NUMERO : 389 DATA : 17/10/2012

A P P U N T I

STUDENTE : Parrino

MATERIA : Analisi Matematica I
Prof. Camporesi

ANALISI MATEMATICA 14.09.09 I° LEZIONE

Gli insiemi

INSIEME = collezione di oggetti detti elementi dell'insieme.

Si dice che tali elementi appartengano all'insieme dato A si scrive:

$a \in A \rightarrow$ l'elemento a appartiene all'insieme A

$a \notin A \rightarrow$ " non " "

NOTAZIONI: Parentesi graffe $A = \{x : x$ ha una certa proprietà$\}$

tale che

esempi $\rightarrow$ GLI INSIEMI NUMERICI

$\mathbb{N}$ = numeri naturali $= \{0, 1, 2, 3 \dots\}$

$\mathbb{Z}$ = numeri interi $= \{\dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

$\mathbb{Q}$ = numeri razionali $= \{\dots \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$ ← frazione

$\mathbb{R}$ = numeri reali = decimali non necessariamente periodici

$= \{x : x$ è un allineamento decimale qualsiasi$\}$

$\mathbb{C}$ = numeri complessi $= \{z = x + iy : x, y \in \mathbb{R}$ e $i = \sqrt{-1}$ è unità immaginaria$\}$

INSIEME INFINITO: insieme non finito, ovvero che non si lega mediante corrispondenza biunivoca con un insieme standard A_n

$A_n = \{1, 2, 3 \dots n\}$ con $n \in \mathbb{N}^+$

esempi insiemi infiniti:

① $A_n = \{x \in \mathbb{N} \,/\, x \neq 0$ e $x \leq n\}$

② $N_{pari} = \{x \in N \,/\, x$ è divisibile per $2\}$

$= \{2k : k \in \mathbb{N}\}$

$= \{0, 2, 4, 6 \dots\}$

③ $N_{dispari} = \{2k + 1 : k \in \mathbb{N}\}$

INSIEME VUOTO $\emptyset$ un insieme privo di elementi.

$\exists$ un solo vuoto ed è sottoinsieme di qualsiasi insieme

↳ $\forall$ insieme A / $\emptyset \subseteq A$

La relazione di inclusione ($\subseteq$) soddisfa alcune regole formali di inclusione tra gli insiemi e le 3 PROPRIETÀ SEGUENTI:

① RIFLESSIVA: ogni insieme è sottoinsieme di se stesso $A \subseteq A$

② ANTISIMMETRICA: se $A \subseteq B$, $B \subseteq A \Leftrightarrow A = B$

③ TRANSITIVA: se $A \subseteq B$; $B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$

Queste proprietà sono valide anche per la relazione usuale di ordine ($\leq$) tra numeri reali con la differenza che il ($\leq$) definisce in $\mathbb{R}$ un ordine totale

Se $x, y \in \mathbb{R}$ con $x \neq y$, $x < y$ oppure $y < x$ → RELAZIONE DI ORDINE TOTALE

Invece per gli insiemi $\subseteq$ definisce solo un ordinamento parziale (definite due insiemi non si stabilisce necessariamente se uno è contenuto nell'altro

Se $A \neq B$ non è detto che sia $A \subseteq B$ o $B \subseteq A$

INSIEME DELLE PARTI

Dato un insieme A si definisce l'INSIEME DELLE PARTI DI A $P(A)$ l'insieme i cui elementi sono tutti possibili sottoinsiemi di A. Ad esempio:

DATO insieme A → sottoinsiemi $\emptyset, A \in P(A)$

ES|

$A_{(1)} = \{1\}$ $\quad P(A_1) = \{\emptyset, \{1\}\}$

$A_{(2)} = \{1,2\}$ $\quad P(A_2) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

$A_{(3)} = \{1,2,3\}$ $\quad P(A_3) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\}$

Ogni sottoinsieme di A_{n+1} si ottiene infatti nel modo precedente.
di conseguenza l'insieme delle parti di A_{n+1}

$\Rightarrow |P(A_{n+1})|$ = n° sottoinsiemi VECCHI + n° sottoinsiemi NUOVI

$= 2^n + 2^n$ (poiché da ogni VECCHIO sottoinsieme se ne genera un altro aggiungendo $n+1$)

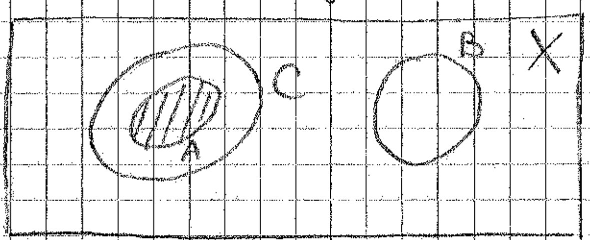
$= 2 \times 2^n$

$= 2^{n+1}$

OPERAZIONI TRA INSIEMI 15.09 II° LEZIONE

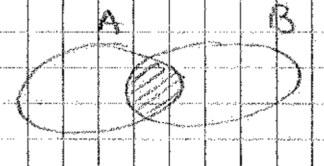
Fissiamo un insieme non vuoto X che consideriamo come l'insieme ambiente e dei sottoinsiemi A, B, C, D... di X

La situazione viene rappresentata attraverso il DIAGRAMMA DI VENN come una figura piana



① INTERSEZIONE di A e B è l'insieme $A \cap B$

$A \cap B = \{x \in X : x \in A \text{ e } x \in B\}$



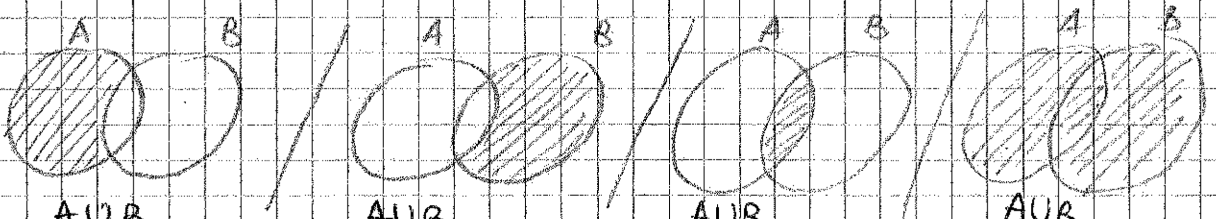
l'intersezione è la regione comune

A, B si dicono disgiunti se $A \cap B = \{\emptyset\}$ cioè se non hanno elementi in comune

② UNIONE di A e B è l'insieme $A \cup B$

$A \cup B = \{x \in X : x \in A \text{ oppure } x \in B\}$, l'unione è l'insieme degli elementi che appartengono ad A o a B o a tutti e 2.

L'"OPPURE" è infatti in senso non esclusivo ⇒ gli elementi di $A \cup B$ possono difatti appartenere ad entrambi



$A \cup B$ / $A \cup B$ / $A \cup B$ / $A \cup B$

pag ③

LEGGI DI DE MORGAN

→ $C_X(A \cup B) = C_X(A) \cap C_X(B)$

→ $C_X(A \cap B) = C_X(A) \cup C_X(B)$

dimostrazione

$$C_X(A \cup B) = \{x \in X : x \notin (A \cup B)\} = \{x \in X : x \notin A, x \notin B\}$$

$$= \{x \in X : x \in C_X(A), x \in C_X(B)\}$$?

$$= \{x \in X : x \in C_X(A) \ldots$$

CARATTERISTICHE E PROPRIETÀ DELL'INTERSEZIONE E DELL'UNIONE

→ L'intersezione in termini di proposizioni logiche è analoga a $P \wedge Q$ (devono essere vere entrambe

$A \cap B$ è analoga a $P \wedge Q$ → ELEMENTI COMUNI ENTRAMBE VERE

→ L'unione in termini di proposizioni logiche è analoga a $P \vee Q$ (o P o Q o entrambe possono essere vere affinché $P \vee Q$ sia vera)

$A \cup B$ è analoga a $P \vee Q$ → si verifica se $x \in$ o del A o a B o a entrambi. È vera se o P è vera o Q è vera o le sono entrambe

Proprietà

→ COMMUTATIVA : $A \cup B = B \cup A$ (unione) ; $A \cap B = B \cap A$ (intersez.)

→ ASSOCIATIVA : $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (unione)

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (intersez.)

→ DISTRIBUTIVA : 1° distrib. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

2° distrib. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

dimostrazione della 2° proprietà distributiva

$A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$\boxed{1° \text{ FASE}}$: $A \cap (B \cup C)$

Se $x \in A \cap (B \cup C)$ significa che x sta in A e in $B \cup C$, cioè sta in A e o in B oppure in C dunque x o sta in A e in B o sta in A e in C

pag 4

INTERVALLI DELLA RETTA REALE

$(a;b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ intervallo APERTO LIMITATO

$[a;b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ " CHIUSO LIMITATO

$[a;b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ " LIMITATO NÉ APERTO NÉ CHIUSO

$(a;b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ " "

$(-\infty;b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$ " APERTO ILLIMITATO A SX

$(a;+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$ " APERTO " A DX

$(-\infty;b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$ " CHIUSO ILLIMITATO A SX

$[a;+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$ " CHIUSO " A DX

$(-\infty;+\infty) = \mathbb{R}$

FUNZIONI

Siano A e B 2 insiemi non vuoti, una funzione "f da A in B (o da A a B) indicata come

$f: A \to B$ oppure $A \xrightarrow{f} B$ è una legge che ad ogni elemento fissato di A fa corrispondere UNO ED UNO SOLO elemento di B.

A viene detto DOMINIO della funzione
B " " " CODOMINIO della funzione

Dato $x \in A$, l'elemento $y \in B$ che corrisponde ad x secondo la funzione f si chiama IMMAGINE di x secondo f e si indica con $f(x)$.

L'immagine di x secondo f $\mathrm{Im} f = f(A) = \{y \in B : \exists x \in A : f(x) = y\}$
$= \{f(x) \in B . x \in A\} \subseteq B$

In generale $\mathrm{Im} f \subseteq B$ ovvero al codominio

ESEMPIO

$A = \{\text{uomini sposati}\} \xrightarrow{f} B = \{\text{tutte le donne}\}$

f associa ad ogni uomo sposato la propria moglie

$\mathrm{Im} f = \{\text{donne sposate}\}$ $\mathrm{Im} f \subseteq B$ cioè l'immagine è un sottoinsieme del codominio

Può anche essere $f^{-1}(\{y\}) = \emptyset$ se $y \notin \text{Im} f$.

FUNZIONE INIETTIVA / 1 a 1

Si dice che $f: A \to B$ è INIETTIVA o 1a1 se ad elementi distinti di A corrispondono elementi distinti di B cioè

f si dice INIETTIVA $\iff \forall x_1, x_2 \in A,\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

oppure

$\iff \forall x_1, x_2 \in A,\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

oppure

$\iff$ Ogni $y \in \text{Im} f$ è immagine di un solo elemento $x \in A$

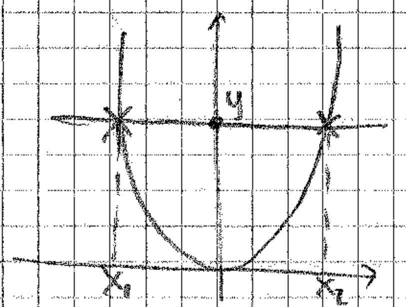
oppure

$\iff \forall y \in \text{Im} f$ la controimmagine consiste in un solo elemento

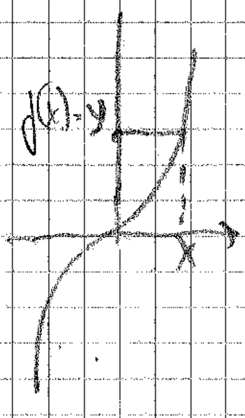
FUNZIONE BIUNIVOCA

Se $f: A \to B$ è sia iniettiva che suriettiva f si dice BIUNIVOCA e si scrive

$$f: A \xrightarrow[su]{1a1} B$$



suriettiva
non iniettiva perché $y = k$ interseca il grafico + di 1 volta

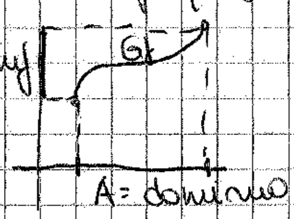


suriett e iniettiva $\Rightarrow$ biunivoca

16 sett.

Le funzioni di cui ci occuperemo sono le funzioni REALI di VARIABILE REALE cioè le $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Il grafico di una tale f è il sottoinsieme del piano $\mathbb{R}^2$ definito come $G_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in A, y = f(x)\}$, l'insieme delle coppie $\{(x, f(x)) : x \in A\}$



$P \in G_f \iff P = (x; f(x)) \quad x \in A$

La proiezione di G_f sull'asse x è il dominio, la proiezione di G_f sull'asse y è l'immagine di x

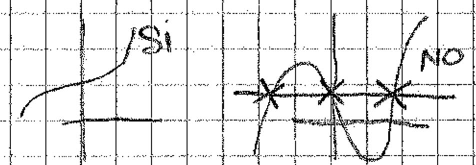
UN SOTTOINSIEME $G \subset \mathbb{R}^2$ (del piano) è un grafico di una funzione se e solo se AD OGNI X FISSATA C'È 1 SOLA Y

$\Downarrow$

$f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \iff$ ogni retta verticale $x = a$ (con $a \in \mathbb{R}$) interseca G al più in un punto.

PROPRIETÀ iniettività dal punto di vista del grafico

① $f : A \to \mathbb{R}$ è INIETTIVA $\iff$ ogni retta orizzontale $y = k$ con $k \in \mathbb{R}$ interseca G_f al più in un punto



Se A_1 è un sottoinsieme del dominio $A_1 \subseteq A$ si chiama RESTRIZIONE di f ad A_1, $f|_{A_1}$, la funzione $g : A_1 \to \mathbb{R}$

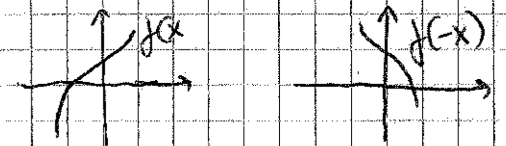
$g(x) = f(x) \quad \forall x \in A_1$

In pratica è la "stessa" funzione presa su un dominio più piccolo
Partendo da 1 f non iniettiva e restringendola opportunamente posso ottenere una funzione iniettiva
(NON SEMPRE, SE PRENDO $f(x) = K$ NON È POSSIBILE)

② $f : A \to \mathbb{R}$ SI DICE MONOTONA se è di uno dei seguenti 4 tipi:

- STRETTAMENTE CRESCENTE cioè $\forall x_1, x_2 \in A,\ x_1 < x_2 \iff f(x_1) < f(x_2)$
- STRETTAMENTE DECRESCENTE cioè $\forall x_1, x_2 \in A,\ x_1 < x_2 \iff f(x_1) > f(x_2)$
- CRESCENTE cioè $\forall x_1, x_2 \in A,\ x_1 < x_2 \iff f(x_1) \leq f(x_2)$
- DECRESCENTE cioè $\forall x_1, x_2 \in A,\ x_1 < x_2 \iff f(x_1) \geq f(x_2)$

ES

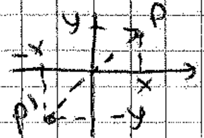


Se $f(x)$ è pari, G_f rimane invariato.

