NUMERO : 388

DATA : 17/10/2012

A P P U N T I

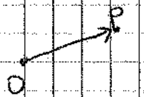
STUDENTE : Contadin

MATERIA : Geometria
Prof. Beccari

L'ambiente è lo spazio

Vettori applicati in un punto fisso O dello spazio.

VETTORE $\underset{def.}{=}$ segmento orientato OP (orientato da O a P)

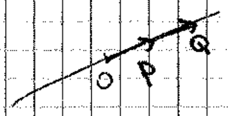


<u>Simboli</u>: OP, $\vec{u}$, $\bar{v}$, $\underline{w}$, lettere in grassetto

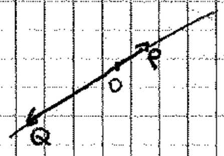
<u>MODULO</u> di un vettore: $|OP|$ = lunghezza di OP rispetto ad una prefissata unità di misura

VERSORE $\underset{def.}{=}$ vettore di modulo 1

VETTORI PARALLELI (o aventi la stessa direzione): vettori appartenenti alla stessa retta per O

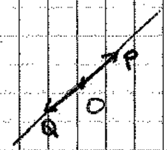


paralleli e concordi



paralleli discordi

CASO PARTICOLARE:



$|OP| = |OQ|$

OP e OQ sono uno l'opposto dell'altro
$OP = -OQ$ oppure $OQ = -OP$

<u>ANGOLO TRA DUE VETTORI</u>: caso generale: $\bar{u} = OP$, $\bar{v} = OQ$

NON paralleli (OPQ vertici di un triangolo)

Si dice che $\bar{u}, \bar{v}$ formano un angolo α se α è la misura in <u>radianti</u> dell'angolo $O\hat{P}Q$ $\Rightarrow$ notazione $\bar{u}\hat{\ }\bar{v}$

Casi particolari: $\bar{u}$ e $\bar{v}$ paralleli e concordi: $\bar{u}\hat{\ }\bar{v} = 0$
" " " " discordi: $\bar{u}\hat{\ }\bar{v} = \pi$

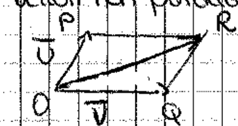
$\Rightarrow$ in tutti i casi: $0 \leq \bar{u}\hat{\ }\bar{v} \leq \pi$

Caso particolare: $\bar{u}$ e $\bar{v}$ si dicono ORTOGONALI se $\bar{u}\hat{\ }\bar{v} = \frac{\pi}{2}$

Operazioni tra vettori

SOMMA DI VETTORI: si effettua "con la regola del parallelogramma"

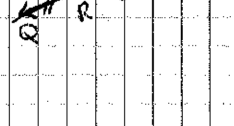
1) vettori non paralleli



Per definizione: $OP + OQ = OR$

2) vettori // e concordi

3) vettori // e discordi $|OP| \neq |OQ|$



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 101

ANNULLAMENTO del prodotto scalare

$\bar{u} \cdot \bar{v} = 0$ → $\bar{u} = \bar{0}$ oppure $\bar{v} = \bar{0}$
→ $\bar{u}$ e $\bar{v}$ ortogonali

OSSERVAZIONI: 1) $\bar{u} \cdot \bar{v} > 0$ se e solo se l'angolo $\bar{u} \hat{} \bar{v}$ è $< \frac{\pi}{2}$

$\bar{u} \cdot \bar{v} < 0$ se e solo se $\bar{u} \hat{} \bar{v} > \frac{\pi}{2}$

2) $\bar{u} \cdot \bar{u} = |\bar{u}|^2$ $\quad (|\bar{u}| = \sqrt{\bar{u} \cdot \bar{u}})$

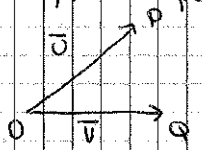
Proprietà: 1) $\bar{u} \cdot \bar{v} = \bar{v} \cdot \bar{u}$ $\quad \forall \bar{u}, \bar{v}$

2) $\bar{u} \cdot (\underbrace{\bar{v}_1 + \bar{v}_2}_{\text{somma di vettori}}) = (\bar{u} \cdot \bar{v}_1) \underbrace{+}_{\text{somma di numeri}} (\bar{u} \cdot \bar{v}_2)$

3) $\bar{u} \cdot (a\bar{v}) = (a\bar{u}) \cdot \bar{v} = a(\bar{v} \cdot \bar{u})$ $\quad a \in \mathbb{R}$?

PRODOTTO VETTORIALE: Simboli: $\bar{u} \wedge \bar{v}$; $\bar{u} \times \bar{v}$

Caso generale: $\bar{u}, \bar{v}$ non paralleli



1) $\bar{u} \wedge \bar{v}$ è un vettore ortogonale al piano OPQ

2) $|\bar{u} \wedge \bar{v}| = |\bar{u}||\bar{v}| \operatorname{sen} \bar{u} \hat{} \bar{v}$

3) verso definito dalla "regola della mano destra"

Caso particolare: vettori //

$\bar{u} \wedge \bar{v} =_{def} \bar{0}$

Proprietà: 1) $\bar{u} \wedge \bar{v} = -\bar{v} \wedge \bar{u}$

2) $\bar{u} \wedge (\bar{v}_1 + \bar{v}_2) = \bar{u} \wedge \bar{v}_1 + \bar{u} \wedge \bar{v}_2$

$(\bar{u}_1 + \bar{u}_2) \wedge \bar{v} = \bar{u}_1 \wedge \bar{v} + \bar{u}_2 \wedge \bar{v}$

3) $\bar{u} \wedge (a\bar{v}) = (a\bar{u}) \wedge \bar{v} = a(\bar{u} \wedge \bar{v})$ $\quad a \in \mathbb{R}$

NON vale la proprietà associativa:

In generale $(\bar{u} \wedge \bar{v}) \wedge \bar{w} \neq \bar{u} \wedge (\bar{v} \wedge \bar{w})$

vettore che sta nel piano di $\bar{u} \wedge \bar{v}$ — vettore che sta nel piano di $\bar{v} \wedge \bar{w}$

Annullamento del prodotto vettoriale

$\bar{u} \wedge \bar{v} = \bar{0} \iff \bar{u}$ e $\bar{v}$ sono //

3) Consideriamo 3 vettori non complanari $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$. Data (a, b, c) terna di numeri reali si può pensare al vettore $\bar{v} = a\bar{v}_1 + b\bar{v}_2 + c\bar{v}_3$.
Viceversa, dato un vettore nello spazio esistono 3 numeri (nell'ordine) a, b, c per cui $\bar{v} = a\bar{v}_1 + b\bar{v}_2 + c\bar{v}_3$

C'è una c.b. tra i vettori dello spazio e le terne ordinate di numeri reali, una volta fissata una terna di vettori non complanari $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$

$(a, b, c) \rightsquigarrow \bar{v} = a\bar{v}_1 + b\bar{v}_2 + c\bar{v}_3$

$(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ si dice che formano una <u>base</u> per i vettori dello spazio se $\bar{v} = a\bar{v}_1 + b\bar{v}_2 + c\bar{v}_3$, i numeri a, b, c si dicono <u>componenti di $\bar{v}$</u> rispetto alla base $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$

Conviene scegliere una base ortonormale positiva $(\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$

1) $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ sono a due a due ortogonali
2) $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ sono versori $(|\bar{i}| = |\bar{j}| = |\bar{k}| = 1)$
3) $\bar{k} = \bar{i} \wedge \bar{j}$

Operazioni "in componenti"

$\bar{u} = a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k} \qquad \bar{v} = a'\bar{i} + b'\bar{j} + c'\bar{k}$

$\bar{u} + \bar{v} = (a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}) + (a'\bar{i} + b'\bar{j} + c'\bar{k}) = (a\bar{i} + a'\bar{i}) + (b\bar{j} + b'\bar{j}) + (c\bar{k} + c'\bar{k})$
$= (a + a')\bar{i} + (b + b')\bar{j} + (c + c')\bar{k}$

$\Rightarrow$ il vettore $\bar{u} + \bar{v}$ ha componenti $(a + a', b + b', c + c')$

<u>Prodotto</u> per numeri reali

$k \in \mathbb{R} \qquad \bar{u} = a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}$

$k\bar{u} = k(a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}) = k(a\bar{i}) + k(b\bar{j}) + k(c\bar{k}) = (ka)\bar{i} + (kb)\bar{j} + (kc)\bar{k}$

$\Rightarrow$ le componenti di $k\bar{v}$ sono ka, kb, kc

<u>Prodotto scalare</u>

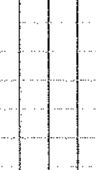
$\bar{v} \cdot \bar{v} = (a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}) \cdot (a'\bar{i} + b'\bar{j} + c'\bar{k}) = (a\bar{i})(a'\bar{i} + b\bar{j} + c'\bar{k}) + (b\bar{j})(a'\bar{i} + b'\bar{j} + c'\bar{k}) + (c\bar{k})(a'\bar{i} + b'\bar{j} + c'\bar{k})$
$= aa' + bb' + cc' \quad \Rightarrow$ perché $(aa' \cdot 1 + 0 + 0)$
perché ortogonali tra loro
$\Rightarrow |\bar{v}| = \sqrt{\bar{v} \cdot \bar{v}} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

$\bar{v} \cdot \bar{v} = |\bar{v}||\bar{v}| \cos \bar{v}\hat{\ }\bar{v}$

se $\bar{v} \neq 0, \bar{v} \neq 0 \qquad \cos \bar{v}\hat{\ }\bar{v} = \dfrac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{|\bar{v}||\bar{v}|} = \dfrac{aa' + bb' + cc'}{(\sqrt{a^2 + b^2 + c^2})(\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2})}$

<u>Prodotto vettoriale</u>

$\bar{i} \wedge \bar{i} = \bar{0}$
$\bar{i} \wedge \bar{j} = \bar{k} \qquad \bar{j} \wedge \bar{i} = -\bar{k}$
$\bar{i} \wedge \bar{k} = -\bar{j} \qquad \bar{k} \wedge \bar{i} = \bar{j}$
$\bar{j} \wedge \bar{i} = \bar{0}$
$\bar{j} \wedge \bar{k} = \bar{i} \qquad \bar{k} \wedge \bar{j} = -\bar{i}$
$\bar{k} \wedge \bar{k} = \bar{0}$



Es. $\bar{u} = (2,1,1) \qquad \bar{u} = 2\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$

$\bar{v} = (0,3,-1)$

$\bar{w} = (-1,4,0)$

① Calcolare $(\bar{u} \wedge \bar{v}) \wedge \bar{w}$ e verifichiamo che si ottiene un vettore complanare con $\bar{u}$ e $\bar{v}$

$$\bar{u} \wedge \bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \bar{i} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - \bar{j} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + \bar{k} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= -4\bar{i} + 2\bar{j} + 6\bar{k}$$

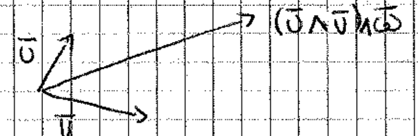
$(\bar{u} \wedge \bar{v}) \cdot \bar{u} = -8 + 2 + 6 = 0$

$(\bar{u} \wedge \bar{v}) \cdot \bar{v} = 0 + 6 - 6 = 0$

$$(\bar{u} \wedge \bar{v}) \wedge \bar{w} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -4 & 2 & 6 \\ -1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -24\bar{i} - 6\bar{j} - 14\bar{k}$$

Verifichiamo la complanarità con $\bar{u}$ e $\bar{v}$, verificando che il loro prodotto misto è nullo

$$\begin{vmatrix} -24 & -6 & -14 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -24(-4) - 12 - 14(6) = 96 - 12 - 84 = 0$$



È possibile esprimere $(\bar{u} \wedge \bar{v}) \wedge \bar{w}$ come combinazione lineare di $\bar{u}$ e $\bar{v}$, cioè esistono due numeri reali a, b per cui risulta: $(\bar{u} \wedge \bar{v}) \wedge \bar{w} = a\bar{u} + b\bar{v}$

$(-24, -6, -14) = a(2,1,1), b(0,3,-1)$

$$\begin{cases} -24 = 2a \\ -6 = a + 3b \\ -14 = a - b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -12 \\ -6 = -12 + 3b \\ -14 = -12 - b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -12 \\ b = 2 \\ -14 = -12 - 2 \end{cases}$$

② Verificare che per i 3 vettori dati risulta $(\bar{u} \wedge \bar{v}) \wedge \bar{w} \neq \bar{u} \wedge (\bar{v} \wedge \bar{w})$
$\rightarrow (2,-2,-2)$

Es.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \qquad A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}$$

Se la somma degli indici è pari $\to +$
" " " " " " dispari $\to -$

Primo teorema di LAPLACE

Data A .... e fissata una riga (colonna) di A, il determinante di A è la somma dei prodotti degli elementi della riga (colonna) per i rispettivi complementi algebrici

- Se la riga scelta è la i-esima
  $\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}$
- Se la colonna scelta è la j-esima
  $\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}$

Es.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det A_{\text{(riga)}} = 1 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \end{vmatrix} + 2\left(-\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}\right) - 1 \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \end{vmatrix} + 4\left(-\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \end{vmatrix}\right)$$

$$\det A_{\text{(colonna)}} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \end{vmatrix} - 1\left(-\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}\right) = \underset{\text{ultima riga}}{5 - 2 - 10 + 5} = -2$$

OSSERVAZIONI:

DEF. Sia M una matrice $m \times n$. Si dice TRASPOSTA di M la matrice ${}^tM$ $n \times m$ ottenuta scambiando ordinatamente righe/colonne

Es.
$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix} \qquad 2 \times 3$$

$${}^tM = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Proprietà: se $A \in \mathbb{R}^{n,n} \to \det A = \det({}^tA)$

MATRICI TRIANGOLARI (casi di matrici $n \times n$)

Def. $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ si dice triangolare alta se $a_{ij} = 0$ quando $i > j$ $\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot \end{pmatrix}$, si dice triangolare bassa se $a_{ij} = 0$ quando $i < j$ $\begin{pmatrix} \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$

Es. $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

Proprietà: se A è triangolare, $\det A = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$

Es

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad 2 \times 3$

$B = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad 3 \times 4$

$AB = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 11 & 4 \\ 1 & -6 & 26 & 7 \end{pmatrix}$ BA non esiste

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ AB 2×2, BA 3×3

BA esiste $\underset{3\times 2}{B}\ \underset{2 \times 3}{A}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

AB 2×2
BA 2×2

$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$; $BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Proprietà:
- $(AB)C = A(BC)$
- $A(B+C) = AB + AC$
  $(P+Q)R = PR + QR$

Teorema di BINET

Siano A, B matrici $n \times n$. Si ha $\det(AB) = (\det A)(\det B)$

Matrici invertibili

Sia A una matrice $n \times n$. A si dice INVERTIBILE se esiste una matrice B $n \times n$ tale che (*) $AB = BA = I_n$.

