



**Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino**

**Appunti universitari**

**Tesi di laurea**

**Cartoleria e cancelleria**

**Stampa file e fotocopie**

**Print on demand**

**Rilegature**

NUMERO : 37

DATA : 24/03/2011

# A P P U N T I

STUDENTE : Alessio

MATERIA : Costruzioni Aeronautiche

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

Prof. Icardi

011/5646842

ugo.icardi@polito.it

12/10/10

Esame

2 verifiche :

- travi

- elementi finiti e semiguscio

Architettura lamina:

elementi longitudinali e trasversali + rivestimento che collabora lmn e che non serve a niente la pelle!

fusoliera: corrente e ordinate

ola: longheroni e centine

centine: buchi di alleggerimento chiamati "imbutiti"

lamiera bucata e ripiegata  
 → non so flette più



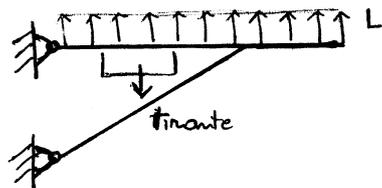
Ondulazione → lamiera ondulata

  → non si deforma facilmente (se serve ad alte press. non rivestirla)

longheroni → vore e proprie travi

oltre bacchette → non c'è mt di attacco (corrente)

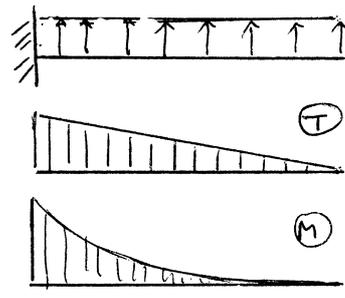
Nell' ola: resina impermeabilizzante → carburante



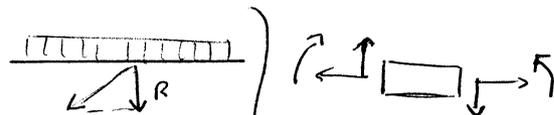
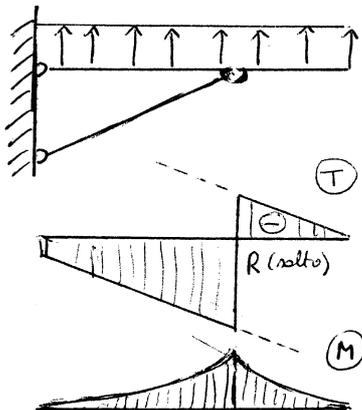
ola controventata del Pilatus

→ struttura isostatica

prendiamo la portanza alare con costante la struttura pesa meno di L → è sollevata → il carburante in fusoliera aiuta!



ola lamina



ola controventata

→ minor carico

all' attacco in

fusoliera → è meglio

dell' altra se vola

a bona velocità

Non possiamo progettare un aereo che non possa sopportare delle manovre → aereo di linea sopporta fino a 2,5g; che è tanto!! (vuoto d'aria 1,1g)

Dei regolamenti stabiliscono le capacità di ogni categoria di aereo:

Norme civili:

- normal
- acrobatic
- ~~low~~ utility  $n_{max} = 4,4$

Normalm. più che le manovre, sono le raffiche il probl. (più sulla terra che sul mare)

Aerei di linea volano in certe fasce di quote, dov' è facile trovare la corrente a getto:

- andam. fissa, limiti della troposfera
- 400 km/h

se ti becca lateralm. è un cosmo !!

Regolamento dice che:

aereo va progettato in se manovrare a 2,5g

Un aereo militare delle raffiche se ne frega

→ gli che volano dalle portiere non le considerano nemmeno nella struttura!!

Definiamo:

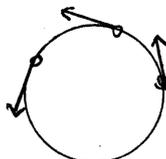
coeff di contingenza  $n = \frac{L}{W}$

a) condiz. normale  $n=1$

b) virata corretta → scivolata d'ala → portanza su piano di simmetria del velivolo (standometro, palla attaccata ad uno spago)

manovra a regime, L deve aumentare → pilota tira a sé la cloce, cambia assetto →  $L \uparrow$  e  $\Delta \uparrow$ , quindi manetta anche  $\uparrow$ ; la vel cambia da pt a pt (in direz. non in modulo)

→ è un' ecc.



2 raffiche < buona vel.  
alta vel.

Poniamo rallentare qnd radar ci dice che c'è una raffica,  
a buona vel. raffica un imp.

### Pilatus - diagramma di manovra

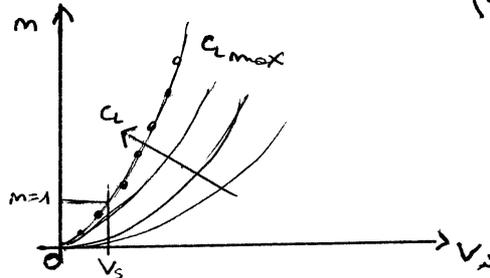
A peso max

B peso min

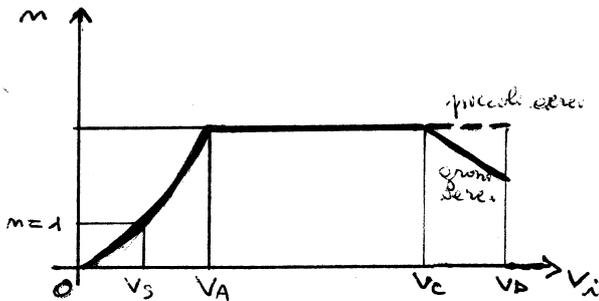
$$L = mW = \frac{1}{2} \rho_0 V_i^2 S C_L \rightarrow m = \frac{\frac{1}{2} \rho_0 V_i^2 S C_L}{W}$$

parabola  
(che traccio per pt)

quota zero  
(qll peggiore  
per l'aereo)  
fa dinamica



poi metto dei limiti  $V_s = v_{stallo}$  (che corrisponde a  $m=1$ )  
ogni valore di  $C_L$  ha una parabola diversa  
 $0 \leq C_L \leq C_{Lmax} \rightarrow$  prendo la parabola a  $C_{Lmax}$



man mano che aumento il  
corso  $V_s$  si sposta verso dx;  
prendo  $W = W_{max}$

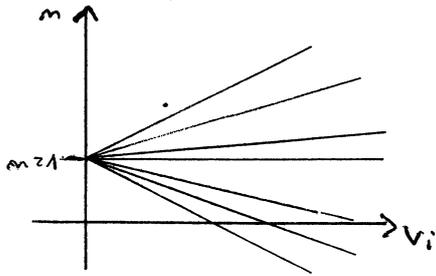
Se volo sempre a  $C_{Lmax}$  non posso manovrare

Non posso far aumentare troppo  $V$ , se no  $m$  troppo grande  
 $\rightarrow$  aereo si comporta e non vola!!

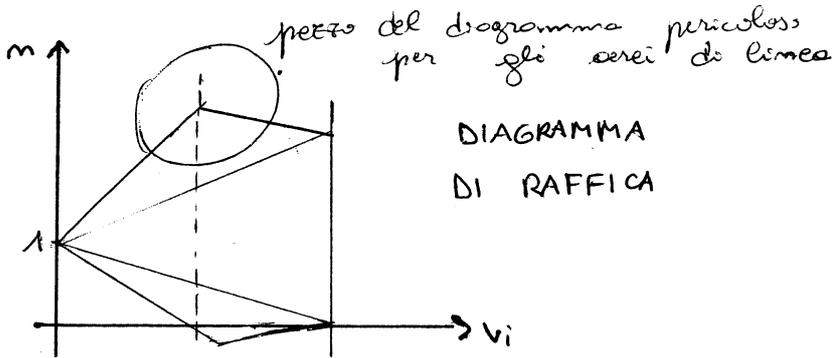
$\Rightarrow$  ho un limite di  $m$  per volare a  $C_{Lmax}$ , che corrisp. a  $V_A$   
Sono a  $C_{Lmax} \rightarrow$  per accelerare devo diminuire il valore di  $C_L$   
(linea orizzontale  $C_L$ ).

Qst fino a  $V_C = V$  di crociera e poi  $V_D$    

 $\left\{ \begin{array}{l} \text{retta cost se picchi aereo} \\ \text{curva inclinata} \end{array} \right.$



La norma  $m_i$  dice che raffica prendere a delle determinate velocità;



visto che diagramma poco credibile  $\rightarrow$  fattore di attenuaz.  
per aerei di linea  $\rightarrow f$ :

$$m = 1 + \underbrace{\left( \int \right)}_{<1} \frac{C_i U}{W/S} \left( \frac{1}{2} \rho v_i \right)$$

$$\frac{W}{S} \uparrow \quad m \downarrow$$

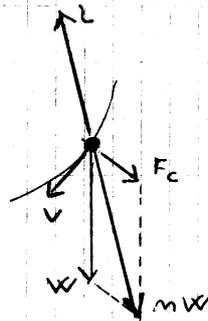
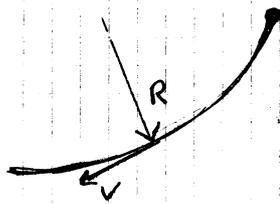
aerei piccoli  $\rightarrow$  ✖  $\Rightarrow$  !!

$$mW = \sqrt{1 + \frac{F_c^2}{W^2}} = \sqrt{1 + \frac{\left(\frac{W}{g} \frac{v^2}{R}\right)^2}{W^2}} = \sqrt{1 + \frac{W^2 v^4}{g^2 R^2 W^2}} = \sqrt{1 + \frac{v^4}{g^2 R^2}}$$

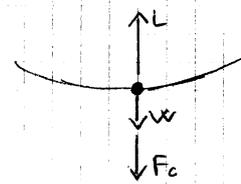
Più R ↓ più m ↑  
 Più v ↑ più m ↑

$$mW \cos \varphi = W \rightarrow m = \frac{1}{\cos \varphi} \quad 0 < \varphi < 90^\circ$$

**RICHIAMATA**



Posizione critica:



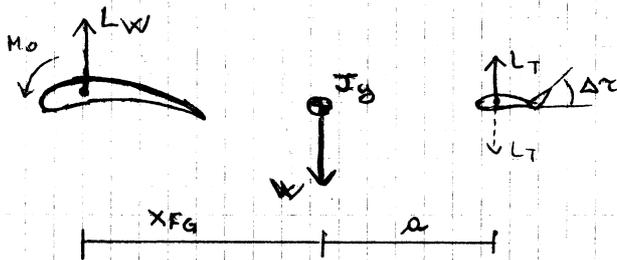
$$L = W + F_c$$

$$m = \frac{L}{W} = 1 + \frac{F_c}{W}$$

$$F_c = \frac{W}{g} \rho_c = \frac{W}{g} \omega^2 R = \frac{W}{g} \frac{v^2}{R}$$

vel. angolare di beccheggio

$$m = 1 + \frac{\frac{W}{g} \frac{v^2}{R}}{W} = 1 + \frac{v^2}{gR}$$



$L = L_w + L_T$   
 cambio  $L_T$  ( $\Delta L_T$ )  
 $L$ : cambio  $L$

$$L = L_w + (L_T + \Delta L_T) = (L_w + L_T) + \Delta L_T$$

$$\frac{L}{W} = m = 1 + \frac{\Delta L_T}{W} \rightarrow \text{genera } \rho_1$$

$q$  = vel ang di beccheggio

$\dot{q}$  = acc. " " "

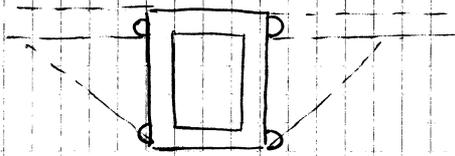
$J_y$  = momento d'inerzia

$$\dot{q} = \frac{M}{J_y} = \frac{\Delta L_T \rho}{J_y}$$

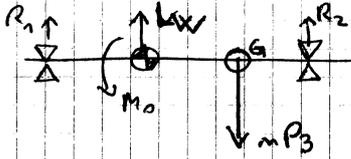
Serve  $J_y$  piccolo per avere risposta istantanea (maneggevole) (cines di linea →  $J_y$  alta)

genera  $\rho_2$

PARTE B

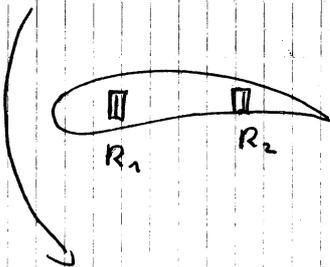


$dx$  e  $dx \rightarrow$  si spera che gli sforzi siano simmetrici  $\rightarrow$  telajo iperstatico

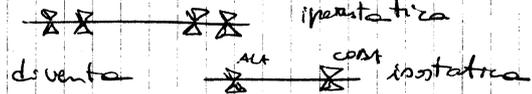


$P_3 =$  presso tranco 3

Questa non è una trave !! È una non-trave  $\parallel$  perché noi facciamo solo dei normali equilibri globali

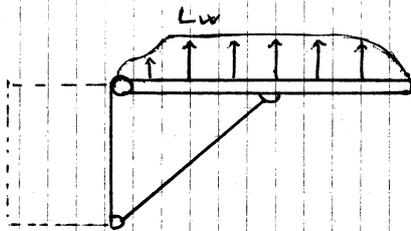


si suppone che anche davanti e dietro le reazioni siano uguali (sono ang vicine!!)