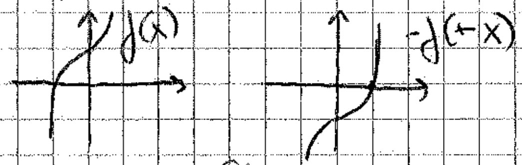
2.

La simmetria risp. all'origine è data da

$P=(x,y) \to (-x,-y)$



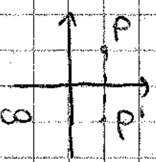
Può essere considerata come composizione di 2 riflessioni risp agli assi.
Applicando questa simmetria ad $f(x)$ si ottiene la funzione $-f(-x)$, il cui grafico è il simmetrico di G_f rispetto all'origine.



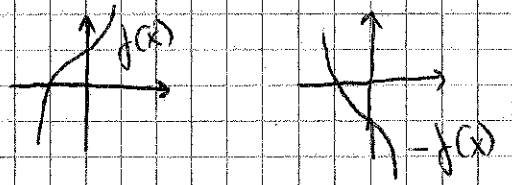
Se f è dispari, G_f rimane invariato.

3. SIMMETRIA RISP. ALL'ASSE X

$P=(x,y) \to P'(x,-y)$



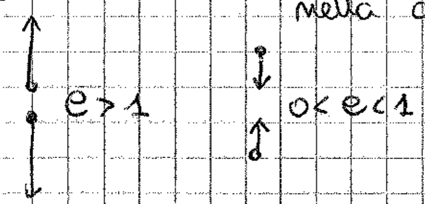
Applicata a $f(x)$ passa a $-f(x)$ il cui grafico è il simmetrico di G_f rispetto all'asse x



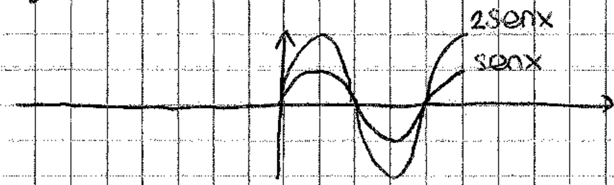
L'unica funzione f tale che G_f rimanga cioè tale che $-f(x)=f(x)$ $\forall x$ è la funzione identicamente nulla $f(x)=0$ $\forall x$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 17 di 446

• $c\,f(x)$ con $c>0$: si dilata il G_f se $c>1$, si comprime $0<c<1$ nella direzione verticale

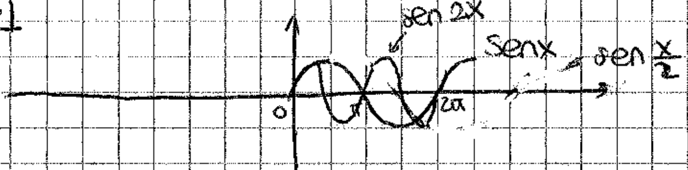


ES|



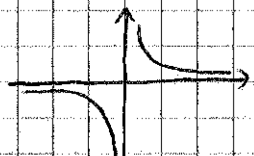
• $f(cx)$ con $c>0$: si dilata il G_f se $0<c<1$ si comprime se $c>1$ nella direzione orizzontale

ES|

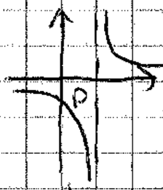


ESEMPI|

$f(x) = \frac{1}{x}$

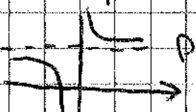


(1) $\frac{1}{x-p}$

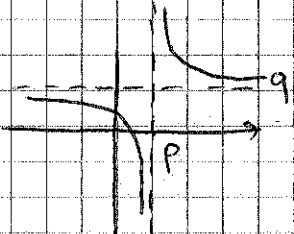


con $p>0$

(2) $\frac{1}{x} + p$



(4) $\frac{1}{x-p} + q$



con $p>0$
$q>0$

$$\frac{1}{x-p} + q = \frac{1+xq-pq}{x-p} = \frac{ax+b}{cx+d}$$

rapporto tra 2 polinomi di 1° grado $\rightarrow$ $\frac{ax+b}{cx+d}$

Viceversa la funzione $\frac{ax+b}{cx+d}$

con $c \neq 0$
$\rightarrow ad-bc \neq 0$ (non devono essere proporzionali) ha come grafico un iperbole con assi paralleli agli assi coordinati e si può ottenere da $y=\frac{1}{x}$ applicando traslazioni, simmetrie, dilatazioni.

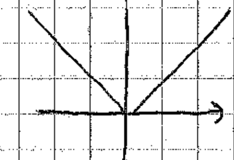
Per disegnarla si scrive $f(x)$ nella forma

$$f(x) = \frac{ax+b}{bx+c} = \frac{A}{x-p} + q$$

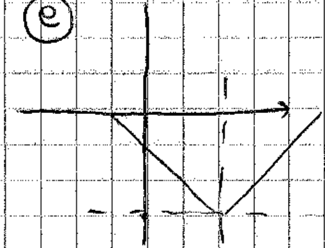
di modo che s'identifichi la traslazione, e gli assi $x=p$ $y=q$

c) $|2x+1| = \begin{cases} 2x+1 & 2x+1 \geq 0 & x \geq -\frac{1}{2} \\ -(2x+1) & 2x+1 < 0 & x < -\frac{1}{2} \end{cases}$

2] $y = |x-2|-3$

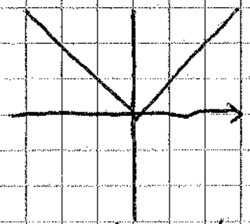
a)  $|x|$

b)  $|x-2|$

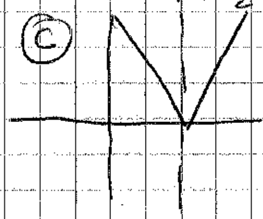
e)  $|x-2|-3$

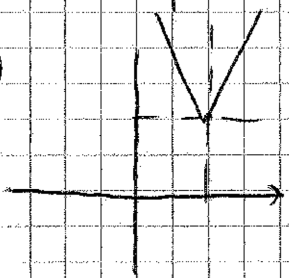
3] $y = |2x-5|+1$

$y = 2\left|x-\frac{5}{2}\right|+1$

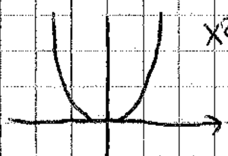
a)  $|x|$

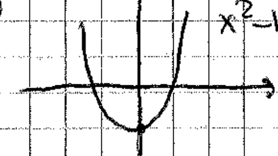
b)  $\left|x-\frac{5}{2}\right|$

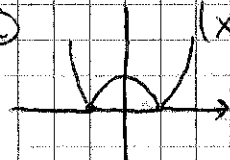
c)  $2\left|x-\frac{5}{2}\right|$

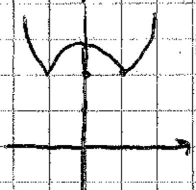
d)  $2\left|x-\frac{5}{2}\right|+1$

4] $y = |x^2-1|+2$

a)  x^2

b)  x^2-1

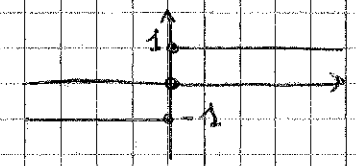
c)  $|x^2-1|$

d)  $|x^2-1|+2$

ALTRI ESEMPI DI FUNZIONI ELEMENTARI

funzione segno

$$\text{Segno}(x) = \begin{cases} 1 & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$$



$\text{Img} = \{-1, 0, 1\}$

Parte intera

$[x]$ = il più grande intero $\leq x$

$[0]=0 \quad [1/2]=0 \quad [1]=1 \quad [3/2]=1 \quad [2,7]=2$

$[\pi]=3 \quad [-1/2]=-1 \quad [-1]=-1 \quad [-\pi]=-4$

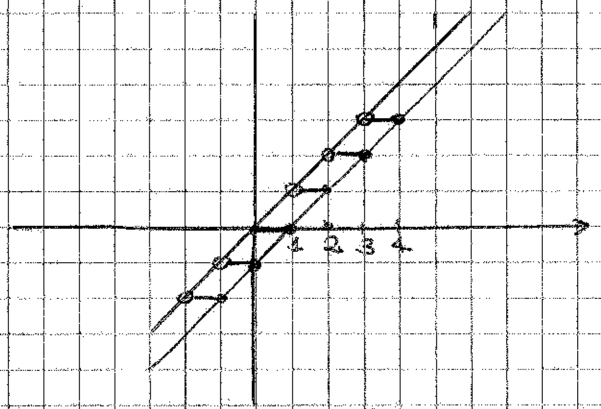
$f=[x]$ associa ogni x al suo intero $\leq x$

$\text{Img} = \mathbb{Z}$

↳ $f([0,2]) = \{0,1,2\}$ → la funzione tra 0 e 2 ha come corrispondenti solo i punti 0, 1, 2.

↳ $f^{-1}(\{0\}) = [0;1)$ → la contro immagine di 0 può essere compresa tra 0 e 1 escluso.

f(x) è compresa tra x e x-1



$$\left.\begin{array}{l} x-1 < [x] \leq x \\ [x] \leq x < [x]+1 \end{array}\right\} \forall x \in \mathbb{R}$$

Mantissa o Parte frazionaria

$M(x) = x - [x]$ → il numero x meno il suo intero $\leq x$

$M(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{Z}$ → la mantissa di x ∈ agli interi è zero

ES

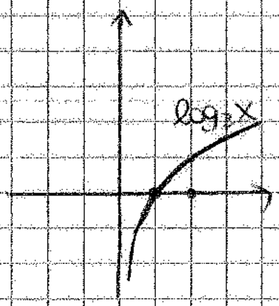
$M(\pi) = \pi - [\pi] = \pi - 3 \cong 0,14$
$M(-\pi) = -\pi - [-\pi] = -\pi + 4 \cong 0,86$

$\forall x \in \mathbb{R} \qquad 0 \leq M(x) < 1$

$\log_a x$

con $a>1$ | con $0<a<1$

ES) $a=2$



ES) $a=1/2$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x = k$; $x=\log_{1/2} k$ $k>0$

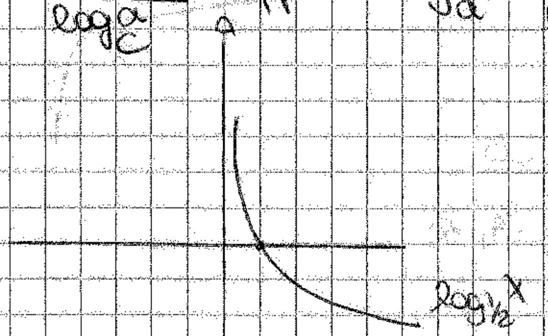
$2^{-x}=k$ $-x=\log_2 k$ $x=-\log_2 k$

?

$\log_{1/2} k = -\log_2 k$

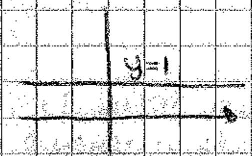
legge del logaritmo (cambio di base)

$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ oppure $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

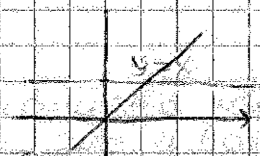


Funzione potenza ad esponente intero ($\in \mathbb{Z}$)

$y=x^n$ con $n \in \mathbb{Z}$



① $n=0$

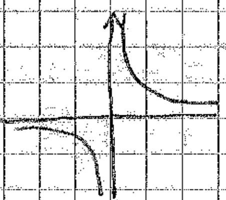


② $n=1$

③ $n=2$

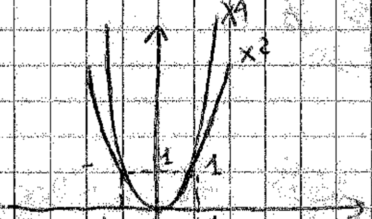
④ $n=3$

⑤ $n=-1$



① n pari >0

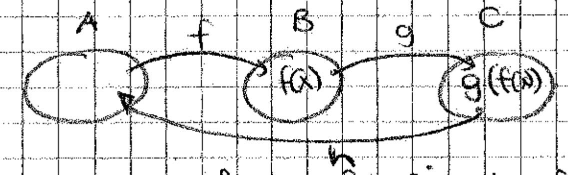
$n=2,4,6$



②

Funzioni composte

Siano A, B, C tre insiemi e $f: A \to B$, $g: B \to C$



Possiamo comporre le 2 funzioni f e g costruendo una nuova funzione h

$h: A \to C$ definito da $h(x) = g(f(x))\ \forall x \in A$

h si chiama la funzione composta di f e g e si indica:

$$\boxed{g \circ f} \Rightarrow g \circ f = g(f(x))\ \forall x \in A$$

PROPRIETA'

- DIAGRAMMA COMMUTATIVO

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd}$$

Anche se questa operazione, ovvero la composizione, non gode della proprietà commutativa anche se risulta possibile definire sia $g \circ f$ che $f \circ g$ in generale si ha

$$g \circ f \neq f \circ g$$

$\boxed{ES}$ $f(x) = x^2$ $g(x) = x-1$

$g \circ f(x) = g(f(x)) = x^2 - 1$ $f \circ g(x) = (x-1)^2$

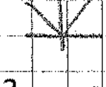
- ASSOCIATIVA: vale la proprietà associativa per la composizione di 3 o più funzioni

$$(g \circ f) \circ h = g(f \circ h) = g \circ f \circ h$$

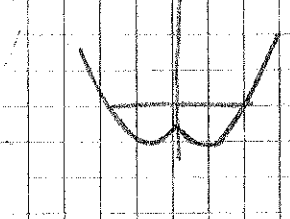
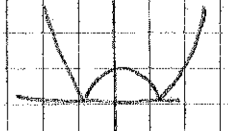
$\boxed{ES}$ $f(x) = x^2$ $g(x) = sen x$

$g \circ f(x) = sen(x^2)$
$f \circ g(x) = (sen x)^2$
$f \circ f(x) = x^4$
$g \circ f \circ g(x) = sen(sen x)^2$
$f \circ g \circ g(x) = f \circ (sen(sen x)) = [sen(sen x)]^2$

esercizi

$f(x) = x^2 - x - 2$  $g(x) = |x|$ 

$f \circ g(x) = |x^2 - |x| - 2|$ $g \circ f(x) = |x^2 - x - 2|$

ES: $f(x)=\sqrt{x}$ $\quad g(x)=-x^2-1$

$g\circ f = -(\sqrt{x})^2-1 = -x-1$ definita per $x \geq 0$

$f\circ g = \sqrt{-x^2-1} \rightarrow$ dominio $f\circ g = \emptyset$

Se f e g sono funzioni monotone allora anche $g\circ f$ lo è e si ha che:

- $g\circ f$ è crescente se f e g sono entrambe crescenti o entrambe decrescenti
- $g\circ f$ è decrescente se f è crescente e g decrescente o viceversa.