Es. 1 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ è invertibile. Infatti se $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, si ha $AB = BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$BA = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Es. 2 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ non è invertibile

$B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ $AB = I$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z & y+t \\ 2x+2z & 2y+2t \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\forall x, y, z, t$

Proposizione Se A è invertibile, esiste un'unica matrice B per cui $AB = BA = I$.

Dim. Supponiamo che ci siano due matrici B_1, B_2 per cui si ha:

$AB_1 = B_1 A = I$
$AB_2 = B_2 A = I$

Allora: $B_1 = B_1 I = B_1(AB_2) = (B_1 A)B_2 = IB_2 = B_2$

Def. Una matrice quadrata A si dice singolare se $\det A = 0$.

Quindi: A è invertibile se e solo se non è singolare

Sistemi lineari

Indichiamo le incognite con $x_1, x_2, \dots, x_n$.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad a_1, a_n, b \in \mathbb{R}$$

Sia $A = (a_{ij})$ la matrice dei coeff. (ad es. a_{32} = coeff. nella 3ª equaz. della seconda incognita)

Si ha: $\boxed{\underset{m\times n}{A}\underset{n\times 1}{X} = \underset{m\times 1}{B}}$ $\quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

Caso particolare $m = n$, $\det A \neq 0$, $AX = B$, esiste l'inversa di A, A^{-1}.

$A^{-1}(AX) = A^{-1}B \qquad (A^{-1}A)X = A^{-1}B \qquad IX = A^{-1}B$

$$\boxed{X = A^{-1}B}$$

$$x_i = \frac{1}{\det A}\left(A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + A_{ni}b_n\right) = \frac{\tilde{A}_i}{\det A}$$

$\tilde{A}_i$ = determinante della matrice che si ottiene da A sostituendo la colonna i-esima con la colonna dei termini noti

$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - y = 0 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$x = \dfrac{\begin{vmatrix} b_1 & 1 \\ b_2 & -1 \end{vmatrix}}{\det A} = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}}{-3} = \dfrac{1}{3} \qquad y = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{\det A} = \dfrac{1}{3}$

Trasformazioni elementari sulle righe (colonne) di una matrice.

$A \in \mathbb{R}^{m,n}$ $(\mathbb{C})$

$R_1, R_2, \quad R_m$ righe di A

Tre tipi di trasf. elementari sulle righe

1) $R_i \to R_i + aR_j \qquad a \in \mathbb{R}$ ($i \neq$) ?

2) $R_i \leftrightarrow R_j \qquad i \neq j$

3) $R_i \to kR_i \qquad k \in \mathbb{R}, k \neq 0$

Es. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 + 2R_3} \begin{pmatrix} 13 & 2 & 17 \\ -1 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to 5R_2} \begin{pmatrix} 13 & 2 & 17 \\ -5 & 20 & 25 \\ 6 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_n \end{pmatrix}$ matrice dei termini noti.

Si chiama <u>matrice completa</u> del sistema la matrice $m \times (n+1)$ che si ottiene da A aggiungendo la colonna dei termini noti. Simbolo $(A|B)$

<u>Es.</u> $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + 6x_3 = 0 \end{cases}$ $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$(A/B) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

<u>1° CASO</u> <u>Sistemi ridotti</u>

<u>Def.</u> Un sistema lineare $AX = B$ si dice <u>ridotto</u> se A è ridotta (per righe)

$\begin{pmatrix} * * * * \\ A \end{pmatrix}$ $\left(\begin{matrix} * * * * \\ A \end{matrix} \middle| \begin{matrix} b_m \\ B \end{matrix}\right) \rightsquigarrow 0 = b_m$

<u>Esempio</u> $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ -x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$

Il sistema è ridotto per ogni $k \in \mathbb{R}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & k & 0 \end{pmatrix}$

$\rho(A) = \begin{cases} 3 & k \neq 0 \\ 2 & k = 0 \end{cases}$

$A|B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 & h \end{pmatrix}$

Se $k \neq 0$ $\rho(A|B) = 3$, $\forall h$

Se $k = 0$ $\rho(A|B) = \begin{cases} 3 & h \neq 0 \\ 2 & h = 0 \end{cases}$

- Se $k = 0$ e $h \neq 0$, non ci sono soluzioni $(\rho(A) \neq \rho(A|B))$
- Se $k = 0, h = 0$ $(\rho(A) = \rho(A|B) = 2)$

Ricaviamo x_2 dalla 2ª eq. $x_2 = 3x_3 - x_4$, dalla prima ricaviamo x_1

$x_1 = -2x_2 + x_3 - x_4 + 1 = -2(3x_3 - x_4) + x_3 - x_4 + 1 =$

$\Rightarrow \boxed{x_1 = -5x_3 + x_4 + 1}$

Abbiamo ricavato x_1, x_2 in funzione di x_3, x_4 che risultano "libere", cioè possono assumere qualsiasi valore. Una volta fissato un valore per x_3 e uno per x_4, si ricava un valore per x_1 e per x_2. Il sistema ha infinite soluzioni e si dice che le soluzioni sono ∞^r dove r è il numero delle incognite libere.

Se $k \neq 0$ dalle tre equaz. rimangono 3 incognite in funzione della 4ª. Il sistema ha ∞^1 soluzioni

<u>Def.</u> Due sistemi lineari si dicono <u>equivalenti</u> se hanno le stesse soluzioni. Il metodo di riduzione consiste nel trasformare un sistema in uno ridotto equivalente

Un metodo per trasformare un sistema in uno equivalente è quello di moltiplicare A e B a sinistra per una matrice P invertibile.

$AX = B$ e sia X_0 una soluz. $AX = B$

$(PA)X = B$ un sistema per cui X_0 è ancora soluzione

$(PA)X_0 = P(AX_0) = PB$

Esempio $\begin{cases} x+y+z=0 \\ -x+3y+2z=0 \\ 2x+y+az=0 \end{cases}$ $a \in \mathbb{R}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix}$ $R_2 \to R_2 + R_1$, $R_3 \to R_3 - 2R_1$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & a-2 \end{pmatrix}$

$R_2 \leftrightarrow R_3$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & a-2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ $R_3 \to R_3 + 4R_2$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & a-2 \\ 0 & 0 & 4a-5 \end{pmatrix}$

1° CASO $4a-5 \neq 0$ $a \neq \frac{5}{4}$ $\rho(A) = 3 =$ n° incognite: c'è solo la soluzione nulla

2° CASO $a = \frac{5}{4}$ $\rho(A) = 2 < 3 =$ n° incognite: ci sono infinite soluzioni

Risolviamo il sistema ridotto equivalente $\begin{cases} x+y+z=0 \\ -y-\frac{3}{4}z=0 \end{cases} \to \begin{cases} x=-y-z=-\frac{1}{4}z \\ y=-\frac{3}{4}z \end{cases}$

$X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}t \\ -\frac{3}{4}t \\ t \end{pmatrix}$ $t \in \mathbb{R}$

Conclusione

Proposizione Sia A una matrice quadrata $n \times n$. Sono equivalenti le seguenti affermazioni

1) A è invertibile
2) $\rho(A) = n$
3) I sistemi $AX = B$ hanno una e una sola soluzione $\forall B$
4) $\det A \neq 0$

$AX = 0$ $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

1) Siano X', X'' 2 soluzioni, allora anche $X'+X''$ è soluzione.

Dim $AX' = 0$ $AX'' = 0 \Rightarrow A(X'+X'') = AX' + AX'' = 0+0=0$

Cioè $X'+X''$ è soluz.

2) Se X è una soluzione, anche KX' è soluzione, $\forall K \in \mathbb{R}$

Dim $AX' = 0$ per ipotesi $A(KX') = K(AX') = K0 = 0$

Sistemi lineari (risolubili) e sistemi omogenei associati

$AX = B$ sia un sistema con (almeno) una soluzione X_0. Si chiama omogeneo associato il sistema $AX = 0$. Si dimostra che le soluzioni $AX = B$ sono tutte e sole le $X = X_0 + Z$, con Z soluzione di $AX = 0$

Dim 1) Sia Z_0 una soluzione di $AX = 0$, allora $X_0 + Z_0$ è soluzione di $AX = B$

$A(X_0 + Z_0) = AX_0 + AZ_0 = B + 0 = B$

2) Sia X_1 soluzione di $AX = B$. È del tipo $X_0 + Z_0$?

$AX_1 = B$, $AX_0 = B$ $\Rightarrow AX_1 - AX_0 = 0 \to A(X_1 - X_0) = 0$

$Z_0 + X_0$ è una soluzione di $AX = 0$ $X_1 = X_0 + Z_0$

Osserviamo che $\rho(A) = n$ per ipotesi

$\rho(A|I)$?

$(A|I)$ è una matrice $n \times m$ ridotta con rango n. Il teorema di R.C. conferma che $AX = I$ è risolvibile con una sola soluzione che è allora proprio la matrice inversa.

L'inversa di A^{-1} si può trovare col "metodo di riduzione".

Esempio

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad (A|I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$ $\quad R_2 \to R_2 - R_1$

$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$ $\quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 = (1 \ 0) \\ -x_1 = (-1 \ 1) \end{cases}$ $\quad x_1, x_2$ righe di A^{-1}

$\begin{cases} x_1 = (1 \ -1) \\ x_2 = (1 \ 0) - 2(1 \ -1) = (-1 \ 2) \end{cases}$ $\quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$\boxed{AX = B \quad \begin{array}{l} A \ m \times n \text{ data} \\ X \ n \times p \text{ incognita} \\ B \ m \times p \text{ data} \end{array}}$

• o: $XC = D$

Vale la proprietà per il prodotto di matrici ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$.

Considero l'eq. $XC = D$.
Passiamo alle trasposte ${}^t(XC) = {}^tD$

$$({}^tC)\,{}^tX = {}^tD$$

$$A^t X = B$$

Le tecniche viste permettono di calcolare ${}^tX$ e quindi X.

Esempio di calcolo di A^{-1} con le trasf. elem. sulle righe di una matrice

A^{-1} è soluzione di $AX = I$

Usiamo il metodo di riduzione $(A|I)$.
Con t.e. si arriva ad avere A ridotta.
Si può risolvere un sistema con incognite le righe $x_1, \dots x_n$ di A^{-1}.

es. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ $\det A = 1 \neq 0 \rightarrow A$ è invertibile

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 - 2R_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} R_1 \to R_1 + 3R_3 \\ R_2 \to R_2 + 3R_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -5 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$R_1 \to R_1 - 2R_2 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 9 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$R_3 \to -R_3 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 9 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\qquad\qquad I \qquad\qquad\quad A^{-1}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 23 di 101

Dim.

1) $(0+0)v = \begin{cases} 0v \\ 0v+0v \end{cases}$

$0v = 0v + 0v$

$0v$ è un vettore e quindi ho un opposto $-0v$.

Sommiamo questo vettore ai membri di $(0v = 0v + 0v)$

$(-0v) + 0v = (-0v) + [0v + 0v]$

aggiunto!

$0_V = [(-0v) + 0v] + 0v$

$0_V = \cancel{0_V} + 0v \rightarrow 0_V = 0v$

3) Sia $av = 0_V$

Proviamo che se $a \neq 0$, allora $v = 0_V$

$\frac{1}{a}(av) = \frac{1}{a} \cdot 0_V$

$\left(\frac{1}{a}a\right)v = 0_V$

$1v = 0_V$

$v = 0_V$

$\rightarrow$ (a caso) si dimostri che $\forall v \in V$ $(-1)v = -v$

Esempi:

1. $V = \mathbb{R}$ con le usuali operazioni di somma e prodotto
2. $V = \mathbb{R}^n$

   $\mathbb{R}^n$ è l'insieme di tutte le n-uple ordinate $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ di numeri reali.

   somma: $(x_1, x_2, \dots x_n) + (y_1, y_2, \dots y_n) = (x_1 y_1, \dots x_n y_n)$

   prodotto per n reali: $a(x_1, x_2 \dots x_n) \underset{def.}{=} ax_1, ax_2 \dots ax_n$

3. $V = \mathbb{R}^{m,n}$.

   V è l'insieme delle matrici reali con m righe ed n colonne.

   Le operazioni sono quelle già definite sulle matrici.

Osservazione

Molto spesso si identificano $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^{n,1}$, $\mathbb{R}^{1,n}$

Non è un s.s. di $\mathbb{R}^3$ il sottoinsieme
$W = \{(x, y, 1), x, y \in \mathbb{R}\}$
ad es. $0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0) \notin W'$

Non è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$
$W'' = \{(x, y, y^2), x, y \in \mathbb{R}\}$

$(3, 4, 16) \in W''$ $(3, 4, 1) \notin W''$

- $(0, 0, 0) \in W''$
- $\underbrace{(0, 1, 1)}_{\in W''} + \underbrace{(0, 2, 4)}_{\in W''} = (0, 3, 5) \notin W''$

abbiamo visto che:
1. In $V = \mathbb{R}[x]$ costituiscono s.s. i polinomi di grado $\leq d$, d grado fissato
   questo s.s. si indica con $\mathbb{R}_d[x]$
2. In $\mathcal{F}((a, b))$ sono sottospazi $C^0((a,b))$, $C^1((a,b))$
   per ogni spazio vettoriale V sono sottospazi:
   $W = \{0_V\}$ $W = V$
   Si parla di s.s. impropri, banali, triviali.

