NUMERO : 387

DATA : 17/10/2012

A P P U N T I

STUDENTE : Contadin

MATERIA : Analisi I
Prof. Pandolfi

INSIEME → si parla di insieme quando una legge permette di dire se un qualsiasi elemento gli appartiene o no

Un insieme ha sempre un suo complementare ($\tilde{A}$; A^c ; C_A)

$A = \{1, 3, 5, 7 \dots\}$

$A = \left\{ \frac{1}{n} \right\} = \left\{ \frac{1}{n} \,/\, n \in \mathbb{N} \right\}$

$a \in A$ → appartiene ($o \ni$)

$B \subseteq A$ → se $b \in B$ allora $b \in A$

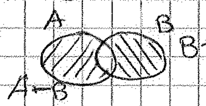
può darsi che B contenga tutti gli elementi di A.

Oppure $A \supseteq B$ (A contiene B)

Se voglio negare $B \not\subseteq A$

Operazioni con gli insiemi:

- UNIONE → $A \cup B$ } ordine ininfluente
- INTERSEZIONE → $A \cap B$ }
  l'intersezione si fa sempre, anche quando i due insiemi non hanno elementi in comune, il risultato è l'insieme vuoto $\emptyset$
- DIFFERENZA: $A - B$ o $A \setminus B$ → insieme i cui elementi sono gli elementi di A che $\not\ni$ a B



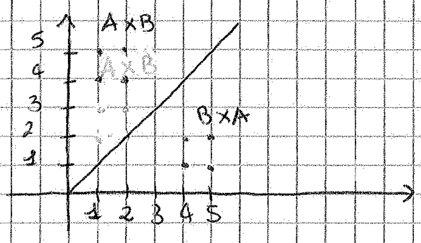
$A - B \neq B - A$
$A - B = A - (A \cap B)$

- PRODOTTO CARTESIANO: $A \times B = \{ \underbrace{(a; b)}_{\text{ordinato}} \,/\, a \in A ; b \in B \}$

Esempio: $A = \{1; 2\}$
$B = \{4; 5\}$

$A \times B = \{(1;4), (1;5), (2;4), (2;5)\}$ → l'ordine in cui elenco gli elementi non è importante

$B \times A = \{(4;1), (4;2), (5;1), (5;2)\}$



$A = \{1; 2\}$
$B = \{4; 5\}$ → $A \times B$ e $B \times A$ sono simmetrici rispetto alla bisettrice I−III

Logica

p = proposizione

$\forall a \in A \Rightarrow p$ qualsiasi elemento di A implica che vale la proposizione

$\exists$ esiste → $\exists a \in A \,/\, p$ esiste un elemento di A tale che vale la proposizione

$\forall a \in A \Rightarrow p$ → NEGAZIONE: $\exists a \in A \,/\,$ NON p ($\neg p$)

$\exists a \in A \,/\, p$ → NEGAZIONE: $\forall a \in A \Rightarrow \neg p$

Un insieme può avere uno o nessun maggiorante

M_1, M_2 Magg. di A
$M_1 \in A$ $M_2 \in A$
$M_2 \leq M_2 \leq M_1 \Rightarrow M_1 = M_2$. Se un insieme contiene uno dei suoi maggioranti esso è unico $\Rightarrow$ MASSIMO
Max A = maggiorante di A che $\in A$
Sup A = min {magg. di A}
Se esiste Max A $\Rightarrow$ Max A = Sup A

PROPRIETÀ DI DEDEKIND o COMPLETEZZA di $\mathbb{R}$

Ogni insieme superiormente limitato ammette estremo superiore in $\mathbb{R}$
Viceversa per l'estremo inferiore.

Esempio:

$A = \{x / x > 0, x^2 < 2\}$
$\operatorname{Sup} A = L \Rightarrow L^2 = 2$

Test per verificare se un numero è estremo superiore

$L \overset{?}{=} \operatorname{Sup} A$

1) $\forall a \in A \Rightarrow a \leq L$
2) $\forall \varepsilon > 0$, $L - \varepsilon$ non è un maggiorante di A
$\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A / a > L - \varepsilon \to L - \varepsilon < a \leq L$

RIPASSO

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 / \forall x : |x - 5| < \delta \Rightarrow |\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 5| < \varepsilon$

NEG.: $\exists \varepsilon_0 > 0 \ \forall \delta > 0 / \exists x : |x - 5| < \delta \Rightarrow |\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 5| \geq \varepsilon_0$

$A \in \mathbb{R}$
m è minorante di A se $\forall a \in A \Rightarrow a \geq m$
Se non ci sono minoranti $\to$ insieme inferiormente illimitato
$\operatorname{Inf} A = -\infty$

A inf. limitato $\to \exists m / \forall a \in A \Rightarrow a \geq m$ $\quad \forall m \ \exists a \in A \Rightarrow a \leq m$

Se un insieme ha un minorante esso è il MINIMO di A
inf A = max dei minoranti di A (estremo inferiore $\to$ in $\mathbb{R}$ esiste). Non appartiene ad A
I num reali sono stati costruiti in modo tale che ogni insieme abbia un estremo inferiore e superiore

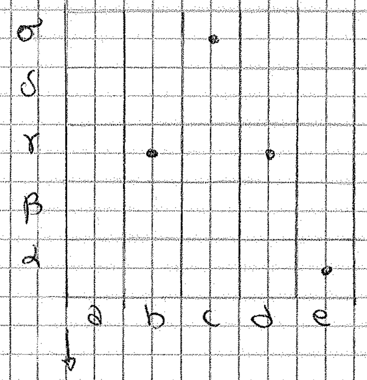
$L = \inf A$

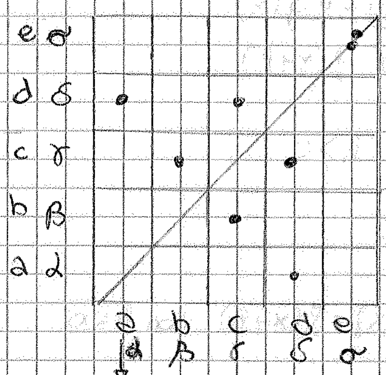
1) L è un minorante di A $\to$ 1) $\forall a \in A \Rightarrow L \leq a$
2) L è il max dei minoranti $\to$ 2) $\forall \varepsilon > 0$ $L + \varepsilon$
$\exists a_\varepsilon : L \leq a_\varepsilon \leq L + \varepsilon$

Esempio:

$A = \left\{ \frac{1}{n} \right\}$ $\quad L = 0 = \inf A$

1) $0 = L \leq \frac{1}{n}$ sì
2) $0 + \varepsilon$ $\quad 1/n < \varepsilon \Leftrightarrow n > 1/\varepsilon$





I due "grafici" sono simmetrici rispetto alla diagonale

Definisce solo la funzione da A a B

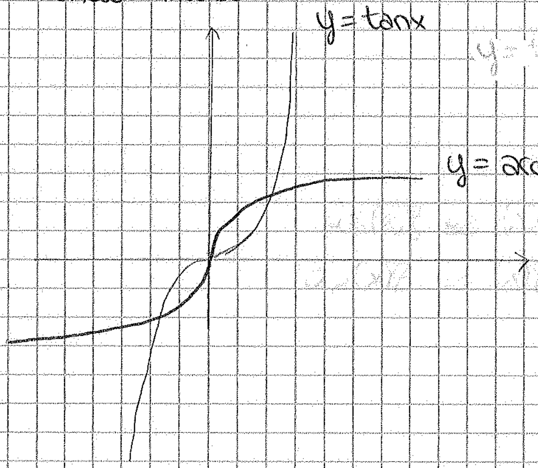
Ogni elemento di B proviene al più da un solo elemento di A → INIETTIVA

F^{-1} → funzione inversa (solo se iniettiva)

SUCCESSIONI

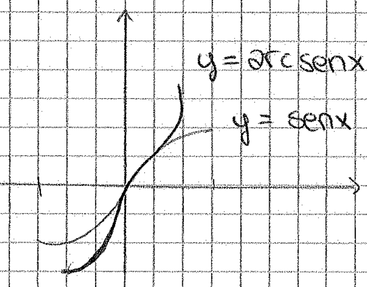
Funzione con dominio $\mathbb{N}$ $f(n) \to (f_n)$ o $\{f_n\}$

Funzioni inverse



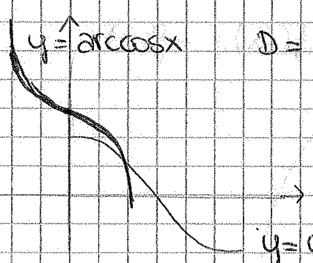
$y = \tan x$ $D = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ $C = \mathbb{R}$

$y = \arctan x$ $D = \mathbb{R}$ $C = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$



$y = \arcsin x$ $D = \left[-1; 1\right]$ $C = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

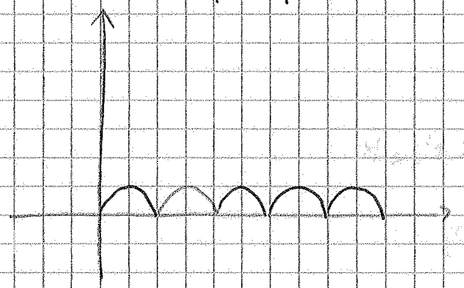
$y = \operatorname{sen} x$ $D = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ $C = \left[-1; +1\right]$