In ogni caso $g\circ f$ è monotona strettamente se f e g lo sono anche loro.

DIMOSTRAZIONE

Siano f e g decrescenti, siano $x_1, x_2 \in$ dominio di $g\circ f$

con $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) > g(f(x_2))$

cioè: $x_1 < x_2 \Rightarrow g\circ f(x_1) > g\circ f(x_2) \rightarrow g\circ f$ è crescente

ESEMPIO

$f(x)=2^x \quad g(x)=x^5$

$g\circ f(x) = (2^x)^5 = 2^{5x}$

$f\circ g(x) = 2^{(x^5)}$

4

18 sett.

FUNZIONE INVERSA

Sia $f: A \to B$ $\quad A \xrightarrow[\text{su}]{1a1} B$ (biunivoca) tra due insiemi A e B

Fissato $y \in B$, esiste sicuramente $x \in A$ / $f(x) = y$ perchè f è suriettiva su B inoltre tale x è unico perchè f è iniettiva. Possiamo allora costruire una nuova funzione

$f^{-1}: B \to A$, detta funzione inversa di f, ponendo che ogni $y \in B$ fissato $f^{-1}(y) = x$ dove x è quell'unico elemento di A tale che $f(x) = y$

Per definizione

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y \quad \text{cioè} \quad f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall x \in A,$$

$$f(f^{-1}(y)) = y \quad \forall y \in B$$

In termini di composizione abbiamo che

$f^{-1} \circ f = id_A$ $\qquad id_A : A \to A$, $x \to x$ $\qquad$ Prendendo $x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{f^{-1}(x)} x$ funzione identica

$f \circ f^{-1} = id_B$ identità $\qquad id_B : B \to B$, $y \to y$

Viceversa se $f: A \to B$ ed esiste una funzione $g: B \to A$ tale che

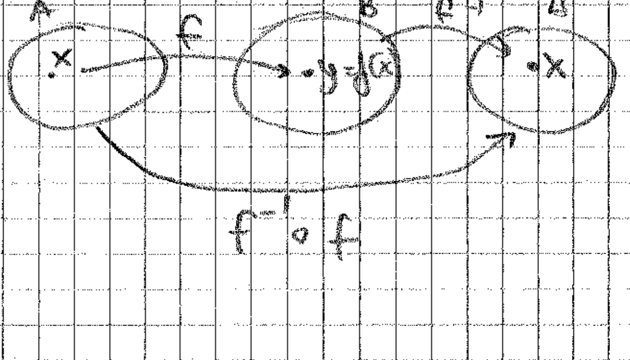
$g(f(x)) = x \quad \forall x \in A$ e $f(g(y)) = y \quad \forall y \in B$ allora f è biunivoca e $g = f^{-1}$ (funz. inversa.

Se f è biunivoca tra A e B o anche solo se f è iniettiva diremo che è INVERTIBILE

PROPRIETÀ

① Se $f: A \to B$ è biunivoca anche $f^{-1}: B \to A$ lo è e vale $(f^{-1})^{-1} = f$

② $f^{-1} \circ f = id_A$, $f \circ f^{-1} = id_B$

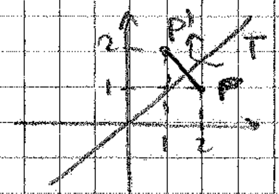


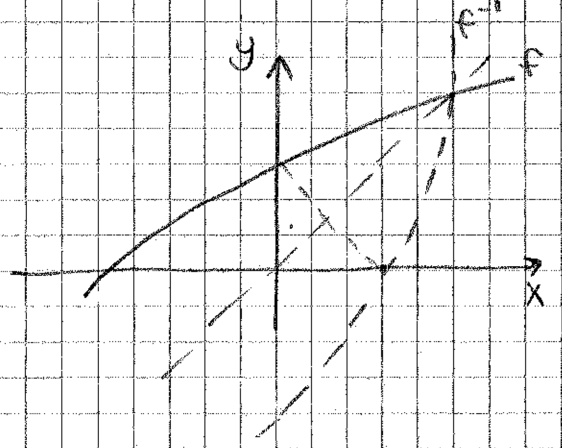
pag ①

⑤ Se $f: A \xrightarrow[su]{1-1} B$, e $f^{-1}: B \xrightarrow[su]{1-1} A$ con $A, B \subseteq \mathbb{R}$ allora il grafico di f^{-1} è il simmetrico del grafico di f rispetto alla bisettrice $y=x$

Infatti sia $(a,b) \in G_f$, dunque $b=f(a)$. Allora $(b,a) \in G_{f^{-1}}$ perchè $a=f^{-1}(b)$. Ma i due punti del piano $\mathbb{R}^2$ (a,b) e (b,a) sono simmetrici l'uno dell'altro rispetto alla 1° bisettrice $y=x$ essendo la simmetria rispetto a tale retta

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad (x,y) \to (y;x)$
simmetria rispetto alla 1° bisettrice





Si suppone ovviamente che i grafici G_f, $G_{f^{-1}}$ delle funzioni $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$ siano disegnati nel piano mettendo come sempre la variabile indipendente x in orizzontale e quella dipendente y in verticale.

Se $f(x)$ è data da una formula per determinare esplicitamente una formula per la funzione inversa f^{-1} bisogna risolvere l'equazione

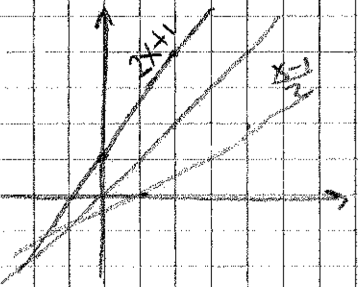
$f(x)=y$ per x in funzione di y ottenendo

$$x=f^{-1}(y)$$

Ciò può non essere sempre possibile anche se f^{-1} esiste, può non essere data da una forma esplicita.

ESEMPIO

① $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x)=2x+1$ ogni retta obliqua è invertibile essendo 1-1 e su su tt $\mathbb{R}$



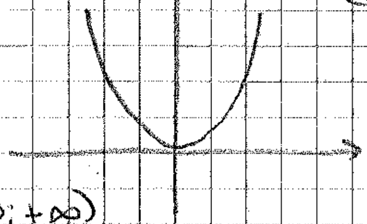
$2x+1=y$

$x=\frac{\cancel{y}-1}{2}=f^{-1}(y)$

REGOLA

- $a^{\log_a t} = t$
- $\log_a a^z = z$
- $a^{x+y} = a^x \cdot a^y \longrightarrow \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
- $a^{-x} = \frac{1}{a^x} \longrightarrow \log_a(x^{-1}) = -\log_a x$
- $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y} \longrightarrow \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
- $(a^x)^y = a^{xy} \longrightarrow \log_a(x^y) = y \log_a x$

5) $f(x) = x^2 \quad f: \mathbb{R} \to [0; +\infty)$ ← QUANDO f NON E' INIETTIVA

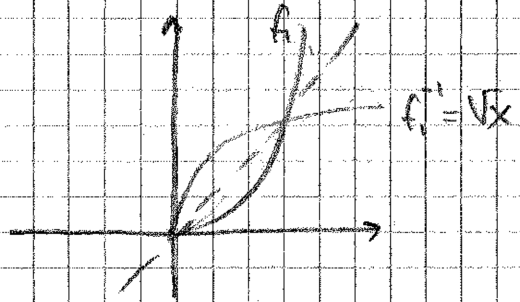


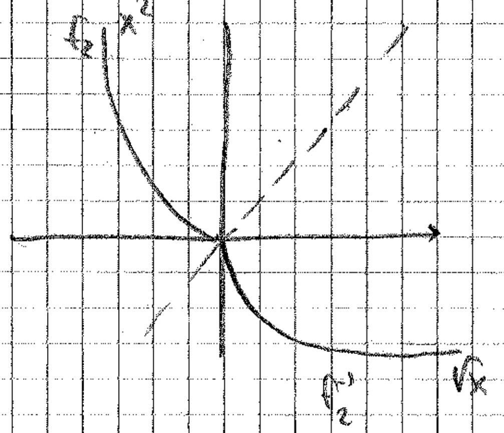
f non è iniettiva ⇒ non è invertibile in $\mathbb{R}$
però le 2 restrizioni

$f_1 = f|_{[0,+\infty)} = [0, +\infty) \to [0; +\infty)$

$f_2 = f|_{(-\infty; 0]} = (-\infty; 0] \to (-\infty, 0]$
↳ RESTRIZIONE

f_1 e f_2 sono invertibili perché iniettive

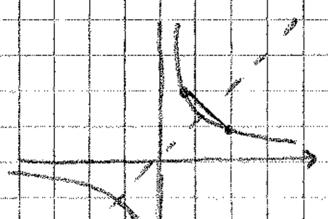




Analogo il discorso per x^4, x^6

6) Inversa di un iperbole

$f(x) = \frac{1}{x} \quad f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$



$G_f \equiv G_{f^{-1}}$ curva unita formata da punti non uniti

$f(x) = y \Rightarrow \frac{1}{x} = y \quad x = \frac{1}{y} = f^{-1}(y)$

$\Rightarrow f^{-1} = f$ ed infatti il grafico di f è invariante rispetto alla simmetria della bisettrice

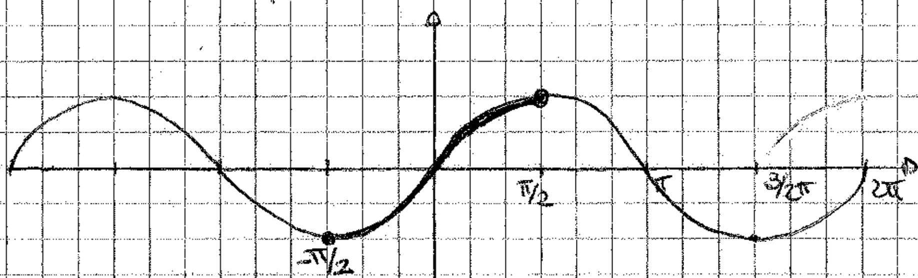
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 35 di 446

INVERSE DELLE FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

Le funzioni trigonometriche, essendo periodiche, non sono iniettive e quindi neanche invertibili. È necessario restringere le funzioni ad un <u>intervallo di monotonia</u>

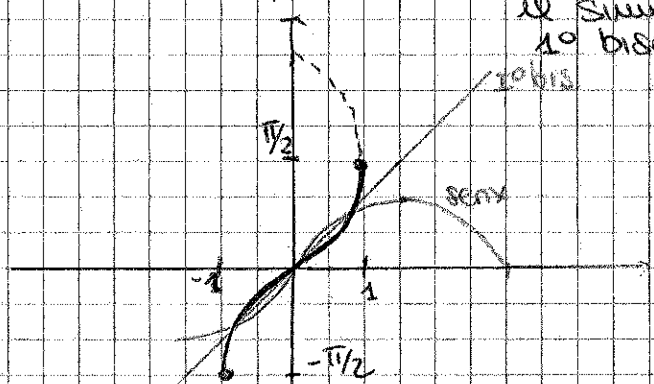
① $y = \operatorname{sen} x$ • senx è periodica di 2π
$\Leftrightarrow \operatorname{sen}(x+2\pi) = \operatorname{sen} x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ $\exists$ RESTRIZIONE DEL DOMINIO

$\operatorname{sen} x \big|_{[-\pi/2;\ \pi/2]} \rightarrow [-1;1]$



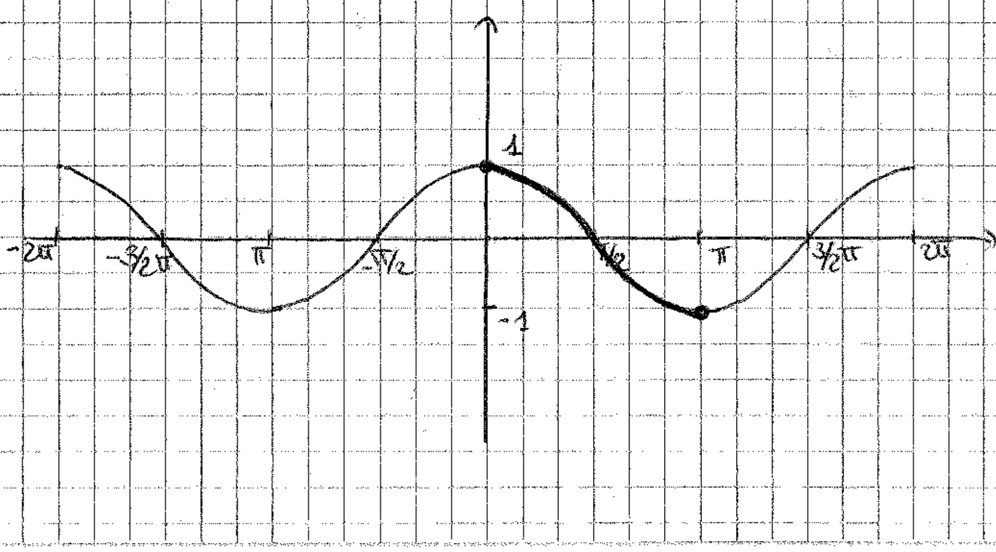
ARCSENX : $[-1;1] \rightarrow [-\pi/2; \pi/2]$