② $V = \mathbb{R}^3$

$W_1 = \{(a,b,0) \; a,b \in \mathbb{R}\}$ sottospazi
$W_2 = \{(0,c,d) \; c,d \in \mathbb{R}\}$

$W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3 \quad (\alpha,\beta,\gamma) = \underset{\in W_1}{(\alpha,\beta,0)} + \underset{\in W_2}{(0,0,\gamma)}$

<u>Osservazione</u> $(\alpha,\beta,\gamma) = \underset{\in W_1}{(\alpha,0,0)} + \underset{\in W_2}{(0,\beta,\gamma)}$

<u>Def</u> La somma di due sottospazi W_1 e W_2 di V si dice <u>diretta</u> e si indica con $W_1 \oplus W_2$. Se ogni $v \in W_1 + W_2$ si decompone in modo unico come somma di un vettore $w_1 \in W_1$ e di un vettore $w_2 \in W_2$

<u>Prop.</u> La somma di <u>due</u> sottoinsiemi W_1, W_2 è diretta se e solo se $W_1 \cap W_2 = \{0\}$

GENERATORI DI UNO SPAZIO VETTORIALE

Spazi <u>finitamente generati</u>

Siano $v_1, v_2, \ldots v_r$ vettori di V $(r \geq 1)$. Si indica con $\mathcal{L}(v_1, v_2, \ldots v_r)$ l'insieme delle combinazioni lineari (c.l.) di $v_1, \ldots v_r$ cioè

$\mathcal{L}(v_1, \ldots v_r) = \{a_1 v_1 + a_2 v_2, \ldots, a_r v_r\}$ al variare di $a_1, a_2, \ldots, a_r$ in $\mathbb{R}$

In altri termini:

$v \in \mathcal{L}(v_1, \ldots v_r)$ vuol dire che esistono r numeri reali $a_1, a_2, \ldots a_r$ per cui

$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_r v_r$

<u>Prop</u> $W = \mathcal{L}(v_1, \ldots v_r)$ è un <u>sottospazio</u> di V che si dice generato da $v_1, \ldots v_r$ (si dice anche che $v_1, \ldots, v_r$ generano W)

<u>Esempio 1</u> $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Consideriamo le m righe $R_1, R_2, \ldots R_m$ di A pensate come m-righe di numeri reali ovvero come vettori di $V = \mathbb{R}^n$. $\mathcal{L}(R_1, \ldots R_m) \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice <u>spazio</u> delle righe di A $(R(A))$. Se $C_1, \ldots, C_n$ sono le colonne pensate come vettori di $\mathbb{R}^m$, $\mathcal{L}(C_1, \ldots, C_n)$ si chiama spazio delle colonne di A.

<u>Esempio 2</u> $V = \mathbb{R}^n$

Consideriamo i vettori $e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$. 1 in posizione i-esima $i = 1, 2, \ldots, n$

$\boxed{\text{Se } n=3}$ $e_1 = (1,0,0) \quad e_2 = (0,1,0) \quad e_3 = (0,0,1)$

$\mathcal{L}(e_1, e_2) = \{a_1 e_1 + a_2 e_2\} = \{a_1 (1,0,0) + a_2 (0,1,0)\} = \{(a_1, a_2, 0), a_1 a_2 \in \mathbb{R}\}$

$\mathcal{L}(e_1, e_2, e_3) = \mathbb{R}^3$

<u>Def</u> V si dice <u>finitamente generato</u> se in V si può trovare un numero finito di vettori $v_1, v_2, \ldots, v_r$ che generano V, cioè $V = \mathcal{L}(v_1, \ldots v_r)$

Def 2 I vettori $v_1, \dots, v_r$ si dicono linearmente indipendenti (l.i.) se $a_1 v_1 + \dots + a_r v_r = 0_V$ è possibile solo con coeff. tutti nulli

$(a_1 v_1 + \dots + a_r v_r = 0_V \Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_r = 0)$

Def. 3 Se $v_1, \dots, v_r$ sono l.i. l'insieme $\{v_1, \dots, v_r\}$ si dice libero

Caso $r=1$ Consideriamo l'uguaglianza

$(*)$ $a_1 v_1 = 0_V$

Se $v_1 = 0_V$ $(*)$ vera $\forall a_1$

Se $v_1 \neq 0_V$ $(*)$ vera solo se $a_1 = 0$

$\Rightarrow \{v_1\}$ è libero se e solo se $v_1 \neq 0_V$

Esempi

① $V = \{$vettore dello spazio$\}$

$\{v_1, v_2\}$ è libero se $a_1 v_1 + a_2 v_2 = 0_V \Rightarrow a_1 = a_2 = 0$

$v_1 = 0_V$ vettori l.d., idem se $v_2 = 0_V$

$v_1, v_2 \neq 0_V$ $a_1 v_1 = -a_2 v_2$

I vettori sono l.i. $\Leftrightarrow$ non sono paralleli

② $V = \mathbb{R}^n$

$e_1, e_2, \dots, e_n$ sono l.i.

$a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n = 0_V \Rightarrow a_1 = \dots = a_n = 0_V$

$a_1(1,0,\dots,0) + a_2(0,1,\dots,0) + \dots + a_n(0,0,\dots,1) = (0,0,\dots,0)$

$(a_1, a_2, \dots, a_n) = (0,0,\dots,0)$

Proposizione 1 Dato uno spazio vett. V. Se $v_1, \dots, v_r \in V$ sono l.d. allora $v_1, \dots, v_r, v$ sono l.d. $\forall v \in V$

Dim. Per ipotesi esistono r numeri reali $a_1, \dots, a_r$ non tutti nulli per cui

$(*)$ $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_r v_r = 0_V$

$(*)$ si può riscrivere come:

$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_r v_r + 0 v = 0_V$

Si ottiene una c.l. di $v_1, \dots, v_r, v$ con coeff. non tutti nulli

Proposizione 2 Siano dati in V r vettori $v_1, v_2, \dots, v_r$. I vettori sono l.i. se

1) $v_1 \neq 0_V$

2) nessuno dei vettori $v_2, \dots, v_r$ è combinazione lineare dei precedenti:

$\forall i = 2, \dots, r$ non esistono $\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}$ per cui $v_i = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_{i-1} v_{i-1}$

Basi di uno spazio vettoriale, dimensione

Def Si dice che l'insieme ordinato $(v_1, v_2, \dots, v_r)$ di vettori di uno spazio vettoriale V ne costituisce una base se:
1. $v_1, \dots, v_r$ sono l.i.
2. $v_1, \dots, v_r$ generano V

Corollario della prop. 3: se $(v_1, \dots, v_r)$ è una base per V, ogni vettore $v \in V$ si scrive in modo unico come c.l. di $v_1, \dots, v_r$. Esistono cioè e sono univocamente determinati r numeri reali $a_1, \dots, a_r$ per cui
$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_r v_r$

I numeri (nell'ordine) $a_1, a_2, \dots, a_r$ si dicono componenti di v rispetto alla base $(v_1, v_2, \dots, v_r)$.

Data una base in V esiste quindi una corr. biunivoca tra V e $\mathbb{R}^r$
$(a_1, a_2, \dots, a_r) \leftrightarrow a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_r v_r$

Questa corr. biunivoca "conserva" le operazioni.

Lemma di STEINI(T)Z

Sia V uno sp. vett. f.g. sono dati in V due insiemi di vettori
1. $v_1 \dots v_r$ l.i.
2. $u_1, \dots u_s$ generatori per V

Allora: $s \geq r$

In altro modo:
- Se V è generato da s vettori, allora al più si trovano r vettori l.i.
- se V è f.g. e in V troviamo r vettori l.i., il n° dei generatori è almeno r.

Corollario Se $B = (v_1, \dots, v_n)$ e $B' = (w_1, \dots, w_m)$ sono basi per uno sp. vett. V, allora $n = m$

Dim. $v_1 \dots v_n$ sono generatori
$w_1 \dots w_m$ sono l.i. $\quad m \leq n$
Scambiando le basi
$v_1 \dots v_n$ sono l.i. $\quad n \leq m$
$w_1 \dots w_m$ sono generatori

$\left.\begin{matrix} m \leq n \\ n \leq m \end{matrix}\right\} n = m$

Def. Il numero di vettori che sono basi di V si dice dimensione di V (dim V)

Quindi: 1. Dire che V ha dimensione n vuol dire che c'è una base con n vettori
2. Per calcolare dim V si deve trovare una base e contarne gli elementi

Convenzione Se $V = \{0_V\}$ si dice che $\dim V = 0$, una base è l'insieme vuoto

Rango di una matrice A:
1. A ridotta. Consideriamo lo spazio $R(A)$ formato dalle c.l. delle righe di A (spazio delle righe), le righe non nulle formano una base per $R(A) \Rightarrow \rho(A) = \dim R(A)$

Viceversa:

Supponiamo di avere t vettori $w_1, w_2 \dots w_t$, in uno spazio vett. f.g. che siano l.i.

È possibile aggiungere, se necessario, dei vettori per ottenere una base.

metodo del completamento

di un insieme libero di vettori di una base:
si aggiunge all'insieme libero $\{w_1, \dots w_r\}$ un insieme di generatori, e poi si applica il metodo degli scarti.

Dim: Considero un insieme di generatori per V (che esiste per ipotesi) $v_1 \dots v_r$.

I vettori $w_1 \dots w_t, v_1 \dots v_r$ generano V.

$V = \mathcal{L}(v_1, \dots v_r) = \mathcal{L}(w_1 \dots w_r, v_1 \dots v_r)$

Se si applica il metodo degli scarti ai vettori $w_1 \dots w_r, v_r$ nessuno dei w_i viene scartato perché sono l.i.

Richiami sugli spazi vettoriali $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$

Se i vettori di $\mathbb{R}^n$ sono le n-ple ordinate di numeri reali $v \in (a_1, a_2 \dots a_r)$

$\mathbb{R}^n$ è f.g. Una sua base è la base canonica $\beta(e_1, e_2 \dots e_r)$

$e_i = (0, \dots, 1, \dots 0)$ 1 in posizione i-esima

Es. $n=3$ $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$

Se $v = (a_1 \dots a_n)$, $v = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n$ e quindi le componenti di v rispetto alla base canonica sono proprio $a_1 \dots a_n$.

- Dim $\mathbb{R}^n = n$.

Tutte le basi di $\mathbb{R}^n$ contengono n vettori.

Oss: se si hanno s vettori, $s < n$ non si ha una base perché i vettori non possono generare tutto $\mathbb{R}^n$.

Se $s > n$, i vettori non formano basi perché non sono l.i.

Se $s = n$, per verificare che formano una base è sufficiente verificare che i vettori sono l.i. oppure che sono generatori.

Verifica dell'indipendenza lineare di certi n vettori dati $v_1 \dots v_n \in \mathbb{R}^n$

metodi

1) Usare la def. Provare che $\alpha v_1 + \alpha_n v_n = 0 \Rightarrow \alpha = \alpha_2 = \alpha_n = 0$
2) Esame successivo dei vettori (nessuno dei vettori è c.l. dei precedenti)
3) Si costruisce una matrice di A $m \times n$ scrivendo i vettori come righe.

e ammette come base, ad es. $(1, x, x^2, x^3)$.
Ogni polinomio $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ ha come componenti, rispetto a quella base, a_0, a_1, a_2, a_3.
Sostituiamo $p_1(x), p_2(x), p_3(x)$ con le quaterne delle loro componenti
$p_1(x) \to (1,1,2,0)$ $p_2(x) \to (0,1,1,-1)$
$p_3(x) \to (-1,1,0,k)$ e usare i calcoli precedenti.

se $k \neq 2$ i tre polinomi sono l.i. e formano una base per W.
se $k = 2$, i tre polinomi sono l.d.

Una base per W è data "dalle righe della matrice": $(1 + x + 2x^2,\ x + x^2 - x^3)$

ESERCIZIO: le matrici $\mathbb{R}^{2\times2}$

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad M_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Una base di $\mathbb{R}^{2\times2}$ è ad esempio:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \dim \mathbb{R}^{2\times2} = 4$

Soluzioni: $(t_1, -3t_1 + 3t_2 - t_3, t_2, -t_1 + 3t_2, t_3) = t_1(1,-3,0,-1,0) + t_2(0,3,1,3,0) + t_3(0,-1,0,0,1)$

Il sottospazio W delle soluz. è generato da tre vettori $s_1(1,-3,0,-1,0)$, $s_2(0,3,1,3,0)$, $s_3(0,-1,0,0,1)$

I vettori s_1, s_2, s_3 sono l.i.:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \rho(M) = 3 \Rightarrow s_1, s_2, s_3 \text{ formano una base per } W$$

Cambiamenti di base in uno spazio vettoriale V (f. g.)