$y = \arccos x$ $D = \left[-1; 1\right]$ $C = \left[0; \pi\right]$

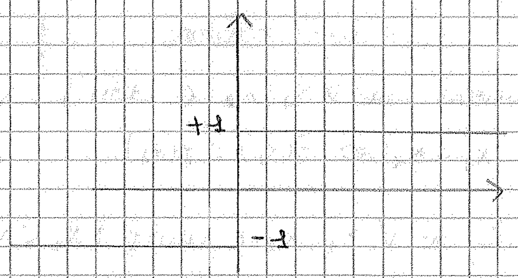
$y = \cos x$ $D = \left[0; \pi\right]$ $C = \left[-1; +1\right]$

Estensione per periodicità



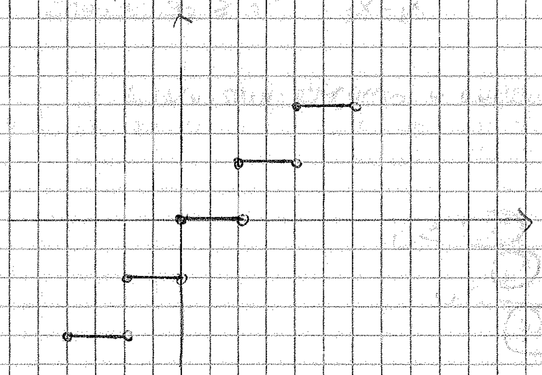
Alcune funzioni

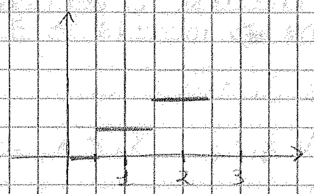
$$\text{Sgn}\,x = \begin{cases} +1 & \text{se } x>0 \\ 0 & \text{se } x=0 \\ -1 & \text{se } x<0 \end{cases}$$



$[x]$ parte intera

funzione che associa ad x il più grande intero $\leq x$





FUNZ. BIUNIVOCA → sia iniettiva che suriettiva (a volte usata come iniettiva ma impreciso, perché l'immagine è tutto l'insieme d'arrivo)

funz limitata → immagine limitata

$\exists M : \forall x \in \text{dom} f \Rightarrow f(x) < M$ ($\rightarrow 0 \leq$) fai la negazione

Se $f(x)$ e $g(x)$ sono limitate → $h(x)$ è limitata

$f(x)$ def. su A $\quad A \cap B = \emptyset$

$g(x)$ def. su B

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A \\ g(x) & x \in B \end{cases}$$

$\downarrow$

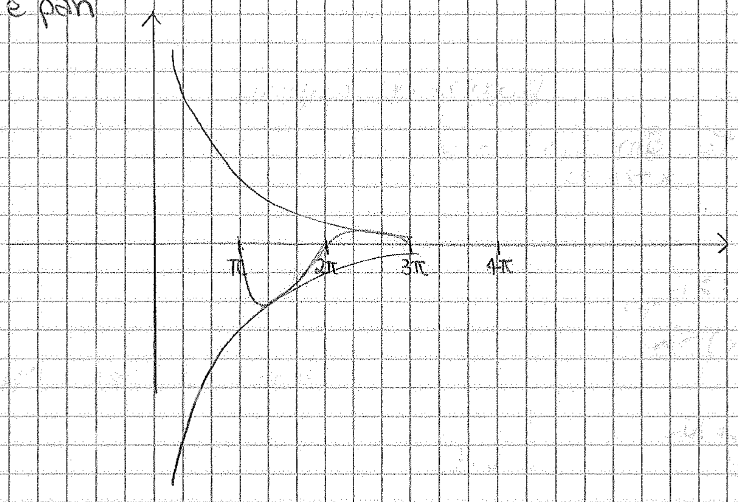
dom h $= A \cup B$

$\left.\begin{array}{l} \exists M_1 : \forall x \in A \Rightarrow |f(x)| < M_1 \rightarrow f(x) \text{ limitata} \\ \exists M_2 : \forall x \in B \Rightarrow |g(x)| < M_2 \rightarrow g(x) \text{ limitata} \end{array}\right\} Hp$

Ts. $\exists M : \forall x \in A \cup B \Rightarrow |h(x)| < M$

$\frac{\sin x}{x} = \text{sinc}\ \frac{x}{\pi}$ $\qquad \left|\frac{\sin x}{x}\right| = \frac{|\sin x|}{|x|} \leq \frac{1}{|x|}$

è pari $\qquad -\frac{1}{x} < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{x}$



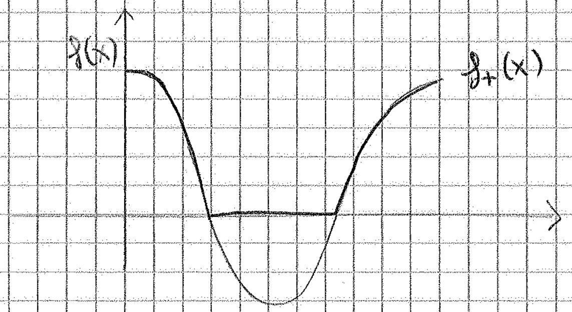
$f(x)$

$f_+(x) = \max\{f(x); 0\}$

$f(x)$

$f_+(x) + f_-(x)$

$f_+(x) - f_-(x)$



CAPITOLO 2

$\frac{\sqrt[3]{x^3+8}-2}{x^3}$ non tende né a zero né a infinito

dom f interseca ogni intorno di x_0 in punti $\neq x_0$

STUDIO PER $x \to +\infty$

$\text{dom} f \cap (r, +\infty) \neq \emptyset$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\forall \varepsilon \ \exists r : \forall x \in \text{dom} f \ \ x > r \Rightarrow f(x) > \varepsilon$ → questa def. di limite non permette di calcolare il limite ma di verificare se l'intuizione è corretta

Neg.: $\exists \varepsilon_0 \ \forall r : \exists x \in \text{dom} f, x > r \Rightarrow f(x) \leq \varepsilon_0$

$\{x : f(x) > \varepsilon\} \supseteq (r; +\infty)$ → verificare se l'insieme delle soluzioni contiene una semiretta verso dx.

Comportamento LOCALE della funzione → ci interessa il comportamento della fz. quando si allontana

$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists I(+\infty) : \forall x \in I(\infty) \cap (\text{dom} f) \Rightarrow f(x) > \varepsilon$

f LIMITATO SUP

$\exists M \ \ \forall x \in \text{dom} f \Rightarrow f(x) < M$

$f(x) \to +\infty$
$g(x) \to -\infty$

$f(x) + g(x) \to$ non si riesce a descrivere

$f(x) = x$
$g(x) = -\sqrt{x}$

$f(x) + g(x) = x - \sqrt{x}$

$\forall \varepsilon \quad \exists r : x > r \Rightarrow x - \sqrt{x} > 0$

$= x\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) > x \cdot \frac{9}{10} \to +\infty$

per $x > 100$

$\sqrt{x} = t$
$t^2 - t - \varepsilon > 0 \to$ definisco r

Prodotto

$f(x) \cdot g(x) > M \cdot f(x)$ perché $f(x) \to +\infty$, $g(x) > M > 0 \to$ sono stretti perché se fossero ≥ 0 $g(x)$ potrebbe essere uguale a zero e quindi non tenderebbe a ∞

se $g(x) < M < 0 \to f(x) \cdot g(x) \to -\infty$

$(+\infty)(+\infty) \Rightarrow +\infty$
$(-\infty)(+\infty) \Rightarrow -\infty$
$(-\infty)(-\infty) \Rightarrow +\infty$

Quoziente

$f(x) = x \quad g(x) = \sqrt{x}$

$\frac{f}{g} = \frac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} \to +\infty$

$\frac{g}{f} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ LIMITATA

$\frac{\infty}{\infty}$ forma indeterminata

Limite finito

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists r = r_\varepsilon : \forall x > r, x \in \text{dom} f \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

$\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < f(x) - \ell < \varepsilon$

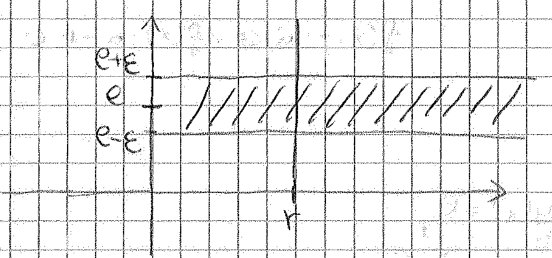


grafico contenuto qui

CASO PARTICOLARE:

$\ell = 0$
f INFINITESIMO (per $x \to +\infty$)

Teorema limitatezza locale

$\exists N (r, +\infty) \quad \exists M : \forall x > r^N \Rightarrow |f(x)| < M \quad x \in \text{dom} f$

Dim nella definizione di limite scelgo $\varepsilon = 1$

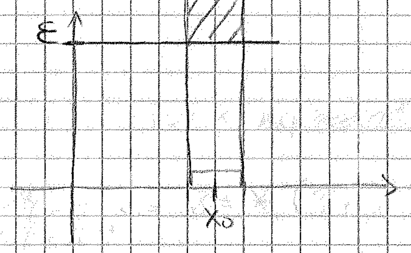
$\exists r : x > r \Rightarrow |f(x) - \ell| < 1 \Rightarrow \ell - 1 < f(x) < \ell + 1$

funzione limitata

Limite finito

$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \qquad \forall \varepsilon > 0 \ \exists I(x_0) : \forall x \in (\mathrm{dom} f) \cap I_\varepsilon(x_0) \underset{x \neq x_0}{\Rightarrow} f(x) > \varepsilon$

$\forall \varepsilon \quad \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathrm{dom} f \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > \varepsilon$ ($x \neq x_0$)