$\operatorname{arcsen} x : \left(\operatorname{sen} x \big|_{[-\pi/2;\ \pi/2]}\right)^{-1}$ → Arcosenx è la funzione inversa di senx ed il suo grafico è il simmetrico del grafico risp. alla 1° bisettrice



② $y = \cos x$ • cosx è periodico di 2π
$\cos(x+2\pi) = \cos x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

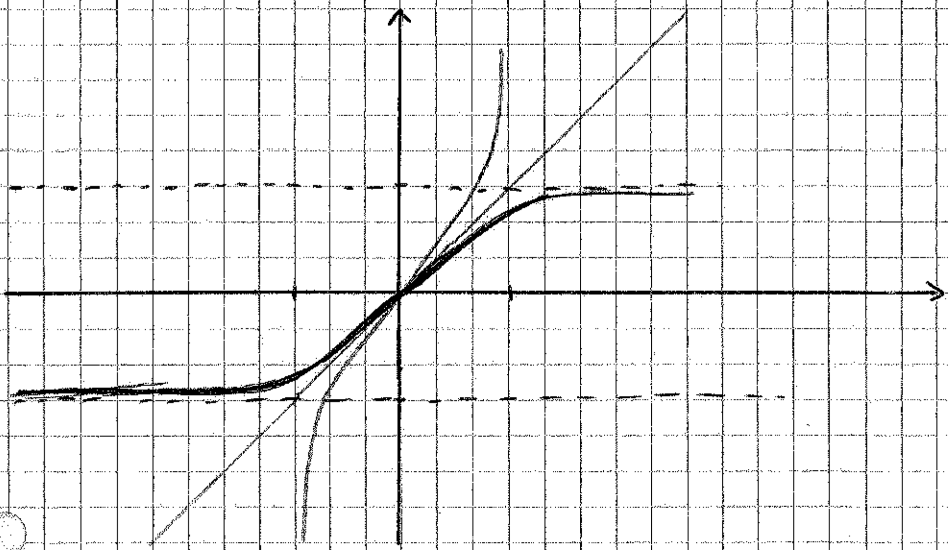
$\cos x \big|_{[0;\pi]} \longrightarrow [-1;1]$



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 37 di 446

ARCTG X : $\mathbb{R} \to (-\pi/2; \pi/2)$

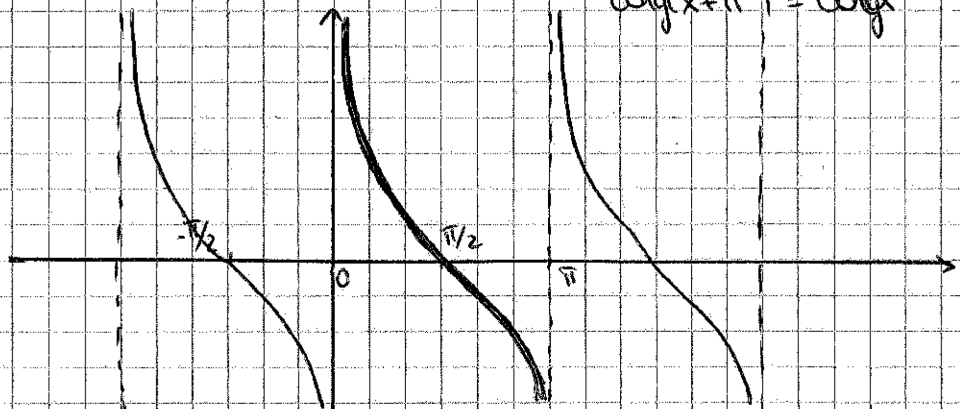
$\text{arctg}x = \left(\text{tg}x\,\big|_{(-\pi/2;\,\pi/2)}\right)^{-1}$ ⇒ Grafico simmetrico risp. 1° bisettrice



④ $y = \text{cotg}x$

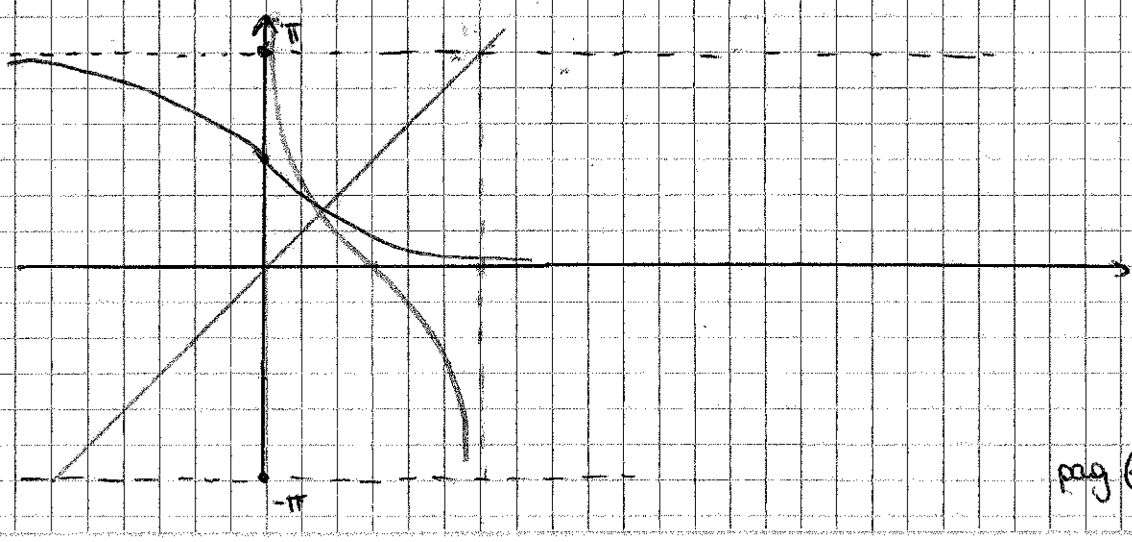
$\text{cotg}x\,\big|_{(0,\pi)} \to \mathbb{R}$ ed è periodica di π cioè

$\text{cotg}(x+\pi) = \text{cotg}x \quad \forall x \in \mathbb{R}$



ARCCOTG x : $\mathbb{R} \to (0;\pi)$

$\text{arccotg}\,x = \left(\text{cotg}x\,\big|_{(0,\pi)}\right)^{-1}$ → funz. inversa → Grafico simm. risp. 1° bisettrice



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 39 di 446

SOMMATORIE

21 sett.

Dati n numeri a_1, a_2, a_n si chiama sommatoria di termini a_k e indice k l'espressione seguente

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \dots a_n$$ (sommatoria per k che va da 1 a n di a_k)

L'indice si può denotare anche con $i, j, k, l, u \dots$

L'indice iniziale può essere qualsiasi n° basta che sia $\leq n$ (non deve essere x forza 1)

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} \dots + a_n \quad , \quad \sum_{k=n}^{n} a_n = a_n \quad \text{con } m \leq n$$

ESEMPI

① $\sum_{k=0}^{n} 2^k = 1 + 2 + 2^2 + \dots 2^n$; ② $\sum_{j=1}^{n} \frac{j}{j+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots \frac{n}{n+1}$;

③ $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(k+1)^3} = 1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} \dots \frac{(-1)^n}{(n+1)^3}$; ④ $\sum_{\substack{k = 1 \text{ a } 100 \\ k \text{ multiplo di } 4}} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{4^2} + \frac{1}{8^2} \dots \frac{1}{96^2} + \frac{1}{100^2}$

pongo $k = 4p$
se $k \leq 100$ $4p \leq 100$ $p \leq 25$ $\to$ $= \sum_{p=1}^{25} \frac{1}{(4p)^2}$

⑤ $\sum_{\substack{1 \leq k \leq 20 \\ k \text{ n° primo}}} k^4 = 1^4 + 3^4 + 5^4 + 7^4 + 9^4 + 11^4 + 13^4 + 17^4 + 19^4$

PROPRIETÀ SOMMATORIE

1) $\sum_{k=1}^{n} c = \underbrace{c + c \dots + c}_{n \text{ volte}} = nc$ c non dipende da k

2) $\sum_{k=1}^{n} c \cdot a_k = c \cdot a_1 + c a_2 \dots + c a_n = c \sum_{k=1}^{n} a_k$

3) $\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$

4) $\sum_{k=1}^{m} a_k + \sum_{m+1 \leq k \leq n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k$ con $m < n$

5) $\sum_{k=1}^{n} (a_{k+1} - a_k) = \cancel{a_2} - a_1 + \cancel{a_3} - \cancel{a_2} + a_4 - \cancel{a_3} \dots \cancel{a_n} - a_{n-1} + a_{n+1} - \cancel{a_n}$
$= a_{n+1} - a_1$

pag ①

UGUAGLIANDO I RISULTATI

$$2\sum_{k=1}^{n} k + n = (n+1)^2 - 1 \quad ; \quad 2\sum_{k=1}^{n} k = (n+1)^2 - n - 1 = n^2+2n+1-n-1$$

$$= 2\sum_{k=1}^{n} k = n^2+n = n(n+1) \qquad \text{c.v.d} \qquad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

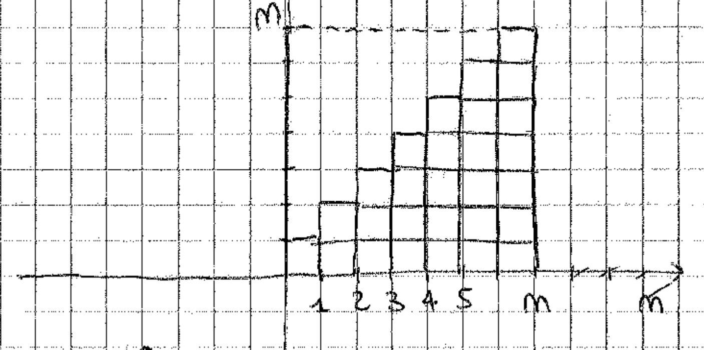
dimostr.: 2° metodo

si accorpano

$$2\sum_{k=1}^{n} k = (1+2+3+\ldots n) + (n+(n-1)+(n-2)+\ldots+2+1)$$

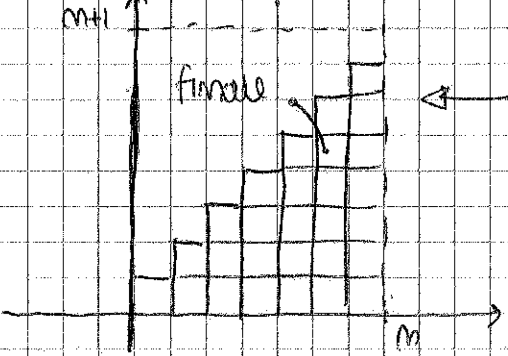
→ riflessione degli indici
→ da n a 1 = (n-1) (n-2) 1

$$= \underbrace{(n+1)+(1+n)+(1+n)\ldots+(1+n)}_{n \text{ volte}} = n(n+1) \iff \cancel{2}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$



Area regione iniziale = (qnt quadratini) $1+2+3+4\ldots+n$

Rappresenta algebricamente la sommatoria $\sum_{k=1}^{n} k$



Area regione finale (tutta) = $n(n+1)$
2 area iniziale

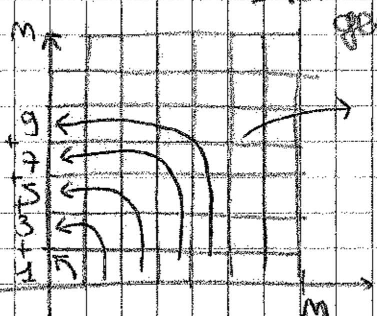
(5) Per una progressione aritmetica del tipo $a+\beta k$ si ottiene $\sum_{k=1}^{n} (a+\beta k) = \frac{n+[2a+\beta(n+1)]}{2}$

attraverso la semplif.

VEDI

(6) $\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = (1+3+5\ldots+(2n-1)) = n^2$ dimostrare x esercizio (5) / o

→ La Risoluz geometrica



Area n^2
contando i quadratini nel modo indicato
$1+3+5+7\ldots+(2n-1) = n^2$

FATTORIALE & BINOMIALE

Sia $n \in \mathbb{N}^+$, il fattoriale di n è definito come $n!$

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

Si pone x definizione $0! = 1$

Vale la legge fondamentale $\rightarrow n! = n \cdot (n-1)!$

Siano ora $k, n \in \mathbb{N}$ con $0 \leq k \leq n$ il coefficiente binomiale $\binom{n}{k}$ è definito come $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Essendo il fattoriale scrivibile come $n! = n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-k+1)(n-k)!$ iterando la legge fondamentale

$$\Rightarrow \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-k+1)\cancel{(n-k)!}}{k!\cancel{(n-k)!}} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$$

PROPRIETÀ

1) $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n} \rightarrow \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1$

2) $\binom{n}{1} = n = \binom{n}{n-1} \quad \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n$

3) $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{n-2}$ In generale vale la simmetria

4) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

VERIFICA X ESERCIZIO dimostr.

5) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

Dalla 5 segue che gli $\binom{n}{k}$ si possono calcolare in sequenza come segue

TRIANGOLO DI TARTAGLIA

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & \\
 & & 1 & & 3 & + & 3 & & 1 \\
 & 1 & + & 4 & + & 6 & + & 4 & + \; 1 \\
1 & & \boxed{5} & & 10 & & 10 & & 5 \quad 1
\end{array}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 45 di 446

Osserviamo che ad ogni permutazione noi possiamo associare una funzione biunivoca di A_m in se stesso, $f: A_m \xrightarrow[su]{1a1} A_m$ ponendo:

$f(1) = a_1$; $f(2) = a_2$ ... $f(m) = a_m$

ES: Alla permutazione $(2,3,1)$ posso far corrispondere $f: A_3 \to A_3$

$f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f(3) = 1$

viceversa data $f: A_m \xrightarrow[su]{1a1} A_m$ biunivoca, posso associare a f la permutazione $(a_1, a_2 \dots a_m)$ data da $a_1 = f(1)$; $a_2 = f(2)$ $a_3 \dots$ $a_m = f(m)$

$\Rightarrow$ C'è una corrispondenza biunivoca tra le permutazioni di A_m e le funzioni biunivoche di A_m in se stesso.