Sono date due basi in V

$\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$

$\mathcal{B}' = (v_1', \dots, v_n')$

Sia $v \in V$ $\quad v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$, $\quad v = a_1' v_1' + \dots + a_n' v_n'$

Cerchiamo il legame tra le componenti $(a_1, \dots, a_n)$ e le comp. $(a_1', \dots, a_n')$

$v_i' = p_{1i} v_1 + p_{2i} v_2 + \dots + p_{ni} v_n \quad (i = 1, \dots, n)$

Sostituendo nell'espressione di v si ottiene una "nuova" combinazione lineare di $v_1, \dots, v_n$

$$\begin{cases} a_1 = a_1' p_{11} + a_2' p_{12} + \dots + a_n' p_{1n} \\ a_n = a_1' p_{n1} + a_2' p_{n2} + \dots + a_n' p_{nn} \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} a_1' \\ \vdots \\ a_n' \end{pmatrix} \ (*)$$

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{n1} & p_{n2} & & p_{nn} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \text{matrice del} \\ \text{cambio base} \end{pmatrix}$$

La 1° colonna contiene le componenti di v_1' rispetto a $\mathcal{B}$, in generale, la i-esima colonna contiene le componenti di v_i' rispetto a $\mathcal{B}$

${}^tP$ ha come righe vettori l.i. di $\mathbb{R}^n \Rightarrow \rho({}^tP) = n \Rightarrow \det({}^tP) \neq 0 \Rightarrow \det P \neq 0$

$\boxed{P \text{ è invertibile}}$

Da $(*)$ si può ottenere $\begin{pmatrix} a_1' \\ \vdots \\ a_n' \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

<u>Osservazione</u>: $\forall M \in \mathbb{R}^{m,n}$, $\rho(M) = \rho({}^tM)$

$f(v) = v'$ è la sua derivata

f è una applicazione lineare

⑤ $f: \mathbb{R}^{2,2} \to \mathbb{R}^{2,2}$ $\quad f(M) = {}^tM$

I) $v = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad v' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$

$$f(v+v') = f\begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & c+c' \\ b+b' & d+d' \end{pmatrix}$$

$$f(v) + f(v') = f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & c+c' \\ b+b' & d+d' \end{pmatrix}$$

II) $f(kv) = f\begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka & kc \\ kb & kd \end{pmatrix}$

$k f(v) = k\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka & kc \\ kb & kd \end{pmatrix} \qquad$ f è lineare

<u>A. L. iniettive</u>

<u>Def.</u> una funzione f tra due insiemi $\quad f: A \to B$

si dice <u>iniettiva</u> se $a, a' \in A$, $a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')$

ovvero: $f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$

<u>Il nucleo</u> di una a.l.

$f\ V \to V$ a.l.

$\operatorname{Ker} f = \{ v \in V,\ f(v) = 0_V \}$

<u>OSS.</u> Ker f non è mai vuoto: $0_V \in \operatorname{Ker} f$

<u>Dim.</u> $f(0_V) = f(\underset{\in \mathbb{R}}{0}\, 0_V) = 0\, f(0_V) = 0_V$

<u>Proposizione 1</u> Ker f è un sottospazio di V

<u>Proposizione 2</u> $f: V \to V$ è iniettiva se e solo se $\operatorname{Ker} f = \{0_V\}$

<u>Es.</u> $f\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \quad f(x,y,z) = (x+y,\ x-y+z)$

$\operatorname{Ker} f = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x+y=0,\ x-y+z=0 \}$

$=$ insieme delle soluz. del sistema omogeneo $\begin{cases} x+y=0 \\ x-y+z=0 \end{cases}$

Ker f contiene ∞ elementi, $\operatorname{Ker} f \neq \{0_V\}$ $\quad f$ non è iniettiva

Esempio $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ 2×3

$f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ $f(x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2)$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + 3x_3, 5x_1 + 4x_2 + 7x_3)$$

Si dimostra che $\forall A$, f_A è lineare

L'es. visto $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ $f(x,y,z) = (x+y, x-y+z)$ è associata alla matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

- Ker f_A = soluzione del sistema omogeneo $AX = 0$, dim Ker f_A = dim spazio delle soluz. = n° incognite libere = $n - \rho(A)$
- f iniettiva, Ker $f_A = \{0_{\mathbb{R}}\}$, $AX = 0$ ha solo la soluz. nulla, $\rho(A) = n$ m
- dim Im $f_A = \rho(A)$, f suriettiva, Im $f = \mathbb{R}^m$, $\rho(A) = n$ m

Proposizione 1

Sia $f : V \to W$ una a.l.

Il nucleo di f è un s.s. di V

$\text{Ker} f = \{ v \in V, f(v) = 0_W \}$

f lineare
1. $f(v + v') = f(v) + f(v')$
2. $f(kv) = k f(v)$, $k \in \mathbb{R}$

Da dim.

1. $0_V \in \text{Ker} f$
2. $v, v' \in \text{Ker} f \Rightarrow v + v' \in \text{Ker} f$
3. $k \in \mathbb{R}$, $v \in \text{Ker} f \Rightarrow kv \in \text{Ker} f$

① $0_V \in \text{Ker} f$ vuol dire $f(0_V) = 0_W$ (già visto)

② $f(v) = 0_W$, $f(v') = 0_W$ $\Rightarrow f(v + v') = 0_W$

$f(v + v') = f(v) + f(v') = 0_W + 0_W = 0_W$

③ $f(v) = 0_W \Rightarrow f(kv) = 0_W$

$f(kv) = k f(v) = k 0_W = 0_W$

In generale, se $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, le colonne di A pensate come m-uple sono i vettori $f_A(e_1), f_A(e_2) \dots$
$\dots f_A(e_n)$ $\quad \mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ base canonica di $\mathbb{R}^m$

Torniamo all'esempio:

$f_A(x_1, x_2, x_3) = f_A(x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3) = x_1 f_A(e_1) + x_2 f_A(e_2) + x_3 f_A(e_3) =$ c.l. di $f_A(e_1)$, $f_A(e_2)$, $f_A(e_3)$

$\mathrm{Im}\, f_A = \mathcal{L}(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$

$\mathrm{Im}\, f_A$ è generata dalle "colonne" di A. $\mathrm{Im}\, f_A$ è lo spazio delle colonne di A. I calcoli si possono generalizzare a $A \in \mathbb{R}^{m,n}$. $\mathrm{Im}\, f_A =$ spazio delle colonne

$\dim \mathrm{Im}\, f_A = \rho(A)$

Segue che: f_A è suriettiva (cioè $\mathrm{Im}\, f_A = \mathbb{R}^m$) $\Leftrightarrow \dim \mathrm{Im}\, f_A = m \Leftrightarrow \rho(A) = m$ (cioè le colonne di A sono l.i.). Nell'es. $\rho(A) = 2 = m$: f_A è suriettiva

Osservazioni

1. $\dim \mathrm{Ker}\, f_A = n - \rho(A)$ $\quad \dim \mathrm{Im}\, f_A = \rho(A)$

$$\boxed{\dim \mathrm{Ker}\, f_A + \dim \mathrm{Im}\, f_A = n}$$

2. Se $n > m$, $\rho(A) \leq m < n \Rightarrow \dim \mathrm{Ker}\, f_A > 0$, f_A non è iniettiva
3. Se $n < m$, $\rho(A) \leq n < m$ $\mathrm{Im}\, f_A$ è un s.s. proprio di $\mathbb{R}^m$. f_A non è suriettiva
4. Se $n = m$: f_A iniettiva $\Leftrightarrow f_A$ è suriettiva $\Leftrightarrow f_A$ isomorfismo

Complementi

1. $A = 0 \in \mathbb{R}^{m,n}$ $\quad f_A(v) = 0_{\mathbb{R}^m}$ f_A è la funzione (a.l.) nulla
2. $A = I_n$ $\quad f_A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $\quad f_A(v) = v$, $\forall v \in \mathbb{R}^n$. L'app. lin. si chiama app. lin identica o identità e si indica con i, $1_{\mathbb{R}^n}$
3. $A, B \in \mathbb{R}^{m,n}$. Esiste $A+B$
   $f_{A+B}(v) = f_A(v) + f_B(v)$, $\forall v \in \mathbb{R}^n$
   $(A+B)X = AX + BX$ $\quad$ Si ottiene l'app. lineare somma di f_A e f_B
4. Sia $k \in \mathbb{R}$: $f_{kA}(v) = k f_A(v)$ $\quad f_{kA} = k f_A$
   uguaglianza tra vettori $\quad$ uguaglianza tra funzioni
5. $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ $\quad B \in \mathbb{R}^{p,m} \Rightarrow$ esiste $BA \in \mathbb{R}^{p,n}$
   $f_{BA}(v)$? $\quad (BA)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = B\left(A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right)$

   $\mathbb{R}^n \xrightarrow{f_A} \mathbb{R}^m \xrightarrow{f_B} \mathbb{R}^p$ $\quad f_B \circ f_A = f_{BA}$
6. $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ invertibile $\quad \mathbb{R}^n \xrightarrow{f_A} \mathbb{R}^n$ iso $(\rho(A) = n)$
   $y = AX$ $\quad X = A^{-1}y$
   $f_{A^{-1}} = (f_A)^{-1}$

Calcoliamo $y = AX$ $\quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Per def.: $f(v) = y_1 c_1 + y_2 c_2 + \dots + y_m c_m$

Si verifica che questa funzione $V \to W$ è lineare.
Le sue proprietà dipende da A.

ES $\quad V = \mathbb{R}_2[x] \qquad W = \mathbb{R}^{2,2}$

$\mathcal{B} = (1, x, x^2)$

$\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4,3}$$

$v \in V$, $v = p(x) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2$

Determinare la matrice $f(v) = f_A^{\mathcal{B},\mathcal{C}}(v)$

Calcoliamo

$$A \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{cases} a_0 + a_2 \\ 2a_0 - a_1 + 3a_2 \\ a_0 + a_1 + a_2 \\ 5a_2 \end{cases} \to y$$

$$f(v) = (a_0 + a_2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (2a_0 - a_1 + 3a_2)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (a_0 + a_1 + a_2)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (5a_2)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f(v) = \begin{pmatrix} a_0 + a_2 & 2a_0 - a_1 + 3a_2 \\ a_0 + a_1 + a_2 & 5a_2 \end{pmatrix}$$

ES. $\quad V = \{\text{vettori ordinari nello spazio}\}$

$W = \mathbb{R}^3$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ Costruiamo una a.l. $f: V \to \mathbb{R}^3$ a partire da A, fissando come basi $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{u})$ per V e la base canonica in $\mathbb{R}^3$.

$v = v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j} + v_3 \vec{u}$

$f(v)$? $\quad f = f_A^{\mathcal{B},\mathcal{C}}$

$A = M_f^{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \left(\quad \right)_{2\times 3}$

1ª colonna

$b_1 = 1$ $f(b_1)$ = derivata del polinomio 1 =

= polinomio nullo, che ha componenti $(0,0)$

rispetto a $b_2 = x$ $f(x)$ = deriv di $x = 1 = 1 + 0x$

$b_3 = x^2$ $f(b^3) = 2x$

2) $V = \{$vettori nello spazio$\}$

Fissiamo un vettore $\bar{a} = a_1\bar{i} + a_2\bar{j} + a_3\bar{u} \neq 0$

Consideriamo la funzione $f: V \to V$

$f(\bar{v}) = \bar{a} \wedge \bar{v}$

1. f è lineare

$f(v+v') = \bar{a} \wedge (v+v') = a \wedge v + a \wedge v' = f(v) + f(v')$

$k \in \mathbb{R}$, $f(kv) = a \wedge kv = k(a \wedge v) = k f(v)$

Fissiamo $\mathcal{B} = \mathcal{C} = (\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$

$M_f^{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 3}$

1° colonna: $f(b_1)$?

$f(\bar{i}) = \bar{a} \wedge \bar{i} = -a_2\bar{k} + a_3\bar{j}$

$f(\bar{j}) = \bar{a} \wedge \bar{j} = a_1\bar{k} - a_3\bar{i}$

$f(\bar{k}) = \bar{a} \wedge \bar{k} = -a_1\bar{j} + a_2\bar{i}$

Osservazione:

1. La matrice associata ad una a.l. $f: V \to W$, rispetto $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, dipende dalla base scelta.

2. Se $V = \mathbb{R}^n$, $W = \mathbb{R}^m$ non necessariamente le basi più "comode" sono quelle canoniche.

3. Se $V = W$, in generale si sceglie $\mathcal{B} = \mathcal{C}$ basi. Può essere conveniente usare due ~~matrici~~ diverse.

Nota: le matrici associate ad uno stesso f al variare della scelta delle basi hanno lo stesso rango.

$\rho(A) = \dim \operatorname{Im} f$ e quindi non dipende da $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$.

Teoremi importanti!

Sono dati V e W con V f.g.

1. Teo. della dimensione

Sia $f: V \to W$ una a.l., allora $\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim V$

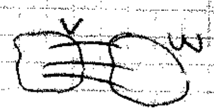
Corollario

$\operatorname{Im} f$ è f.g. e la $\dim \operatorname{Im} f \leq \dim V$

2. Teo. fondamentale dell'Algebra Lineare

Sia $\mathcal{B} = (b_1 \dots b_n)$ una base per V e siano $w_1 \dots w_n$ n vettori (qualsiasi) in W.

Esiste una e una sola a.l. $f: V \to W$ perché:



$f(b_1) = w_1$
$f(b_2) = w_2$
$f(b_n) = w_n$

Es. di applicazione del 2° teorema

1. $V = \mathbb{R}^3$ $W = \mathbb{R}^3$

Trovare la a.l. $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ per cui

$f(1,0,0) = (1,2)$
$f(0,1,0) = (3,4)$
$f(0,0,1) = (1,1)$

La base $\mathcal{B}$ del teorema è la base canonica in $\mathbb{R}^3$.

$A = M_f = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 3x_2 + x_3,\ 2x_1 + 4x_2 + x_3)$

2. $V = \mathbb{R}^3$ $W = \mathbb{R}^2$

Troviamo : e'a l'y per cui

$y(1,1,1) = (2,2)$
$y(1,1,0) = (1,1)$
$y(1,0,0) = (3,4)$

Teorema $b_1\ (1,1,1)$ $b_2 = (1,1,0)$ $b_3 = (1,0,0)$
$w_1\ (2,2)$ $w_2\ (1,1)$ $w_3\ (3,4)$

Controlliamo che (b_1, b_2, b_3) sia base per $\mathbb{R}$.

b_1, b_2, b_3 sono l.i.:

$$M = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{array} \qquad \rho(M) = 3$$

Per determinare l'espressione di y bisogna conoscere $y(e_1)$, $y(e_2)$, $y(e_3) \to (e_1, e_2, e_3)$ base canonica.