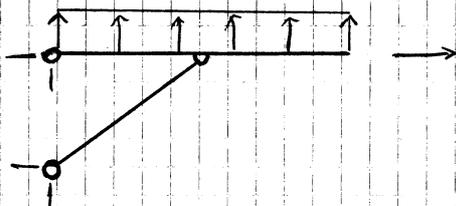


calcolo  $R_1$  ed  $R_2 \rightarrow$  tabella coi risultati, prendo la reazione più grande che c'è per essere conservativa

DIAGRAMMI AD OCCHIO



facciamo i giunti per un metro: 106 anni  $\rightarrow$  prendiamo una distribuzione uniforme che tal è conservativa



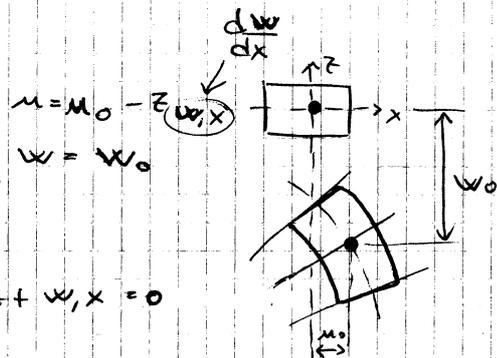
$$T = \int q$$

$$q = \frac{dT}{dx} = T, \epsilon$$

$$E_x = M_x$$

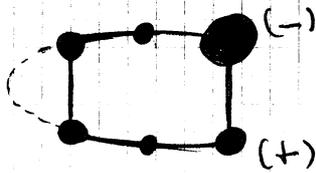
$$E_x \epsilon = M, \epsilon + w, x = 0$$

$$E_x, y = 0$$



- Ⓒ) nel minimo di prima  
L equilibra  $F_c \rightarrow m$  diminuisce ( $F_c$  mm e<sup>-</sup> molto alta)  
W e<sup>-</sup> equilibrata da spinta e da inerzia! (quadrato)
- Ⓓ) W equilibrato da  $F_c \rightarrow$  nessuna portanza  
ma nel diagramma m.V la portanza mm e<sup>-</sup> nulla!  
 $F_c = W + L \rightarrow F_c$  e<sup>-</sup> alta (m apparente  $\rightarrow$  alta, ma  
e<sup>-</sup> meglio così, almeno mm c'è gravità zero)

ANALISI STRUTTURALE



- area concentrata  $\rightarrow$  soletta longherone  
(pallino + grande  $\rightarrow$  area più grande)

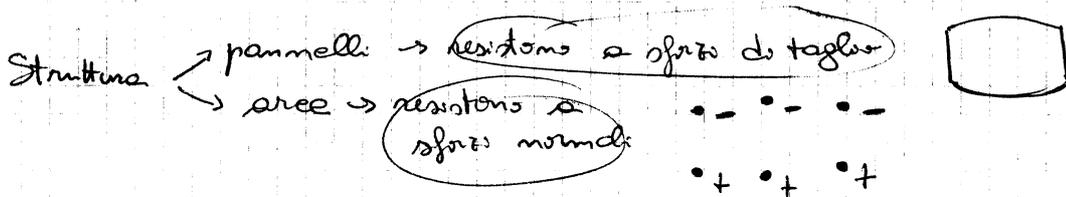


e<sup>-</sup> un estruso perché soletta piegata  
ha tensioni che nascono nello spigolo  
(in più lamiera troppo sottile per poter  
essere piegata)

longherone posteriore più robusto (vedi fig pag 11 nel 2)  
perché è sollecitato da superficie mobile

Di solito le solette sono più grandi di sopra che mm  
di sotto (collettori diverse  $\rightarrow$  compressione, trazione)

- correnti



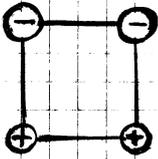
qot e vero se lamiera sottile  
ed aree concentrate esterne



teoria del semiguscio ideale

Basta una lamiera sottilissima per tenere insieme aree molto  
 grosse (se lamiera spessa  $I$  contribuisce al momento d'inerzia  
 → no singolarità ideale)

Bitrave quadrilatera

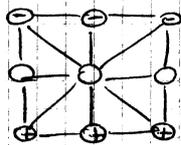


instabilità dell'equilibrio elastico → sopra  
 scelte più grandi per contrastare qst fenomeno

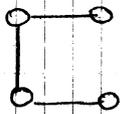
Un elemento cerca qd a cui è attaccato e così via  
 → la struttura risulta per qst:

Che sforzi ci sono sulle aree?

sezione piana → 3 eq. di eq.



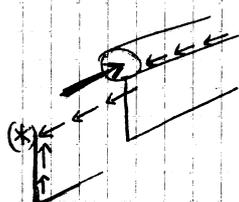
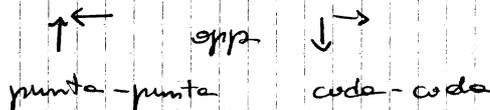
6 aree che resistono a trazione e  
 compressione → struttura 3 volte  
 iperstatica  $\cup$



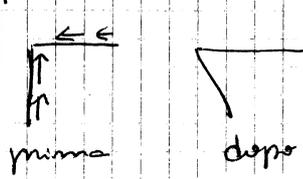
4 aree e 3 lamiere

↓  
 se calcolo prima taglio e  
 poi sforzi normali posso  
 risolvere qst struttura

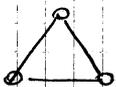
(\*) Principio di reciprocità di Cauchy:



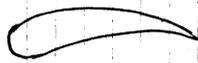
strutture  
 ridisegnabili



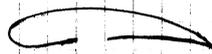
sezione più aperta → esce dal  
 mio piano → di Saint Venant mi va  
 bene, ma noi lo usiamo cmq.



3 tagli e poi calcolo gli sforzi normali  
 più qst c'è una sezione chiusa → mi esce  
 facilmente dal mio piano  $\cup$



resiste a

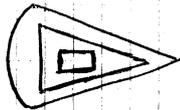


non resiste  
a torsione



resiste a torsione meno della  
prima sezione (area sottesa alla  
curva chiusa e minore) ma sempre  
meglio della seconda sezione !!!

Spaziopiano:



(formaggio Tigre)

carburante periferico  
ativa in mezzo

no finestroni → strutturalm. i finestroni  
sono una schifezza !!

(i buchi rovinano la torsione)

3/11/10

Pag 12 wlr

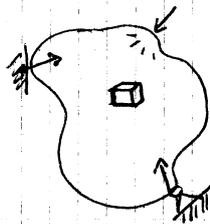
Solido elastico 3D, lo consideriamo composto da una  
miriade di aree discrete.

Spotteremo la cinematica della deformazione

es.



lo tiro uniformemente,  
ma lui non si deforma  
uniformem. (c'è un buco!)



Solido patatoide vincolato e  
solicitato; calcoliamo le reazioni  
vincolari →

Nei nostri bilanci energetici consideriamo solo forze ed  
energie di deformaz. elastica (gli altri tipi di en.  
li trascuriamo).

Nel corso nasce un sist. di forze che noi non vediamo  
nel corpo montato (stato di sollecitazione →  $N, M, T$  → tensioni)  
ma che vediamo nel corpo smontato perché se noi qst  
non sta in piedi

$$N = \int_A \sigma_{zz} dA$$

$$T_x = \int_A \sigma_{zx} dA$$

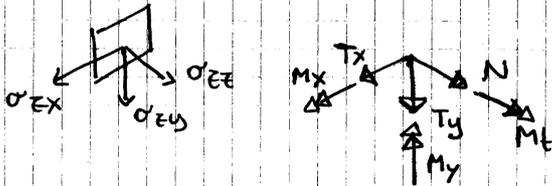
$$T_y = \int_A \sigma_{zy} dA$$

$$M_x = \int_A \sigma_{zz} y dA$$

$$M_y = \int_A \sigma_{zz} x dA$$

$$M_\oplus = M_\ominus = \int_A (\sigma_{zy} x - \sigma_{zx} y) dA$$

↑  
torcente



Per noi gli sforzi sono gli EQUILIBRANTI  
(non gli equivalenti)

↓  
servono a tenere  
in equilibrio  
il mio corpo

ogni corpo è composto da dischi metallici rigidi e  
placchette di silicone → si può piegare, ma le sezioni  
rimangono piane (dischi  
metallici)



Tracce di Eulero - Bernoulli

- non fa il taglio !!

(noi calcoliamo degli sforzi di taglio, che però  
recuperiamo dagli equilibri!)

per fortuna quasi tutti gli errori che facciamo  
sono quasi tutti recuperabili nelle applicaz. classiche

$$Ez = k^1 x + k^2 y \quad \text{eq. di un pannello (sezione piana)}$$

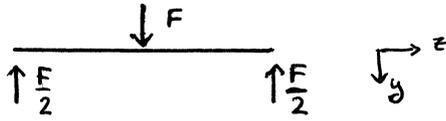
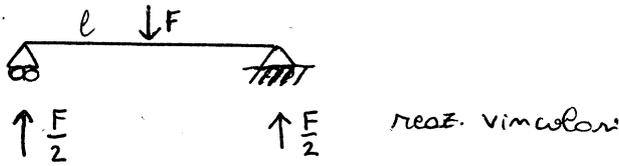
$$\sigma_z = E \epsilon_z = \underset{\substack{\uparrow \\ E k^1}}{k_1} x + \underset{\substack{\uparrow \\ E k^2}}{k_2} y$$

$$\begin{cases} M_x = \int_A y \sigma_z dA = \int_A y (k_1 x + k_2 y) dA = k_1 \int_A y x dA + k_2 \int_A y^2 dA \\ M_y = k_1 \int_A x y dA + k_2 \int_A x^2 dA \end{cases}$$

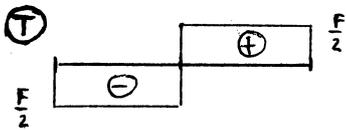
momento  
centro piana

→ ricavare  $k_1$  e  $k_2$

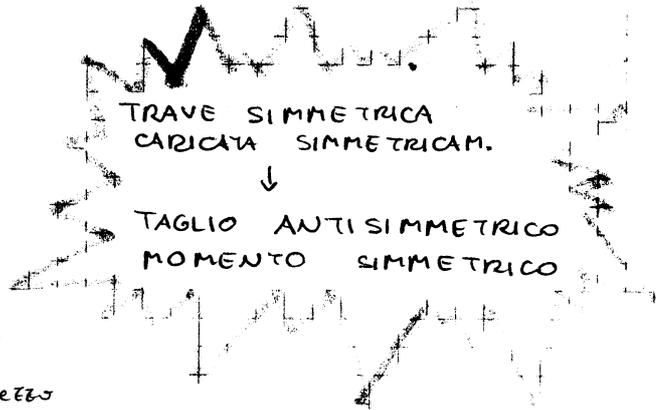
ESERCIZI



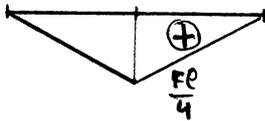
convenzione. (↺ ↻ ↗ ↘)



→ calcolo la sezione nel mezzo  
(lì c'è la sollecitat. max. pora ad F)



$dM = T dz \rightarrow T = \frac{dM}{dz}$  → il diagramma di taglio e la pendenza del diagramma di momento

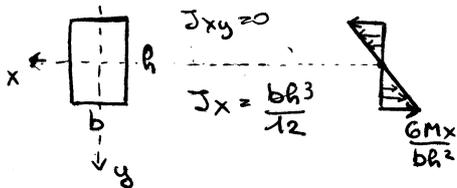


momento positivo vuol dire che

→ momento flettente max nel mezzo → calcolo la sezione nel mezzo

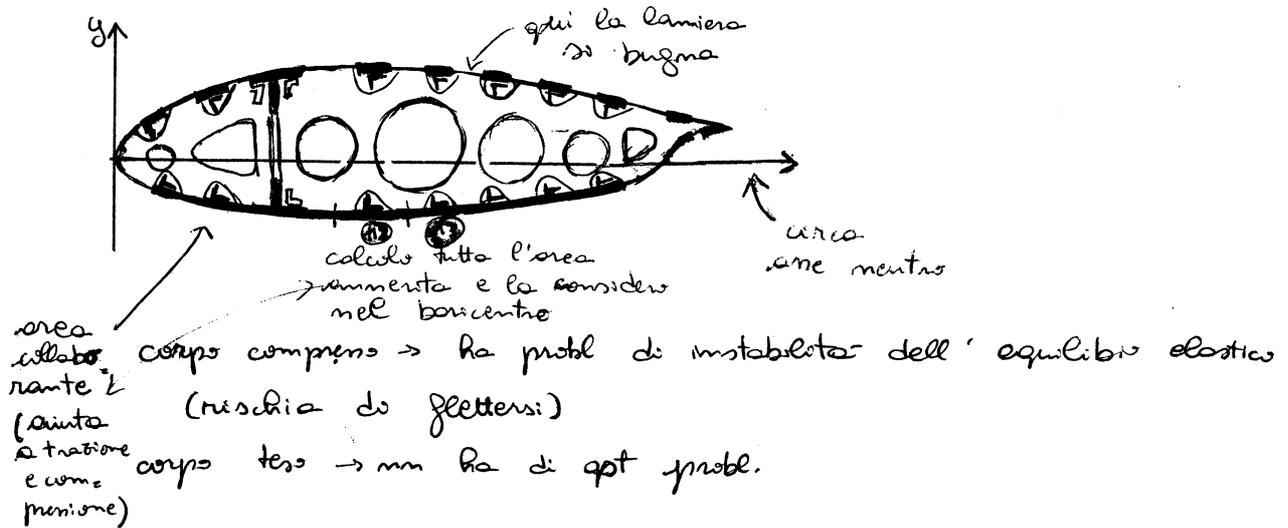
Bisogna che la  $\sigma$  rimanga in campo elastico

$$\sigma_z = \frac{M_y J_x - M_x J_{xy}}{J_x J_y - J_{xy}^2} x + \frac{M_x J_y - M_y J_{xy}}{J_x J_y - J_{xy}^2} y = \frac{M_x}{J_x} y = \frac{12 M_x}{b h^3} y$$



sotto →  $y = \frac{h}{2} \rightarrow \sigma_z = \frac{12 M_x}{b h^3} \cdot \frac{h}{2} = 6 \frac{M_x}{b h^2}$