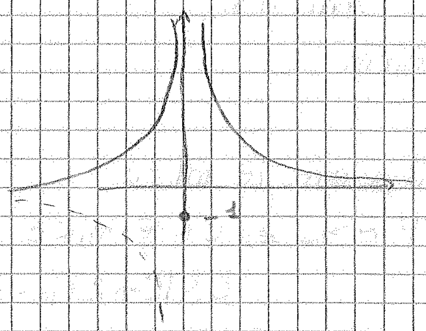


Teorema di permanenza del segno

$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \qquad \exists M > 0 \quad \exists I(+\infty) : \forall x \in I(+\infty) \Rightarrow f(x) > M$ per lim infinito

$\exists M \ \exists I(x_0) : \forall x \in I(x_0), x \neq x_0 \Rightarrow f(x) > M$

$f(x) = \frac{1}{|\mathrm{sgn}\, x| + |x| - 1}$



La funz. è positiva in un intorno di 0 ma non in 0

$f(x) \quad g(x)$

$(\mathrm{dom} f - \{x_0\}) = (\mathrm{dom}\, g - \{x_0\})$ Se $f(x) > g(x)$

$\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty \qquad \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

$f(x) > g(x)$

Se $f(x) \to +\infty$ e $g(x) > m > 0 \Rightarrow f(x) g(x) \to +\infty$

Definizione

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathrm{dom} f \ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

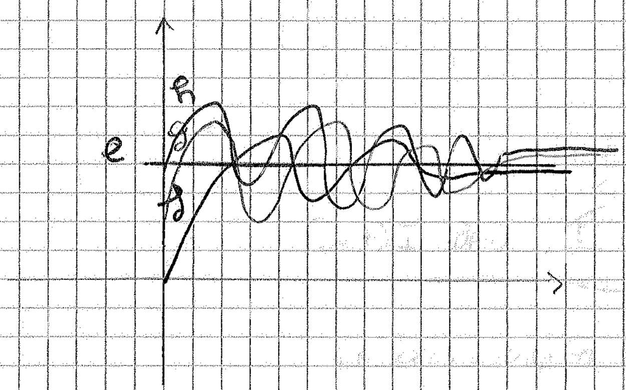
Teorema

Hp. $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0 \to$ Ts

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \left| \frac{1}{f(x)} \right| < \varepsilon$

$\left| \frac{1}{f(x)} \right| = \frac{1}{|f(x)|} < \varepsilon \Leftrightarrow |f(x)| > \frac{1}{\varepsilon}$

vale in un intorno di x_0, salvo x_0



SEMPLIFICAZIONE: $0 \le |g(x) - \ell| < R(x)$

$R(x) \to 0 \Rightarrow g(x) \to \ell$

$f(x) \equiv 0$

Somma

Ip: $f(x) \to \ell$ per $x \to +\infty$ Ts: $\lim_{x\to+\infty} [f(x) + g(x)] = \ell + m$

$g(x) \to m$

Dim: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists I(+\infty) : x \in I(+\infty) \cap (\text{dom} f \cap \text{dom} g) \Rightarrow |(f(x)+g(x)) - (\ell+m)| < \varepsilon$

$|(f(x) - \ell) + (g(x) - m)| \le \underbrace{|f(x) - \ell|}_{\varepsilon/10} + \underbrace{|g(x) - m|}_{\varepsilon/90} < \varepsilon$

$\exists I^f_{\varepsilon/10}(+\infty)$ su cui $|f(x) - \ell| < \varepsilon/10$

$\exists I^g_{\varepsilon/90}(+\infty)$ su cui $|g(x) - m| < \varepsilon/90$

$x \in I(+\infty) = I^f_{\varepsilon/10}(+\infty) \cap I^g_{\varepsilon/90}(+\infty)$

$\downarrow$

per questo valore di $x \in$ all'intersezione dei due intorni verifico la disequaz.

È vero che $f+g \to \ell \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists \lim_{x\to+\infty} f(x) \ \exists \lim_{x\to+\infty} g(x)$ $\boxed{?}$ FALSO

è vero solo se le due funz. hanno limite finito

Prodotto

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists^* I(+\infty) : \forall x \in I(+\infty) \Rightarrow |f(x)g(x) - \ell m| < \varepsilon$

$|f(x)g(x) - \ell m| = |(f(x) - \ell)g(x) + \ell g(x) - \ell m| = |[(f(x)-\ell)g(x)] + [\ell(g(x) - m)]| \le$

$\le \underbrace{|g(x)||f(x) - \ell|}_{< \varepsilon/10} + \underbrace{|\ell||g(x) - m|}_{< \varepsilon/90} < \varepsilon$

$|\ell||g(x) - m| < \varepsilon/90 \to |g(x) - m| < \frac{\varepsilon}{|\ell| 90}$ vale su $I^g_{\frac{\varepsilon}{|\ell|90}}(+\infty)$

$|g(x)||f(x) - \ell| < M|f(x) - \ell| < \frac{\varepsilon}{10}$ con $x \in J(+\infty)$ teorema limitatezza locale

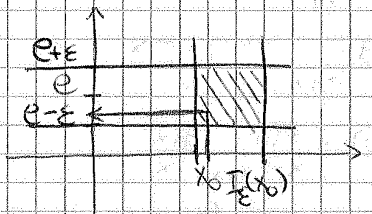
$|f(x) - \ell| < \frac{\varepsilon}{10M}$ vale se $x \in I^f_{\frac{\varepsilon}{10M}}(+\infty)$

L'inters. dei intorni verso dx è ancora una semiretta verso dx

$^* I(+\infty) = J(+\infty) \cap I^g_{\frac{\varepsilon}{90|\ell|}}(+\infty) \cap I^f_{\frac{\varepsilon}{10M}}(+\infty)$

Rappr. grafica di limite

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \qquad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists I(x_0) : \forall x \in I(x_0) - \{x_0\} \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$



Rappr. grafica teorema del confronto

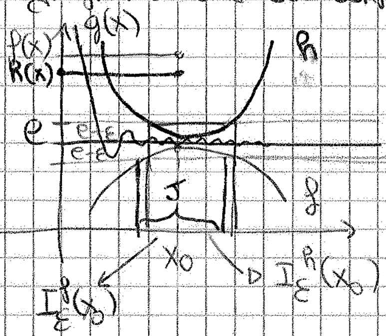
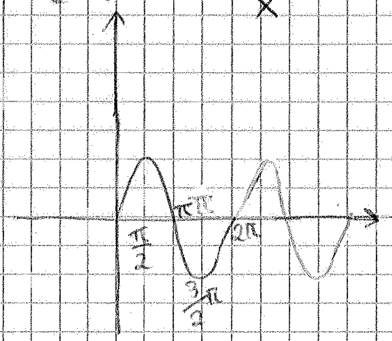
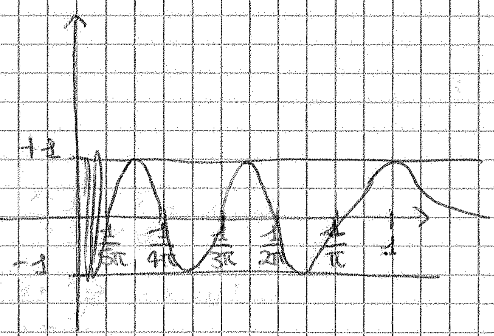


Grafico $\operatorname{sen}\frac{1}{x}$





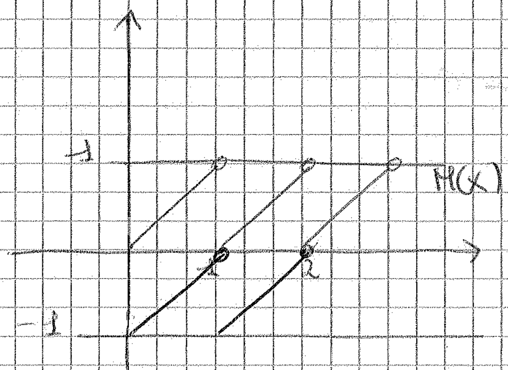
$\operatorname{sen}\frac{1}{x} = 0 \quad \Rightarrow \frac{1}{x} = k\pi \Rightarrow x = \frac{1}{k\pi}$

$\operatorname{sen}\frac{1}{x} = -1 \quad \Rightarrow \frac{1}{x} = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2k\pi \pm \pi/2}$

Funzione Mantissa $M(x)$

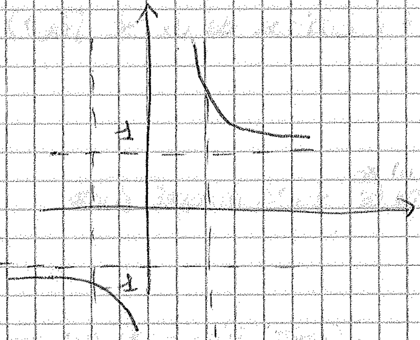
$M(x) = x - [x]$

$M(x) - 1 \qquad 0 < x < 2$



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 19 di 58

cotgh x



Calcolo funz. inversa

- $\sinh x = y$

$$e^x - e^{-x} = 2y$$
$$e^x - \frac{1}{e^x} = 2y$$
$$e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0 \qquad e^x = t$$
$$t^2 - 2yt - 1 = 0$$
$$t = y \pm \sqrt{y^2+1}$$
$$e^x \Rightarrow x = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$$

Fai il coseno iperbolico

- $\cosh x = y$

$$e^x + e^{-x} = 2y$$
$$e^x + \frac{1}{e^x} = 2y$$
$$e^{2x} + 2ye^x - 1 = 0 \qquad e^x = t$$
$$t^2 + 2yt - 1 = 0$$
$$t = -y \pm \sqrt{y^2+1}$$
$$e^x \Rightarrow x = \ln(-y + \sqrt{y^2+1})$$