<u>Teorema</u>. Sia $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, esiste $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ per cui $f = f_A$

<u>Dim</u>. Basta costruire A prendendo come colonne i vettori $f(e_1), \dots, f(e_n)$, dove $(e_1, \dots, e_n)$ è la base canonica di $\mathbb{R}^n$.

Infatti: $\forall (x_1, \dots, x_n)$

$$f(x_1, \dots x_n) = x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + \dots + x_n f(e_n) = x_1 f_A(e_1) + \dots + x_n f_A(e_n) = f_A(x_1 \dots x_n)$$

vedi appunti giulia

<u>Autovalori ed autovettori di un endomorfismo</u>

<u>Def</u> si dice endomorfismo un'applicazione lineare f di uno spazio V in sé: $f: V \to V$

<u>Esempi</u> ① Cons. l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ $f = f_A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ associato alla matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Calcoliamo $f(1,1,1) = (2,2,2) = 2(1,1,1)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

② $f: C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ $\quad f =$ derivazione

Se $v = y(x)$ $\quad f(v) = y'(x)$

Per $v = e^{ax}$ $\quad f(v) = ae^{ax} = av$ $\quad (a \neq 0)$

<u>Def. 1</u> $\lambda \in \mathbb{R}$ si dice autovalore (o valore proprio) per un endom. $f: V \to V$ se esiste un vettore $v \in V$, $v \neq 0_V$, per cui (*) $f(v) = \lambda v$

<u>Def. 2</u> Se $\lambda \in \mathbb{R}$ è un autovalore per f, i vettori v che soddisfano (*) si dicono autovettori (o vettori propri) per f relativo a λ

<u>Def. 3</u> Se λ è un autovalore l'insieme dei corrispondenti autovettori si dice <u>autospazio</u> di f relativo a λ

<u>N.B.</u> A volte il vettore nullo che soddisfa (*) non viene considerato come autovettore

<u>Proposizione</u> Se λ è un autovalore per f il corrispondente spazio V_λ è un autospazio di V

<u>Dim</u>. 1. $0_V \in V_\lambda$ (soddisfa (*))

2. $v, v' \in V_\lambda \overset{?}{\Rightarrow} v + v' \in V_\lambda$

$v, v' \in V_\lambda$ vuol dire $f(v) = \lambda v$, $f(v') = \lambda v'$

$f(v+v') = f(v) + f(v') = \lambda v + \lambda v' = \lambda(v+v') \Rightarrow v + v'$ soddisfa la condizione (*)

3. $k \in \mathbb{R}, v \in V_\lambda \overset{?}{\Rightarrow} kv \in V_\lambda$ per ipotesi $f(v) = \lambda v$

$f(kv) = k f(v) = k(\lambda v) = (k\lambda)v = \lambda(kv)$

$$\det\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

Ricerca degli autovalori

λ è autovalore se è una soluzione dell'eq. $\det(A-TI)=0$ nell'incognita T.
Questa eq. è un'equaz. algebrica perché $\det(A-TI)$ è un polinomio in T di grado n.
Trovare gli autovalori vuol dire trovare le soluzioni di un eq. di grado n.

$f: V \to V$ endomorfismo V f.g.
Ricerca autovalori ed autovettori di f

1. Fissare una base $\mathcal{B}=(b_1 \dots b_n)$ in V e determinare $A = M_f^{\mathcal{B},\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^{n,n}$
2. Si calcola il polinomio caratteristico di A (p.c.(A))
   $p(T) = \det(A-TI)$
   Gli autovalori di f sono le radici del polinomio caratteristico di A e quindi si ottengono risolvendo l'eq. $\det(A-TI)=0$
3. Se λ è un autovalore, gli autovettori $v \in V$ corrispondenti si ottengono:
   i) Si risolve il sistema lineare
   $(*)\ (A-\lambda I)x=0$
   Se $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ è una soluzione, si ha l'autovettore $v = x_1 b_1 + x_2 b_2 + \dots + x_n b_n$

COMMENTI

1. Se $\mathcal{B}'$ è un'altra base per V $(\mathcal{B}'=(b'_1, \dots, b'_n))$ e $A' = M_f^{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}$, si dimostra che p.c.(A') = p.c.(A)
2. Il sistema $(*)$ ha soluzioni non nulle perché $\rho(A-\lambda I)<n$. C'è almeno un incognita libera

Se V_λ è l'autospazio relativo a λ, $\dim V_\lambda$ = n° incognite libere in $(*) = n - \rho(A-\lambda I)$
Si dimostra che $\dim V_\lambda \leq \mu_\lambda \Rightarrow$ molteplicità del valore λ come radice del p.c. (A)
In particolare se λ è una radice semplice $(\mu_\lambda = 1)$, $\dim V_\lambda = 1$.

3. Oss. sul p.c. (A)
   i) Se $\dim V = n$, $A = M_f^{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ è $n \times n$, grado del p.c.(A) = n. Ci sono al più n autovalori reali distinti. In $\mathbb{C}$ p.c.(A) ha esattamente n radici (tenendo conto delle molteplicità). Se p.c.(A) è reale e $\alpha + i\beta$ è una radice complessa, allora anche $\alpha - i\beta$ è una radice con la stessa molteplicità.
   Se A è reale e quindi p.c.(A) è un polinomio reale, allora se n è dispari c'è almeno un autovalore λ reale.
   ii) p.c.(A): $p(T) = (-1)^n T^n + \dots + (\det A)$

$M_f^{C,C} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$ $\quad C = (v_1 \dots v_n) \quad v_1 \to f(v_1)$: scrivo le componenti di $f(v_1)$ rispetto alla base di arrivo nella prima colonna

$f(v_1) = \lambda_1 v_1$, λ_1 autovalore relativo a $v_1 = \lambda_1 v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_n$

$M_f^{C,C} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ & \lambda_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ In generale $f(v_i) = 0 v_1 + 0v_1 + 0v_2 + \dots + \lambda_i v_i + \dots + 0v_n$

$\Rightarrow M_f^{C,C} = D$ diagonale, nella diagonale compaiono gli autovalori di f "nell'ordine"

<u>OSS.</u> Sia $A = M_f^{B,B}$, B base qualsiasi

Se f è semplice, e se C è una base per V formata da autovettori per f, $M_f^{C,C} = D$ diagonale.

A e D sono matrici associate allo stesso f. Ricordiamo che se $f: V \to W$ è una a.l. e A, A' sono matrici associate in basi diverse $A' = Q^{-1}AP$

P matrice cambio base in V, Q matrice cambio base in W

Nel nostro caso c'è un unico cambiamento di base da B a C (sia "in partenza" che "in arrivo")

$$D = P^{-1}AP$$

dove P è la matrice cambio base da B a C. P è una matrice invertibile le cui colonne contengono le componenti degli autovettori di C rispetto a B.

Si dice che A è stata <u>diagonalizzata</u> o anche che A è simile alla matrice diagonale D.

<u>Osservazione</u> Data A, A è simile ad una matrice diagonale D, cioè esiste P tale che $D = P^{-1}AP$ se e solo se le colonne di P sono "autovettori l.i. per A".

$f: V \to V$ a.l. (endomorfismo) V f.g. f si dice <u>semplice</u> se esiste una base per B formata da autovettori per f.

$A \in \mathbb{R}^{n,n}$ si dice diagonalizzabile se è <u>simile</u> ad una matrice diagonale, cioè se $\exists\, P \in \mathbb{R}^{n,n}$ tale che $P^{-1}AP$ risulta diagonale

<u>Esempi</u>

① $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile

$p.c.(A) = p(T) = \det(A - TI) = T^2 - 6T + 5$

$p(T)$ ha radici $1, 5$ con molteplicità 1

La matrice P tale che $P^{-1}AP$ sia diagonale deve avere come colonne un autovettore relativo a 1 e un autovettore relativo a 5

$\lambda = 1 \quad (A - 1I)x = 0 \qquad \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x = 0$

$R_3 \to R_3 - 2R_2$ $\begin{pmatrix} -5 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} -5x+2y-z=0 \\ 2x-y=0 \end{cases} \to \begin{cases} z=-5x+2y \\ y=2x \end{cases} \to \begin{cases} z=-x \\ y=2x \end{cases}$

autovettori $(u, 2u, -u)$

Una base per V_6 è ad es. $(1,2,-1)$

Per avere $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ P può essere $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

④ Calcolare A^4 con $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

$P^{-1}AP = D$ $\quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

$A = PDP^{-1}$

$A^4 = A \cdot A \cdot A \cdot A = (PDP^{-1})(PDP^{-1})(PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^4P^{-1}$

$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & \dots & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & \dots & & d_{nn} \end{pmatrix}$ $\quad D^r = \begin{pmatrix} d_{11}^r & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22}^r & \dots & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & \dots & \dots & d_{nn}^r \end{pmatrix}$

$A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$

<u>Matrici simili</u> (osservazioni)

$\mathcal{Y}$ insieme. Una relazione di equivalenza $(a \sim b)$ in $\mathcal{Y}$ è una relazione binaria che gode delle 3 proprietà

① $a \sim a$ pr. riflessiva

② $a \sim b \Rightarrow b \sim a$ pr. simmetrica

③ $a \sim b, b \sim c \Rightarrow a \sim c$ pr. transitiva

Se in $\mathcal{Y}$ è definita una relazione di equivalenza, $\mathcal{Y}$ può essere suddiviso in sottoinsiemi ("classi di equivalenza") a due a due disgiunti

La classe che contiene $a \in \mathcal{Y}$ $([a])$ contiene tutti e soli i $b \in \mathcal{Y}$ equivalenti ad a.

Fissato n, consideriamo $\mathcal{Y} = \mathbb{R}^{n,n}$. Una relazione di equivalenza è ad es. la <u>relazione di similitudine</u>. Diremo che <u>A è simile a B</u> $(A \sim B)$ se $\exists\, P \in \mathbb{R}^{n,n}$ invertibile per cui $P^{-1}AP = B$.

<u>Proprietà</u> se A e B <u>sono simili</u>

① $\rho(A) = \rho(B)$

② $\det A = \det B$ (applicare teo Binet)

③ $p.c.(A) = p.c.(B)$

Def. Se V è f.g. e in V è definito un prodotto scalare, una base $\mathcal{B}$ si dice ortonormale (o.n.) se è formata da versori a due a due ortogonali

Vantaggi di una base o.n. $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$

1) $v = x_1 b_1 + x_2 b_2 + \dots + x_n b_n \Rightarrow x_i = \overset{v}{x_i} \cdot b_i$

Dim. $x_i b_i = (x_1 b_1 + x_2 b_2 + \dots + x_n b_n) \cdot b_i = (x_1 b_1) \cdot b_i + (x_2 b_2) \cdot b_i + \dots + (x_n b_n) \cdot b_i$

$= x_1 (b_1 \cdot b_i) + x_2 (b_2 \cdot b_i) + \dots + x_n (b_n \cdot b_i)$

$= x_i (b_i \cdot b_i) = x_i \| b_i \|^2 = x_i$

2) $v = x_1 b_1 + x_2 b_2 + \dots + x_n b_n$

$v' = x_1' b_1 + x_2' b_2 + \dots + x_n' b_n$

$\Rightarrow v \cdot v' = x_1 x_1' + x_2 x_2' + \dots + x_n x_n'$

Esempi

① $V = \{$ vettori applicati nel piano (o nello spazio) $\}$

Un prodotto scalare è quello definito geometricamente $v \cdot v' = |v||v'| \cos \widehat{v v'}$

La corrispondente norma $\|v\| = \sqrt{v \cdot v} = |v|$ è il modulo di v

② $V = \mathbb{R}^n$

Si dice prodotto scalare euclideo l'operazione, se $v = (x_1, \dots, x_n)$, $v' = (x_1', \dots, x_n')$

$v \cdot v' = x_1 x_1' + x_2 x_2' + \dots + x_n x_n'$

Se $\mathcal{B}$ è la base canonica $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, $\mathcal{B}$ è o.n.

$e_i \cdot e_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \qquad b_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

SIMBOLI DI KRONECKER

$\mathbb{R}^n$ col prodotto scalare euclideo si dice brevemente $\boxed{\mathbb{R}^n \text{ euclideo}}$

② V s.s. di $\mathbb{R}^n$ con pr. scalare definito in $\mathbb{R}^n$ e ristretto a V

③ $V = C^0([a,b]) \qquad [a,b] \in \mathbb{R}$

Un prodotto scalare si può definire nel modo seguente

$v = f(x) \quad v' = g(x)$ continue in $[a,b]$

$$v \cdot v' = \int_a^b f(x) g(x)\, dx$$

Proprietà

$v \cdot v \geq 0 \quad v \cdot v = \int_a^b f(x)\, dx \geq 0$

$v \cdot v = 0$ se e solo se $v = f(x)$ è la funzione nulla

1) $v \cdot v' = v' \cdot v \quad \int_a^b fg = \int_a^b gf$

4) Esiste una base $\mathcal{B}$ per $\mathbb{R}^n$ o.n. formata da autovettori

Una base di autovettori si ottiene considerando una base per ogni autospazio e facendone l'unione. Basta prendere per ogni autospazio una base o.n.

Es. $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$ p.c.$(A) = T^2 - 10T$ $\to \lambda = 0$, $\to \lambda = 10$

$\lambda = 0$ $AX=0$ $\begin{cases} x+3y=0 \\ \dots \end{cases}$ $x=-3y$ $(-3t, t)$

$\lambda = 10$ $(A-10I)=0$ $\begin{cases} -9x+3y=0 \\ 3x-y=0 \end{cases}$ $y=3x$ $(s, 3s)$

Per ogni scelta di t, s:

$(-3t, t)\cdot(s, 3s) = (-3t)s + t(3s) = 0$ autovettori $\perp$

Una base per $\mathbb{R}^2$ o.n. formato da autovettori è ad es.

