v}\vec{j} + \vec{k}$$

$$\vec{N}(u,v) = \left(-\frac{\partial f}{\partial u}, -\frac{\partial f}{\partial v}, 1\right)$$

$$\vec{N}(x,y) = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right)$$ cambio solo nome alle variabili

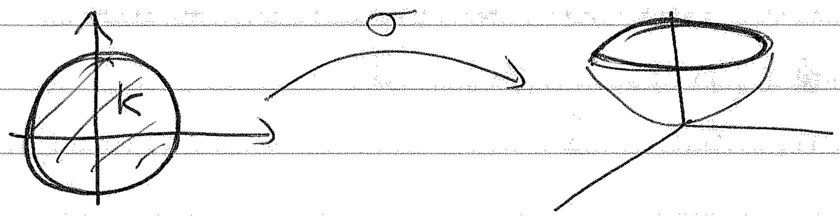


se $x = g(y,z) \Rightarrow \vec{N}(y,z) = \left(1, -\frac{\partial f}{\partial y}, -\frac{\partial f}{\partial z}\right)$

se $y = h(x,z) = \vec{N}(x,z) = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, 1, -\frac{\partial f}{\partial z}\right)$

bordo di una superficie: non posso + andare in TUTTE le direz. rimanendo dentro la sup. (segmenti viola e fucsia)

Se prendo K cerchio, σ paraboloide



$z = x^2 + y^2$

$z = x^2 + y^2 \leq r^2$

la frontiera del cerchio diventa il bordo del paraboloide

Cambiamenti di variabili e parametrizzazioni nelle superfici

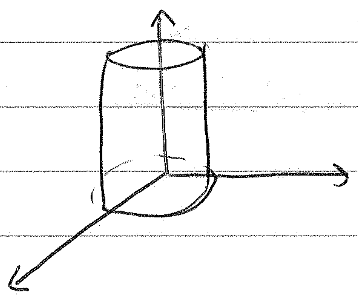
$\begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \operatorname{sen}\theta \\ z = t \end{cases}$ $K \begin{cases} \theta \in [0, 2\pi] \\ t \in [0, 1] \end{cases}$

$\sigma : (t, \theta) \to \mathbb{R}^3$

$\begin{cases} x = \cos 2\varphi \\ y = \operatorname{sen} 2\varphi \\ t = s^3 \end{cases}$ $K' \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \pi \\ 0 \leq s \leq 1 \end{cases}$

$\sigma_1 : (s, \varphi) \to \mathbb{R}^3$

queste 2 sup. hanno lo STESSO SOSTEGNO



$\sigma(K) = \sigma_1(K')$

il vett. normale potrebbe cambiare

$\sim$

suppongo di avere $(u,v)\ A \xrightarrow{\sigma} \mathbb{R}^3$

$(s,t)\ A' \xrightarrow{\tau} \mathbb{R}^3$

σ, τ regolari

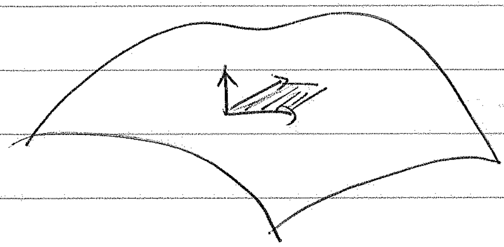
Suppongo che $\exists$ $\alpha : A' \subseteq \mathbb{R}^2 \to A \subseteq \mathbb{R}^2$

α biunivoca

Integrale superficiale

$\sigma : K \to \mathbb{R}^3$

σ calotta sup. regolare



devo calcolare l'area di questa sup.
posso imm. di dividerla in parallelepipedi infinitesimi

$A(\text{parallelep.}) = |du \wedge dv| = \vec{N}$

elemento d'area $: \iint_K \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right\| du dv$ = area della calotta superficiale = area di $\sigma(K)$

$\sigma : K \to \mathbb{R}^3$

σ calotta superficiale regolare.

$\Rightarrow \text{Area}(\sigma(K)) = \iint_K \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right\| du dv = \int_\sigma 1 d\sigma$

non dipende dalla parametrizzaz.

Generalizzando:

$f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ continua su Ω, a valori scalari

$\sigma(K) \subseteq \Omega$

sostegno di K

$\Downarrow$

$$\int_\sigma f d\sigma = \iint_K f(\sigma(u,v)) \, \| N(u,v) \| \, du dv$$

PROPRIETA':

1. $\int_\sigma f d\sigma$ è lineare

$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \int_\sigma a f d\sigma = a \int_\sigma f d\sigma$

2. $\forall f, g \quad , \quad \int_\sigma (f+g) d\sigma = \int_\sigma f d\sigma + \int_\sigma g d\sigma$

$$\vec{N}(x,y) = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right) = \left(-\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1\right)$$

$$\|N\| = \sqrt{\frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2} + 1} = \sqrt{2}$$

$$A(\sigma) = \iint_{K_1} \sqrt{2}\,dx\,dy = \sqrt{2}\,(\underbrace{\pi 4 - \pi 1}_{\text{area corona circ.}}) = 3\sqrt{2}\,\pi$$

gli int superficiali sono indip. dalla param.

In questo caso lo è ma il vett. normale posso prenderlo positivo o negativo; quindi cambiando l'orientam. alla sup. cioè cambiando il verso al versore normale l'integrale cambia segno.

l'int. di flusso dipende dall'orientamento.