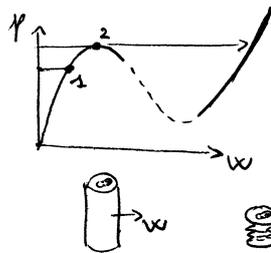
1) correnti si occupano di resistenza alla flessione  
 dimensioni dei correnti ridicole rispetto alla sezione  
 → li consideriamo puntiformi



Quando applichiamo una forza a che cosa noi non ci accorgiamo del transitorio se forza non dinamica

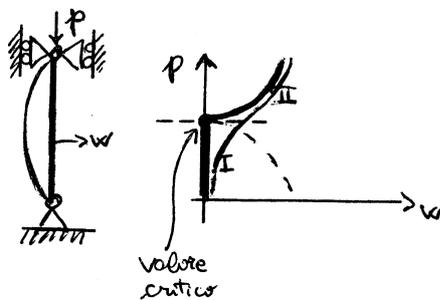
Statica → 2 deformazioni:

- SNAP BUCKLING → rottura esplosiva (ultima) → in proba curva
- BIFORCAZIONE → in pannelli piatti o compressi



$P$  = carico  
 $w$  = deformazione

1. tutto ok
2. vado in snap buckling



path primario I  
 (con dovrebbe essere)  
 path secondario II →  
 sta reale  
 post buckling → instabile

$$[M] = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \det(M) = ad - cb$$

$$\lambda = \text{autovalore} \quad [M] = \begin{bmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \det(M) = (a - \lambda)(d - \lambda) - cb = 0$$

ottergo 2 valori di  $\lambda$

$$[M][x] = [F] \quad \text{con } \det(M) = 0 \text{ non lo risolvo!}$$

Calcoliamo le reaz. vincolari:

$$\uparrow) v_{1v} + F + v_2 - k = 0$$

$$\rightarrow) v_{1o} + \cancel{F} + H_{2o} - F = 0$$

$$\curvearrowright) v_{1v} L + v_{1o} L_1 + C + F b_{2v} + F H_{2o} - v_2 b_{4o} + H_2 H_{3o} + F(L+L_1) + k b_{3o} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ L & -b_{4o} \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} v_{1v} \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k-F \\ N \end{Bmatrix}$$

$$N = F(L+L_1) - k b_{3o} - C - F b_{2v} - F H_{2o}$$

MATRICE DI RIGIDEZZA DEL SISTEMA

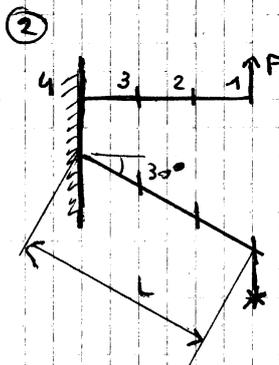
MATRICE DEI GRADI DI LIBERTÀ DEL SIST.

ETTORE DEI TERMINI MOTI DEL SISTEMA

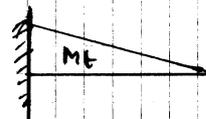
3 equaz., 4 incognite  $\rightarrow$  c'è un'equaz. di troppo! togli  
l'equilibrio orizzontale

$$\det [ ] = 0 \rightarrow \text{sistema labile}$$

$$-b_{4o} - L = 0 \rightarrow \text{sist. labile} \rightarrow L = -b_{4o}$$



il braccio continua a crescere linearmente  
 $\rightarrow$  il momento torcente cresce linearmente.



Equilibrio di 2 equazioni:

$$R_A L + c = -F \frac{L}{2} + R_B L + c \quad \text{e ora? un focus? da qst' eqn.}$$

un ricavo mt.

Ora supponiamo di voler azzerare  $R_A$  ed  $R_B$

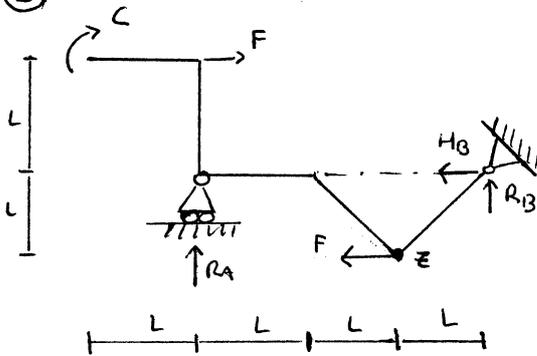
$$1^a \text{ eqn.} \rightarrow 0 \cdot L + c = 0 \rightarrow c = 0$$

$$2^a \text{ eqn.} \rightarrow -F \frac{L}{2} + 0 \cdot L + c = 0 \rightarrow F \frac{L}{2} = c$$

$$\begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -c \\ -F \frac{L}{2} - c \end{Bmatrix} \quad \downarrow$$

per esistere  $\rightarrow F = 0 \Rightarrow$  sistema scarico  $\rightarrow$  no reaz. vincolari

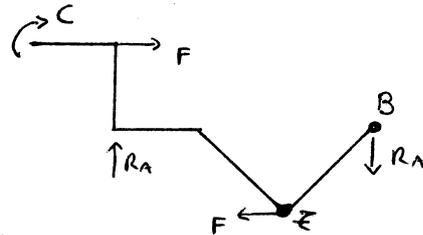
③



Voglio annullare il momento nel pt. E.

$$\rightarrow) F - F + H_B = 0 \rightarrow H_B = 0$$

$$\uparrow) R_A + R_B = 0 \rightarrow R_A = -R_B$$



$$\Sigma \downarrow C + F 2L + R_A 2L + R_A L = 0$$

$$C + F 2L + R_A 3L = 0 \rightarrow R_A = \dots$$

$$\begin{cases} C + F 2L + R_A 2L = 0 \\ R_A L + C = 0 \rightarrow R_A = -\frac{C}{L} \end{cases}$$

$$C + F 2L + \frac{C}{L} 2L = 0$$

Proviamo a rifare i calcoli:

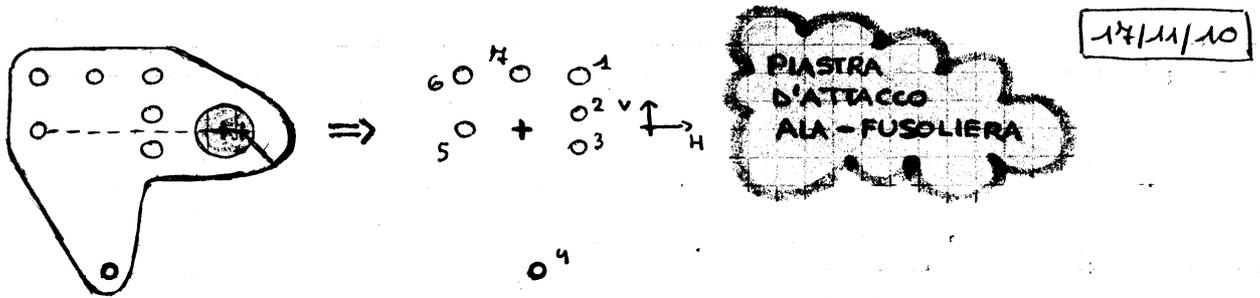
$$B) C + FL + R_A 3L + FL = 0 \quad \text{eq. compatibile con } \Sigma \downarrow$$

$\rightarrow$  è possibile che esista un valore di C tale per cui si annulla il momento in E.

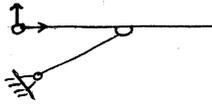
$$C = F 2L$$

$$R_A = \frac{-F 2L}{2L} = -\frac{4FL}{2L} = -2F$$

$$R_A = \frac{-C - 2FL}{3L}$$



Le forze sono applicate in un solo punto, detto OCCHIO.  
 2 corichi  $\begin{matrix} \uparrow \\ \downarrow \end{matrix}$   $\begin{matrix} \rightarrow \\ \leftarrow \end{matrix}$  moti (alla rotaz. la piastra non resiste!)



Buttiamo via la piastra e guardiamo i buchi per i bulloni, a quali hanno un braccio rispetto a dove sono applicati i corichi  $\rightarrow$  ci sarà un momento.

Bulloni più lontani dall'asse di rotaz. sono i più sollecitati.

Bullone sottoposto a taglio si deforma  $\rightarrow$  si deforma anche la piastra!

in pt della piastra cambiano la loro posizione relativa, si avvicinano (di pochissimo, tipo un miliardesimo di mm)  $\Rightarrow$  deformaz. elastica  
 Ma però mm me ne ricordo!

Creiamo un modello



gli assi dei 2 bulloni non possono allontanarsi  
 però si inclinano, e mica tutti della stessa quantità!

facciamo finta che si pieghino tutti della stessa quantità  $\rightarrow$  bisogna che tutti gli strati della piastra scivolino l'uno sull'altro:



ogni strato è incredibilmente rigido nel suo piano  
 ma i vari fogli scivolano  $\rightarrow$  delaminazione

facciamo finta che i vari strati scivolino tutti della stessa quantità -

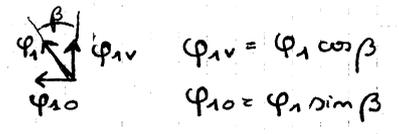
Centroide  $\rightarrow$  sarebbe il baricentro se ci fossero solo aree,  
 dovremmo però tenere conto del modulo elastico ( $\hat{A} = A_i E_i$ ).

Avendo una piastra deg rispetto ad un sistema di riferim.  
 qualsiasi (per es. l'occhio), ogni bullone ha coordinate  $(x_i, y_i)$   
 ed un'area  $A_i \rightarrow$  raggio  $r_i$

$$\frac{\sum y_i A_i}{\sum A_i} = Y_G \quad \frac{\sum x_i A_i}{\sum A_i} = X_G \quad \text{coordinate del centroide}$$



$\varphi_1 = \text{spostam. del bullone}$   
 $y_1 = x_1 \tan \beta \rightarrow \beta = \arctan \left( \frac{y_1}{x_1} \right)$



$\varphi_{1v} = \varphi_1 \cos \beta$   
 $\varphi_{1o} = \varphi_1 \sin \beta$

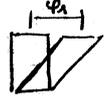
Tutta la piastra ruota di un angolo  $\beta$ , ma i raggi sono diversi!

$r_1 \beta = \varphi_1$  (arco)  $\rightarrow$  le  $\varphi$  sono diverse!

spostam. proporzionale ad  $r$

$\rightarrow$  bullone + lontano  $r$ : sposta di più  $\rightarrow$  il bullone è più sollecitato

$\frac{\varphi_1}{h} = \gamma_1$



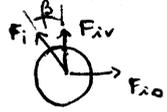
$\rightarrow \tau_1 = G \gamma_1$  N.B. le  $G$  sono qll del bullone

Il probl è che un conosco  $\beta \rightarrow$  ho fatto solo finta di calcolare la  $r$



$\tau_i A_i = F_i$

$\sum F_i r_i = M$



$\rightarrow$  scompongo  $F_i$  in  $F_{io}$  e  $F_{iv}$  e poi applico Pitagora

$F_{io}, F_{iv}$  uguali per tutti i bulloni

$F_{io}, F_{iv}$  variabili

$\tau A_i = F r_i A_i \cdot (1,4) \cdot (1,5) \cdot (1,15)$

concentraz. di tensione in un bullone

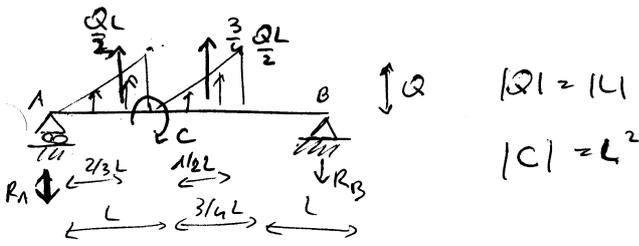
coefficiente di sicurezza

con raddoppio la forza

Pitting factor

$\tau = \frac{F r_i 1,4 \cdot 1,5 \cdot 1,15}{A_i}$

dev' essere  $\leq$  limite di rottura togliendo l'1,5 devo essere in campo elastico.