Per $\underline{\lambda=0}$ una base per V_0 è $(-3, 1)$ che non è un versore perché $\|(-3,1)\| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$

Sostituiamo $(-3,1)$ con $\frac{(-3,1)}{\sqrt{10}} = \left(-\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right) = u_1$

Per $\lambda = 10$, una base per V_{10} è $(1,3)$. Non è un versore, la sostituzione con $\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right) = u_2$

(u_1, u_2) è una base o.n. per $\mathbb{R}^2$ come richiesto

② $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Autovalore 0 doppio, autovettori $(s, t, s+2t)$

" 6 semplice, " $(u, 2u, -u)$

Per ogni scelta di (s, t, u): $(s,t,s+2t)\cdot(u, 2u, -u) = su + t(2u) + (s+2t)(-u) = 0$

Matrici ortogonali

Def. $P \in \mathbb{R}^{n,n}$ si dice ortogonale se $P\,{}^tP = {}^tPP = I$

In altre parole P è ortogonale se è invertibile e se $P^{-1} = {}^tP$

Proposizione Sono condizioni equivalenti

① P è ortogonale

② le righe di P formano una base o.n. per $\mathbb{R}^n$ euclideo

③ le colonne di P " " " " " " "

- P ortogonale (le colonne formano una base o.n. per $\mathbb{R}^n$) ${}^tP = P^{-1}$
- P ha come colonne autovettori

$\Rightarrow {}^tPAP = P^{-1}AP = D$ diagonale

Forme quadratiche (f.q.)

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

f è espressa da un polinomio di 2° grado omogeneo in n variabili $(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Es. $n=1$ $f(x) = ax^2$

$n=2$ $f(x,y) = ax^2 + by^2 + cxy$

$n=3$ $f(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz$

Def. Una forma quadratica si dice in forma canonica se nella sua espressione compaiono solo quadrati

$f(x,y) = x^2 - 5y^2$ è in forma can.

$f(x,y) = x^2 - 2xy$ non lo è

A ogni forma quadratica $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si può associare una matrice simmetrica $A \in \mathbb{R}^{n,n}$

$A = (a_{ij})$ a_{ii} = coeff. del quadrato della i-esima variabile

$a_{ij} = a_{ji}$ $\frac{1}{2}$ coeff. del prodotto della i-esima variabile per la j-esima

Es. ① $f(x,y) = 2x^2 - 3xy - y^2$ $A = \begin{pmatrix} 2 & -3/2 \\ -3/2 & -1 \end{pmatrix}$

② $f(u,v,w) = v^2 - 4uw$ $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Viceversa data $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ simmetrica e fissate le variabili, si determina la f.q.

es. $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 \\ -5 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & -8 \end{pmatrix} \to f(x,y,z) = x^2 - 8z^2 - 10xy + 2xz + 6yz$

Proposizione Se $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è una f.q. e A è la matrice associata

$(*)$ $f(x_1, \dots x_n) = (x_1, \dots x_n) A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_n \end{pmatrix}$

Vedi es. 2

$(u\ v\ w) \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = (u\ v\ w) \begin{pmatrix} -2w \\ v \\ -2u \end{pmatrix} = u(-2w) + v^2 + w(-2u) = -4uw + v^2$

Ponendo, come al solito, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_n \end{pmatrix}$ $(*)$ si può riscrivere

$\boxed{f(x) = {}^t x A x}$

Abbiamo visto che se A è simmetrica reale, esiste P per cui ${}^tPAP$ è diagonale.
Se la sostituzione di variabili $x = Px'$ si fa con una matrice di questo tipo, A' è diagonale e la $g(x')$ è in forma canonica.

Osservazione Se si effettua una sostituzione lineare di variabili, $f(x)$ e $g(x')$ hanno lo stesso segno.

$$\underbrace{\underset{x'}{\mathbb{R}^n} \xrightarrow[f_P]{} \underset{x}{\mathbb{R}^n} \xrightarrow{f} \mathbb{R}}_{g}$$

Una matrice P per cui ${}^tPAP$ è diagonale si può ottenere così:
i) si calcolano gli autovalori di A: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ (eventualmente non tutti distinti)
ii) si determinano gli autospazi corrispondenti e per ciascuno si sceglie una base o.n. (per il prodotto scalare euclideo) e si fa l'unione

Si ottiene una base $\mathcal{B}$ o.n. per $\mathbb{R}^n$. La matrice P conterrà nelle colonne i vettori di $\mathcal{B}$
P è invertibile (perché le colonne sono l.i.) ed è ortogonale (${}^tP = P^{-1}$) perché le colonne formano una base o.n. per $\mathbb{R}^n$

$$\Rightarrow {}^tPAP = P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix} \Rightarrow g(x'_1, \dots, x'_n) = \lambda_1 x_1'^2 + \dots + \lambda_n x_n'^2$$

Conclusione Il segno di f è determinato dagli autovalori di A, o meglio dal loro segno. In particolare f è definita positiva se tutti gli autovalori di A sono positivi.

Es. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

$f(x,y,z) = x^2 + 4y^2 + z^2 + 4xy - 2xz - 4yz$

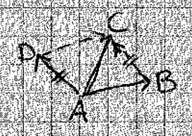
Avevamo visto che gli autovalori di A sono 0 (doppio), 6. Con opportuna P f si può trasformare nella f.q. $g(x',y',z') = 6z'^2$ associata alla matrice diagonale $A' = D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$. La f.q. è semidefinita positiva

Regola di Cartesio
Sia $p(x)$ un polinomio reale ordinato per potenze crescenti (o decrescenti) avente tutte le radici reali. Il numero delle radici positive è dato dal numero delle variazioni di segno dei coefficienti.

Nell'es. la regola di Cartesio applicata al p.c.(A) $p(T) = -T^3 + 6T^2$

0 doppio
1 variaz. segno $\rightarrow$ 1 radice positiva

Esempio $\bar{u} = B-A$ $\bar{v} = C-B$



$\bar{u}+\bar{v}$?

Sia $\bar{v} = D-A$ $(= C-B)$

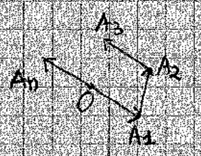
Scelgo $O=A$

$$AB+AD=AC \Rightarrow (B-A)+(C-B)=C-A$$

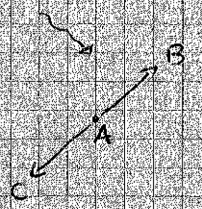
Esempio Sono dati n vettori

$$\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n$$

Calcolare $\bar{u}_1+\bar{u}_2+\dots+\bar{u}_n$



Esempi $\bar{u} = B-A$ $\bar{v} = A-B = C-A$



$\bar{u}+\bar{v} = \bar{0}$

$\bar{u} = -\bar{v}$

$B-A = -(A-B)$

Operazioni in componenti

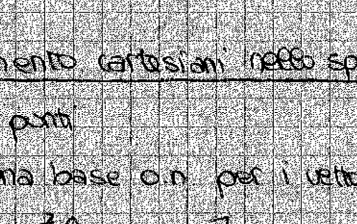
Fissata una base o.n. positiva per i vettori applicati $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, possiamo pensare ai corrispondenti vettori liberi individuati da $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ che verranno indicati con gli stessi simboli $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$. Ogni OP è c.l. di $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ (come vettori applicati)

$OP = x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}$

Risulta $P-O = x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}$ (come vettori liberi)

Sistemi di riferimento cartesiani nello spazio
e coordinate dei punti

Sia $(\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$ una base o.n. per i vettori e O un punto fissato. Costruiamo un rif. cartesiano...



Esempio: $A(1,1,2)$ $B(-1,1,0)$, $C(0,0,1)$
sono allineati?
$B-A=(-2,0,-2)$ $\quad C-A=(-1,-1,-1)$

componenti non proporzionali → A, B, C non sono allineati.

Condizione di complanarietà di 4 punti:
$A(x_A,y_A,z_A)$, $B(x_B,y_B,z_B)$, $C(x_C,y_C,z_C)$, $D(x_D,y_D,z_D)$

Esiste un piano contenente ABCD se e solo se i vettori applicati in AB, AC, AD sono complanari se e solo se $B-A$, $C-A$, $D-A$ sono complanari

$$\Leftrightarrow \underbrace{(B-A)}_{\text{ho le componenti}}\wedge(C-A)\cdot(D-A)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} x_B-x_A & y_B-y_A & z_B-z_A \\ x_C-x_A & y_C-y_A & z_C-z_A \\ x_D-x_A & y_D-y_A & z_D-z_A \end{vmatrix}=0$$

$(x_B-x_A,\ y_B-y_A,\ z_B-z_A)$

→ Area del triangolo di dati vertici

area triangolo $\mathcal{Q} = \frac{1}{2}|(B-A)\wedge(C-A)|$

Es) $A(1,1,2)$, $B(-1,1,0)$, $C(0,0,1)$
$B-A=(-2,0,-2)$ $\quad C-A=(-1,-1,-1)$

$$(B-A)\wedge(C-A) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 2\bar{i}+2\bar{k}$$

$\mathcal{Q} = |(B-A)\wedge(C-A)| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ ← area triangolo

→ Volume del tetraedro di vertici ABCD

$V=\frac{1}{6}|(B-A)\wedge(C-A)\cdot(D-A)|$ ← volume assoluto

Cambiamenti di riferimento nello spazio

- Traslazione

$\mathcal{R}(O,\bar{i},\bar{j},\bar{k}) \rightarrow \mathcal{R}(O',\bar{i},\bar{j},\bar{k})$ → la base dei vettori è sempre la stessa

origine O

cambio l'origine ma non i vettori!

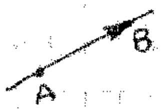
$A \in r \iff \exists t$ per cui $\begin{cases} 1+2t=-3 \\ -t=2 \\ 3t=-6 \end{cases} \quad \to t=-2$

A corrisponde a $t=-2$, $A \in r$.

Calcoli per B: $\begin{cases} 1+2t=2 \\ -t=0 \\ 3t=1 \end{cases} \to$ sistema non risolubile $\Rightarrow B \notin r$

<u>Retta r per due punti A, B</u>

r si pensa come retta per uno dei punti e // al vettore $\bar{v} = B-A$



<u>Eq. degli assi coordinati</u>

Sia: asse z = retta per O // $\bar{k}$ $\quad \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=t \end{cases}$

Posizioni reciproche di due rette nello spazio

Sono date due rette r, s (distinte), r ed s possono essere:

1) complanari — 1.1) rette incidenti in un punto
  — 1.2) rette parallele

2) non complanari (sghembe).

Siano r $\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$ s $\begin{cases} x = x_1 + l_1 t' \\ y = y_1 + m_1 t' \\ z = z_1 + n_1 t' \end{cases}$

$\underbrace{r \,//\, \bar{v} = (l, m, n) \qquad s \,//\, \bar{v}' = (l_1, m_1, n_1)}_{r \,//\, s}$

(eventualmente coincidenti)
se e solo se $\bar{v} \,//\, \bar{v}'$ (cioè la terna (l, m, n) e (l_1, m_1, n_1) sono proporzionali)

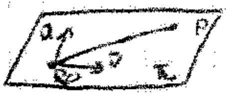
$$\frac{l}{l_1} = \frac{m}{m_1} = \frac{n}{n_1}$$

Piano π per un punto P_0 e // a due vettori

$\bar{u} = (l, m, n)$, $\bar{v} = (l', m', n')$

1. Si può pensare π come piano per P_0 e ortogonale a $\bar{n} = \bar{u} \wedge \bar{v}$

2. Si può arrivare in modo diverso dall'equaz.
   $P \in \pi \iff P - P_0, \bar{u}, \bar{v}$ sono complanari $\iff (P-P_0) \wedge \bar{u} \cdot v = 0$



$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix} = 0$$

Piano π per tre punti A, B, C (non allineati) π si può pensare come piano per uno dei 3 punti (ad es. $P_0 = A$) e parallelo ai vettori $\bar{u} = B - A$, $\bar{v} = C - A$

→ Eq. parametriche di un piano

Sia π definito da un solo punto P_0 e da due vettori $\bar{u}, \bar{v}$ paralleli a π.
$P \in \pi \iff (P, P_0)\ \bar{u}, \bar{v}$, sono complanari solo se $P - P_0$ è combinazione lineare di $\bar{u}$ e $\bar{v}$, cioè esistono $t, \lambda \in \mathbb{R} \in \mathbb{R}$ tale che

$$P - P_0 = t\bar{u} + \lambda\bar{v} \qquad \begin{cases} x = x_0 + lt + l'\lambda \\ y = y_0 + mt + m'\lambda \\ z = z_0 + nt + n'\lambda \end{cases}$$ eq. parametriche di π

I vari casi corrispondono alle situazioni precisate (precisate?) da un sistema lineare

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \qquad AX = B$$

- $\rho(A) \neq \rho(A|B)$ → non ci sono soluzioni → caso parallelismo

$$\underset{1}{\rho(A)} \neq \underset{2}{\rho(A|B)} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} a & b & c & -d \\ a' & b' & c' & -d' \end{array}\right)$$

- $\underset{1}{\rho(A)} = \underset{1}{\rho(A|B)}$ = piani coincidenti

- $\rho(A) = 2$ e di conseguenza anche $\rho(A|B) = 2$ → ∞^1 sol. dipendenti da un parametro

→ $\pi \cap \pi'$ è una retta!