$\sin \frac{1}{x}$ non ha limite per $x \to 0$

ma $\lim_{x\to 0} x\left(\sin\frac{1}{x}\right) = 0$ il prodotto di un infinitesimo per una funz. limitata ha come limite 0
Rappr. graficamente

CONTINUITÀ

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x \in \text{dom} f, \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$ ($x \neq x_0$)

Se f è definita in x_0 e se $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ per def. f è <u>continua</u> in x_0

f continua in x_0: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in \text{dom} f, \ |x - x_0| < \delta, x \neq x_0 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

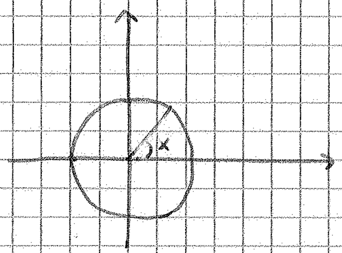
quando la funz. è continua questa condizione posso non scriverla

$f(x) = 3x$

$\lim_{x \to x_0} 3x = 3x_0$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

$|3x - 3x_0| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - x_0| < \varepsilon/3 \rightarrow \boxed{\delta}$



$0 \leq |\text{sen}\,x| < |x|$

$\lim_{x \to 0} \text{sen}\,x = 0 = \text{sen}\,0$

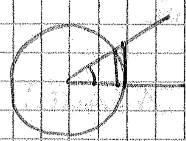
$\lim_{x \to x_0} \text{sen}\,x = \text{sen}\,x_0$

$\text{sen}\,x - \text{sen}\,x_0 \overset{?}{=} 2\left|\text{sen}\frac{x-x_0}{2}\right| \cos\frac{x+x_0}{2}$

$0 \leq |\text{sen}\,x - \text{sen}\,x_0| \leq \cancel{2}\left|\frac{x-x_0}{\cancel{2}}\right|$ il seno è continuo su tutti i punti

Applicaz. teorema confronto

$\text{sen}\,x \leq x < \text{tg}\,x = \frac{\text{sen}\,x}{\cos x}$



$1 \leq \frac{x}{\text{sen}\,x} \leq \frac{1}{\cos x}$

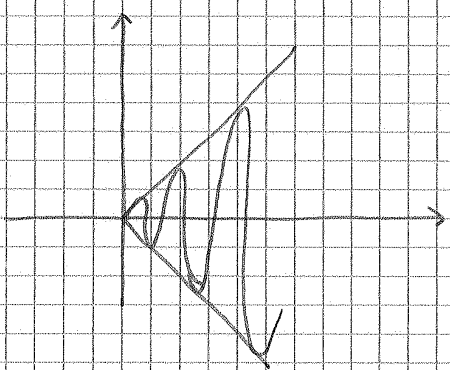
$1 \geq \frac{\text{sen}\,x}{x} \geq \cos x$

$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$

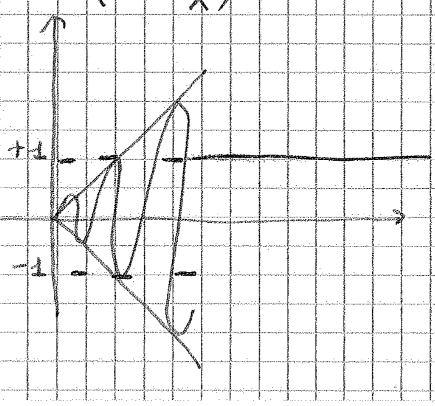
$1 \qquad\qquad 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}\,x}{x} = 1$

$f(x) = x\,\text{sen}\,\frac{1}{x}$



$f(x) = \text{sgn}\left(x\,\text{sen}\,\frac{1}{x}\right)$



Es. $\sin\log x$

$\lim_{x\to 0} \sin\log x$ costruisco due successioni ambedue convergenti ad un valore

$x_n = -n\pi \to$ valori uguali a 0

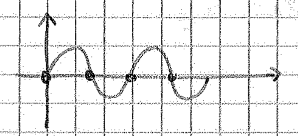
$\xi_n = -2n\pi + \frac{\pi}{2} \to$ valori uguali a 1

$g_n = e^{-n\pi}$

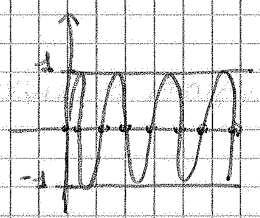
$h_n = e^{-2n\pi + \pi/2}$

$\sin\log g_n = \sin\log_e e^{-n\pi}$

$\sin n\pi = 0$
$\sin(2n\pi + \pi/2) = 1$ la funz. prende due valori diversi $\to$ il lim non esiste



$\log x = k\pi \to x = e^{k\pi}$
$\log x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \to x = e^{2k\pi + \pi/2}$



per $x \to +\infty$ continuo ad avere infinite oscillazioni

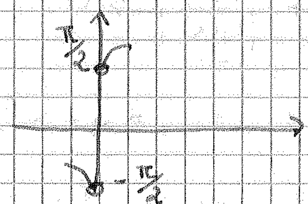
$\operatorname{sen}\frac{1}{x}$ per $x\to+\infty$ tende a zero

Es. $\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$

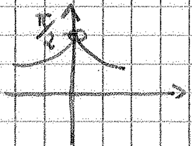
$\lim_{y\to+\infty} \operatorname{arctg} y \to \frac{\pi}{2}$

$\lim_{x\to 0^-} \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$

$\lim_{x\to 0^+} \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = +\frac{\pi}{2}$



$\left|\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right|$



Confronto di funzioni

$$\frac{x^3 + g(x)}{x^3 + f(x)} = \frac{x^3\left(1 + \frac{g(x)}{x^3}\right)}{x^3\left(1 + \frac{f(x)}{x^3}\right)} \to 0 = 1$$

$f, g \quad (x \to \alpha)$

- $f = o(g)$ se $\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$
- $f \asymp g \quad (x\to\alpha)$
  se $\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \in \mathbb{R} \neq 0$
- $f = O(g)$ se $\exists M > 0 \quad |f(x)| \le M|g(x)|$ (in un intorno di α)

$f \asymp g$ $\begin{cases} 0 < m \le \frac{f(x)}{g(x)} \le M & \text{per il teorema di permanenza del segno (versione rinforzata)} \\ m g(x) \le f(x) \le M g(x) & \to \text{il grafico di } f \text{ è dominato da sotto e da sopra da opportuni multipli di } g \end{cases}$

per $x \to +\infty$

$f = o(g)$

- se $g(x) \to 0 \Rightarrow f \to 0$
- se $g(x) \to +\infty$ f? perché f può tendere ad un numero ma anche a ∞

- $g = o(f)$ $\quad \lim_{x \to ?} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$

- $\underbrace{o(fg)}_{h} = o(f)$

  se g limitata

  $\frac{h}{f} \to 0 \qquad \frac{o(fg)}{f} = \underbrace{\boxed{\frac{o(fg)}{fg}}}_{\to 0} \cdot g$

- $\underbrace{o(f+g)}_{h} = o(f)$?

  $\frac{h}{f} \to 0$

  $$\frac{o(f+g)}{f} = \frac{o(f+g)}{f+g}\cdot\frac{f+g}{f} = \underbrace{\boxed{\frac{o(f+g)}{f+g}}}_{\to 0}\left(1+\frac{g}{f}\right) \to 0$$

  $\frac{g}{f}$ = limitata

- $\underbrace{o(f)\,o(g)}_{h} = o(fg)$

  $$\frac{h}{fg} = \frac{o(f)\,o(g)}{fg} = \frac{o(f)}{f}\cdot\frac{o(g)}{g} \to 0$$

- $[o(g)]^n = o(g^n)$

  $\frac{o(g)^n}{o(g^n)}$ = vedi l'esempio sotto per n volte

  $\underbrace{(o(g))^2}_{h} = o(g^2)$

  $$\frac{h}{g^2} = \frac{o(g)}{g}\cdot\frac{(g)}{g} \to 0$$

- $f = o(g)$ $\quad g$ infinitesimo

  $\frac{h}{g} \to 0 \qquad \frac{|f(x)|}{|g(x)|} \to 0 \qquad \frac{|f(x)|}{|g(x)|} < M$ per il teorema di limitatezza locale

  $0 \le |f(x)| < M|g(x)| \qquad f \to 0$

- $f = o(g)$ $\quad g$ infinito

  f?