IN REALTA'



1)  $-R_A - R_B + \frac{QL}{2} + \frac{3QL}{4} = 0$

2)  $C \rightarrow \frac{QL}{2} \cdot \frac{2}{3}L + \frac{3}{4} \frac{QL}{2} \cdot \frac{3}{2}L + R_B \cdot \frac{1}{4}L = 0$

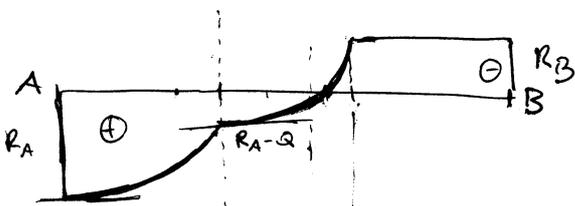
$$R_B = \frac{4}{11L} \left( \frac{QL^2}{3} + \frac{9QL^2}{16} - C \right) = \frac{4}{11} \left( \frac{16+27}{48} QL - L \right) =$$

$$= \frac{4}{11} \left( \frac{43}{48} L^2 - L \right) > 0 \quad R_B = 0,32L^2 \rightarrow 0,36L$$

$$R_A = \frac{QL}{2} + \frac{3}{4} \frac{QL}{2} - R_B = \frac{7QL}{8} - R_B > 0$$

$$R_A = 0,55L^2 + 0,36L$$

(T)



$R_A > Q$  ?

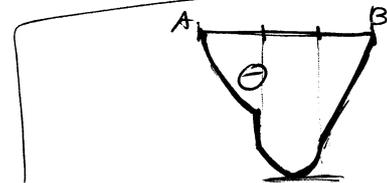
$0,55L^2 + 0,36L > L$  ?

$R_A > \frac{QL}{2}$  ?

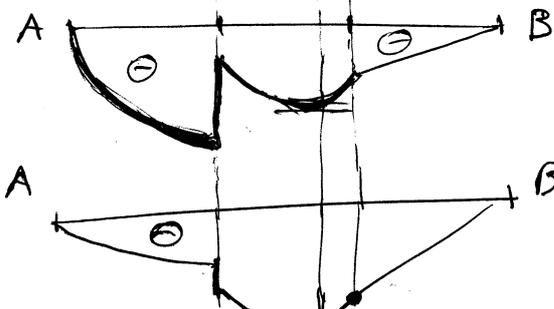
$0,55L^2 + 0,36L > 0,5L^2$  SI

$R_B > \frac{3}{4} \frac{QL}{2}$  ?

$0,32L^2 - 0,36L > 0,375L^2$  ? NO



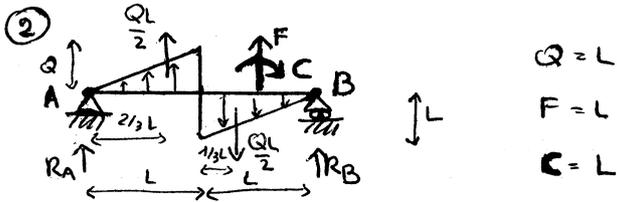
(M)



$$\frac{QL}{2} \cdot \frac{L}{3} + C - R_A L + M = 0$$

$$\frac{L^2}{6} + L^2 - R_A L > 0$$

M > 0



$$\uparrow) R_A + \frac{QL}{2} - \frac{QL}{2} + R_B + F = 0$$

$$\downarrow A) -\frac{QL}{2} \frac{2}{3}L + \frac{QL}{2} \frac{1}{3}L - \frac{3}{2}LF + C - R_B 2L = 0$$

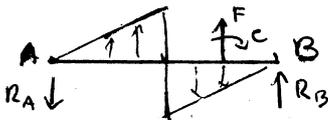
$$\frac{QL^2}{3} - \frac{3}{2}LF + C - R_B 2L = 0$$

$$R_B = \frac{1}{2L} \left( \frac{QL^2}{3} - \frac{3}{2}LF + C \right) = \frac{1}{2L} \left( \frac{L^3}{3} - \frac{3}{2}L^2 + L \right) =$$

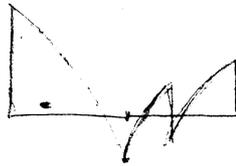
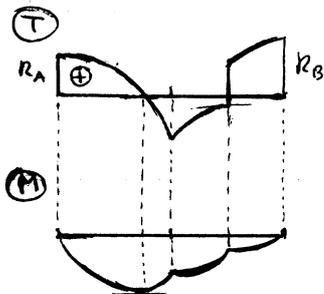
$$= \frac{L^2}{6} - \frac{3}{4}L + \frac{1}{2} = 0,167L^2 - 0,75L + 0,5 > 0$$

$$R_A = -R_B - F < 0$$

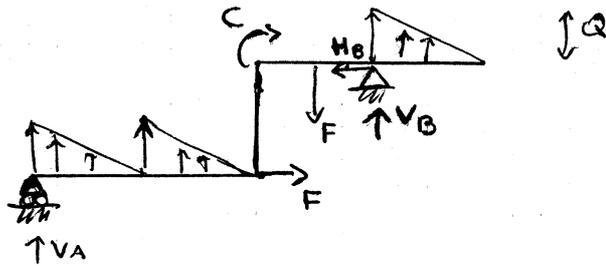
Ridisegniamo il tutto



Diagrammi



SBAGLIATA



$$|Q| = |F| = 10L$$

C tale che si annulli

il momento in mezzecia

$$\rightarrow) H_B = F$$

$$\uparrow) V_A + \frac{QL}{2} + \frac{QL}{2} - F + V_B + \frac{QL}{2} = 0$$

$$A) \frac{QL}{2} \frac{L}{3} + \frac{QL}{2} \frac{4L}{3} - F \frac{5L}{2} + V_B 3L - C + \frac{QL}{2} \frac{10L}{3} + H_B L = 0$$

$$\frac{5+10}{6} QL^2 - F \frac{5L}{2} + V_B 3L - C = 0$$

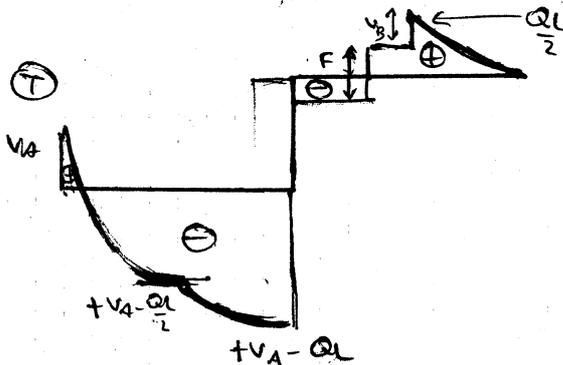
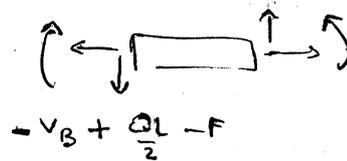
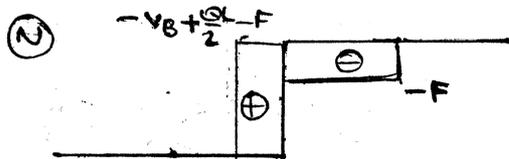
$$V_B = \left( -\frac{5}{2} QL^2 + \frac{5}{2} FL + C \right) \frac{1}{3L} = -\frac{5}{6} QL + \frac{5}{6} F + \frac{C}{3L}$$

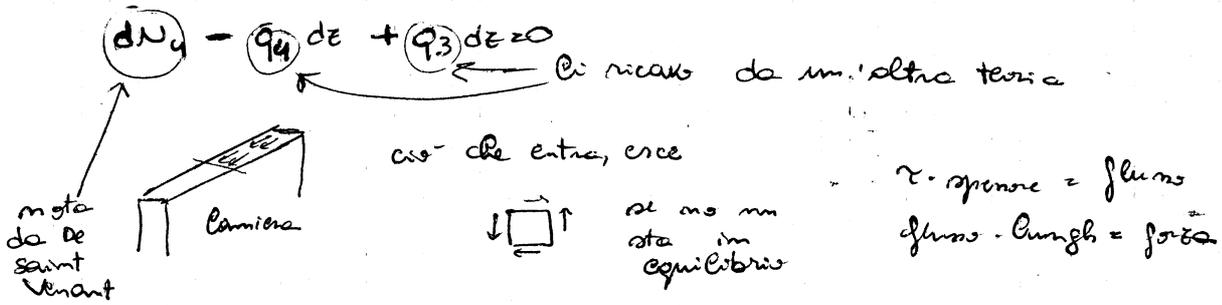
$$V_A = -\frac{3}{2} QL + F - V_B = \frac{1}{3L} \left( \frac{5}{2} QL^2 - \frac{5}{2} FL - C \right) + F - \frac{3}{2} QL =$$

$$= \frac{5}{6} QL - \frac{5}{6} F - \frac{C}{3L} + F - \frac{3}{2} QL = -\frac{2}{3} QL + \frac{F}{6} - \frac{C}{3L}$$

$$V_A = -\frac{20}{3} L^2 + \frac{5}{3} L - \frac{C}{3L}$$

$$V_B = -\frac{25}{3} L^2 + \frac{5}{6} L + \frac{C}{3L}$$

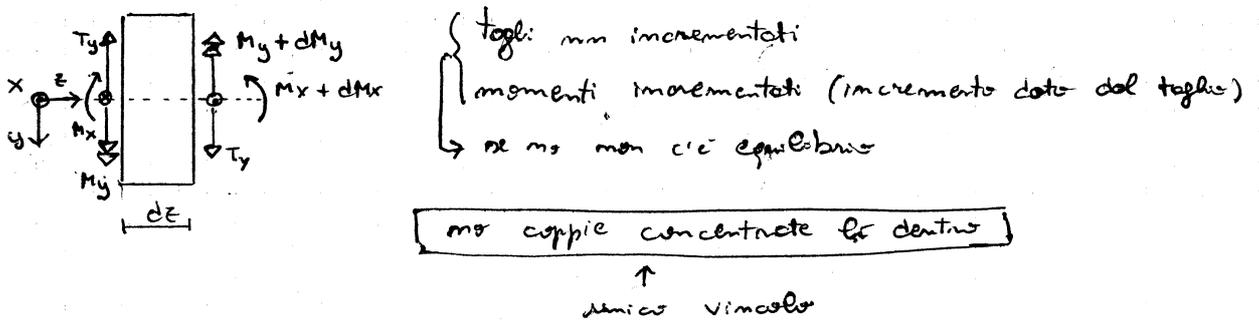




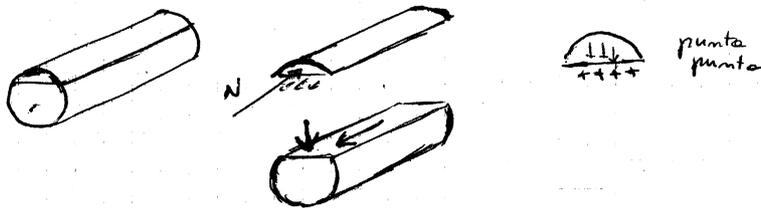
Grado di iperstaticità = n° celle - 1

- se 1 sola sezione aperta → solo equilibrio <sup>di spazio unico</sup> dei correnti
- se 1 sezione chiusa n-1 equilibri di correnti + 1 equl alla rotaz.  
↑  
n° correnti
- se più di 1 sezione chiusa, tolgo le lamiere in mezzo e calcolo 1 sezione chiusa poi uso la 2ª formula di Bredt (PLV sotto mentite spoglie)

## TAGLIO (2° libro)



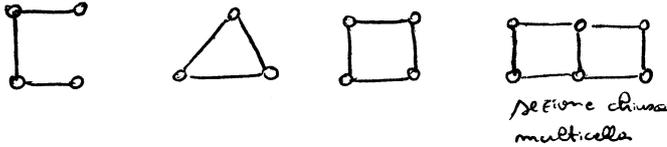
sezione piana → 0 = 0



forze verticali agenti sulla sezione → la risultante la chiamo TAGLIO.

Il taglio deriva dalla flessione, la quale però è stata calcolata in assenza di taglio!

1/12/10

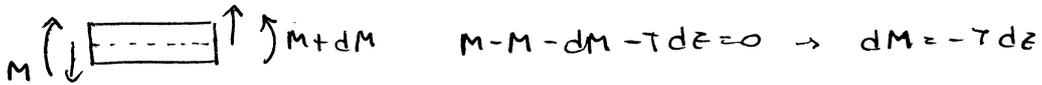


ipotesi:

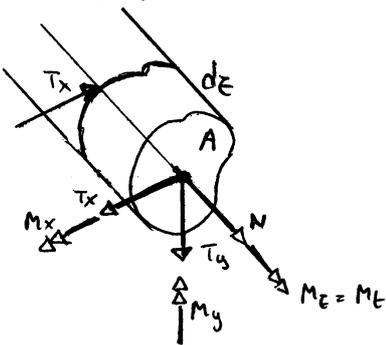
sezioni avulse dai pannelli e applichiamo la teoria della trave di De Saint Venant

$$\text{Flessione: } \sigma_z = \frac{M_y J_x - M_x J_{xy}}{J_x J_y - J_{xy}^2} x + \frac{M_x J_y - M_y J_{xy}}{J_x J_y - J_{xy}^2} y$$

$$d\sigma_z = \frac{dM_y J_x - dM_x J_{xy}}{J_x J_y - J_{xy}^2} x + \dots y$$



i tagli producono variaz. di momento!



$$T_x dE = dM_y \quad (\text{segno escluso})$$

$$T_y dE = dM_x$$

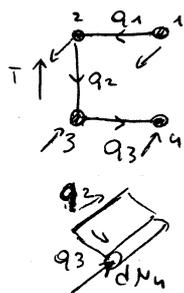
$$\frac{d\sigma_z}{dE} A = dN$$

dici se N aumenta o diminuisce, ma se è positivo o negativo!