TEOREMA

Il numero di permutazioni di A_m è $m!$

Dimostrazione $\rightarrow$ 1° Estraggo dall'urna gli m numeri di A_m uno alla volta disponendoli

estrazioni

1°	2°	3°						m°
a_1	a_2	a_3						a_m

$\equiv (a_1, a_2, a_3, \dots a_m)$

Il n° totale di ennuple (permutazioni cioè il n° totale di possibili " di possibili estrazioni

$\underset{1° \text{ estraz.}}{m} \cdot \underset{2° \text{ estraz.}}{(m-1)} (m-2) \dots 2 \cdot 1 = m!$ il numero di possibili estrazioni è $m!$

2° dimostraz. - Per induzione

Passo $m-1 \to m$ aggiungo all'urna un elemento a_{m+1}

es. $3 \to 4$

$(1,2,3) \longleftrightarrow$ aggiungo 4 in 4 modi

$(4,1,2,3)$
$(1,2,3,4)$
$(1,2,4,3)$
$(1,4,2,3)$

se ho 6 permutaz. x ognuna ne ho 4

$6 \cdot 4 = 3! \cdot 4 = 4!$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{(m-1)!\, m = m!}$$

22 sett.

TEOREMA

Il numero di sottoinsiemi di k elementi di A_n $(0 \le k \le n)$ è $\binom{n}{k}$

Dimostrazione. → Presa una sequenza combinata di k elementi di A_n $(a_1, a_2, \dots a_k)$, tutte le k-uple che si ottengono da questa permutando gli a_j corrispondono allo stesso insieme $\{a_1, a_2 \dots a_k\}$

N° sottoinsiemi di k elementi $= \frac{d_{n,k}}{k!} = \binom{n}{k}$ n sottoinsiemi di k elementi

ESEMPI:

$\binom{n}{0} = 1$ 1 solo insieme con $\emptyset$ elementi

$\binom{n}{1} = n$ infatti ci sono n sottoinsiemi con 1 elemento $\{1\}\ \{2\} \dots \{n\}$

$\binom{n}{n-1} =$ n sottoinsiemi di $n-1$ elementi

ESEMPIO

$n = 90$
$k = 6$

$$\binom{90}{6} = \frac{90!}{6!\,84!} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86 \cdot 85 \cdot \cancel{84!}}{720 \cdot \cancel{84!}} = 622.614.600$$

Ricordiamo che se B = insieme finito di B

$|B|$ = cardinalità di B cioè il n° di elementi di B.

COROLLARIO Il n° totale di sottoinsiemi di A_n è 2^n cioè $|P(A_n)| = 2^n$

Dim. Infatti tale numero è: $N = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} \dots + \binom{n}{n}$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} \cdot 1^k = \boxed{(1+1)^n} \ ?$$

$$\left[(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \right. \quad \text{per } a = b = 1.$$

$$N = \underset{\text{insieme }\emptyset}{\binom{n}{0}} + \underset{\text{gli elem. raggr. a 1 a 1}}{\binom{n}{1}} + \underset{\text{raggr. a 2}}{\binom{n}{2}}$$

1

N° REALI

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} ; \ p, q \in \mathbb{Z} \ , \ q \neq 0 \right\}$ n° irrazionali

2 rappresentazioni di $\mathbb{Q}$

① Rappresentazione decimale (base 10)

$3275 = 3 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$

In generale per passare da $\frac{p}{q}$ all'allineamento decimale $a_0, a_1 a_2 \dots$ dove $a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_1, a_2 \dots$ sono le cifre decimali

$0 \le a_j \le 9 \quad \forall j \ge 1$ si usa l'algoritmo della divisione.

① $\begin{array}{c|c} p & q \\ \hline r_0 & a_0 \end{array}$ Sia $\frac{p}{q} > 0$ con $p, q \in \mathbb{N}$

$\hookrightarrow p = q \cdot a_0 + r_0$ con $0 \le r_0 < q$

$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{r_0}{q} \qquad \frac{r_0}{q} < 1$

$a_0 \le \frac{p}{q} < a_0 + 1$

② Si divide $10 r_0$ per q e si mette la virgola

$\begin{array}{c|c} 10 r_0 & q \\ r_1 & a_1 \end{array} \quad 0 \le r_1 < q \qquad \Rightarrow 10 r_0 = a_1 q + r_1$

$\frac{r_0}{q} = \frac{a_1}{10} + \frac{1}{10} \frac{r_1}{q}$

$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{1}{10} \frac{r_1}{q}$

$a_0 + \frac{a_1}{10} \le \frac{p}{q} < a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{1}{10}$

③ divido $\begin{array}{c|c} 10 r_1 & q \\ r_2 & a_2 \end{array}$ $\qquad \frac{p}{q} = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \frac{1}{100} \frac{r_2}{q}$

$a_0 + a_1 + \frac{a_2}{100} \le \frac{p}{q} < a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \frac{1}{100}$

Procedendo in questo modo otteniamo l'ennesima cifra decimale a_n

$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \dots \frac{a_n}{10^n} + \frac{1}{10^n} \frac{r_n}{q}$

$a_0 + \frac{a_1}{10} + \dots \frac{a_n}{10^n} \le \frac{p}{q} < a_0 + \frac{a_1}{10} + \dots \frac{a_n}{10^n} + \frac{1}{10^n}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 51 di 446

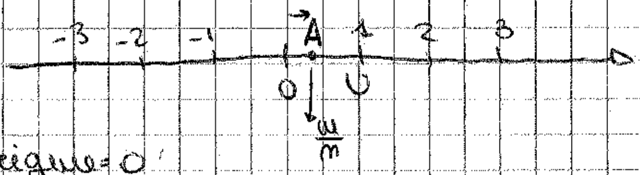
REGOLA

$a_0, a_1 \dots a_k \overline{9} = a_0, a_1 \dots a_{k-1}, a_k+1$

Con questa regola abbiamo una corrispondenza biunivoca tra Q e l'insieme degli allineamenti decimali con segno finiti e infiniti periodici.

E' possibile estendere le operazioni e l'ordinamento all'insieme di tutti gli allineamenti decimali?

② RAPPRESENTAZIONE GEOMETRICA di Q



O = origine = 0

U = 1   multipli del segmento orientato $\vec{OU}$ a cui corrispondono i numeri di $\mathbb{Z}$
costruiamo poi i sottomultipli di $\vec{OU}$ ~~che corrispondono a~~ cui corrispondono $\frac{1}{n}$
poi i multipli dei sottomultipli a cui corrispondono $\frac{m}{n}$

Definiamo così una frazione

$f: \mathbb{Q} \to$ retta $f(\frac{m}{n})$ = punto A ∈ retta tale che $\vec{UA}$ e $\vec{OU}$ sono commensurabili (se hanno un multiplo in comune) cioè

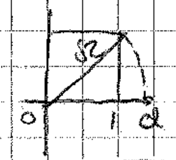
$n\vec{OA} = m\vec{OU}$ cioè se $\vec{OA}$ e $\vec{OU}$ hanno un multiplo in comune.

Tutti i segmenti sono commensurabili con l'unità?

In altri termini: f è suriettiva? Cioè ogni ~~multiplo~~ punto della retta $\frac{m}{n}$ ha 1 ascissa razionale?

Risposta: NO dal seguente teorema.

$d = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \Rightarrow d^2 = 2$



TEOREMA

TEOREMA

$\sqrt{2}$ non è razionale.

Dimostr. x ASSURDO, esista $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ tale che $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$.

Possiamo sempre supporre che m, n primi tra loro

Altri esempi: $e \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
$\pi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

OPERAZIONI IN $\mathbb{R}$

$x = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots > 0 \qquad x \in \mathbb{R}$

$y = b_0, b_1 b_2 b_3 \dots > 0 \qquad y \in \mathbb{R}$

Definisco la troncata n-esima di x se $n \in \mathbb{N}$:

troncata a n=1 significa con 1 cifra decim.

$x^{(n)} = a_0, a_1 a_2 \dots a_n$

$x^{(0)} = a_0 \quad , \quad x^{(1)} = a_0, a_1 \quad , \quad x^{(2)} = a_0, a_1 a_2$ e così via.

Considero $c_n = x^{(n)} + y^{(n)} \quad n = 0, 1, 2 \dots$ ① $\boxed{\text{addizionare}}$

Si può dimostrare che la successione di numeri c_n è stabilizzata e individua dunque un unico numero reale, che è proprio $x+y$

Una successione c_n di allineamento

$c_0 = c_{00}, c_{01} c_{02} c_{03}$

$c_1 = c_{10}, c_{11}, c_{12} \dots$

$c_2 = c_{20}, c_{21}, c_{22} \dots$

Si dice stabilizzata se quando la colonna da un certo punto in poi la colonna diventa costante.

★ $\boxed{es} \to \quad x = \frac{8}{9} = 0,888\dots = 0,\bar{8}$

$y = \sqrt{2} = 1,4142\dots$

$x^{(0)} = 0 \qquad x^{(1)} = 0,8$

$y^{(0)} = 1 \qquad y^{(1)} = 1,4$

$c_n = x^{(n)} + y^{(n)}$

1
2,2
2,29
2,302
2,3030
2,30309
2,30310

Il n° $\frac{8}{9} + \sqrt{2} = 2,30310$ (prenderemo i valori stabilizzati)

④

Alla serie associo a P il numero reale $x = a_0, a_1, a_2 \dots$

- Viceversa, ad ogni allineamento decimale $x \in \mathbb{R}$ si può associare uno ed uno solo punto $P \in$ retta tale che l'ascissa di P coincide con l'allineamento di partenza.

PER DIMOSTRARE QST. si usa una proprietà [illegible] non algebrica della retta nota come il [illegible]

POSTULATO DI CONTINUITÀ della retta

(2 insiemi)
Se $A, B \subseteq$ retta formano una sezione della retta,

cioè $A \cup B =$ retta
$A \cap B = \emptyset$
$a \leq b \;\; \forall a \in A, \forall b \in B$

2 insiemi che hanno qst proprietà si dicono $\boxed{\text{sezione}}$

Esiste allora un unico punto S detto elemento separatore di A e B

$$a \leq S \leq b \quad \forall a \in A, \forall b \in B$$

- Abbiamo così una ~~retta~~ applicazione univoca $g : \mathbb{R} \xrightarrow[\text{su}]{1-1}$ retta

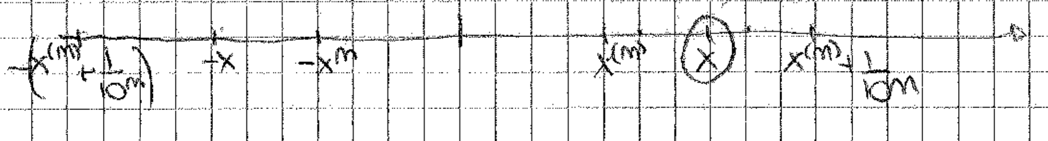
quindi tutti i punti della retta possono essere ricoperti dai numeri reali.
Identificheremo $\mathbb{R}$ con la retta, parlando di RETTA REALE

$\boxed{\text{DENSITÀ}}$: Ogni numero reale si può approssimare con errore piccolo a piacere, con un numero razionale, anche con una frazione decimale

Infatti se $x = a_0, a_1 a_2 \dots \geq 0$ si ha che $x^{(n)} \leq x \leq x^{(n)} + \frac{1}{10^n}$

$\Rightarrow x^{(n)}$ approssima x per difetto
$\Rightarrow x^n + \frac{1}{10^n}$ approssima x per eccesso

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{troncata} \\ \text{ad } n}}{x^{(n)}} \leq x \leq x^n + \frac{1}{10}$$



Densità $\Rightarrow$ In ogni caso si ha che la distanza tra x e la sua troncata di ordine n è minore di $\frac{1}{10^n}$

$$|x - x^{(n)}| < \frac{1}{10^n}$$

Es: $|\overset{x}{1{,}123} - \overset{x^{(n)}}{1{,}12}| < \frac{1}{10^2} \rightarrow 0{,}003 < 0{,}01$

(B) ORDINAMENTO

E' definita in $\mathbb{R}$ una relazione di ordine "$\leq$" che verifica le proprietà:

(1) RIFLESSIVA $x \leq x$

(2) ANTISIMMETRICA $x \leq y$ e $y \leq x \Rightarrow x = y$

(3) TRANSITIVA $x \leq y,\ y \leq z \Rightarrow x \leq z$

(A)&(B) L'ORDINAMENTO & STRUTTURA ALGEBRICA

7. $x \leq y \Rightarrow x+z \leq y+z$

8. $z > 0,\ x < y \Rightarrow xz \leq yz$

Si dice allora che l'ordinamento è compatibile con la struttura algebrica e un insieme che soddisfa 1-8 e 8 gli proprietà si chiama (CAMPO ORDINATO)

es. $\mathbb{R}$ e $\mathbb{Q}$

(C) COMPLETEZZA

$A \subset \mathbb{R}$ si dice <u>superiormente limitato</u> se $\exists\ m \in \mathbb{R}$ tale che $a \leq m\ \ \forall a \in A$ tale m si chiama un MAGGIORANTE di A.

$A \subset \mathbb{R}$ si dice <u>inferiormente limitato</u> se esiste un MINORANTE di A cioè un $m' \in \mathbb{R}$:

$$a \geq m' \quad \forall a \in A'$$

A si dice <u>limitato</u> sia <u>superiormente e inferiormente</u> se

$\Rightarrow \exists\ m, m' \in \mathbb{R} : \ m' \leq a \leq m \quad \forall a \in A$

$\Leftrightarrow \exists\ c \in \mathbb{R} : \quad -c \leq a \leq c$ cioè $|a| \leq c \quad \forall a \in A$

N.B: <u>limitato non significa FINITO</u>

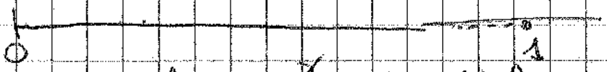
$A = \left\{ \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^+ \right\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \dots \right\}$ è limitato $0 < \frac{1}{n} \leq 1$ ma ha infiniti elementi.

MASSIMO

Se m è un maggiorante di A che appartiene ad A, m si chiama il massimo di A, $\max A$

Esempio.

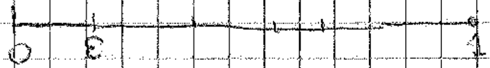
$A = \left\{ \frac{1}{n} ; n \in \mathbb{N}^+ \right\} = \left\{ 1, \frac{1}{2} \dots \right\}$ è limitato $0 < \frac{1}{n} \leq 1$



$1 = \max A$. $\nexists \min$ di A, infatti 0 è il più grande dei minoranti di A ma $0 \notin A$.