  Es. $x \to +\infty$

  $g(x) = x \qquad f(x) = \sin x$

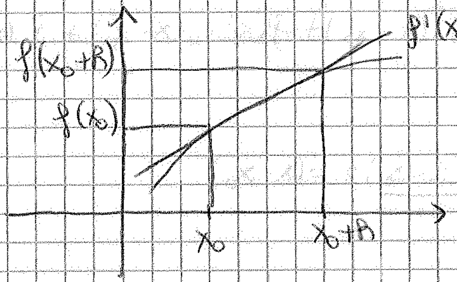
  $f(x) = \sqrt{x}$

- $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \ell + o(1)$ = derivata di $f(x)$ in x_0

$f(x)-f(x_0) = \ell(x-x_0) + \underbrace{o(1)(x-x_0)}_{o(x-x_0)}$

$f(x) = f(x_0) + \boxed{f'(x_0)}(x-x_0) + o(x-x_0)$ I formula degli incrementi finiti

- $h \to f'(x_0)h$ differenziale di f in x_0



$y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$

$y(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h$

$f'(x_0)h = y(x_0+h) - f(x_0)$

Ci dice di quanto mi sono spostata sulla tg al grafico di $f(x)$

x_0

$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'_+(x_0)$ lo accetto anche se il lim è infinito

Una funz derivabile in x_0 è continua in x_0, non vale l'inverso

Es

$f(x) = \operatorname{sgn} x$ $\quad x_0 = 0$

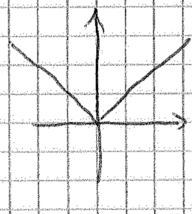
$\lim \frac{\operatorname{sgn} x}{x} = \begin{cases} \frac{1}{x} & x>0 \\ -\frac{1}{x} & x<0 \end{cases} = \frac{1}{|x|} \to +\infty$

$f'(x_0) \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f(x) = \underset{f(x_0)}{f(x_0)} + \underset{\in \mathbb{R}}{\boxed{f'(x_0)}}\underset{0}{(x-x_0)} + \underset{0}{o(x-x_0)}$ $\quad \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

non vale l'inverso

Es



$\frac{|x|}{x} = \begin{cases} +1 & x>0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$

$f(x) = \sqrt[3]{x}$ $\quad \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = +\infty$ c'è il lim ma non la derivata

Se f continua in x_0 e se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty$ tg verticale nel punto $x = x_0$

~ DERIVATE ~

- $Dc = 0$

$D(\alpha f(x) + \beta(g(x))) = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$

$\frac{d}{dx} f(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \quad f(x_0) = y_0$

funzioni composte

- supponiamo di avere $f(y)$ e $g(x)$

$f(y) = f(y_0) + f'(y_0)(y - y_0) + o(y - y_0)$

$g(x) = g(x) + g'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$

$y_0 = g(x_0)$

$f(g(x)) = f(g(x_0)) + f'(g(x_0))(g'(x_0)(x - x_0)) + f'(y_0)\, o(x - x_0) + o(y - y_0)$

1° formula degli incrementi finiti per la funzione composta

$D_{x_0} f(g(x)) = f'(g(x_0))g'(x_0)$

$\lim_{x \to x_0} \frac{o f(g'(x_0)(x - x_0) + o_g(x - x_0))}{x - x_0}$ deve tendere a zero

$= \boxed{\frac{o f(g'(x_0)(x - x_0) + o_g(x - x_0))}{g'(x_0)(x - x_0) + o_g(x - x_0)}} \boxed{\frac{g'(x_0)(x - x_0) + o_g(x - x_0)}{x - x_0}}$

0 $\qquad g'(x_0)$

funzioni inverse

$f(x) = \frac{1}{x} \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right) = \frac{x_0 - x(-1)}{(x - x_0)\, x x_0} = -\frac{1}{x x_0} \quad -\frac{1}{x_0^2}$

$D_{x_0}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x_0^2} \quad D\frac{1}{g(x)} \quad f(y) = \frac{1}{y} \quad f(g(x)) = \frac{1}{g(x)}$

$D_{x_0} f(g(x)) = f'(g(x))\, g(x_0) \qquad D_{y_0}\frac{1}{y} = \frac{-1}{y_0^2}$

$= -\frac{1}{g(x_0)}\, g'(x_0)$

$D_{x_0}\frac{1}{g(x)} = -\frac{1}{g^2(x_0)}\, g(x_0) \qquad D_{x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x)}{g^2(x_0)}$

$\frac{\sin x - x}{x^3} = \frac{x + o(x) - x}{x^3} = \frac{o(x)}{x^3}$ → non sappiamo calcolarlo, solo $\frac{o(x)}{x}$

$= \frac{(\cancel{x} - \frac{x^3}{6} + o(x^4) - \cancel{x})}{x^3} = \frac{-\frac{x^3}{6} + o(x^4)}{x^3} = \frac{\cancel{x^3}}{\cancel{x^3}} \frac{-\frac{1}{6} + o(1)}{1} = -\frac{1}{6}$

NON bisogna dimenticarsi gli "o piccolo"

Derivate

Definizione

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Teorema di Fermat

- $f(x)$ def su $(a;b)$
- x sia punto di max (min)
- $\exists f'(x_0)$

$\boxed{x_0 \in (a;b)}$ Ts $f'(x_0) = 0$

Dim. per assurdo

$f'(x_0) > 0$

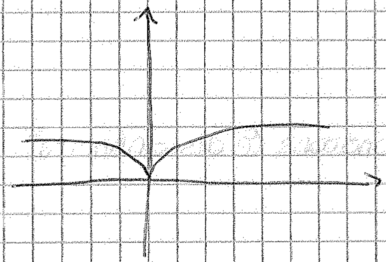
$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$ in $I(x_0)$

$f(x) \geq f(x_0) \quad x > x_0$

$f(x) \leq f(x_0) \quad x < x_0$

$(x \in I)$

Es $f(x) = \sqrt[3]{|x|}$



non è derivabile in 0

fotocopie ele

2) f crescente

1) $\sup\{f(x),\ x < x_0\} = \ell \in \mathbb{R}$

Ts $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$

Ts. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists ?\ x_\varepsilon : \forall x \in (x_\varepsilon, x_0) \cap \operatorname{dom} f \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

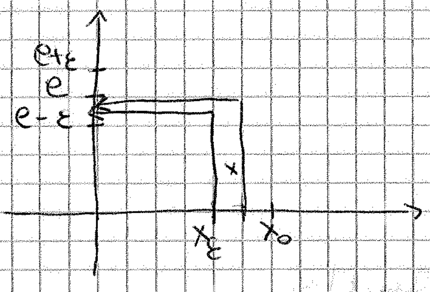
$-\varepsilon < f(x) - \ell < \varepsilon$

$\ell - \varepsilon < f(x) \underbrace{\overset{\le \ell}{<} \ell + \varepsilon}_{\text{sì}}$

$\sup\{f(x),\ x < x_0\} = \ell \Rightarrow \forall x < x_0 \Rightarrow f(x) \le \ell < \ell + \varepsilon$

$\ell - \varepsilon$ non maggiorante (ℓ è il più piccolo tra i magg., se lo diminuisco di un po' non lo è più)

$\exists\ x_\varepsilon \in \operatorname{dom} f,\ x_\varepsilon < x_0$ tale che $f(x_\varepsilon) > \ell - \varepsilon$



$|\sin x| = (\operatorname{sgn} x) \sin x$

INTEGRALI

$D(\alpha f + \beta g) = \alpha f' + \beta g'$

$\int (\alpha f + \beta g)\,dx = \alpha \int f\,dx + \beta \int g\,dx$

Integrazione per parti

$\int D(FG)\,dx = \int F'G\,dx + \int FG'\,dx$

$F(x)G(x) + c = \int F'(x)G(x)\,dx + \int F(x)G'(x)\,dx$

$\int F\,dG = FG - \int G\,dF$

Es • $\int x e^x\,dx = \int \underset{F}{x}\,\underset{dG}{de^x} = x e^x - \int \underset{G}{e^x}\,\underset{dF}{dx} = x e^x - e^x + c$

se prendo x come derivata $\int e^x\, d\frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2} e^x - \int \frac{x^2}{2}\, de^x \Rightarrow \int x e^x\,dx = \frac{x^2}{2} e^x - \int \frac{x^2}{2} e^x\,dx$ non viene

• $\int \log x\,\underset{dG}{dx} = x\log x - \int x\,d\log x = x\log x - \int x \frac{1}{x}\,dx = x\log x - x + c$

$G(x) = x$

• $\int x^2 \log x\,dx = \int \log x\, d\frac{x^3}{3} = \frac{x^3}{3}\log x - \int \frac{x^3}{3}\,d\log x = \frac{x^3}{3}\log x - \frac{1}{3}\int 3\frac{x^2}{3}\,dx =$

$= \frac{x^3}{3}\log x - \frac{1}{9}x^3 + c$

$$\frac{1}{t(t-1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-1} \rightarrow -\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1}$$

$$\frac{1}{t-1} = A + \frac{B}{t-1}\,t$$

$A = -1$ per $t \to 0$

$$\frac{1}{t} = \frac{A}{t}(t-1) + B$$

$B = +1$

$$= -\log t + \log|t-1| + c = -x + \log|e^x - 1| + c$$

- $f(x)$ $F(x)$ def su $(a;b)$
  $F(x)$ primitiva di $f(x)$ se $F'(x) = f(x)\ \forall x \in (a;b)$

- su $(a;b)$
  $F(x)$ è primitiva GENERALIZZATA di $f(x)$ se
  1) è continua su $(a;b)$
  2) $F'(x) = f(x)$ su $(a;b)$ salvo che in un punto x_0

$|x|$ primitiva generalizzata di $\operatorname{sgn} x$

Es.

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & x > 0 \\ 5 & x = 0 \\ x^2 & x < 0 \end{cases}$$

$F'(x) = \cos x \quad x > 0$
$F'(x) = x^2 \quad x < 0$

f continua in $x_0 = 0$?