Dai ogni sezione avremo al max 3 equaz.

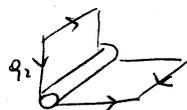
Nei probl reali però abbiamo delle iperstatiche, ma delle isostatiche

Dai dN per un flusso per la teoria di De Saint Venant → poi possiamo risolvere i nostri probl.



da T ricaviamo dN4

$$dN_4 + q_3 dz = 0 \rightarrow q_3 = -\frac{dN_4}{dz}$$



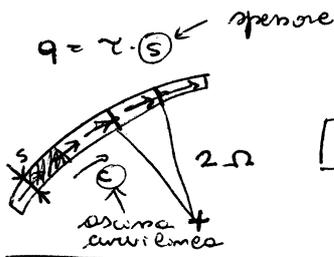
$$dN_3 + q_2 dz - q_3 dz = 0$$

sezione aperta  
→ me la cavo

Sezione chiusa →  $\sim$  ha sempre 2 flussi in ogni corrente  
→ aggiunge un equilibrio di momento

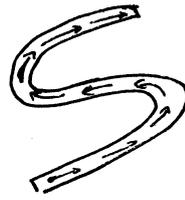
(41)

15/12/10



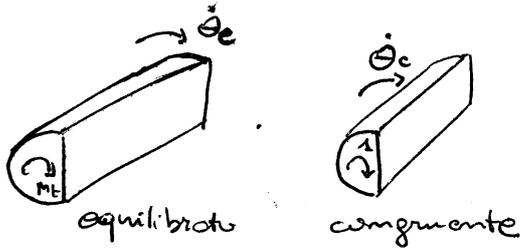
$$M_t = 2q \cdot \text{area}$$

↑  
area

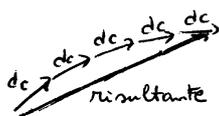


$r \cdot s \cdot dc = \text{forza}$   
 " "  
 $q \cdot dc \rightarrow \text{area}$   
 in ogni  $dc$  esiste  
 una foretina

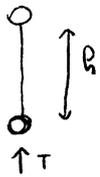
$$\dot{\theta} = \frac{1}{2G \cdot \Omega} \sum q_i \cdot \frac{l_i}{s_i}$$



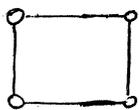
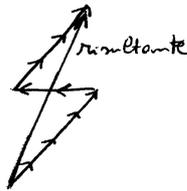
1<sup>a</sup> formula di Bredt  $\rightarrow$  la applichiamo ad una sezione chiusa per calcolare il momento torcente



tant forze una di seguito all'altra  
 $\rightarrow$  risultante perché c'è una forza di taglio nel pannello (sforzi normali nei correnti)

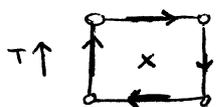
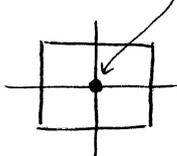


$$q \cdot h = T$$



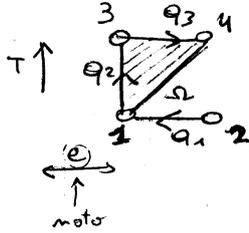
2 pannelli verticali  
 2 pannelli orizzontali

Centro di taglio



risultante orizzontale = 0  $\rightarrow$  non c'è nessuna forza orizzontale  
 ci sono 2 flussi uguali ed opposti nei pannelli orizz.  
 risultante verticale = T  $\rightarrow$  2 flussi diversi nei pannelli verticali

- ① non sopporta la torsione → dev' essere sollecitata nel centro di taglio, se no niente → lo devo calcolare; ma 1<sup>a</sup> formula di Bredt perché non c'è torsione → lo uso ma solo per trovare il centro di taglio



Procedimento

- calcolo i 3 flussi nei pannelli
- uso la 1<sup>a</sup> formula di Bredt:

$q_3 2\Omega \rightarrow$  momento di  $q_3$  rispetto ad 1

$|q_3 2\Omega| = |T_e| =$  momento esterno

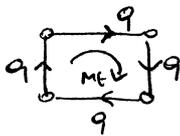
$q_3 2\Omega + T_e = 0$   
 ↑  
 equilibrante

equilibrio che vale solo se  $T_e$  è applicata nel centro di taglio (ho i flussi e vedo se è e' qd giusta

$q_3 = -\frac{T_e}{2\Omega}$  [flusso equilibrante  $q_3 = \frac{T_e}{2\Omega} \rightarrow$  gira come la T]

⚠️ Esercizi → flussi equilibranti

②

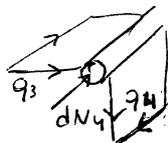


$q = \frac{M_e}{2\Omega}$

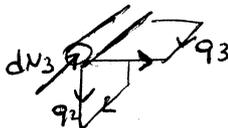
↑  
1<sup>a</sup> formula di Bredt

- c'è un solo flusso q
- c'è un momento torcente
- i correnti in sezioni a torsione pura (sezioni in una teoria di ordine superiore)

(il centro di taglio non serve)

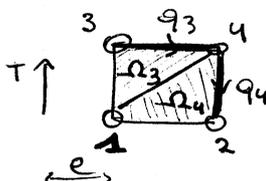


$q_3, q_4$  equilibranti  
 $q_3 dE - q_4 dE + dN_4 = 0$



$dN_3 = dN_4$   
 $dN_3 - q_3 dE - q_2 dE = 0$

posso scrivere al max 3 eq. lineari. indipendenti → aggiungo un'equat. di equilibrio di momento attorno a un polo qualsiasi:



solo 2 pannelli mi convergono nel polo 1.

$\rightarrow q_3 2\Omega_3 + q_4 2\Omega_4 + T_e = 0$

$$d_i^{ab} = \int q_e \delta_c d_c = \int \frac{M_e}{2\Omega} \frac{1}{2G\Omega S} d_c$$

↑  
ascissa curvilinea

$$d_e^{ab} = 1 \cdot \dot{\theta}_c = \frac{q}{2G\Omega} \oint \frac{d_c}{S} \rightarrow \dot{\theta} = \frac{1}{2G\Omega} \sum q_i \frac{l_i}{S_i}$$

↑  
rotazione vera

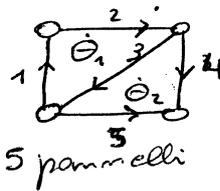
$\dot{\theta} = \frac{1}{2G\Omega} \sum q_i \frac{l_i}{S_i}$

2<sup>a</sup> formula di Bredt

Impongo  $\dot{\theta} = 0 \rightarrow$  trave e

(i flussi  $q$  sono stati calcolati con T.e)

③ Sezione a doppia cella



5 pannelli

- $dN_1, dN_2, dN_3, dN_4$  li ho calcolati
- focus gli equilibri sui ~~pannelli~~ <sup>correnti</sup>  $\rightarrow$  3 equaz.
- focus un' equil. alla rotaz. rispetto ad un polo qualsiasi  $\rightarrow$  1 equaz.
- PLV  $\rightarrow$  1 equaz.

congruente  $\rightarrow$  le 2 celle ruotano uguali  $\rightarrow \dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2$

5 equaz. tot

$$\frac{1}{2G\Omega_1} \left[ q_1 \frac{l_1}{S_1} + q_2 \frac{l_2}{S_2} + q_3 \frac{l_3}{S_3} \right] = \frac{1}{2G\Omega_2} \left[ -q_3 \frac{l_3}{S_3} + q_4 \frac{l_4}{S_4} - q_5 \frac{l_5}{S_5} \right]$$

+ senso orario  
- senso antiorario

Ora T.e con e incognita

Centro di taglio  $\rightarrow \dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = 0$

$\rightarrow$  posso applicare il motore nella verticale del centro di taglio ed evitare di torcere l'ala.

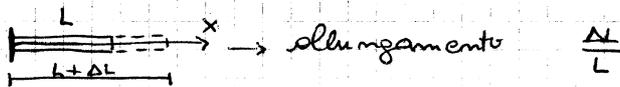
d' en. di deform. elastica deve soddisfare il 1° principio della termodin., e lo fa!

molla ideale → solo en. di deformaz. elastica → isentropica

molla reale → ha anche altri tipi di energia (es. dissipaz. → calore)

Non è pensabile risolvere il problema agli elementi finiti con l' appross. delle forze → si usa l' appross. agli spostamenti, che è automatizzabile!

Appross. agli spostamenti



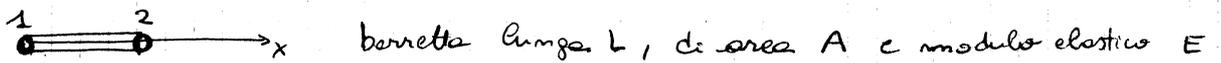
se tiro la barretta con una forza doppia, la barretta si allunga del doppio → noi vediamo il problema con una cosa LINEARE

In un campo lineare  $\frac{\Delta L}{L}$  è praticam. una derivata

$\Delta L = u$  spostam. elastico (estremi liberi)

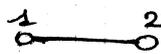
Si riesce a descrivere matematicam. lo stato di deformazione:

$$\frac{\Delta L}{L} = \epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = u, x$$

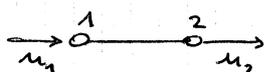


Se l'estremo della barretta si sposta di  $u$ , a metà  $\frac{u}{2}$  ed  $\frac{1}{3}$  si sposta di  $\frac{u}{3}$  (lineare)

$$\rightarrow u = N_1 u_1 + N_2 u_2$$

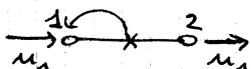
1, 2 modi → quindi l'asta diventa 

lo spostam. di un pt qualsiasi dipende da come si spostano 1 e 2. Se  $u_1 = u_2$  → no deformaz. elastica.



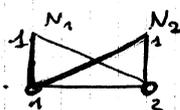
$u_1 - u_2 = 0$  → no deform. elastica

$u_1 - u_2 \neq 0$  → deform. el.



no deformaz. →  $u = u_1 \Rightarrow N_1 = 1, N_2 = 0$  (1)

$N_1 = 0, N_2 = 1$  (2)



$N_1, N_2$  funzioni di forma

/ \ grafico delle 2 funz.

Teoria dell'elasticità → c'è un legame tra tensione e deformazione

Hooke  $\{\sigma\} = [D] \{\epsilon\}$

N.B.  $[D]$  simmetrica ed invertibile, se no non soddisficherebbe la termodin.

$$\sigma_{xx} = E \epsilon_{xx}$$

↑  
modulo elastico  
(somiglia ad una rigidità)

Ora scrivo l'equilibrio nella forma debole (weak form)

Le funzioni sono scritte in termini di integrali e noi li useremo per scrivere l'equilibrio - (il princ. dei lavori virtuali è un funzionale)

Guardo al lavoro virtuale interno

- a) sistema delle tensioni reali
- b) " " deformazioni "

$$d^i = \int_V \{\sigma\}^T \{\delta\epsilon\} dV = A \int_0^L \{\sigma\}^T \{\delta\epsilon\} dx =$$

(V)  
 ↑  
 volume dell'asta  
 $V = Ax$   
 $dV = A dx$

$$= A \int_0^L ([D][B] \{q_e\})^T \{\delta\epsilon\} dx$$

La trasposta di un prodotto di matrici è uguale al prodotto delle trasposte in ordine inverso

$$\rightarrow ([D][B] \{q_e\})^T = \{q_e\}^T [B]^T [D]$$

↑ simmetrica

$$d^i = A \int_0^L \{q_e\}^T [B]^T [D] [B] \{q_e\} dx =$$

$$= A \{q_e\}^T \left( \int_0^L [B]^T [D] [B] dx \right) \{q_e\}$$

$$[B] = [N_{1x} \ N_{2x}] = \left[ -\frac{1}{L} \ \frac{1}{L} \right] = \frac{1}{L} [-1 \ 1]$$

$$[B]^T = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$d^i = \frac{AE}{L^2} \int_0^L \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} dx = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

0            2x1            1x2

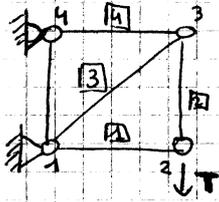
matrice di rigidità  
dell'elemento (asta) (51)

11/1/11

2 accertamento:

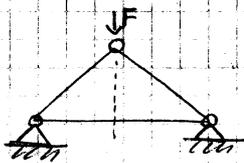
merc. 26/1

mart. 2/2



1 punti 1, 4 sono vincolati → non si muovono  
 2 scende e va un po' a dx e un po' a sx

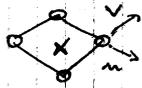
Per qnt riguarda 3:



struttura simmetrica → il pt sollecitato scende dritto e gli altri 2 non si muovono

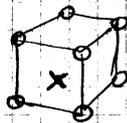
Ante  $\circ \rightarrow \circ$  resistono solo a sforzi assiali → non ci sarà mai una spostam. trasversale da considerare

Membrana



si muove solo nel suo piano (ci resiste) ma non resiste a flessione!