DIMOSTRAZIONE

Per vedere che 0 è il più grande dei minoranti sia $\varepsilon > 0$



Se fosse ε un minorante di A sarebbe che tutti i numeri

$\frac{1}{n} \geq \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}^+ \rightarrow$ ciò è impossibile perchè passando ai reciproci si ottiene la disequaz. opposta

$n \leq \frac{1}{\varepsilon} \quad \forall n \in \mathbb{N}^+$

cioè l'insieme dei $\mathbb{N}^+$ sarebbe limitato superiormente da $\frac{1}{\varepsilon}$

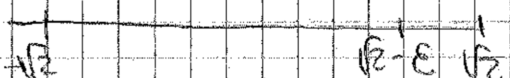
ciò non è vero, infatti detto $\frac{1}{\varepsilon} = a_0, a_1 a_2 \dots > 0$ se $n = a_0 + 1$ si ha che $n > \frac{1}{\varepsilon}$

↳ è impossibile che i naturali siano limitati.

Quindi $\varepsilon > 0$ <u>non è</u> minorante di A, perchè invece 0 è un minorante di A, 0 sarà il + grande minorante di A.

$A = \{ x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 2 \} = \{ x \in \mathbb{Q} : -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \} = \mathbb{Q} \cap [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$

$\Rightarrow \nexists \min A$, $\nexists \max A$, $-\sqrt{2} =$ il più grande minorante
$\sqrt{2} =$ il " piccolo maggiorante



$\varepsilon > 0$

In effetti $\sqrt{2} - \varepsilon$ <u>non può</u> essere un maggiorante di A perchè prendendo n abbastanza grande avremo che $(\sqrt{2})^{(n)}$ soddisfa $\sqrt{2} - \varepsilon < \sqrt{2}^{(n)} < \sqrt{2}$

Dato $A \subset \mathbb{R}$ si chiama <u>estremo superiore</u> di A, $\sup A$, il + piccolo dei maggioranti di A.

$s = \sup A \iff \begin{cases} a \leq s & \forall a \in A \\ \forall l \text{ maggiorante di } A & s \leq l. \end{cases}$

Dim: $A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0, x^n \leq y\}$

A è non vuoto perché $0 \in A$ ed è superiormente limitato, ad esempio $y+1$ è un maggiorante di A.

Sia $l = \sup A \in \mathbb{R}$. Usando le proprietà del sup (completezza) si dimostra che non può essere $l^n > y$ né $l^n < y$ allora $l^n = y$

(2° CONSEG → FUNZIONI a^x, x^α

Sia $a \in \mathbb{R}$, $\boxed{a>0}$, e $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ con $n>0$, poniamo

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

$\boxed{\sqrt[1]{a} = a}$ In particolare $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ ES: $a^{-\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{a^{-3}} = \sqrt[4]{\frac{1}{a^3}} = \frac{1}{a^{3/4}}$

La funzione $\frac{m}{n} \to a^{\frac{m}{n}}$ è: strettamente crescente $a>1$; strettamente decrescente $0<a<1$

$b = b_0, b_1 b_2 \ldots \in \mathbb{R}$ $a>0$

$a^b = ?$ $\boxed{\text{esempio}}$ $5^{\sqrt{2}}$, $\sqrt{2}^{\pi}$

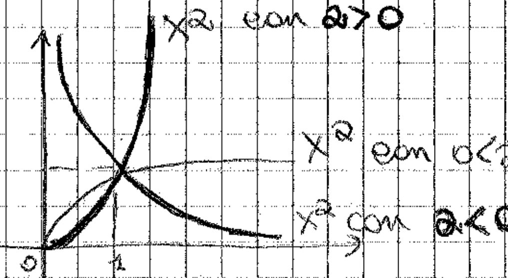
$E = \{a^{b_0}; a^{b_0,b_1}; a^{b_0,b_1 b_2}, \ldots a^{b^{(n)}} \ldots\}$ ogni allineamento decimale corrisponde $a^{\frac{m}{n}}$

Definiamo $a^b = \begin{cases} \sup E & \text{se } a>1 \\ \inf E & \text{se } 0<a<1 \end{cases}$

Ciò equivale a porre $a^b = \begin{cases} \sup\{a^{\frac{m}{n}}, \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}, \frac{m}{n} \leq b\} & \text{se } a>1 \\ \inf\{a^{\frac{m}{n}}, \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}, \frac{m}{n} \leq b\} & \text{se } 0<a<1 \end{cases}$

La funzione $x \to a^x$ si chiama funzione esponenziale in base a.

La funzione $x \to x^\alpha$ dove $\alpha \in \mathbb{R}$ si chiama funzione potenza ad esponente reale è definita solo per $x>0$ e i grafici al variare di α sono i seguenti



- Gli opposti: l'opposto di $a+ib \Rightarrow -a-ib$
- I reciproci: il reciproco di $z=a+ib \neq 0$ è

$$\frac{1}{z} = z^{-1} = \frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} \qquad 1 = \left[\frac{(a+ib)(a-ib)}{a^2+b^2}\right] \cdot \frac{1}{(a+ib)}$$

facendo

$$\frac{(a+ib)(a-ib)}{a^2+b^2} = \frac{a^2-(ib)^2}{a^2+b^2} = \frac{a^2-i^2b^2}{a^2+b^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} = 1 \qquad i^2=-1$$

L'insieme $\mathbb{C}$ è un campo detto il campo complesso

$$\mathbb{C} = \{ z : z = x+iy = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z,\ x,y \in \mathbb{R} \}$$

$$\mathbb{R} = \{ x+i0 = x,\ x \in \mathbb{R} \} \subset \mathbb{C}$$

L'insieme dei numeri reali ($\mathbb{R}$) è l'insieme dei numeri $z \in \mathbb{C}$: $\operatorname{Im} z = 0$

I numeri complessi della forma $z = 0+ib$ tali che $\operatorname{Re} z = 0$ si chiamano immaginari puri.

È possibile introdurre in $\mathbb{C}$ una (o anche molte) relazione d'ordine $\leq$ che però non soddisfa l'analogo della regola 8 vista x i reali.

X questo motivo non useremo mai la notazione $z_1 \leq z_2$ per z_1, z_2 n° complessi.
Diremo che $\mathbb{C}$ è un campo non ordinato.

Ogni $z \in \mathbb{C}$ è noto quando si conosca la parte reale e la parte immaginaria $\Rightarrow$ i numeri complessi non sono altro che le coppie ordinate di $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ con le operazioni definite nel seguente modo

$$(a,b)+(c,d) = (a+c, b+d)$$

$$(a,b) \times (c,d) = (ac-bd,\ ad+bc)$$

L'unità del prodotto (elem. neutro) è allora $(1,0) \rightarrow 1$

$$(a,b)(1,0) = (a,b)$$

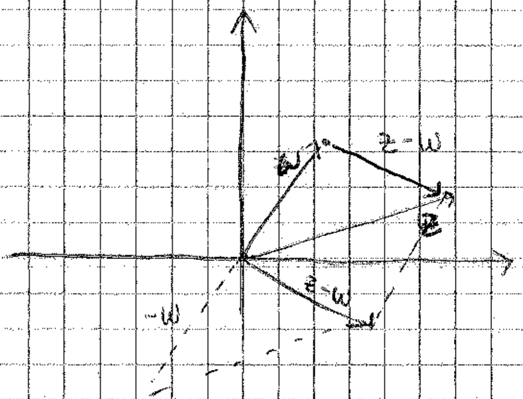
L'unità immaginaria corrisponde a $i \cong (0,1)$

$$(0,1)(0,1) = (-1,0) \Rightarrow -(1,0) = -1$$

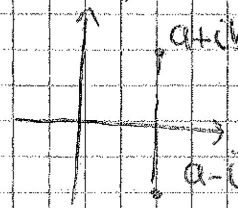
Notiamo che
$$\begin{aligned}(a,b) &= (a,0)+(0,b) \\ &= (a,0)+(0,1)\cdot(b,0) \\ &= (a,0)+i(b,0) \\ &= a+ib\end{aligned}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 65 di 446

La differenza $z - w = (z - w) = z + (-w)$ ⇒ è il vettore che chiude il triangolo con direzione da w a z

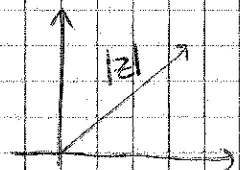


Il complesso coniugato di $z = a+ib$ è x definizione $\bar{z} = a - ib$ che si ottiene prendendo stessa parte reale ma l'opposto della parte immaginaria



Il modulo di $z = a+ib$ è il numero reale non negativo

$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ = distanza di z dall'origine



Valgono le seguenti FORMULE

coniugato

① $z = \mathrm{Re}z + \mathrm{Im}z \Rightarrow \bar{z} = \mathrm{Re}z - \mathrm{Im}z$

$\mathrm{Im}z = z - \mathrm{Re}z$
$\mathrm{Im}z + \mathrm{Re}z = z$ ⟶ $z - \mathrm{Re}z = \mathrm{Re}z - \bar{z}$ $\quad \mathrm{Re}z = \frac{z+\bar{z}}{2}$

$$\begin{cases} \mathrm{Re}\,z = \frac{z+\bar{z}}{2} \\ \mathrm{Im}\,z = ?\left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right) \end{cases}$$

$\mathrm{Re}z = \bar{z} + \mathrm{Im}z$
$\mathrm{Re}z = z - \mathrm{Im}z$ ⟶ $\bar{z} + \mathrm{Im}z = z - \mathrm{Im}z$; $2\mathrm{Im}z = \frac{z-\bar{z}}{2}$

② $z \cdot \bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2+b^2 = |z|^2$

③ $\overline{(\bar{z})} = z$, ④ $\overline{(z+w)} = \bar{z}+\bar{w}$ ⑤ $\overline{(z\cdot w)} = \bar{z}\cdot\bar{w}$

⑥ $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$ ⑦ $z = \bar{z}$

⑦ $z = \bar{z} \iff \mathrm{Im} = 0 \iff z = x + i0 = x$

$z = -\bar{z} \iff \mathrm{Re}\,z = 0 \iff z = 0 + iy = iy$

⑧ $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|\bar{z}}$

$i^{34} = i^{32+2} = 1 \cdot i^2 = -1$

$i^{-7} = \frac{1}{i^7} = \frac{1}{i^{8-1}} = \frac{1}{i^8 \cdot i^{-1}} = \frac{1}{1 \cdot i^{-1}} = i$

$(-i)^2 = -1$; $(-i)^3 = i$ ← Potenze di $(-i)$

$(-i)^4 = 1$; $(-i)^{4k} = 1$

$(1-i)^4 = 1 + 4(-i) + 6(-i)^2 + 4(-i)^3 + (-i)^4 = 1 - 4i - 6 + 4i + 1 = -4$

↑ col triangolo di tartaglia

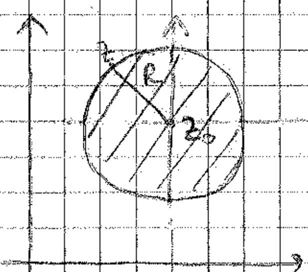
la circonferenza unitaria

Se $z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$

$z - z_0 = x - x_0 + i(y - y_0)$

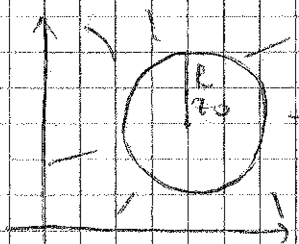
$|z - z_0| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ = distanza tra z, z_0

$\{ z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq R \}$



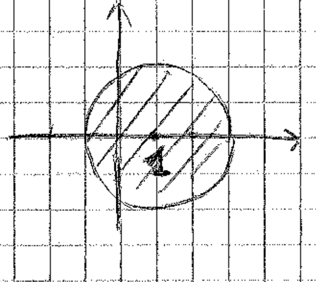
= insieme punti interni + bordo della circonferenza di centro z_0 e raggio R

$\{ z \in \mathbb{C} : |z - z_0| > R \}$

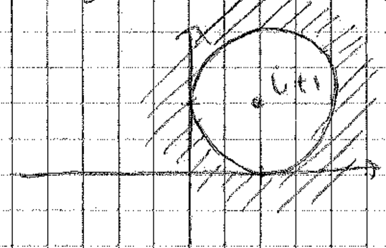


= ins. punti esterni alla circonf.

esempio: ① $\{ z : |z - 1| < 2 \}$ ② $\{ z : |z - i - 1| > 1 \}$



$z_0 = i + 1$



$z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$ → forma polare o trigonometrica

l'angolo θ = argomento $z = \arg z$ è l'angolo misurato in radianti tra il semiasse x positivo e la semiretta OP contato positivamente (negativamente) se per raggiungere la semiretta OP il semiasse x ruota in senso antiorario (orario) sopra la semiretta $\overline{OP}$

$\theta > 0$ se dall'asse x a $\overline{OP}$ → senso antiorario
$\theta < 0$ se dall'asse x a $\overline{OP}$ → senso orario

θ è definito a meno di multipli di 2π

In figura ⇒ chiamando θ l'angolo compreso tra 0 e $\pi/2$ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ gli altri corrispondenti tutti a

$$\theta' = \theta + 2k\pi \;,\; k \in \mathbb{Z}$$

Di solito si limita θ alla regione $\boxed{0 \leq \theta < 2\pi}$

[ARGOMENTO PRINCIPALE] oppure a volte $-\pi < \theta < \pi$

Tutte le coppie della forma $(r; \theta + 2k\pi)$ individuano lo stesso punto del piano se $r \neq 0$ mentre se $r = 0$ le coppie della forma $(0, \theta)$ corrispondono tutte all'origine

L'uguaglianza tra 2 numeri complessi si esprime:

$$z = z' \iff r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta) = r'(\cos\theta' + i\,\text{sen}\,\theta')$$

$$\iff \begin{cases} r' = r \\ \theta' = \theta + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

Per passare da $z = x + iy$ alla forma $z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$ dobbiamo trovare r, θ

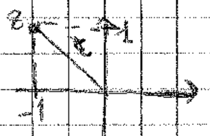
Per trovare θ si devono usare entrambe le relazioni

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{x}{r} \\ \text{sen}\,\theta = \frac{y}{r} \end{cases}$$

Sarebbe **errato** USARE una formula del tipo

$$\theta = \text{arctg}\,\frac{y}{x}$$

ESEMPIO



$z = -1 + i$

$r = \sqrt{2}$

$\theta = \pi - \frac{\pi}{4}$

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \text{sen}\,\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \mapsto \left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

28 ott.