Dal punto di vista dei vettori:

Sia $n \perp \pi$ e $\bar{v} \parallel r$ $\quad n=(a,b,c)$ $\quad v=(l,m,n)$
nel caso 1: $\bar{n}$ e $\bar{v}$ non sono ortogonali $\quad \bar{n} \cdot \bar{v} \neq 0$ $\quad al+bm+cn \neq 0$
nel caso 2,3: $\bar{n} \perp \bar{v}$, $al+bm+cn=0$

Dal punto di vista algebrico:

I tre casi corrispondono ai casi che si presentano studiando il sistema delle equazioni di π e di r.
In particolare se π $ax+by+cz+d=0$ e $r = \begin{cases} a'x+b'y+c'z+d'=0 \\ a''x+b''y+c''z+d''=0 \end{cases}$
le tre ? corrispondono ai casi possibili presentati dal sistema lineare delle 3 equazioni.

Esercizi)
1) Rappresentare in forma parametrica la retta r $\begin{cases} x+y-z+1=0 \\ -x+3y+z=0 \end{cases}$

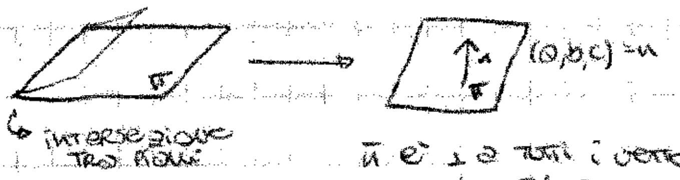
Cerchiamo la soluzione $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right)$ $\quad R_2 \to R_2+R_1$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & -1 \end{array}\right)$ $\quad \begin{cases} x+y-z=-1 \\ 4y=-1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} y=-1/4 \\ z=x+y+1=x+3/4 \end{cases}$

I punti di r sono $(x,y,z) = (t, -1/4, t+3/4)$

Abbiamo ottenuto eq. parametriche di t.
$r \parallel \bar{v} = (1,0,1) \to$ coeff. di t

Osservazioni) r $\begin{cases} ax+by+cz+d=0 & \pi \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 & \pi' \end{cases}$



$\bar{n}$ è $\perp$ a tutti i vettori $\bar{v} \parallel r$
e anche $\bar{n}'$ è $\perp$ a tutti i vettori $\bar{v} \parallel r$

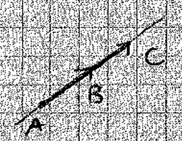
$\Rightarrow$ un vettore $\bar{v} \parallel$ ad r è $\bar{n} \wedge \bar{n}'$!

Dall'esempio di prima $\bar{n} = (1,1,-1)$; $\bar{n}' = (-1,3,1)$
$\bar{n} \wedge \bar{n}' = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 4\bar{i} + 4\bar{k}$

(3) Condizione di allineamento di 3 punti

$A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$, $C(x_C, y_C, z_C)$

A, B, C sono allineati? O A, B, C appartengono ad una stessa retta?



Cons. i vettori applicati AC e AB

A, B, C sono allineati $\Rightarrow$ AB e AC sono paralleli $\Leftrightarrow$ B−A e C−A sono paralleli $\Leftrightarrow$ $\exists\, t \in \mathbb{R}$, $C-A = t(B-A)$ $\Leftrightarrow$ le componenti di C−A e B−A sono proporzionali $\Leftrightarrow$ la matrice avente come righe le componenti dei due vettori ha rango 1

Esempio $A(1,1,2)$; $B=(-1,1,0)$, $C(0,0,1)$

sono allineati?

$B-A = (-2,0,-2)$ $\quad C-A=(-1,-1,-1)$

Componenti non proporzionali $\Rightarrow$ A, B, C non sono allineati

Vedi app. Giulia

Fascio (proprio) di piani

Data una retta r, il fascio di piani di asse r è l'insieme dei piani che contengono r.

$$r = \begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases} \qquad \bar{n} = (a,b,c) \text{ e } \bar{n}' = (a',b',c') \text{ non paralleli}$$

$$\rho\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2$$

Consideriamo l'eq.

(*) $\lambda(ax+by+cz+d)+\mu(a'x+b'y+c'z+d')=0$ al variare di $(\lambda,\mu) \neq (0,0)$

1. (*) è un'eq. di 1° grado, $\forall (\lambda,\mu)$ e quindi rappresenta un piano $\pi=\pi(\lambda,\mu)$

I coeff. delle incognite sono dati dal vettore $(\lambda a+\mu a', \lambda b+\mu b', \lambda c+\mu c') =$
$= \lambda(a,b,c)+\mu(a',b',c') \neq (0,0,0)$ se $(\lambda,\mu)\neq(0,0)$

(a,b,c), (a',b',c') sono l.i.

2. $\forall \lambda, \mu$ π contiene r

Se $P_0=(x_0,y_0,z_0)$ è un punto di r, P_0 soddisfa (*) $\forall \lambda,\mu$ e quindi $P_0 \in \pi$

3. Ogni piano contenente r ha un'eq. del tipo (*) per qualche (λ,μ)

Osservazione 1: esiste una corrispondenza biunivoca tra i piani del fascio di asse r e le coppie (λ,μ), a meno di un fattore di proporzionalità

Osservazione 2: i piani $ax+by+cz+d=0$ e $a'x+b'y+c'z+d'=0$ corrispondono rispettivamente a $(\lambda,0)$ $(\lambda\neq0)$ e $(0,\mu)$ $(\mu\neq0)$

$$r \begin{cases} x = 1 - z \\ y = -2 - 3z \end{cases} \qquad \begin{cases} x + z - 1 = 0 \\ y + 3z + 2 = 0 \end{cases}$$

$\lambda(x+z-1) + \mu(y+3z+2) = 0$

Imponiamo il passaggio per un punto B di s

Ad es. $B(0,1,0)$: $-\lambda + 3\mu = 0 \to \lambda = 3\mu$
$\lambda = 3 \quad \mu = 1$

$3(x+z-1) + (y+3z+2) = 0$

$3x + y + 6z - 1 = 0$

Come es. verifichiamo che $\pi \supset s$

Cerchiamo $\pi \cap s$

$$\begin{cases} 3x + y + 6z - 1 = 0 \\ x = 2t' \\ y = 1 + 6t' \\ z = -2t' \end{cases} \qquad \begin{aligned} &3(2t') + (1+6t') - 12t' - 1 = 0 \\ &0 = 0 \end{aligned}$$

DISTANZE

① distanza tra punti $d(A,B)$

$A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$

$d(A,B) = |B - A| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

② distanza di un punto A da π: $ax + by + cz + d = 0$

$d(A, \pi)$

- $d(A,\pi) = \min d(A,B) \quad B \in \pi$
- $d(A,\pi) = d(A,Q)$ Q proiezione ortogonale di A su π

Calcolo

I) Si cerca Q e si calcola $d(A,Q)$

$Q = \pi \cap r \quad$ r retta per $A \perp \pi$

II) Esiste una formula

$$d(A,\pi) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Es. $\pi: 2x + y - z + 5 = 0 \qquad A(1,1,9)$

$$d(A,\pi) = \frac{|2+1-9+5|}{\sqrt{4+1+1}} = \frac{|-1|}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

Posizioni reciproche tra una sup. sferica e un piano

Vengono distinte confrontando il raggio R con la distanza del piano π dal centro C

① $d(C,\pi)>R$ $\quad S\cap\pi=\emptyset$ (piano esterno a S)

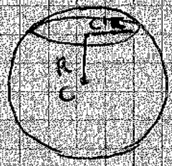
② $d(C,\pi)=R$ $\quad S\cap\pi=\{1 \text{ punto}\}=\{Q\}$

si dice che π è tangente ad S in Q

③ $d(C,\pi)<R$ $\quad S\cap\pi$ è una circonferenza (piano è detto secante)

Nel caso ③ la circonferenza $\mathcal{C}=S\cap\pi$ è rappresentata da un sistema di 2 eq.

(**) $\begin{cases} \text{eq. della superf.} \\ \text{eq. del piano} \end{cases}$



Siano C' il centro di $\mathcal{C}$ e r il raggio

C' è la proiezione ortogonale di C su π

$\left(C' \begin{cases} \text{piano} \\ \text{retta per C} \perp \text{piano} \end{cases} \right)$

$$r=\sqrt{R^2-(d(C,C'))^2}=\sqrt{R^2-(d(C,\pi))^2}$$

Es. Come scrivere "$\mathcal{C}$" equaz. di una circ. $\mathcal{C}$ nello spazio?

Si può individuare $\mathcal{C}$ dando il piano cui appartiene, π, il centro C' e il raggio r

Si deve ricavare un sistema del tipo (**)

$\begin{cases} \text{eq. della superficie} \\ \text{piano dato dal testo} \end{cases}$

Altri sistemi che rappresentano $\mathcal{C}$ si possono ottenere, come in questo esempio:

$C'=(1,-1,2) \qquad \pi: x+y+2z-4=0$

$\begin{cases} (x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=4 \\ x+y+2z-4=0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} (x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2-4=0 \\ x+y+2z-4=0 \end{cases}$

$\begin{cases} (x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2-4+k(x+y+2z-4)=0, \quad k\in\mathbb{R} \\ x+y+2z-4=0 \end{cases}$

Sistema equivalente a quello di partenza

Es. Circonferenza per 3 punti non allineati A, B, C

$\{\pi$ piano per i 3 punti ABC

(π: piano per A $\perp$ $\bar{n}=(B-A)\wedge(C-A)$)

Esempio

$$r_1 \begin{cases} x = 1 + 3t_1 \\ y = -2 + t_1 \\ z = 3 \end{cases} \qquad r_2 \begin{cases} x = t_2 - 1 \\ y = t_2 \\ z = 2t_2 \end{cases}$$

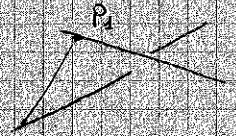
Controlliamo che r_1 ed r_2 siano sghembe

$r_1 \parallel \vec{v_1} = (3, 1, 0) \qquad r_2 \parallel \vec{v_2} = (1, 1, 2)$

r_1 ed r_2 non sono $\parallel$ perché v_1 e v_2 non sono $\parallel$

r_1 ed r_2 hanno punti in comune? Studiamo il sistema delle loro eq.

$$\begin{cases} 1 + 3t_1 = t_2 - 1 \\ -2 + t_1 = t_2 \\ 3 = 2t_2 \end{cases}$$ Sistema non risolubile



$P_1 - P_2 = (1 + 3t_1 - (t_2 - 1), -2 + t_1 - t_2, 3 - 2t_2)$

Imponiamo le condiz.

$$\begin{cases} (P_1 - P_2) \perp \vec{v_1} \\ (P_1 - P_2) \perp \vec{v_2} \end{cases} \qquad \begin{cases} (P_1 - P_2) \cdot \vec{v_1} = 0 \\ (P_1 - P_2) \cdot \vec{v_2} = 0 \end{cases}$$ Il sistema in t_1, t_2 ha come soluzione $t_1 = 0 \quad t_2 = 1$

I punti di minima distanza sono $Q_1 (1, -2, +3) \quad Q_2 (0, 1, 2)$

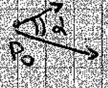
La distanza minima cercata è $d(Q_1, Q_2) = \sqrt{1 + 9 + 1} = \sqrt{11}$

La retta s di minima distanza si può pensare come la retta $Q_1 \parallel Q_1 Q_2 = (1, -3, 1)$

$$s \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 - 3t \\ z = 3 + t \end{cases}$$

Angoli

1. Angolo tra rette $\underset{\text{per def.}}{=}$ l'angolo tra vettori paralleli alle due rette



Se $v_1 \parallel r_1$, $v_2 \parallel r_2$

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{v_1} \cdot \vec{v_2}|}{|\vec{v_1}||\vec{v_2}|}$$

2. Angolo tra piani

$\pi_1 : ax + by + cz + d = 0 \quad \perp \vec{n} = (a, b, c)$

$\pi_2 : a'x + b'y + c'z + d' = 0 \quad \perp \vec{n}' = (a', b', c')$

Per def. π_1 e π_2 formano angolo α se α è l'angolo tra un vettore ortogonale a π_1 con un vettore ortogonale a π_2

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{n}'|}{|\vec{n}||\vec{n}'|}$$

3. Angolo retta - piano

Sia r non ortogonale al piano π. L'angolo tra r e π è l'angolo tra r e la sua proiezione ortogonale r' su π

L'angolo $\left(< \frac{\pi}{2}\right)$ è il complementare dell'angolo $\left(< \frac{\pi}{2}\right)$ tra r ed $\vec{n}$, retta $\perp$ al piano

Formule di Taylor del 1° e 2° ordine per funzioni $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (funz. scalari)

Sia f di classe C^1 in un intorno U di P_0 interno a D.

f è differenziabile in P_0 e si ha $\forall P \in U$, $f(P) - f(P_0) = d_{P_0} f(P - P_0) + o(\|P - P_0\|)$ (*)
$(P \to P_0)$

differenziale: $d_{P_0} f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

è l'a.l. associata alla matrice jacobiana

$$J_{P_0} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(P_0) \dots \frac{\partial f}{\partial x_n}(P_0) \right)$$

($\nabla_{P_0} f$ pensato come matrice)

Per $n = 2$ $P_0(x_0, y_0)$ $P \in U$ $P(x, y)$

(**)
$$f(x,y) = f(x_0 y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 y_0)(y - y_0) + o\left(\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}\right)$$
$(x,y) \to (x_0, y_0)$

(*) si può chiamare formula di Taylor di f in P_0 del I ordine

(**) è la scrittura esplicita di (*) per $n = 2$

Per $n = 2$ $z = f(x y)$ eq. del grafico di f

Se si trascura l'addendo o

$z = f(x_0 y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(\;)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(\;)(y - y_0)$ è l'equazione di un piano che si chiama <u>piano tangente al grafico di f nel punto</u> $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$

Supponiamo ora che f sia di classe C^2 nell'intorno U di P_0

Risulta: $\forall P \in U \to f(P) - f(P_0) = d_{P_0} f(P - P_0) + \frac{1}{2} Q_{P_0} f(P - P_0) + o(\|P - P_0\|^2)$ $(x y) \to (x_0 y_0)$ (*)