$F(x) = \sin x + c \quad x > 0$
$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + d \quad x < 0$

$\lim_{x \to 0^+} F(x) = c$ $\qquad \lim_{x \to 0^-} F(x) = d$

$\lim_{x \to 0^-} F(x) = d$

$$F(x) = \begin{cases} \sin x + c & x \geq 0 \\ \frac{1}{3}x^3 + c & x \leq 0 \end{cases}$$

$\lim_{n \to +\infty} x_n$

(x_n) ① CRESC. ② $\sup\{x_n\} = +\infty$

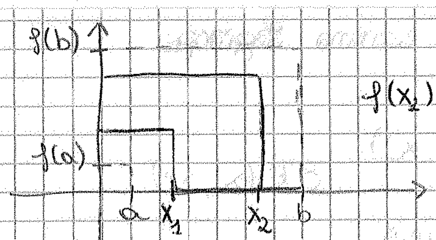
$\{x_n\}$ x_n

$\lim x_n = +\infty \qquad \forall \varepsilon \quad \exists^* N_\varepsilon : \forall n > N_\varepsilon \Rightarrow x_n > \varepsilon$

$N_\varepsilon = n_\varepsilon$

$\exists n_\varepsilon : x_{n_\varepsilon} > \varepsilon \rightarrow 2^a$ ipotesi

1^a ipotesi $\rightarrow$ se $n > n_\varepsilon \Rightarrow x_n \geq x_{n_\varepsilon} > \varepsilon$

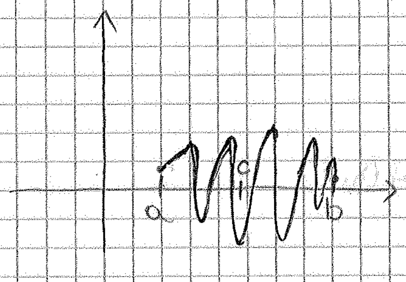


$f(x_1) < f(b)$

Teorema di Rolle

0) dominio intervallo $[a;b]$
1) f continua su $[a;b]$
2) f derivabile su $(a;b)$
3) $f(a) = f(b)$

$\Rightarrow \exists\, c \in (a;b)$
$f'(c) = 0$



x_0 p.to di min
x_1 p.to di max

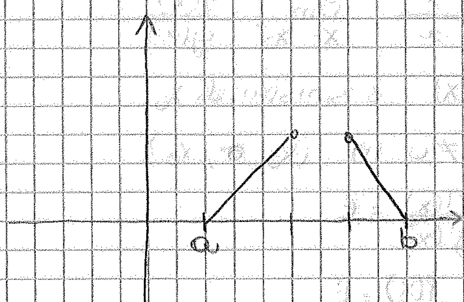
se $x_0 = a$ $\quad x_1 = b$

se f è così $\quad f'(x) \equiv 0$

$x_0 \in (a;b) \Rightarrow f'(x_0) = 0$ (FERMAT)
$c = x_0$

0) f def. su I CHIUSO
1) f cont. su I
2) f deriv. nei punti interni
3) $f(a) = f(b)$ $\quad a = \min I$
$a = \max I$

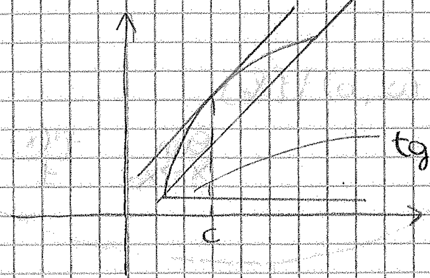
$\not\Rightarrow \exists\, c : f'(c) = 0$



Teorema di Lagrange

0) dom interv. $[a;b]$
1) f continua su $[a;b]$
2) f deriv. su $(a;b)$

$\exists\, c : f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$



$\operatorname{tg} \varphi = \frac{f(b) - f(a)}{(b-a)}$

$g(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a) \right]$

$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a)$

$g(a) = g(b) \quad \exists\, c : g'(c) = 0$ ROLLE

$g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} = 0$

II conseguenza

$f(x)$ definita su (a,b)

$$F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(s)ds$$

$f(x) = o(x-x_0)$

$\int_{x_0}^{x} f(s)ds = o(x-x_0)^2$ quando vale

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{(x-x_0)^2} \int_{x_0}^{x} f(s)ds = 0$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{2(x-x_0)} = 0$$

quando si fanno le primitive si aumenta di 1 l'ordine di infinito

(III conseguenza) Formule di Taylor

$f'(x)$ si annulla in x_0 se $f(x) = f(x_0)$

x_0 fissato

$f'(x) = \underset{\text{numero}}{f'(x_0)} + \underset{\text{numero}}{f''(x_0)}(x-x_0) + o(x-x_0)$

$f(x) = \underset{\text{num}}{f(x_0)} + \underset{\text{num}}{f'(x_0)}(x-x_0) + \underset{\text{numero}}{f''(x_0)}\frac{(x-x_0)^2}{2} + o(x-x_0)^2$

coeff. invariato (è un numero) → diventa primitiva

formula di Taylor di centro x_0

$f''(x) = f''(x_0) + f'''(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)$

$f'(x) = f'(x_0) + f''(x_0)(x-x_0) + f'''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2} + o(x-x_0)^2$

$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2} + f'''(x_0)\frac{(x-x_0)^3}{3\cdot 2} + o(x-x_0)^3$

$3 \cdot 2 = 3!$

denominatore comune

$$f(x) = \boxed{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k}{k!} + \underbrace{o(x-x_0)^n}_{\text{F. DI PEANO}}}$$

resto di Peano

→ in base al valore di k troviamo la funzione, la derivata prima, seconda, ecc...

$D^k_{x_0} f = f^{(k)}(x_0)$

se $k=0$ troviamo la funzione

polinomio di Taylor di centro x_0 e grado n

- Vale se $\exists f^{(n)}(x_0)$

$\exists f^{(n)}(x_0)$ $\quad \exists f^{(n+1)}(x)$ in (x_0, b)

per $x \in (x_0, b)$

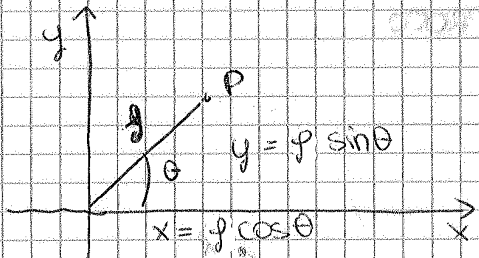
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \qquad c \in (x_0, x)$$

RESTO IN FORMA DI LAGRANGE

Es. $\sin 0{,}1 = \sin 0 + (\cos c)(0{,}1)$

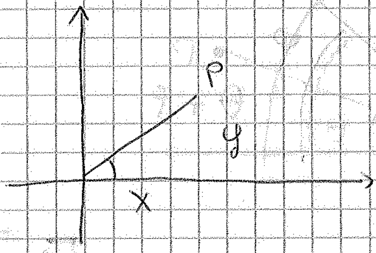
$\sin 0{,}1 = \sin 0 + \frac{1}{1!}\, 0{,}1 + (\sin c)\frac{(0{,}1)^2}{2}$

$\sin 0 \quad \cos 0 \quad (\sin 0)(0{,}1)^2$



$\sin\theta = \frac{y}{\rho}$

$\theta = \arcsin \frac{y}{\rho}$



$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$

$\sqrt{x^2+y^2}\,\sin\theta = y$

$tg\,\theta = \frac{y}{x}$

$\theta = arctg\,\frac{y}{x}$

$\theta = \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$z = \underbrace{x+iy}$ → rappr. algebrica

$= \rho\cos\theta + i\rho\sin\theta = \underbrace{\rho(\cos\theta + i\sin\theta)}$

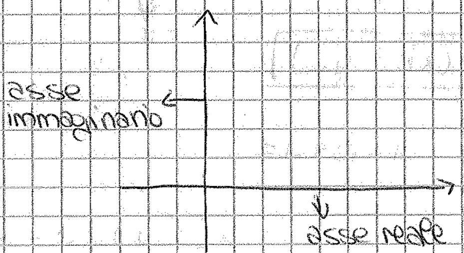
rappr. trigonometrica

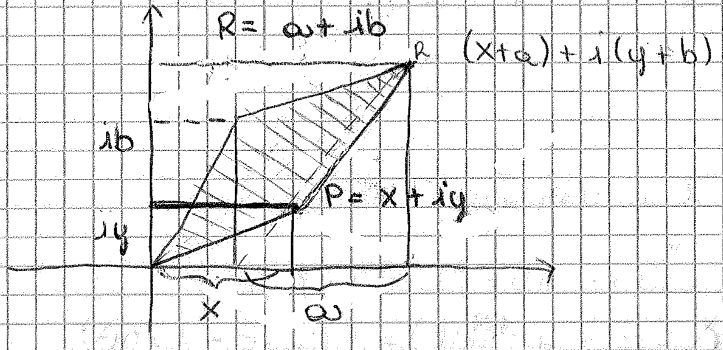
$z = x + iy$

$x = Re\,z$
$y = Im\,z$

$0 + i2 = 0 + 2i = \underbrace{2i}$ immaginari

$3 + i0 = \underbrace{3}$ n complessi reali





$z \cdot \bar{z} = |z|^2$

$(a+ib)(a-ib) = a^2 - \cancel{iab} + \cancel{iab} - \boxed{i^2} b^2 = a^2+b^2$ (-1)

$\mathrm{Re}\, z = \dfrac{z+\bar{z}}{2} = \dfrac{a+a+\cancel{ib}-\cancel{ib}}{2} = a$

$z - \bar{z} = 2ib = 2i\, \mathrm{Im}\, z$

$\mathrm{Im}\, z = \dfrac{z-\bar{z}}{2i} = \dfrac{a-a+ib+ib}{2i} = b$

$\dfrac{a+ib}{c+id} \cdot \dfrac{c-id}{c-id}$ → per togliere il n° complesso a denom. si moltiplica e divide per il coniugato del den

$c^2 + d^2$ ($i^2 = -1$)

$\overline{(a+ib)+(c+id)} = \overline{a+c+i(b+d)} = a+c-i(b+d) = a+c+i(-b-d)$

coniugato somma = somma coniugati

$\mathrm{Arg}\,\overline{\omega z} = -(\mathrm{Arg}\,\omega + \mathrm{Arg}\, z) = -\mathrm{Arg}\,\omega - \mathrm{Arg}\, z$

coniugato prodotto = prodotto coniugati

ω DATO — RADICI

$z^n = \omega$ → se $\omega = 0$ l'unica z che risolve l'eq. è 0

In tutti gli altri casi ci sono n radici n-esime (soluzioni)