• Al cambiare dell'orientamento di σ, Φ cambia segno.

$\uparrow$ parametrizzazione.

Se ho $\sigma(u,v)$ e $\eta(s,t)$

che sono due parametrizzazioni della stessa superficie

$(u,v) = \varphi(s,t) \Rightarrow \frac{\partial \sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v} \qquad \frac{\partial \eta}{\partial s} \wedge \frac{\partial \eta}{\partial t}$

vettori normali

se calcolati nello stesso pto differiscono x una cost. che è il det

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(\varphi(s,t)) = \det J\varphi(s,t)\left[\frac{\partial \eta}{\partial s} \wedge \frac{\partial \eta}{\partial t}(s,t)\right]$$

$\Rightarrow$ se $\sigma(\varphi(s,t)) = \eta(s,t)$

allora se $\det J\varphi(s,t) > 0 \quad \forall (s,t)$

allora $\int_\sigma F \cdot \vec{n} = \int_\eta F \cdot \vec{n}$

Se cambio parametrizzazione ma l'orientam. resta lo stesso l'integrale non varia. Se invece

$\det J\varphi(s,t) < 0 \quad \forall (s,t)$

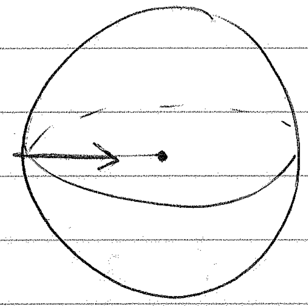
$\Rightarrow \int_\sigma F \cdot \vec{n} = -\int_\eta F \cdot \vec{n}$

l'int. cambia segno se cambio orientam. della param.

nei 2 poli il vett. normale non c'è, quindi non è regolare ovunque ma ai fini dell'int. non c'è problema.

Come è diretto $\vec{N}$?

$\vec{N}(0,\frac{\pi}{2}) = (-R^2,0,0)$ diretto verso l'interno



cambio segno xk l'esercizio chiede il flusso uscente.

$-\vec{N} = (R^2 sen^2\varphi\cos\theta, R^2 sen^2\varphi sen\theta, R^2 sen\varphi\cos\varphi)$

Calcolo il flusso uscente

$\Phi = \int_\sigma \vec{F}\cdot(-\vec{N})\,d\sigma$ $\quad (\vec{F}(x,0,y))$

$F(\sigma(\theta,\varphi)) = (R sen\varphi\cos\theta, 0, R sen\varphi sen\theta)\cdot(R^2 sen^2\varphi\cos\theta, R^2 sen^2\varphi sen\theta, R^2 sen\varphi\cos\varphi) =$

$= R^3 sen^3\varphi\cos^2\theta + R^3 sen^2\varphi\, sen\theta\cos\varphi$

ho trovato la funzione da integrare su K

$\Phi = \iint_K R^3 sen^3\varphi\cos^2\theta + R^3 sen^2\varphi\cos\varphi\, sen\theta =$

K è un rettangolo e la funzione è prodotto di funzioni

$= R^3\left(\int_0^\pi sen^3\varphi\, d\varphi\right)\cdot\left(\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\, d\theta\right) + R^3\left(\int_0^\pi sen^2\varphi\cos\varphi\, d\varphi\right)\cdot\left(\int_0^{2\pi} sen\theta\, d\theta\right) = ?$

$\therefore \int_0^\pi (sen^2\varphi\cos\varphi)\,d\varphi = \left.\frac{sen^3\varphi}{3}\right]_0^\pi = 0$

$\Phi = R^3\left(\int_0^\pi sen^3\varphi\, d\varphi\right)\cdot\left(\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\, d\theta\right) =$

$$\vec{N} = \left(-1, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) \qquad x = f(y,z) = 3y^2 + z^2$$

$\uparrow$ α scelta da me

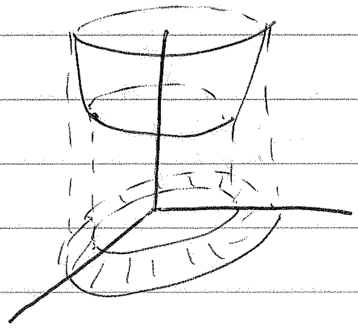
ma ho sbagliato xk̄e così punta verso l'esterno.

$$\vec{N} = \left(1, -\frac{\partial f}{\partial y}, -\frac{\partial f}{\partial z}\right) = (1, -6y, -2z)$$

nell'origine viene $(1,0,0)$ e quindi è proprio quello che ci serve, rivolto verso l'interno.

$$\begin{cases} x = 3y^2 + z^2 \\ y = y \\ z = z \end{cases} \qquad (y,z)$$

proiettando ottengo due ellissi concentriche



viene una corona ellittica

$K: \; 1 \leq 3y^2 + z^2 \leq 3$

$$1 \leq \frac{y}{\frac{1}{3}} + z^2 \leq 3$$

$$F \cdot \vec{N} = (x, z, -y^3) \cdot (1, -6y, -2z) =$$

$$= x - 6yz + 2y^3 z$$

$$\Phi = \iint_K (x - 6yz + 2y^3 z)\, dy\, dz$$

Parametrizzo la corona ellittica

$$\begin{cases} y = \rho \cos\theta \\ z = \sqrt{3}\rho \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$