$Q_{P_0} f$ è la forma quadratica associata alla matrice hessiana $H_{P_0} f$

$Q_{P_0} f(v) = {}^t v (H_{P_0} f) v$ $\qquad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

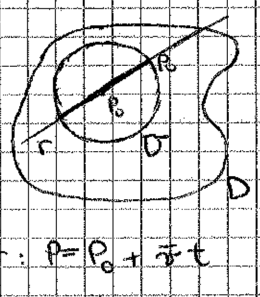
$\boxed{n = 2}$

$\frac{1}{2} Q_{P_0} f = \qquad H_{P_0} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_0) \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0 y_0)(x - x_0)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 y_0)(x - x_0)(y - y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0 y_0)(y - y_0)^2 \right]$$

(*) si dice formula di Taylor del 2° ordine di f in P_0

Se $P_0 = 0$ si dice anche formula di McLaurin



$r: P = P_0 + \bar{v} t$

$(x\, y) = (x_0 y_0) + (l, m) t$ con f "ristretta" ad $r \to f(P_0 + \bar{v} t) = g(t)$ $\quad P_0 \leftrightarrow t = 0$

Osservazione Caso $n=2$

Teorema 2 bis Sia $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

P_0 p.to stazionario, f di classe C^2 in un intorno di P_0

- Se $\det H_{P_0} f$ è negativo, P_0 è un punto di sella
- Se $\det H_{P_0} f$ è positivo, P_0 è di massimo o minimo relativo

Più precisamente:

- Se $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0)$ $\left(\text{oppure } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_0)\right)$ è >0 P_0 è punto di minimo
- Se $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0)$ $\left(\text{oppure } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_0)\right)$ è <0 P_0 è punto di massimo
- Se $\det H_{P_0} f$ è $=0$, non si può concludere "nulla" su P_0

Esempi di ricerca e studi punti stazionari

$f(x,y) = x^2 + 2xy + 3y^2$

p.ti stazionari $\nabla f = \vec{0}$

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (2x+2y, 2x+6y)$$

$$\begin{cases} 2x+2y=0 \\ 2x+6y=0 \end{cases} \Rightarrow x=y=0$$

f ha un solo punto stazionario $O(0,0)$

$$Hf = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} \qquad H_f = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$H_{(0,0)} f = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

p. c. $H_{(0,0)} f = T^2 - 6T + 8$ autovalori >0 $\Rightarrow (0,0)$ è un punto di minimo

Osservazioni

1. $f(x,y) = (x+y)^2 + 2y^2$

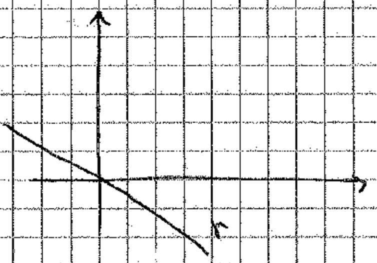
   $f(x,y) > 0,\ \forall (x,y) \neq (0,0),\ f(0,0) = 0$

2. $f(x,y)$ è una forma quadratica, la matrice associata $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\left(= \frac{1}{2} Hf\right)$

   $T^2 - 6T + 2$ autovalori positivi $\Rightarrow f$ è definita positiva, quindi $f(x,y) > 0,\ \forall (x,y) \neq (0,0)$

3. Grafico di $f(x,y)$

   l'eq. è $z = f(x,y)$ $\boxed{z = x^2 + 2xy + 3y^2}$



I punti stazionari sono tutti e soli i punti Q della retta $y = -\frac{2}{3}x$

$f(Q) = 0$

$P \neq Q \quad f(P) > 0 \Rightarrow$ i punti della retta sono tutti punti di massimo assoluto

(5) $f(x,y) = x^4 + ky^4 \quad k \in \mathbb{R} \quad k \neq 0$

$\nabla f_k = (4x^3, 4ky^3)$ un solo punto stazionario $(0,0)$

$Hf = \begin{pmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 12ky^2 \end{pmatrix} \qquad H_{(0,0)} f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Studio diretto

$k > 0 \quad f(x,y) \geq 0 \quad \forall (x,y)$
$\quad f_k(0,0) = 0 \Rightarrow (0,0)$ punto di minimo assoluto

$k < 0 \quad \boxed{f_k(0,0) = 0}$
$\quad f_k(t,0) = t^4 \geq 0 \qquad f_k(0,t) = kt^4 \leq 0$
$\Rightarrow (0,0)$ punto di sella

Osservazione sulla formula di Taylor di una funzione $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ del 2° ordine

Se f è C^2 in un intorno U di $P_0(x_0, y_0)$ $\forall f(x,y) \in U$:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0) + \frac{1}{2} f''_{xx}(\quad)(x-x_0)^2 + f''_{xy}(\quad)(x-x_0)(y-y_0) + \frac{1}{2} f''_{yy}(y-y_0)^2 + o(\quad)$$

Curve parametriche

Visto che una retta r nello spazio si può rappresentare param. con eq. $(x,y,z) = (x_0 + lt, y_0 + mt, z_0 + nt) \quad t \in \mathbb{R} \quad (l,m,n) \neq (0,0,0)$

Pensiamo alla funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$
$t \to f(t)$

$$f(t) = (x_0 + lt, y_0 + mt, z_0 + nt)$$

r è l'immagine della funzione f

Cons. $f(u) = (x_0 - lu^3, y_0 + mu^3, z_0 + nu^3) \quad u \in \mathbb{R}$

Anche in questo caso $\mathrm{Im} f = r$

Se $Q \in r$ si ottiene per $t = 8$, si ottiene ora per $u = 2$

Def. Diciamo curva parametrica in $\mathbb{R}^n$ una funzione continua $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

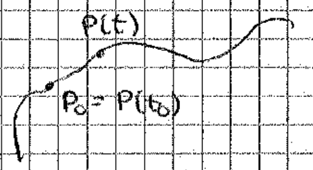
$f(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \quad t \in I \subseteq \mathbb{R}$

$P(t) = (x(t), y(t), z(t))$

$P'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$

Sia $t = t_0$

$$x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0) = \left(\lim_{t \to t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}, \frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0}, \frac{z(t) - z(t_0)}{t - t_0}\right)$$



$$\mathscr{C} = \lim_{t \to t_0} \frac{P(t) - P(t_0)}{t - t_0}$$

$P(t) - P(t_0)$ $\left(\text{e quindi anche } \frac{P(t) - P(t_0)}{t - t_0}\right)$

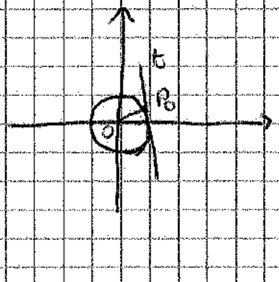
è un vettore // alla retta P_0P (retta secante)

L'esistenza di $P'(t_0)$ con $P'(t_0) \neq 0$ ci dice che la retta ha una posizione limite.

Questa posizione è la retta // al vettore $P'(t_0)$ e si chiama <u>retta tangente</u> a $\mathscr{C}$ in $P(t_0)$

Esempio (osservazioni)

Cons. la circonf. del piano xy centro O e raggio 1. $x^2 + y^2 = 1$



$$P_0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

la retta tg t si può pensare come la retta per P_0 ortogonale al vettore $P_0 - O = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ oppure

per P_0 // al vettore $\vec{v} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, +\frac{1}{2}\right)$

$$t = \begin{cases} x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} t \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} t \end{cases}$$

$\mathscr{C}$ è parametrizzabile con $P(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ $\quad t \in [0, 2\pi]$

$P_0 = P\left(\frac{\pi}{3}\right)$ $\quad \left(t_0 = \frac{\pi}{3}\right)$

$P'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t)$ $\quad P'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

La retta per P_0 // a $P'(t_0) = P'\left(\frac{\pi}{3}\right)$ è la retta per P_0 "$\perp$ raggio"

Retta tangente al grafico di una fz. $F(x)$ derivabile in un intervallo I in $x_0 \in I$

Eq. grafico: $y = F(x)$

Eq. retta tg.: $\boxed{y - F(x_0) = F'(x_0)(x - x_0)}$

Possiamo parametrizzare il grafico di F con $\overset{(*)}{P} = P(t) = (t, F(t))$ $\quad t \in I$

La retta tangente alla curva parametrica $(*)$ è la retta per $P(t_0)$ // $P'(t_0)$

$P'(t) = \left(1, \frac{dF}{dt}\right)$ $\quad P'(t_0) = \left(1, \frac{dF}{dt}(t_0)\right)$

Eq. retta tg.: $(x, y) = (t_0, F(t_0)) + (1, F'(t_0))(u)$ $\quad \begin{matrix} x = t_0 + u \\ y = F(t_0) + F'(t_0)\, u \end{matrix}$

③ Altro esempio di curva piana

$P = P(t) = (1, t^2, t^3) \quad t > 0$

$$\begin{array}{cccc} 1 & t & t^2 & t^3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad (*)$$

La linea rappresentata è contenuta nel piano $x = 1$

④ $P(t) = (t, t^2, t^3)$ (cubica gobba)

Non è una curva piana. Infatti se fosse così, si troverebbe un piano: $\rightarrow$ se fosse piana

$ax + by + cz + d = 0$, per cui $at + bt^2 + ct^3 + d = 0$ identicamente, cioè $\forall t$

$\rightarrow$ sarebbe verificata $\forall t$

Osservazione $P(t) = (x(t), y(t), z(t))$ è piana se e solo se la funzione

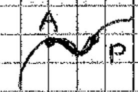
$x(t), y(t), z(t), 1$ sono lin. dip. $\rightarrow$ metto in una matrice $x(t)$ $y(t)$ $z(t)$ e aggiungo sempre 1. Metto i coefficienti e vedo se ci sono righe l. dip. (*)

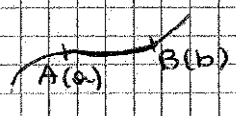
Ad es. $P(t)$ è piana quando $x(t), y(t), z(t) \in \mathbb{R}_2[t]$

Ascissa curvilinea o lunghezza d'arco

Supponiamo $n = 2$, $n = 3$

$\mathcal{L}$ $\mathcal{L}: P = P(t)$, $t \in I$, regolare





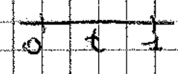
$P(t): [a, b] \subset I$

arco di curva regolare

Def Si definisce come lunghezza dell'arco $P(t)$ il numero

$$\ell(P) = \int_a^b \|P'(t)\| \, dt \quad (*)$$

Esempi $r: (x, y, z) = (x_0 + \ell t, y_0 + mt, z_0 + nt)$



$A = P(0) = (x_0, y_0, z_0)$

$B = P(1) = (x_0 + \ell, y_0 + m, z_0 + n)$

Il segmento AB ha lunghezza $\ell = |B - A| = \sqrt{\ell^2 + m^2 + n^2}$

Confronto con la def (*)

$P'(t) = (\ell, m, n) \qquad \|P'\| = \|P'(t)\| = \sqrt{\ell^2 + m^2 + n^2} =$

$$\ell = \int_0^1 \|P'(t)\| \, dt = \int_0^1 \sqrt{\ell^2 + m^2 + n^2} \, dt = \sqrt{} \int_0^1 dt = \sqrt{\ell^2 + m^2 + n^2}$$

② Lunghezza di una "spira" dell'elica circolare mista, cioè di un arco $[t_0, t_0 + 2\pi]$

$P'(t) = (-R\sin t, R\cos t, h)$

$= \|P'(t)\| = \sqrt{R^2 + h^2}$

$$\ell = \int_{t_0}^{t_0 + 2k\pi} \|P'(t)\| = \int_{t_0}^{t_0 + 2k\pi} \sqrt{R^2 + h^2} \, dt = \sqrt{R^2 + h^2} \int_{t_0}^{t_0 + 2\pi} dt = 2\pi \sqrt{R^2 + h^2}$$

Massa di un filo materiale $\mathcal{L}$

$$m(\mathcal{L}) = \int_a^b \rho(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt$$

dove ρ indica la fz. densità di massa

Baricentro di un filo materiale con densità di massa $\rho(x,y,z)$ per definizione il punto G di coordinate

$$x_G = \int_a^b x\, \rho(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt$$

$y_G =$

$z_G =$

Se la densità di massa è costante (possiamo supporre $\rho(x,y,z) = 1$)

$$x_G = \int_a^b x(t) \|\gamma'(t)\| dt$$

$y_G =$

$z_G =$

Superfici parametriche

Cons. una funzione continua

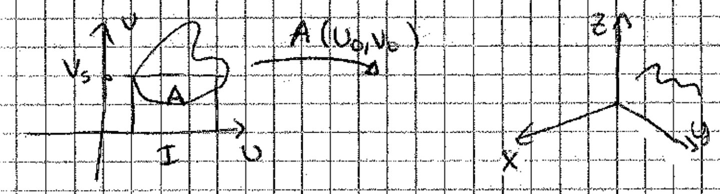
$$\sigma : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

$\Sigma = \mathrm{Im}\,\sigma$ si dice sostegno di σ. Σ è la formalizzazione della nozione intuitiva di superficie

Già visto un esempio:

$(x, y, z) = (x_0 + lt + l's,\ y_0 + mt + m's,\ z_0 + nt + n't)$

Sono le eq. param. del piano passante per $P_0(x_0, y_0, z_0)$ // vettori $\vec{v} = (l, m, n)$, $\vec{v}' = (l', m', n')$, supposti non paralleli



Fissiamo $v = v_0$

$\gamma(u) = \sigma(u, v_0)$ è una curva in $\mathbb{R}$. Al variare di v_0 otteniamo infinite curve, le loro immagini ricoprono Σ

Possiamo rifare la costruzione al variare del valore u_0. Otteniamo altre curve su Σ

Queste curve ($v = v_0$, oppure $u = u_0$) si dicono linee coordinate passanti per $Q = \sigma(A)$, $A(u_0, v_0)$