Elemento solido



se è formulato agli spostam., dato un pt x nel dominio lo spostam del pt x sarà  $u = \sum_1^m u_i N_i \rightarrow$  sovrapp. lineare

$$N = N(\xi)$$

$\xi = \frac{x}{l}$  → se conosco  $\xi$  ricavo la posiz. di un qualsiasi pt x e so da qnt si sposta

2 modi e grandezze modali sono solo degli spostam. (non derivate)

→ le funz. N sono lineari per forza!

qnd x coincide con 1 →  $u_x = u_1$

qnd x coincide con 2 →  $u_x = u_2$



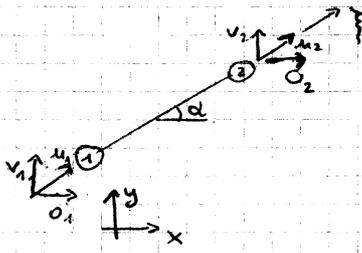
← le funz. di forma sono rette di qnt tipo

$$N_1 = 1 - \xi$$

$$N_2 = \xi$$

Se ① e ② si avvicinano → porta chiusa, se so da qnt si sono avvicinati, so da qnt si è accucciata → so qnt vale lo sforzo!  
 → Un base a dove sono andati a finire i modi so come

Sistema di riferimento globale  $\rightarrow$  2 assi  $\begin{matrix} y_1 \\ \uparrow \\ x \end{matrix}$



$m_1$  e  $m_2$  vanno scomposti in 3 componenti

la matrice di rigidità è una  $4 \times 4$  ora

$$\left. \begin{matrix} O_1 = m_1 \cos \alpha \\ V_1 = m_1 \sin \alpha \end{matrix} \right\} \text{idem per tutti gli altri vettori}$$

$$\left[ \begin{matrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{matrix} \right]_{4 \times 4} \begin{Bmatrix} O_1 \\ V_1 \\ O_2 \\ V_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} OF_1 \\ VF_1 \\ OF_2 \\ VF_2 \end{Bmatrix}$$

devo costruire qst matrice:

$$\begin{Bmatrix} O_1 \\ V_1 \\ O_2 \\ V_2 \end{Bmatrix}_{4 \times 1} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 \\ \sin \alpha & 0 \\ 0 & \cos \alpha \\ 0 & \sin \alpha \end{bmatrix}_{4 \times 2} \begin{Bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{Bmatrix}_{2 \times 1}$$

↑  
matrice di trasformazione T  
(mm quadrata)

$$m_1 = \sqrt{V_1^2 + O_1^2} \rightarrow \text{qst roba è invertibile}$$

Ma si può invertire una matrice che non è quadrata?

SI se la si riscrive in qst modo:

$$\begin{Bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} O_1 \\ V_1 \\ O_2 \\ V_2 \end{Bmatrix}$$

trasformazione ortogonale  $\rightarrow$  inverso coincide con la trasposta ( $T^{-1} = T^T$ )

$$\begin{matrix} 1 \times 1 & 1 \times 2 & 2 \times 1 & 1 \times 2 & 2 \times 2 & 4 \times 1 \\ \{E\} & = [B] & \{m_1, m_2\} & = [B] [T] & \begin{Bmatrix} O_1 \\ V_1 \\ O_2 \\ V_2 \end{Bmatrix} \end{matrix}$$

↑  
resta qll che è

↑  
inverte  $T^T$

← vettore dei gradi di libertà nel piano di riferimento globale

$$O = E \varepsilon = E [B] [T] \begin{Bmatrix} O_1 \\ V_1 \\ O_2 \\ V_2 \end{Bmatrix}$$

$$O^T = E \begin{Bmatrix} O_1 & V_1 & O_2 & V_2 \end{Bmatrix}_{1 \times 4} [T]^T_{4 \times 2} [B]^T_{2 \times 1}$$

cancello le righe e le colonne dei nodi vincolati

→ trovo una matrice  $2 \times 2$   $\begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$

$O_3 = \phi$

$V_3 = F$

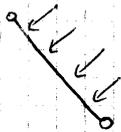
Quindi resta da risolvere:

$$\begin{bmatrix} K_{33}^2 + K_{33}^3 & K_{34}^2 + K_{34}^3 \\ K_{43}^2 + K_{43}^3 & K_{44}^2 + K_{44}^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} O_3 \\ V_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi \\ F \end{Bmatrix}$$

↑  
matrice simmetrica e probabilmente ci sono pure dei termini negativi, anche non e' cos' facile essere tuo o mio.

↑  
VETTORE DELLE FORZE NODALI

12/1/11



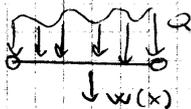
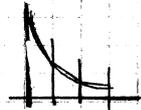
diventa un vettore delle forze nodali equivalenti

$u = \sum_i u_i N_i$

tipo principio dei lavori virtuali (campo di spostamenti inventato)

↑  
tut'uno tutti i minimi elementi (piu' sono piu' precisi e piu' ne metto)

\* nella maggior parte dei casi e' la soluz. esatta.



pressione distribuita → fa un lavoro perché il corpo si deforma → voglio conoscere gli spostamenti  $w$

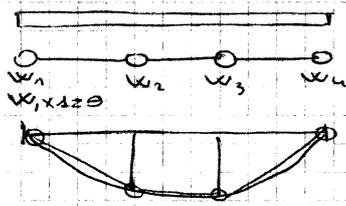
$L_e = \int q(x) w(x) dx$  → ci darebbe il lavoro vero se lo spostam. fosse quel vero

$w(x) = \sum u_i N_i$  ← gradi di libertà nodali abbiamo usato gli elementi finiti

↓  
 $L_e$

sarebbe meglio se  $L_e = \tilde{L}_e$

Simulo un gas di nodi con un cumulo di aste



forza della trave  
(e una cubica  $\rightarrow \frac{pL^3}{48}$ )

Lagrangiana  
hermitiana

$\Theta$  può essere  $\frac{dw}{dx}$  app.  $\Theta$  e basta

↓  
ogni modo  
4 qntità  
↓  
4 cost  
(cubica)

↓  
trave hermitiana

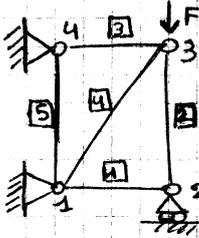
$w, x \neq \Theta \rightarrow w$  e  $\Theta$  sono correlate (nella logica del FEM)

$w = ax + b$   
 $\Theta = cx + d$  } approssimate linearm.

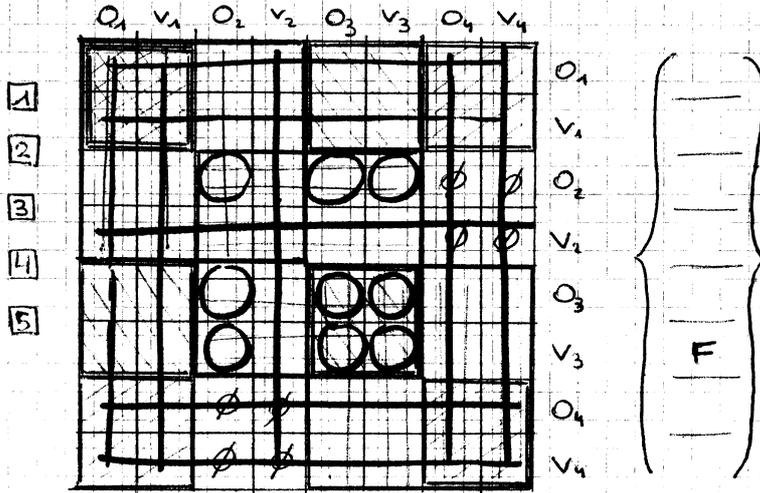
↓  
trave Lagrangiana

Scordiamo flessione e taglio se diciamo che  $\frac{dw}{dx} = \Theta$   
 $\rightarrow$  shear locking (trave resiste a flessione tutt più e sottile  $\ll$ )

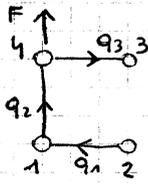
$E$  = derivato dello spostamento  $\rightarrow$  è discontinua nella Lagrangiana  
 $\rightarrow$  in un nodo con un Lagrangiano ci sono almeno 2 valori della tensione.



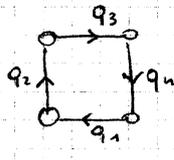
dimensione della matrice dipende da n° di nodi  
 4 nodi, 2 gradi di libertà l'uno → 8x8  
 (matrice di rigidezza)



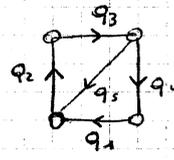
canceliamo  $O_1 V_1$ ,  $O_4 V_4$ ,  $V_2$   
 → mi resta solo una matrice 3x3



(a)

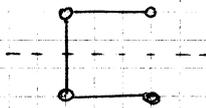


(b)

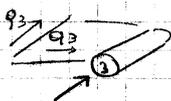


(c)

a)



pannelli simmetrici → il centro di taglio è nell'asse di simmetria

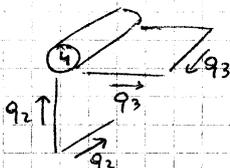


da → dN

$$q_3 dz - dN_3 = 0 \rightarrow q_3$$

$$q_1 = q_3 \rightarrow q_1$$

$$q_2 dz - q_3 dz - dN_4 \rightarrow q_2$$



per flussi esistono solo  $q_1$  e  $q_2$  applicate nel centro di taglio (se no la struttura viene distrutta)

18/1/11

Energia di deform. elastica

$$\int_V \{\sigma\}^T \{\epsilon\} dv$$

dev' essere uno scalare!

In campo lineare elastico è un proble.

$\{\sigma\}$  = tensore delle tensioni

Teoria dell'elastica  $\rightarrow \{\sigma\} = [D] \{\epsilon\}$

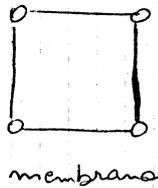
↑  
simmetrica  
(al max. 6x6  
→ 21 costanti elastiche)

$$\{\sigma\} = [D][B] \{q_e\}$$

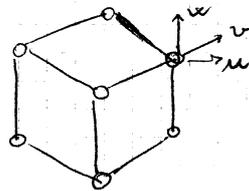
$$\int_V \{q_e\}^T [B]^T [D][B] \{q_e\} dv = \{q_e\}^T \int_V [B]^T [D][B] dv \{q_e\}$$

forza (\*)

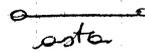
matrice quadrata che è l'equival. della rigidità di una molla



membrana



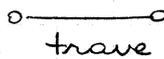
solido



asta



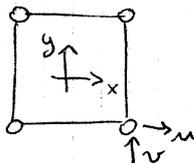
piastra



trave

(\*) da lavoro interno se moltiplicata per uno scalare

Membrana  $\rightarrow$  elemento elastico che è capace di resistere a sforzi nel suo piano e basta



$\epsilon_{xx}$



$\epsilon_{yy}$

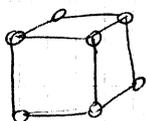


$\epsilon_{xy}$



serve solo nei problemi sferzati

Solido  $\rightarrow$  qnd il corpo in è assimilabile né a piastra né a trave



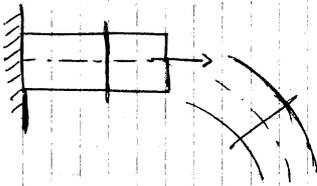
ogni nodo ha 3 gradi di libertà, ci sono 8 nodi

$$\rightarrow [24 \times 24]$$

$\Rightarrow$  l'elemento solido è l'ultima

spiegata (perché solo 10 cubi danno una  $[240 \times 240]$ )

Trave



$$\begin{cases} u = u^0 - z w_{,x} \\ w = w^0 \end{cases} \text{ campo di spostam. della trave}$$

$$\begin{cases} \epsilon_{xx} = u^0_{,x} - z w_{,xx} \\ \epsilon_{yy} = 0 \\ \epsilon_{xy} = 0 \\ \epsilon_{zz} = 0 \\ \epsilon_{xz} = -w_{,x} + w_{,x} z = 0 \quad (*) \\ \epsilon_{yz} = 0 \end{cases} \text{ equazioni costitutive}$$

Usiamo un modello di spostamento

$u^0, w^0$  gradi di libertà funzionali del modello  
 $n$  gradi di libertà funzionali del modello FEM potrebbero essere diversi.

$$\{\epsilon\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \phi \\ \phi & \frac{\partial}{\partial x^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^0 \\ w^0 \end{Bmatrix}$$

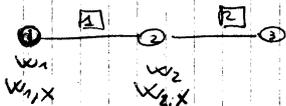
$$\{0\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \phi \\ \phi & \frac{\partial}{\partial x^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^0 \\ w^0 \end{Bmatrix}$$

$$\{\sigma\}^T = \begin{Bmatrix} u^0 & w^0 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \phi \\ \phi & \frac{\partial}{\partial x^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \phi \\ \phi & \frac{\partial}{\partial x^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^0 \\ w^0 \end{Bmatrix}$$

Se  $w_{,xx}$  è sotto un integrale può essere discontinua ma  $w_{,x}$  dev' essere continua e  $w$  pure! (tutte le derivate da  $\phi$  a m-s devono essere continue se  $w_{,m}$  è discontinua ed è dentro un integrale)

$$\int_V \{\sigma\}^T \{\epsilon\} dV$$

↓  
 se prendo continue!  
 il probl è tra un elemento e un altro !!