Coniugato - Rimane invariata Re z e cambiata di segno Im z

$z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$

$\bar{z} = r(\cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta)$

Reciproco

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}\,\frac{\cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta}{\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta} \Rightarrow \frac{1}{r}(\cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta)$$

$$\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}\left[\cos(\theta-\theta') + i\,\text{sen}(\theta-\theta')\right]$$

Poniamo $f(\theta) = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta$ e notiamo che nella formula del prodotto ponendo $r = r' = 1$ si ottiene $f(\theta)\,f(\theta') = f(\theta+\theta')$ che è analoga alla

$$a^{\theta}\cdot a^{\theta'} = a^{(\theta+\theta')}$$

Definiamo L'ESPONENZIALE CON ESPONENTE IMMAGINARIO a base e

(e = numero di Nepero) $\quad e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta$

Otteniamo così la forma esponenziale dei numeri complessi

$$\boxed{z = r\cdot e^{i\theta}}$$

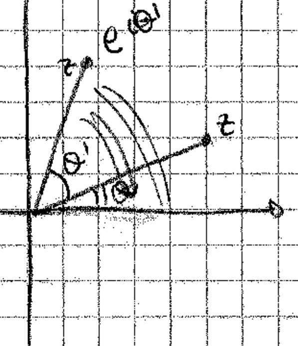
Con qst formula è più semplice operare tra i n° complessi

$$z\cdot z' = (r\,e^{i\theta})(r'\,e^{i\theta'}) = r\,r'\left[e^{i(\theta+\theta')}\right]$$

$$z^n = (r\cdot e^{i\theta})^n = r^n\cdot e^{in\theta} \longrightarrow \text{FORMULA DI DE MOIVRE}$$

L'interpretazione geometrica di moltiplicare z per $e^{i\theta'}$ è di operare una rotazione di angolo θ'

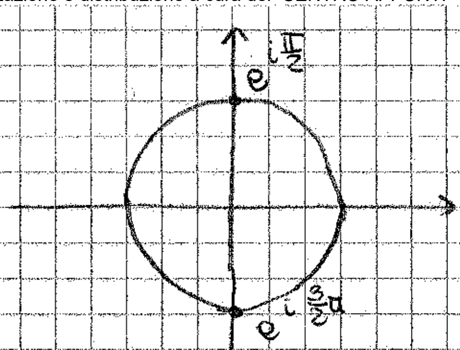
$$z\cdot e^{i\theta'} = r\cdot e^{i\theta}\cdot e^{i\theta'} = r\,e^{i(\theta+\theta')}$$



pag ①

• $\theta = \frac{\pi}{2}$

calcolo $\frac{3}{2}\pi$



$\cos\frac{\pi}{2} = 0 \quad \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1$

$e^{i\pi/2} = +i$

$\frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3}{2}\pi \quad \cos\frac{3}{2}\pi = 0 \quad \operatorname{sen}\frac{3}{2}\pi = -1 \rightarrow e^{i\frac{3}{2}\pi} = -1i = -i$

es° $(\sqrt{3} - i)^4$

$(\sqrt{3} - i) = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta) = r e^{i\theta}$

$r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-i)^2} = \sqrt{4} = 2$

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{x}{r} \\ \operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \operatorname{sen}\theta = -\frac{1}{2} \end{cases} \qquad \theta = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11}{6}\pi$$

$$(\sqrt{3} - i)^4 = \left(2 \cdot e^{i\frac{11}{6}\pi}\right)^4 = 2^4 e^{i\,4\frac{11}{6}\pi} = 16\, e^{i\frac{22}{3}\pi} = 16\, e^{i\left(\frac{18}{3}\pi + \frac{4}{3}\pi\right)}$$

$$= 16\, e^{i6\pi} \cdot e^{i4/3\pi} = 16\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -8 - 8i\sqrt{3}$$

la forma esponenziale si usa anche per calcolare le radici n-esime dei numeri complessi

Dato $z \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, si chiama RADICE ENNESIMA di z un numero complesso $w \in \mathbb{C}$ tale che

$w^n = z$ si scrive allora $w = \sqrt[n]{z} = z^{1/n}$

se $z = 0 \Rightarrow w = 0$ sia $z \neq 0$, $z = r \cdot e^{i\theta}$, $w = r' \cdot e^{i\theta'}$

$$\Rightarrow r'^n \cdot e^{in\theta} = r \cdot e^{i\theta} \Rightarrow \begin{cases} (r')^n = r \\ n\theta' = \theta + 2k\pi \text{ con } (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r' = \sqrt[n]{r} \\ \theta' = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \quad \cancel{k=0},\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Apparentemente ci sono infinite radici ennesime perchè $k \in \mathbb{Z}$ però è facile dimostrare che in realtà ci sono n radici ennesime distinte dati dai valori

$k = 0,\ k = 1, 2 \ldots\ n-1$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 75 di 446

e sono una l'opposto dell'altra.

n pari se w è una delle radici n-esime di z $\Rightarrow$ anche $-w$ lo è

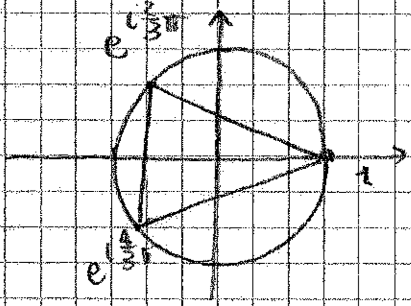
$(-w)^n = (-1)^n \cdot w^n = z$

Esempio: le radici n-esime di 1

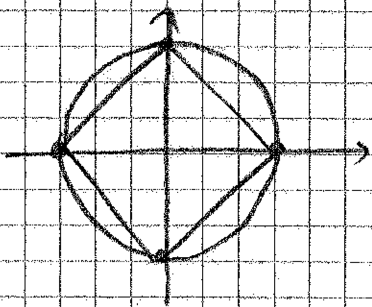
$\underline{n=2}$ $\sqrt{1} = \pm 1$ $1 = 1e^{i0}$

$\underline{n=3}$ $\sqrt[3]{1} = e^{i\frac{0+2k\pi}{3}}$ $(k=0,1,2)$

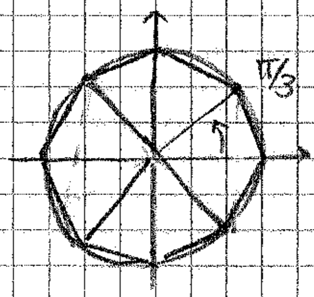
$= \underbrace{e^{i0}}_{1}, e^{i\frac{2}{3}\pi}, e^{i\frac{4}{3}\pi}$



$\underline{n=4}$ $\sqrt[4]{1} = 1, -1, i, -i$



$\underline{n=6}$ $\sqrt[6]{1}$



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 77 di 446

FATTORIZZAZIONE DI POLINOMI IN CAMPO COMPLESSI

Un polinomio di grado n nella variabile complessa $z \in \mathbb{C}$ è una espressione del tipo

$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 \dots + a_n z^n$ dove i coefficienti $a_0, a_2 \dots a_n$

con $a_n \neq 0$ $\quad n \in \mathbb{N}$

Le radici di $P(z)$ sono le soluzioni dell'equazione

$P(z) = 0$ come in campo reale, vale questo teorema

TEOREMA (di Ruffini)

$z = z_0$ è radice di

$P(z) \iff P(z)$ è divisibile per $(z - z_0)$

cioè $\iff$ esiste un polinomio $Q(z)$ di grado $n-1$ tale che $P(z) = (z - z_0) \cdot Q(z)$.

DIM $\Rightarrow$ Sia $P(z) = (z - z_0)\, Q(z)$

$P(z_0) = 0 \Rightarrow z_0 =$ radice di $P(z)$

$\Leftarrow$ (viceversa) Sia z_0 una radice di $P(z)$

Ricordiamo che per il polinomio vale l'algoritmo della divisione

$$\begin{array}{c|c} P(z) & z - z_0 \\ \hline R(z) & Q(z) \end{array}$$

si ottiene un quoziente $Q(z)$

ed un polinomio resto $R(z)$ con grado $R(z) <$ grado $(z - z_0) =$

$\Rightarrow P(z) = (z - z_0) Q(z) + R$ dove $R =$ polinomio di grado 0 $=$ costante.

Ponendo $z = z_0$ si ottiene $P(z_0) = R \Rightarrow P(z) = (z - z_0) Q(z)$
$\quad\quad = 0$

esempio $P(z) = z^n - a \quad a \in \mathbb{C}$. Le radici di $P(z)$ cioè le soluzioni di

$z^n - a = 0$ cioè $z^n = a$

Sono le n radici n-esime di a: $z = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} = z_0, z_1, z_2, \dots z_{n-1}$

$\Rightarrow P(z)$ ha n radici distinte e per il teorema di Ruffini

29 sett.

contando ogni radice distinta con la sua molteplicità abbiamo che ogni equazione algebrica

$P(z)=0$ ha n soluzioni su $\mathbb{C}$

Dim-corollario Per il teo fondament. $P(z)$ ha almeno una radice $z_1 \in \mathbb{C}$.
Detta m_1 la sua molteplicità sarà $P(z)=(z-z_1)^{m_1}\cdot Q_1(z)$ dove $Q_1(z_1)\neq 0$

- Se $m_1=n$ allora grado $Q_1=0$ cioè $Q_1=$ costante e si vede che $Q_1=a_n$.
- Se invece $m_1<n$, riapplico il teorema al polinomio Q_1: esiste almeno una radice z_2 di molteplicità m_2

$$Q_1(z)=(z-z_2)^{m_2}Q_2(z) \quad \text{con } Q_2(z_2)\neq 0$$

$$\Rightarrow P(z)=(z-z_1)^{m_1}(z-z_2)^{m_2}Q_2(z)$$

- se $m_1+m_2=n \Rightarrow$ grado $Q_2=0 \Rightarrow Q_2=a_n$
- se invece $m_1+m_2<n$, riapplico il termine a $Q_2(z)$, e così via.

Un polinomio si dice IRRIDUCIBILE se è divisibile solo per se stesso per le costanti (polinomi di grado 0)

Il corollario mi dice che: I POLINOMI IRRIDUCIBILI IN CAMPO COMPLESSO SONO QUELLI DI 1° GRADO

Se $P(z)$ ha coefficienti reali cioè se $a_0, a_1 \dots a_n \in \mathbb{R}$ si ha

PROPOSIZIONE: se $P(z)=a_0+a_1z+a_2z_2 \dots a_nz^n$ con $a_j\in\mathbb{R}$ $\forall j$, e se $z_0\in\mathbb{C}$ è una radice di $P(z)$ allora

$\overline{z_0}$ è anch'essa radice di $P(z)$ con la stessa molteplicità

↓

DIMOSTRAZIONE DI QST PROPOSIZIONE

Infatti se $P(z_0)=a_0+a_1+\dots+a_nz_0^n=0 \rightarrow$ ovvero z_0 è una radice

Prendendo il complesso coniugato ed essendo $\overline{a_j}=a_j$ (ovvero $a_j\in\mathbb{R}$) e ricordando che

$\overline{(\alpha+\beta)}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}$, $\overline{(\alpha\cdot\beta)}=\overline{\alpha}\,\overline{\beta}$ si ottiene che

$$a_0+a_1\overline{z_0}+a_2(\overline{z_0})^2+\dots+a_n(\overline{z_0})^n=0$$

cioè $P(\overline{z_0})=0$

1

SUCCESSIONI & LIMITI

1ott.

Una successione è una funzione $a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$
cioè ad ogni $n \in \mathbb{N}$ associamo un certo $a(n) \in \mathbb{R}$

Si scrive di solito a_n invece di $a(n)$

Alcune successioni sono definite solo per $n \geq n_0$

Gli a_n si dicono termini della successione e a volte è utile scrivere esplicitamente i primi termini della successione $a_0, a_1, a_2 \dots$

ES)

$a_n = n^3 \to 0, 1, 2, 27, 64 \dots$

$a_n = \sqrt[n]{2} \quad (n \geq 2) \Rightarrow \sqrt{2}; \sqrt[3]{2}, \sqrt[4]{2} \dots$

$a_n = k \to$ SUCCESSIONE COSTANTE $\Rightarrow k; k, k, k, \dots$

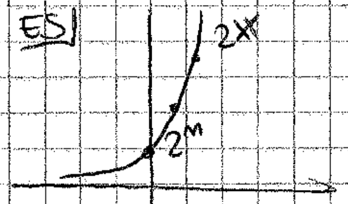
$a_n = (-1)^n \to 1, -1, 1, -1, 1 \dots$

$a_n = 2^n \to 1, 2, 2^2, 2^3, \dots$

2 RAPPRESENTAZIONI GEOMETRICHE DELLE SUCCESSIONI

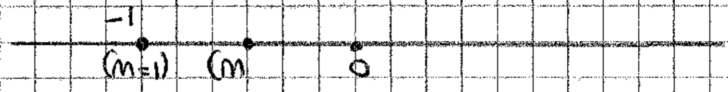
1° Si prende il grafico della funzione $n \to a_n$ in $\mathbb{R}^2$

ES)

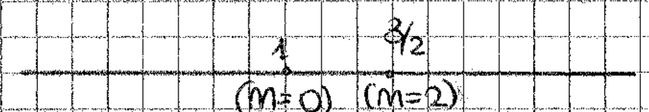


2 • Si rappresentano i punti di a_n su una retta reale

ES) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$



$a_n = \frac{n+1}{n}$



Oltre che a definire a_n come una formula, un altro modo è di definirla per ricorrenza

ES)
$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = n \cdot a_{n-1} \quad \forall\, n \geq 2 \end{cases}$$

↳ relazione di ricorrenza

① a_n si dice limitata superiormente se esiste $M \in \mathbb{R}$: $a_n \leq M$ $\forall n$, cioè se l'insieme $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ delle immagini della successione, cioè l'immagine della successione, è limitato superiormente cioè ha un maggiorante.

② a_n è limitata inferiormente se $\exists N \in \mathbb{R}$: $a_n \geq N$ $\forall n$

③ a_n è limitata se $\exists N, M \in \mathbb{R}$: $N \leq a_n \leq M$

$\Rightarrow \exists C \in \mathbb{R}$: $|a_n| \leq C$ cioè $-C \leq a_n \leq C$

ES|

$\frac{1}{n}$, $(-1)^n$, $\frac{n+1}{n}$ → SUCCESSIONI LIMITATE

n^3, 2^n → SUCCESSIONI LIMITATE INFERIORMENTE MA NON SUPERIORMENTE

-2^n → LIMITATA SUPERIORMENTE MA NON INFERIORMENTE

$(-2)^n$ → NON E' LIMITATA NE' SUPERIORMENTE, NE' INFERIORM.