$\omega = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ DATO

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ incognito

$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \overset{?}{=} \rho(\cos\boxed{\theta} + i\sin\boxed{\theta})$

$r^n = \rho$

$r = \sqrt[n]{\rho}$ → positivo perché i moduli sono uguali

nel prodotto reciproco sono diversi

$n\varphi = \theta + 2k\pi$

$\varphi = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n}$ $\quad k \in \mathbb{Z}$

φ moltiplicato n mi dà uno dei valori possibili per θ

$k=0 \quad \varphi = \dfrac{\theta}{n}$

$k=1 \quad \varphi = \dfrac{\theta}{n} + \dfrac{2\pi}{n}$

$k=2 \quad \varphi = \dfrac{\theta}{n} + \dfrac{2\pi}{n} \cdot 2$

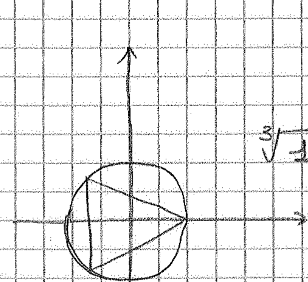
$k=3 \quad \varphi = \dfrac{\theta}{n} + \left(\dfrac{2\pi}{n}\right) \cdot 3$

$k=n-1 \quad \varphi = \dfrac{\theta}{n} + \left(\dfrac{2\pi}{n}\right) \cdot (n-1)$

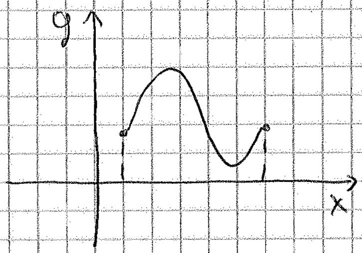
$k=n \quad \varphi = \dfrac{\theta}{n} + \dfrac{2\pi}{\cancel{n}} \cdot \cancel{n}$

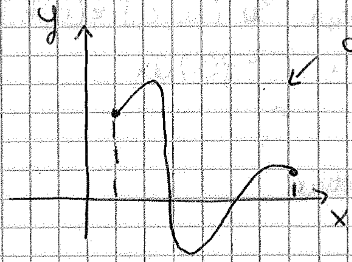
radici n-esime (soluzioni) sono i vertici di un poligono regolare inscritto nella circonf. di raggio $\sqrt[n]{\lvert\omega\rvert}$

$\sqrt[3]{1}$



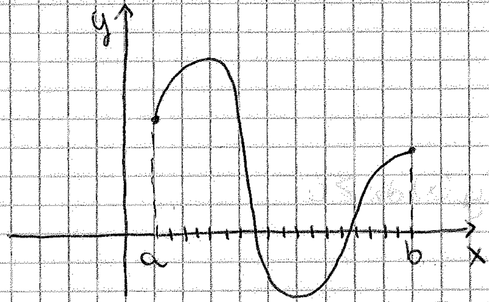
INTEGRALI





devo calcolare le Aree separatamente e poi sommare

NON È NECESSARIO CHE LE F(X) SIANO CONTINUE



$m_i = \inf_{[a_i; a_{i+1})} f = \inf \{ f(x), x \in [a_i; a_{i+1}) \}$

$\sum_{0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) m_i = s_P$

$M_i = \sup_{[a_i; a_{i+1})} f$

$\sum_{0}^{n-1} M_i (a_{i+1} - a_i) = S_P$

Se ho due partizioni: $Q \geq P$

$s_P \leq s_Q \leq S_Q \leq S_P$

$\sup_P s_P \leq \inf S_Q$

$\sup_P s_P \leq \inf S_Q$ SE f integrabile su $[a; b]$

$\int_a^b f(x)dx = \begin{cases} \sup s_P \\ \inf S_Q \end{cases} \rightarrow$ se coincidono

LINEARITÀ (p 200)

$f(x), g(x)$ integrabili su $[a; b]$

$\Downarrow$

$\alpha f(x) + \beta g(x)$ integrabile su $[a; b]$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\int_b^a [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int_b^a f(x)dx + \beta \int_b^a g(x)dx$

- se $F(x)$ è continua $\Rightarrow F \in$ e $F'(x) = f(x)$

se $G' = f$

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a) = G\Big|_a^b$$

- $$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$$

$$\frac{1}{x - x_0}\left[F(x) - F(x_0)\right] - f(x_0) \overset{?}{\to} 0$$

$$\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x} f(s)ds - f(x_0) = \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x} f(s)ds - \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x} f(x_0)ds =$$

$$= \frac{1}{x-x_0}\left\{\int_{x_0}^{x}\left[f(s) - f(x_0)\right]ds\right.$$

$$\left|\frac{1}{x-x_0}\left(F(x) - F(x_0)\right) - f(x_0)\right| \le \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x}\left|f(s) - f(x_0)\right|ds$$

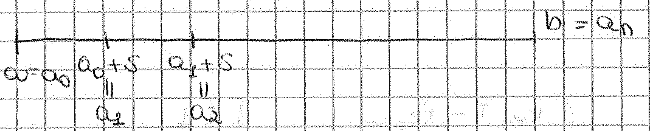
$$0 \le \left|\frac{1}{x-x_0}\left(F(x) - F(x_0)\right) - f(x_0)\right| \le \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x}|f(s) - f(x_0)|ds \overset{?}{\to} 0$$

Ts: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists\ \overset{=\eta}{\cancel{\delta}} > 0 : 0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x}|f(s) - f(x_0)|ds < \varepsilon$

Hp: $\overset{\text{SCELGO}}{\cancel{\forall\delta}} > 0 \quad \exists\ \overset{\text{eta}}{\eta} : \forall x, |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \delta$

$$\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x}|f(s) - f(x_0)|ds < \frac{\varepsilon(x-x_0)}{x-x_0} = \varepsilon$$

f monotona crescente limitata su $(a;b)$ $\Rightarrow$ è integrabile



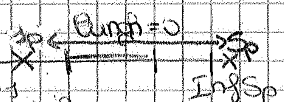
$\delta = \frac{b-a}{n}$ $\to$ i segmenti sono equidistanti

$$m_k = \inf_{[a_k, a_{k+1})} f = \min_{[a_k, a_{k+1})} f = f(a_k)$$

$$M_k = \sup f_{[a_k, a_{k+1})} \le f(a_{k+1})$$

$$\left.\begin{aligned} s_p &= \sum_{0}^{n-1}{}_k\, m_k(a_{k+1} - a_k) = \frac{b-a}{n}\sum_{0}^{n-1}{}_k\, f(a_k) \\ S_p &= \sum_{0}^{n-1}{}_k\, M_k(a_{k+1} - a_k) = \frac{b-a}{n}\sum_{0}^{n-1}{}_k\, M_k \end{aligned}\right\}$$

perché sia integrabile i due estremi devono coincidere



$0 \le \inf S_p - \sup s_p < \varepsilon \qquad \forall \varepsilon > 0$

$$0 \le \inf S_p - \sup s_p \le \underset{(p = \text{partizione})}{S_p - s_p} = \frac{b-a}{n}\left\{\sum_{0}^{n-1}{}_k\, M_k - \sum_{0}^{n-1}{}_k\, f(a_k)\right\} = \frac{b-a}{n}\sum_{0}^{n-1}{}_k\left[M_k - f(a_k)\right] \le$$

$\to$

$x \to +\infty$

p.p. di f sia $\frac{c}{x^\alpha}$ stesso comportamento

$\Rightarrow \int^{+\infty} f \quad \int^{+\infty} \frac{c}{x^\alpha}$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{\frac{c}{x^\alpha}} = 1$

$\frac{1}{2} < \frac{f(x)}{\frac{c}{x^\alpha}} < 2$ loc. $\quad \frac{1}{2}\frac{c}{x^\alpha} < f(x) < 2\frac{c}{x^\alpha}$

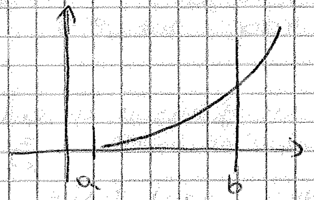
se per $x \to +\infty$

$f(x) = o\left(\frac{1}{x^{1+\varepsilon}}\right) \Rightarrow \int^{+\infty} f < +\infty$

$f = o\left(\frac{1}{x^1}\right)$ INDECIDIBILE $\to$ esistono funzioni $o\left(\frac{1}{x}\right)$ divergenti ed altre convergenti

$f(x) = \frac{1}{x\log x} = o\left(\frac{1}{x}\right)$

$\int_2^T \frac{1}{x\log x} = \log\log T - \log\log 2 = +\infty$



$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(t)\,dt$

$f(t) \leq g(t)$

$\frac{1}{b-x}$ p.p. di $f(x)$ $\frac{c}{(b-x)^\gamma}$

$\int f$ e la sua $\int$ p.p. con lo stesso comportamento

$\frac{f}{\frac{c}{(b-x)^\gamma}} \to 1$ localmente $\frac{1}{2}\frac{c}{(b-x)^\gamma} \leq f(x) \leq 2\frac{c}{(b-x)^\gamma}$

$\int_a^{b-\varepsilon} = \int_a^{\sigma} + \int_{\sigma}^{b-\varepsilon}$

$$\int_a^{b-\varepsilon} \frac{1}{(b-x)^\gamma}\,dx = \begin{cases} \gamma = 1 & -\log|b-x|\Big|_a^{b-\varepsilon} = -\log\varepsilon + \log(b-a) \\ \gamma \neq 1 & \frac{1}{1-\gamma}\varepsilon^{1-\gamma} - \frac{1}{1-\gamma}(b-a)^{1-\gamma} \end{cases}$$ limite finito $\Leftrightarrow \gamma < 1$

$f = o\left(\frac{1}{x}\right) \quad \gamma = 1-\varepsilon \quad \int_a^b f$ FINITO

CALCOLO DIFFERENZIALE

$f'(t) = g(t)$

$f^2(t) + (f'(t))^2 = 0$ è unica soluz. è la funz. f identicamente 0

$x^{(n)}(t) = F(t, x(t), \dots x^{(n-1)}(t))$ → scritta in forma normale, perché la derivata di ordine massimo è stata separata ?