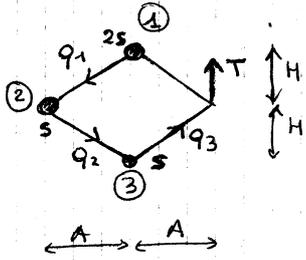


se metto  $w$  e  $w_{,x}$  al nodo sono a posto  
 → nodi con derivate

→ devo usare dei polinomi di Hermite

Le funz. di forma Hermitiane saranno dei cubi (4 qntità) [non posso usare le Lagrangiane ora]

Esercizio

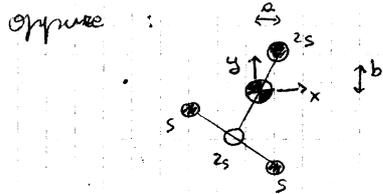


→ baricentro :  $\begin{cases} X_G = \dots \\ Y_G = \dots \end{cases}$

$J_x = \dots$

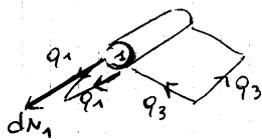
$J_y = \dots$

$J_{xy} = \dots$

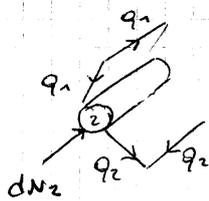


→  $dN$  (uso la formula della flessione deviata)

→ calcolo i flussi

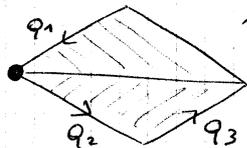


$q_1 dE - q_3 dE - dN_1 = 0$



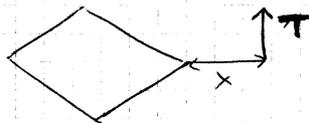
$q_1 dE - q_2 dE - dN_2 = 0$

trovo i flussi



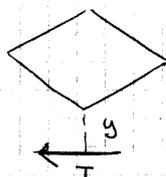
$T \cdot 2A + 2 \cdot \Omega q_3 = 0$   
 ↑  
 area del rombo

→ centro di taglio



$\dot{\theta} = 0 = \frac{1}{2G\Omega} \sum q_i \frac{l_i}{s_i}$

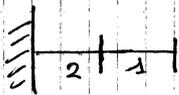
i  $dN$  sono gli di prima



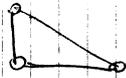
ora i  $dN$  sono diversi da prima!

→ riscrivere  $dN$ , equilibri ai correnti, ...

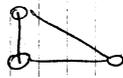




calcolo il centro di taglio del triangolo



$\uparrow T$



$\downarrow T$

} momento torcente e  
pari a  $T \cdot braccio$

il centro di taglio del rettangolo

è dove è



} momento torcente

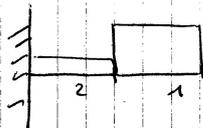


diagramma di momento torcente

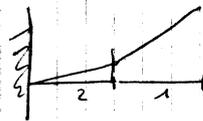


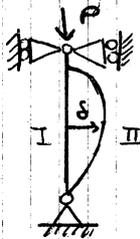
diagramma della  $\theta$

25/01/11

3 branche della ~~stabilità~~ interessano la struttura:

- A) biforcazione
- B) instabilità a scatto
- C) instabilità dinamica

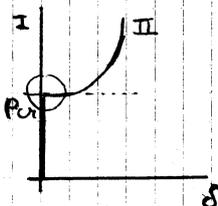
A)



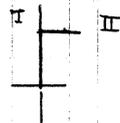
a partire da certi dati il probl ha più di una soluzione  $\rightarrow$  se il carico è abbastanza grande l'asta si flette, ma regge ancora!  
Sono possibili 2 equilibri:

- I) path primario
- II) path secondario

} possibili con stessi vincoli e stesse forze



in un intorno del pt critico



l'equilibrio corrisponde a un minimo dell'energia  
II è più minima di I

$$Q = Q_{eq} + Q^*$$

$$u = u_{eq} + u^*$$

$$\varepsilon = \varepsilon_{eq} + \varepsilon^*$$

$$\sigma = \sigma_{eq} + \sigma^*$$

eq = equilibrio

\* = perturbazione

La perturbazione si può pensare da I a II solo se  $P \geq P_{cr}$

$$\int_V \{ \sigma_{eq} + \sigma^* \}^T \{ \varepsilon_{eq} + \varepsilon^* \} dV = \Delta e$$

↑  
mm cambia

$$E_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \omega_{,x}^2 + \dots$$

↑  
spostam. trasversale  
→ crea allungam  
opp. accorciam

mm lineare

$$\rightarrow \varepsilon^* = \varepsilon_{lin}^* + \varepsilon_{non lin}^{**}$$

$$\sigma^* = \sigma_{lin}^* + \sigma_{non lin}^{**}$$

Per trovare  $P_{cr}$  mi basta una minima mm linearità (ma ci deve essere!!)

$$\sigma_{eq} \{ \varepsilon_{eq} + \varepsilon^* \} + \sigma^* \{ \varepsilon_{eq} + \varepsilon^* \} = \Delta e$$

non in equilibrio  
(perché lo stato  
primario era  
in equilibrio)  
→ si elidono

$$\int \sigma^* \{ \varepsilon_{eq} + \varepsilon^* \} dV = 0$$

opt è un probl di autovalori

→ mm calcola tutto qll che

ci serve → o forma o entità  
del carico, mm tutto e due!!!

Da opt formula ricaviamo:

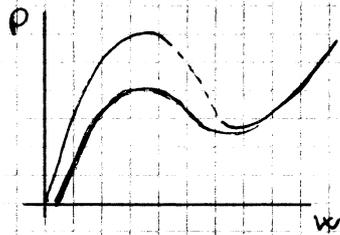
$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

Se serve

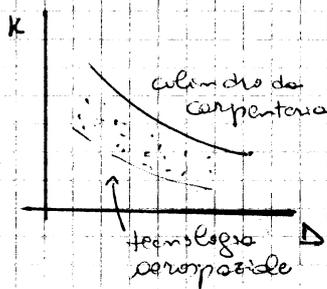
$$\int \sigma^* \{ \varepsilon_{eq} + \varepsilon^* + \varepsilon^{**} \} dV = 0 \quad \text{senza } \varepsilon^{**} \text{ mm ricavo niente!}$$

$\delta \equiv \varepsilon^{**} \rightarrow$  se  $\varepsilon^{**} = 0 \rightarrow$  il probl non esiste

Le strutture sono estremamente sensibili ai difetti iniziali



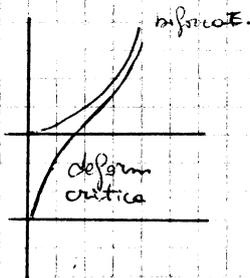
cilindro perfetto (mm esatte)  
cilindro reale



$K =$  sbalzi del carico critico teorico  
a causa dei difetti

$D =$  diametro  $\rightarrow$  dimensione caratteristica

Vogliamo sapere qual è la deformazione critica,  
e seconda del difetto spieghiamo il comportam. del pezzo  
perché tecnologicam. il difetto è simile a qll di partenza



Se l'asta deve stare in equilibrio  $\rightarrow$  ogni pezzetto dev' essere in equilibrio. Nel modello elementare nell'asta c'è solo energia flessionale. Quando l'energia esterna eccede qll interna il pezzo si rompe, ma se no più critica instabile  $\rightarrow$  pezzo in equilibrio  $\rightarrow$  carichi esterni devono fare un lavoro pari all'energia esterna

$Pw =$  coppia dovuta a  $P$

$EI w_{,xx} =$  momento flettente

$\int = 0 \rightarrow$  integranda = 0  $\rightarrow$  derivata n-esima dell'integranda  $= 0$

1a derivata dell'integranda  $\rightarrow$  taglio

2a derivata  $\rightarrow$  derivata del taglio

$P$  : autovibrazione

$v$  : autoflessione

$$EI \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 - P = 0 \rightarrow \boxed{P = EI \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2}$$

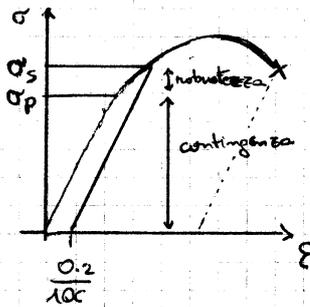
formula di Eulero del carico critico

$m = m^{\circ}$  intero ( $m^{\circ}$  di semionde che mette nel carico)

$m = 0 \rightarrow$  soluz. banale  $\rightarrow$  il primo m.c.e.

$m = 1 \rightarrow P_{cr} = EI \left(\frac{\pi}{L}\right)^2$   
 ↑  
 il 1° che incontriamo

$P_{cr} = E = E(P) \quad \sim \frac{1}{L^2}$



acciaio o  
 cing. materiali  
 serropneumatici  
 ↓  
 ammorbidimento  
 leggerissimo

materiali moderni:  
 tipo ceramica  
 o compositi  
 ↓  
 si rompono  
 nel mezzo della  
 loro vita

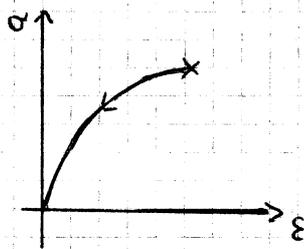
cing. si rompono di colpo

Campi lineare  $\rightarrow$  no deformaz. permanente

$\sigma_{ammorbidimento} = 0.2 \approx \sigma_s$   
 $\sigma_p = \sigma$  di proporzionalità

} tra le 2 c.e. il volo a robustezza, sotto  $\sigma_p$  c.e. al volo a contingenza

Materiali a memoria di forma



leghe in Ti-Au, Ti-Ni  
 gel polimerico  
 argille

} materiali a memoria di forma

Modulo elastico = tan del diagramma  $\sigma - \epsilon$

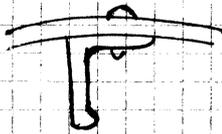
Se asta tocca  $\rightarrow P_{cr}$  potrebbe essere in campo plastico  $\rightarrow$  oltre il limite elastico

$k, \beta$  sono 2 coeff che servono a fissare le curve

$\beta$  = indice di spessore

$k$  tiene conto se è una forma aperta o chiusa

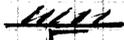
( $k$  maggiore su forma aperta che resiste di meno)



rivetti int vicini così  
la lamiera dell'ala  
stabilizza i correnti

opt pezzo più bisognosi → comincia a farlo dalla parte libera

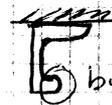
più è lungo il lato → più è grande  $\rho$  →  $\sigma_{cr} \downarrow$   
→ dobbiamo fare dei correnti ed lato libero corto



opt è il nuovo lato libero  
→ si imbozza opt (che però  
è corto  $\cup$ )



cos' non si imbozza più  $\cup$



bulbo



mi invento la perturbazione! → forza un'asta  
→ viene fuori una  $\sigma_{cr}$  di opt genere:

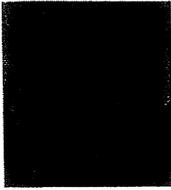
$$\sigma_{cr} = G \frac{J_t}{J_p}$$

$J_t$  = modulo di rigidezza torsionale

$J_p$  = modulo di rigidezza polare rispetto al centro di taglio

se  $J_t = J_p$  (sezione circolare chiusa) →  $\sigma_{cr} = G$  → è enorme  $\cup$

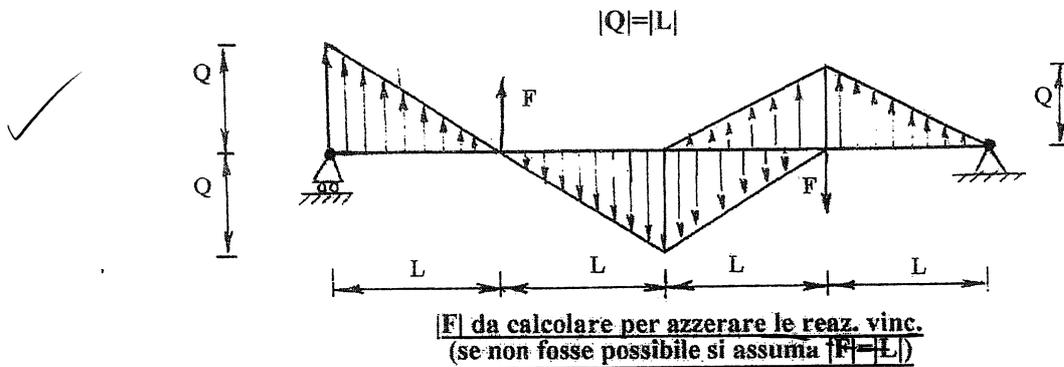
se metal e grad ci sono buchi o aperture (ma la gente vuole  
salire a bordo!!)