PROPRIETA' SUCCESSIONE

Vogliamo capire come si comportano gli a_n, data la successione all'aumentare di n.
Diremo che una successione a_n verifica una certa proprietà P definitivamente se esiste un indice $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che la proprietà P è verificata x tutti gli a_n con indice $n > \overline{n}$
Cioè da un certo punto in poi tutti gli a_n verificano la proprietà P, o ancora P vale per tutti gli a_n tranne al + un numero finito.

ES| ①

$a_n = \frac{1}{n}$ è definitivamente minore di 10^{-10}

Infatti $\frac{1}{n} < 10^{-10}$ equivale a $n > 10^{10}$

preso $\overline{n} = 10^{10}$ da n in poi, cioè per $n \geq \overline{n}$ cioè

$\overline{n}+1, \overline{n}+2 \ldots$ la disequazione è vera $\forall n > \overline{n}$

②

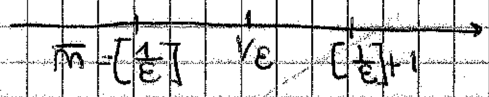
$a_n = n - 10\sqrt{n}$ è definitivamente positiva

ARRIVATA AD 1 CERTO PUNTO SARA' POSITIVA

X 1 N° FINITO DI INDICI NN VALE LA PROPRIETA'
MA DA 1 INDICE IN POI VALE

Basta prendere $\overline{n} = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ e allora per tutti gli $n > \overline{n}$ sarà vero che $n > \frac{1}{\varepsilon}$

$$\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] \leq \frac{1}{\varepsilon}$$



2) $\lim_{n \to +\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$

$|a_n| < \varepsilon$

$\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{n} > \varepsilon \ , \Rightarrow \overline{n} = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$

3) $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$

$\frac{1}{n^2} < \varepsilon \ ; \ n^2 > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \Rightarrow \overline{n} = \left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right]$

DEFINIZIONE DI LIMITE IN GENERALE

Si dice che a_n tende (o converge) ad un numero $l \in \mathbb{R}$ o che a_n ha limite l per $n \to +\infty$ e si scrive:

$\lim_{n \to +\infty} a_n = l$ oppure $a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$

se la successione $(a_n - l)$ è infinitesima, cioè se fissato $\varepsilon > 0$ vale che $|a_n - l| < \varepsilon$ definitivamente.

Quindi:

$\lim_{n \to +\infty} a_n = l \iff \lim_{n \to \infty} (a_n - l) = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \overline{n} \in \mathbb{N}:$

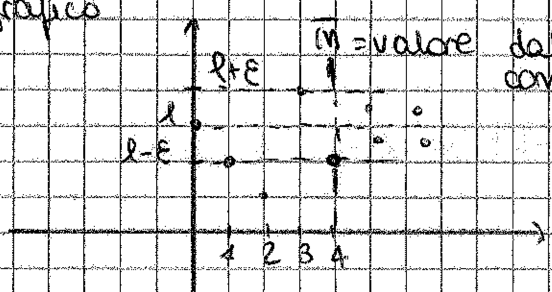
$\forall n > \overline{n}, \ |a_n - l| < \varepsilon$

$l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon$

Fissato $\varepsilon > 0$ rimane definito l'intorno di l, $(l-\varepsilon, l+\varepsilon)$

quindi $a_n \to l \iff$
$|a_n - l| \to 0 \iff$
$d(a_n, l) \to 0 \iff$ cioè fissato ε tutti gli a_n cadono in quell'intorno cioè distano da l meno di ε da un certo punto in poi

Con il grafico



$\overline{n}$ = valore dal quale, in poi a_n sarà compresa tra $l-\varepsilon$ e $l+\varepsilon$

3

ES) Sia $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$

$x = a_0, a_1, a_2 \dots a_n \quad n \in \mathbb{N}$

$x^{(n)} = a_0, a_1, a_2, a_3, \dots a_n$

↳ troncata ennesima.

Quindi dico che: $\lim_{n \to \infty} x^{(n)} = x$ Infatti $|x^{(n)} - x| = |x - x^{(n)}| = x - x^{(n)}$

$= \overbrace{0,0000 \dots}^{n \text{ volte}}, a_{n+1}, a_{n+2} \dots$

è chiaro che all'aumentare di n questa differenza diventa sempre più piccola e quindi fissato $\varepsilon > 0$:

$|x - x^{(n)}|$ si può rendere $< \varepsilon$ a patto di prendere n abbastanza grande.

TEOREMA: UNICITA' DEL LIMITE

Se esiste $l = \lim_{n \to \infty} a_n \in \mathbb{R}$ allora tale limite è unico cioè

a_n non può tendere a 2 limiti distinti

DIM: Sia $\lim_{n \to \infty} a_n = l_1$, $\lim_{n \to \infty} a_n = l_2$

$\Rightarrow$ fissato ε valgono definitivamente $|a_n - l_1| < \varepsilon$,

$|a_n - l_2| < \varepsilon$

$\Rightarrow$ quelle 2 disequazioni valgono entrambe $\forall n > \bar{n}$ e allora

sottraggo e aggiungo a_n

$$|l_1 - l_2| = |\underbrace{l_1 - a_n}_{A} + \underbrace{a_n - l_2}_{B}| \leq |l_1 - a_n| + |a_n - l_2| < 2\varepsilon$$

Quindi il numero $|l_1 - l_2|$ che è sempre ≥ 0 è minore di qualunque numero positivo 2ε ??

Ne segue che $|l_1 - l_2| = 0 \Rightarrow l_1 = l_2$

Questa unicità si usa per far vedere che una SUCCESSIONE NON HA LIMITE

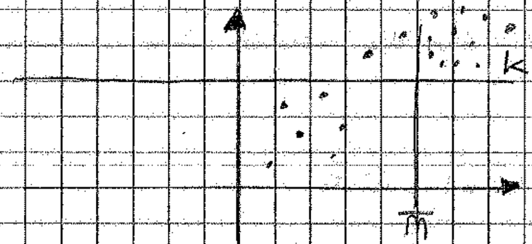
Per esempio $\nexists \lim_{n \to \infty} (-1)^n$

Infatti vale la seguente regola generale:

Una successione a_n tende a un limite $\in \mathbb{R} \Rightarrow$ le sottosuccessioni degli indici pari e dispari cioè le successioni seguenti:

Analogamente:

$\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty \iff \forall k<0,\ \exists\, \bar{n} \in \mathbb{N} : \forall n>\bar{n}\ \ a_n < k$



da $\bar{n}$ in poi $y>k$

Esiste un $\bar{n}$ tale che $\forall n>\bar{n}$ tutti gli a_n cadono in qst semipiano.

ESEMPI

1) $\lim_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$

2) $\forall a>1$ vale $\lim_{n\to+\infty} a^n = +\infty$ $k>0$, $a^n>k$

$n>\log_a k$, $\bar{n} = [\log_a k]$

3) $\lim_{n\to+\infty} \log_2 n = +\infty$ con $k>0$ $\log_2 n > k$ $2^{\log_2 n} > 2^k$

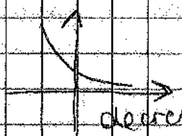
$n>2^k \Rightarrow \bar{n} = [2^k]$

4) Se $a>1$ si mostra allo stesso modo $\lim_{n\to+\infty} \log_a n = +\infty$

5) $0<a<1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \log_a n = -\infty$

Infatti fissato $k<0$ consideriamo $\log_a n < k$

$n > a^k = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^k} = \left(\frac{1}{a}\right)^{-k}$ $\frac{1}{a}>1$ $-k>0$



decrescente

Chiameremo Regolari le successioni a_n che hanno $l\in\mathbb{R}$ limite $l=+\infty$ oppure $l=-\infty$

Chiameremo IRRegolari o oscillanti tutte le altre.

② Analogamente:

a_n decrescente $\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = \inf\{a_n, n\in\mathbb{N}\} = \begin{cases} l\in\mathbb{R} \text{ se } a_n \text{ è limitata inf.} \\ -\infty \text{ se } a_n \text{ non è limitata inferiormente} \end{cases}$

Dim ① Sia a_n crescente e limitata superiormente.
Sia $l = \sup\{a_n\} \in \mathbb{R}$.

Vogliamo dimostrare che $\lim_{n\to+\infty} a_n = l$ cioè che fissato un $\varepsilon>0$
$\exists\, \bar{n}\in\mathbb{N}: n>\bar{n} \Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon$ cioè $l-\varepsilon < a_n < l+\varepsilon$

Innanzitutto essendo l un maggiorante di $\{a_n\}$ si ha
① $\boxed{a_n \le l < l+\varepsilon}$ $\forall n \in a_n$

Inoltre poichè l è il + piccolo dei maggioranti, fissato $\varepsilon>0$, $l-\varepsilon$ non è un maggiorante dell'insieme

Esiste allora un $\bar{n}$ tale che

$a_{\bar{n}} > l-\varepsilon$

Ma poichè a_n è crescente, avremo che $\forall n>\bar{n}$, ② $\boxed{a_n \ge a_{\bar{n}} > l-\varepsilon}$

Quindi fissato $\varepsilon>0$ esiste $\bar{n}: n>\bar{n} \Rightarrow l-\varepsilon < a_n < l+\varepsilon \Rightarrow$ ①+②

Dim ①B : Sia a_n non limitato superiormente
Fissato $k>0$, questo k non è un maggiorante di $\{a_n\}$

$\Rightarrow$ esiste almeno un indice $\bar{n}: a_{\bar{n}} > k$.
Ma a_n crescente implica che $\forall n>\bar{n}$ si ha che
$|a_n \ge a_{\bar{n}} > k|$

$\Rightarrow \boxed{a_n > k}$

OSSERVAZIONE! Se a_n è strettamente crescente e limitata superiormente allora $a_n \to l$ con $a_n < l$ $\forall n$

ESEMPIO IMPORTANTE!

- il numero di Nepero: e

$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \ (n\ge 1)$; $a_1 = 2$ $a_2 = \frac{9}{4}$, $\frac{64}{27}$

Si dimostra che

1) $a_n < a_{n+1}$ $\forall n$, cioè a_n è strettamente ~~de~~crescente.
quindi in particolare $a_n \ge 2$ $\forall n$

$q = 1 - p$ $\qquad$ p = probabilità che nessun passeggero riceva il proprio bagaglio

$$p = \frac{\text{n° permutazioni senza punti fissi}}{n!}$$

$$p = \frac{1}{n!}\left[\left[\frac{n!}{e}\right]\right] = \frac{n!}{e} + r$$

dove $-\frac{1}{2} < r < \frac{1}{2}$

$\left[\left[\frac{n!}{e}\right]\right]$ $\quad r \quad$ $\left[\left[\frac{n!}{e}\right]\right]+1$

$$= \frac{1}{n!}\left[\left[\frac{n!}{e}\right]\right] = \frac{1}{e} + \frac{r}{n!} \Rightarrow \text{piccolo} \cong \frac{1}{e} \cong 0{,}3678$$

$$q = 1 - 0{,}36\ldots \cong 0{,}6321 = 63\%$$

In generale si dimostra che:

Se a_n è una qualunque successione che diverge a $+\infty$ o a $-\infty$ allora

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e, \quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\log a}\right)^{\log a} = e,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{-n^2} = e, \quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\log_{\frac{1}{2}} n}\right)^{\log_{1/2} n} = e$$

ALGEBRA DEI LIMITI

L'operazione di limite, si comporta bene in generale, rispetto alle operazioni algebriche, fino a che si considerano successioni convergenti.

1

④ Se $a_n \to +\infty$ e $b_n \to +\infty$ si dimostra che

$a_n \cdot b_n \to +\infty$ scriveremo $(+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty$

Analogamente se $a \to +\infty$, $b_n \to -\infty$ si dimostra che

$a_n b_n \to -\infty$ e scriveremo che $(+\infty)(-\infty) = -\infty$

Se $a_n \to -\infty$, $b_n \to -\infty$ $\Rightarrow$ $a_n b_n \to +\infty$
scriveremo $(-\infty)(+\infty) = +\infty$

⑤ Se $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a \in \mathbb{R}$ e $b_n \to \pm\infty$ si dimostra che

$\frac{a_n}{b_n} \to 0$ e scriveremo che $\frac{a}{+\infty} = 0$ $\frac{a}{-\infty} = 0$

⑥ Se $a_n \longrightarrow a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ e $b_n \to \pm\infty$ si dimostra che

$\frac{b_n}{a_n} \to \begin{cases} +\infty & \text{se } a>0 \\ -\infty & \text{se } a<0 \end{cases}$ e si scrive $\frac{\pm\infty}{a} = (\text{segno di } a)(\pm\infty)$

$\frac{+\infty}{a} = \begin{cases} +\infty & \text{se } a>0 \\ -\infty & \text{se } a<0 \end{cases}$

⑦ Diciamo che $a_n \to 0^+$ se $a_n \to 0$ con $a_n > 0$ $\forall n$ (cioè se a_n tende a 0 da destra)

Analogamente

$a_n \to 0^-$ se $a_n \to 0$ con $a_n < 0$ $\forall n$ (cioè se a_n tende a 0 da sinistra)

Possiamo allora generalizzare la ⑥ come segue:

Se $a_n \to 0^+$ e $b_n \to +\infty$ si dimostra che $\frac{b_n}{a_n} \longrightarrow +\infty$

e si scrive $\frac{+\infty}{0^+} = +\infty$. Analogamente $\frac{-\infty}{0^+} \longrightarrow -\infty$, $\frac{+\infty}{0^-} \longrightarrow -\infty$

$\frac{-\infty}{0^-} \to +\infty$

⑧ Se $a_n \to a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ e $b_n \to 0^+$ si mostra che

$\frac{a_n}{b_n} \to \begin{cases} +\infty & \text{se } a>0 \\ -\infty & \text{se } a<0 \end{cases}$ e si scrive $\frac{a}{0^+} = (\text{segno di } a)(+\infty) = \begin{cases} +\infty & a>0 \\ -\infty & a<0 \end{cases}$

Analogamente se $a_n \to a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ e $b_n \to 0^-$ si mostra che

$\frac{a_n}{b_n} \to \begin{cases} +\infty & \text{se } a<0 \\ -\infty & \text{se } a>0 \end{cases}$ e si scrive $\frac{a}{0^-} = (\text{segno di } a)(-\infty) = \begin{cases} -\infty & \text{se } a>0 \\ +\infty & \text{se } a<0 \end{cases}$