$x^n = F(t, x, x', \dots x^{(n-1)})$ → si sottointende t

Es. $x'(t) = x^2(t)$ → fai la derivata della funz. composta
$\cancel{x'' = 2x}$ → $\frac{d}{dt} x'(t) = \frac{d}{dt} x^2(t) = 2x(t) \cdot x'(t) = 2x^3(t)$

2 classi di eq. differenziali

- variabili separabili } solo I ordine
- lineari

Eq. diff. lineari 1° ordine

$x' = a(t)x + f(t)$

o $x'(t) \pm a(t)x = f(t)$

Eq. diff. variabili separabili

$x'(t) = F(t)G(x(t))$

II ordine

$x'' + b(t)x' + c(t)x = f(t)$

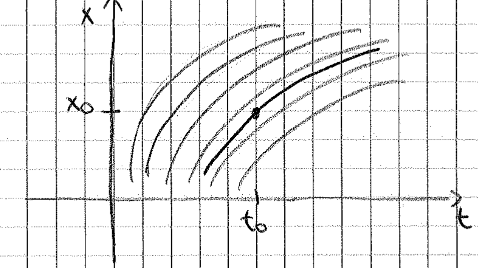
III ordine

$x''' + \alpha(t)x'' + \beta(t)x' + \gamma(t)x = f(t)$

Eq. differenziale lineare con termine noto $\neq 0$ → AFFINE o COMPLETA
" " " " " $= 0$ → OMOGENEA

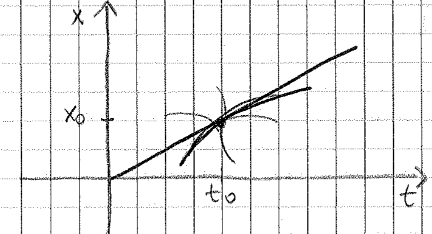
SOLUZIONE: $x(t)$ definita su un intervallo e che verifica l'equazione
↓
solitamente è aperto (dimostrato)

$x' = f(t, x(t))$
$x(t_0) = x_0$



→ siccome l'intervallo è aperto la soluz. è un po' prima o un po' dopo t_0

$x'' = f(t, x(t), x'(t))$
$x(t_0) = x_0$



→ infinite soluz., per isolarne una devo anche chiedere $x'(t_0) = x_1$
↓
pendenza tangente

$H(x) - \phi(t) = c$ → soluzione generale dell'equazione differenziale o integrale generale

Esempio 1

$x' = 1 + x^2$ $\quad 1+x^2 = 0$ no soluz. costanti

$x(0) = \xi$

$$\frac{x'(t)}{1+x^2(t)} = 1$$

$$\frac{d}{dt} \arctan(x(t)) = \frac{d}{dt} t$$

$\arctan(x(t)) = t + c \qquad \arctan \xi = c$ → soluzione per $x(0) = \xi$

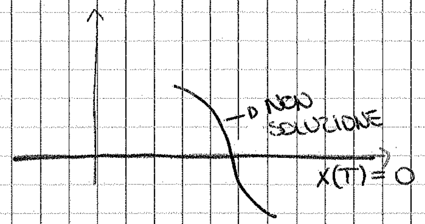
$\arctan x(t) = t + \arctan \xi \Rightarrow x(t) = tg(t + \operatorname{arctg} \xi)$

definita solo tra $\left(\frac{\pi}{2} - \arctan \xi\right)$ e $\left(-\frac{\pi}{2} - \arctan \xi\right)$

Esempio 2

$x' = ax$ $\qquad ax = 0$

$x(t_0) = x_0$ $\qquad x(t) \equiv 0$



per l'unicità di soluzione nessun' altra soluzione si può annullare ⇒ sono sempre positive o sempre negative

$$\frac{x'}{x} = a = \frac{d}{dt} at$$

$$\frac{d}{dt} \log|x(t)| = \frac{d}{dt} at$$

$\log|x(t)| = at + c$ → $|x(t)| = e^{at} \cdot e^c$

se $x(t) > 0$ → $x(t) = e^{at} \cdot e^c$

$x(t) < 0$ → $x(t) - e^{at} \cdot e^c$

$x(t) = k e^{at} \qquad k \neq 0 \qquad k \in \mathbb{R}$

Risoluzione eq. lineare omogenea con termine noto

$x' = a(t)x + f(t)$

$x' - \boxed{a(t)}x = f(t)$ $\quad$ ($A'(t)$)

$$\frac{d}{dt} e^{A(t)} = f(t)$$

$$\frac{d}{dt} e^{-A(t)} x(t) = \frac{d}{dt} \int_{t_0}^{t} e^{-A(s)} f(s)\,ds$$

$e^{-A(t)} x(t) = c + \int_{t_0}^{t} e^{-A(s)} f(s)\,ds$

$x(t) = e^{+A(t)} c + e^{A(t)} \int_{t_0}^{t} e^{-A(s)} f(s)\,ds$ → risoluzione eq. lineari anche con termine noto

$e^{A(t)}c$ → tutte le soluz. dell' eq. differenziale lineare omogene associata

$e^{A(t)} \int_{t_0}^{t} e^{-A(s)} f(s)\,ds$ → soluz. particolare dell'equaz.

$e^{A(t)} c$ → tutte soluz. di $x' = a(t)x$

$x(t_0) = c$
$\quad x_0$

se $c = t_0$ e $A(t)$ si annulla in t_0 → $k = x_0$
$x_0 = t_0$

$x' = 3x + 2e^{3t}$

$3\alpha \cancel{e^{3t}} = 3\alpha \cancel{e^{3t}} + 2e^{3t}$

$x(t) = e^{3t}c + ?$

$x(t) = e^{3t}c + 4e^{3t}$

$y(t) = \alpha e^{3t} \rightarrow \beta t e^{3t}$

non va bene perché è soluz. dell'equaz. senza termine noto

$\beta e^{3t} + 3\beta t \cancel{e^{3t}} = 3\beta t \cancel{e^{3t}} + 2e^{3t}$

$\beta = 2$

Es. 4

$1 \cdot e^{at} + a\cancel{e^{at}} = a\cancel{e^{at}} + e^{at}$

$\alpha = 1$

Es. 5

$$\begin{cases} x' = 2x \\ y' = 3y - 2x \end{cases}$$

$x(t) = e^{2t}c$

$y' = 3y - \cancel{2}ce^{2t}$

$y(t) = e^{3t}\alpha + ce^{2t}$ ($-c^2e^{2t}$)

ma $-c^2$ è tanto arbitrario quanto c

$z(t) = \gamma e^{2t}$

$2\gamma \cancel{e^{2t}} = 3\gamma \cancel{e^{2t}} - c\cancel{e^{2t}}$ $\quad \gamma = c$

$y'' = 3y' - 2x' = 3y' - 4x$

$2x = 3y - y'$

$4x = 6y - 2y'$

$y'' = 3y' - 6y + 2y' \rightarrow y'' - 5y' + 6y = 0$

Eq. differenziali del secondo ordine

$f = x'' + bx' + cx$

$x' - ax = f(t)$ $\quad Dx = x'$ $\quad (D-a)x = f(t)$

$(D - m_1)\underbrace{(D - m_2)x}_{y(t)} = f$ $\quad Dy - m_2 y = f$ $\quad \left.\begin{matrix} y' - m_1 y = f \\ x' - m_2 x = y(t) \end{matrix}\right\}$ risolvo

$(D-a)x = f$ $\quad x' - ax = f$

$\Rightarrow (D - m_2)(x' - m_1 x) = f \rightarrow x'' - m_1 x' - m_2 x' + m_2 m_1 x = f$

infine $\quad x'' - (m_1 + m_2)x' + m_1 m_2 x = f$

Da $x'' + bx' + c = f$ mi riconduco a $\underbrace{\lambda^2 + b\lambda + c = 0}$, $\rightarrow$ polinomio caratteristico dell'equazione

m_1 e $m_2 \rightarrow (\lambda - m_1)(\lambda - m_2) \rightarrow$ sono le soluzioni di $\lambda^2 + b\lambda + c = 0$

$(D - m_1)\underbrace{(D - m_2)x}_{y} = f$

$x'(t) - m_2 x(t) = y(t)$

$y' - m_1 y = 0$ $f(t)$ $\quad y(t) = e^{m_1 t} \cdot c$

$* \; x' - m_2 x = y(t) = c \cdot e^{m_1 t} \quad \forall c \in \mathbb{R}$

0 $\quad y(t) = c \cdot e^{m_1 t} + \ldots$ se $y(t)$ non è 0

1° CASO : $m_1 \neq m_2$

$x(t) = e^{m_2 t}\alpha + \dfrac{c}{m_1 - m_2} e^{m_1 t}$

(α) $\mathbb{R}$ qualsiasi

$x(t) = \gamma \cdot e^{m_1 t} *$ $\quad m_1 \gamma \cancel{e^{m_1 t}} - m_2 \gamma \cancel{e^{m_1 t}} = c \cdot \cancel{e^{m_1 t}} \rightarrow \gamma = \dfrac{c}{m_1 - m_2}$

$x(t) = \alpha e^{m_1 t} + \beta e^{m_2 t}$ $\quad m_1 \neq m_2$

soluz. generale