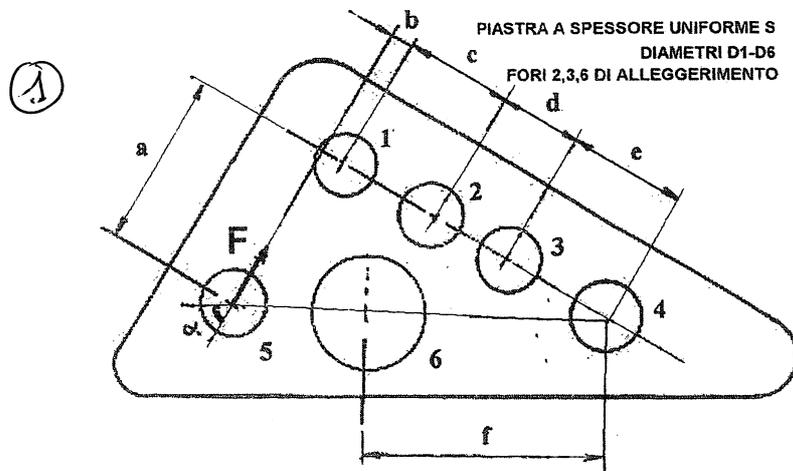
# 01EUCES A1/1 R 8-11-06

Si prega di scrivere ordinatamente e con una grafia comprensibile. Usare solo fogli protocollo, su ognuno dei quali dovrà essere indicato Cognome e Nome in stampatello. L'ordine di esposizione sarà apprezzato; nello svolgimento, seguire l'ordine degli esercizi come proposto. Siate sintetici e precisi.

1. Per lo schema strutturale rappresentato in figura, determinare il valore della forza che rende nulle le reazioni vincolari (se esiste). Quindi tracciare a mano libera, ma in maniera fisicamente coerente, i diagrammi qualitativi delle caratteristiche di sollecitazione, quotandone tutti i punti caratteristici. Riportare esplicitamente tutti i calcoli coinvolti e le convenzioni di segno utilizzate. Non si usi la sovrapposizione degli effetti [punteggio: 15].



2. Ricavare l'espressione del fattore di carico, o coefficiente di contingenza, in tutti i punti caratteristici della manovra di gran volta (looping) e tracciare il corrispondente diagramma sul piano  $(n, V_i)$ , riportando esplicitamente le equazioni di equilibrio coinvolte nei vari punti [punteggio: 5].
3. Calcolare la tensione di taglio risultante nei bulloni della piastra in figura. I fori 2, 3 e 6 sono di alleggerimento [punteggio: 10].

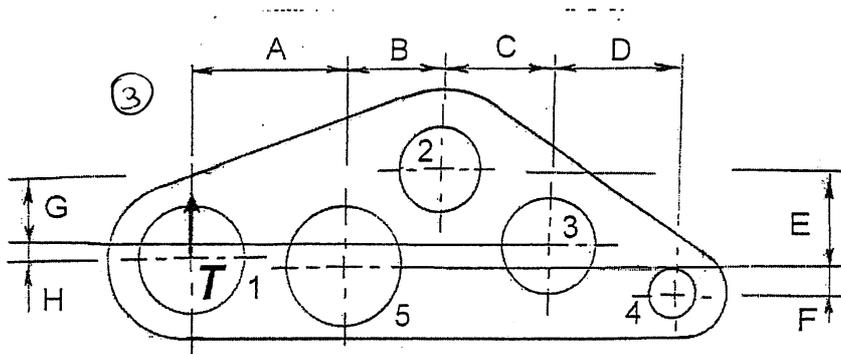


## CORSO DI COSTRUZIONI AERONAUTICHE B

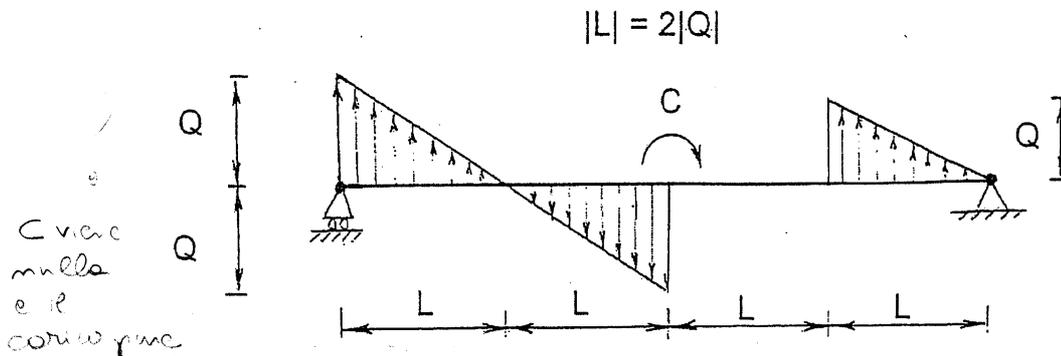
Prova scritta del 05-05-05

(primo recupero del primo accertamento)

1. Ricavare l'espressione del fattore di carico (o coefficiente di contingenza) da raffica e tracciarne il relativo diagramma nel piano (n-V), secondo le norme JAR e per quote di volo fino a 6100 m. (appendice primo quaderno di appunti: raffica a gradino corretta mediante coefficiente di attenuazione). Inoltre, ricavare l'espressione del fattore di carico nella virata corretta, del fattore di carico di un velivolo in moto stazionario su traiettoria ascendente e scrivere il sistema di equazioni che consente di determinare la ripartizione della portanza tra ala e coda [Punti 5].
2. Per la piastra di attacco rappresentata in figura, calcolare la tensione di taglio nei bulloni 2 e 3. I fori hanno diametro  $d_1, d_2, \dots, d_5$  (4 e 5 sono di alleggerimento) [Punti 4]. 10



3. Per lo schema strutturale rappresentato in figura, determinare il valore della coppia che rende nulle le reazioni vincolari, quindi tracciare a mano libera i diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione, quotandone i punti caratteristici. Riportare esplicitamente i principali calcoli coinvolti e le convenzioni di segno utilizzate [Punti 15].



Si prega di scrivere ordinatamente e con una grafia comprensibile. Usare solo fogli protocollo, su ognuno dei quali dovrà essere indicato Cognome e Nome in stampatello. L'ordine di esposizione sarà apprezzato. Nello svolgimento, seguire l'ordine degli esercizi come proposto.

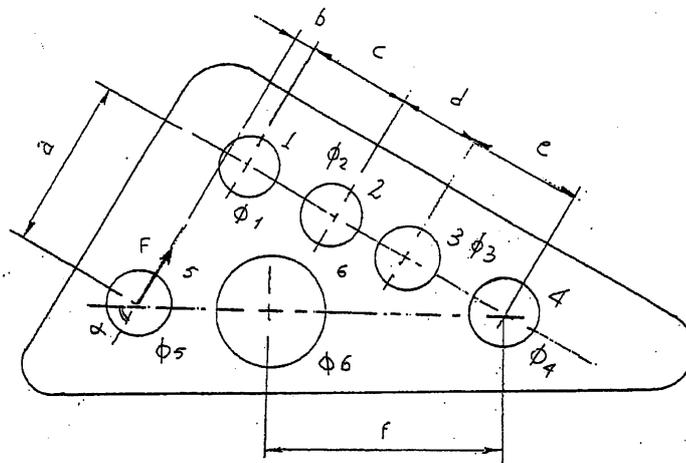
## CORSO DI COSTRUZIONI AERONAUTICHE B

Prova scritta del 05-05-04

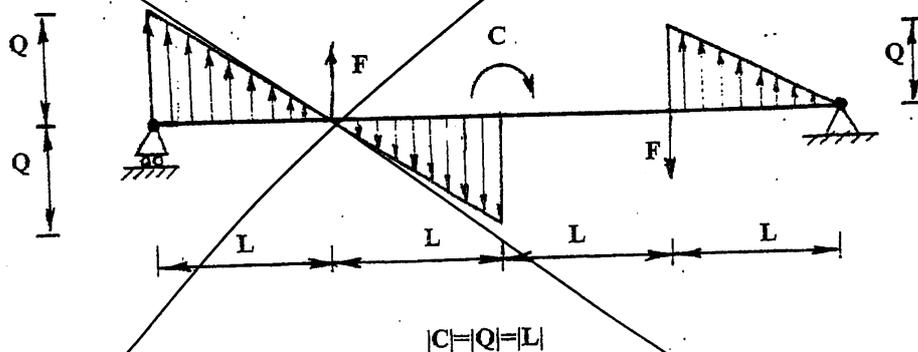
(primo recupero del primo accertamento)

1. Ricavare l'espressione del fattore di carico, o coefficiente di contingenza, in tutti i punti caratteristici della manovra di gran volta (looping) e tracciare il corrispondente diagramma sul piano  $(n, V_i)$ , riportando esplicitamente sia le equazioni di equilibrio coinvolte nei vari punti, sia l'espressione di  $n$ . [punteggio: 5].
2. Determinare l'espressione della tensione di taglio nei bulloni della piastra in figura. La piastra ha spessore uniforme  $s$ ; i fori 1 e 6 sono di alleggerimento. [punteggio: 10].

3

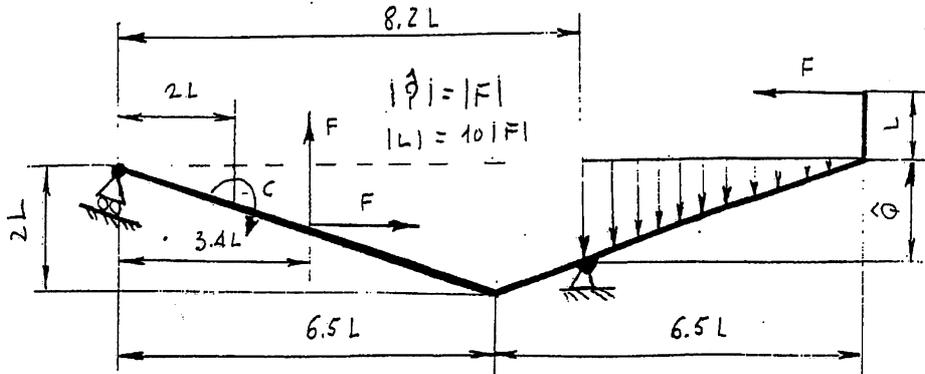


3. Per lo schema strutturale rappresentato in figura, determinare il valore delle forze  $F$  che rende nulle le reazioni vincolari. Quindi tracciare a mano libera i diagrammi qualitativi delle caratteristiche di sollecitazione, quotandone tutti i punti caratteristici. Riportare esplicitamente tutti i calcoli coinvolti e le convenzioni di segno utilizzate. Tali diagrammi dovranno essere fisicamente coerenti. [punteggio: 15].

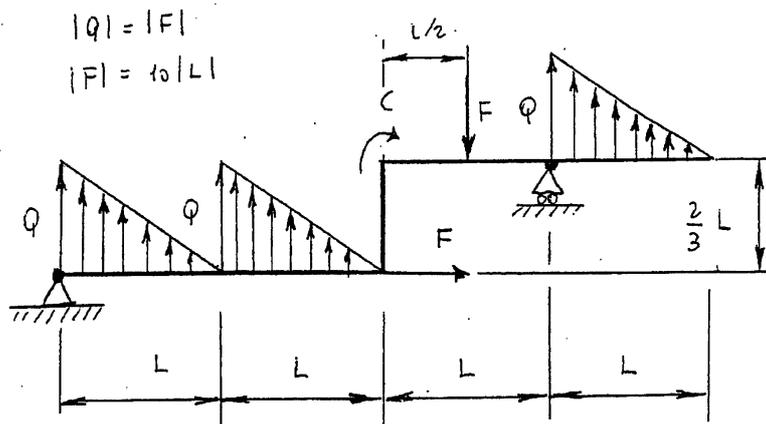


*Si prega di scrivere ordinatamente e con una grafia comprensibile e di usare solo fogli protocollo, su ognuno dei quali dovrà essere indicato Cognome e Nome in stampatello. L'ordine di esposizione sarà apprezzato; nello svolgimento, seguire l'ordine degli esercizi come proposto.*

1. Calcolare il valore della coppia  $C$  (se esiste) che rende nullo il momento flettente in mezzeria. Riportare esplicitamente tutti i calcoli coinvolti e le convenzioni di segno utilizzate [punteggio: 10].



2. Per lo schema strutturale rappresentato in figura, determinare il valore della coppia  $C$  che rende nullo il momento flettente in mezzeria (se esiste). Quindi tracciare a mano libera i diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione, quotandone tutti i punti caratteristici. Riportare esplicitamente tutti i calcoli coinvolti e le convenzioni di segno utilizzate. Indicare esplicitamente anche tutte le assunzioni fatte. Tali diagrammi non potranno che essere qualitativi, ma dovranno essere fisicamente coerenti. [punteggio: 20].



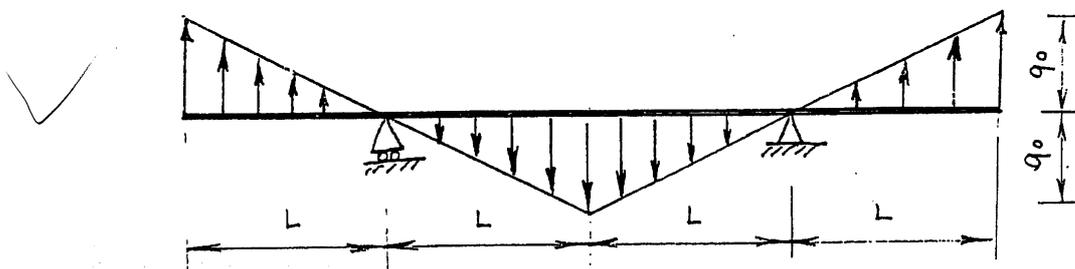
due e da mezzeria??

## CORSO DI COSTRUZIONI AERONAUTICHE B

Prova scritta del 17-06-02

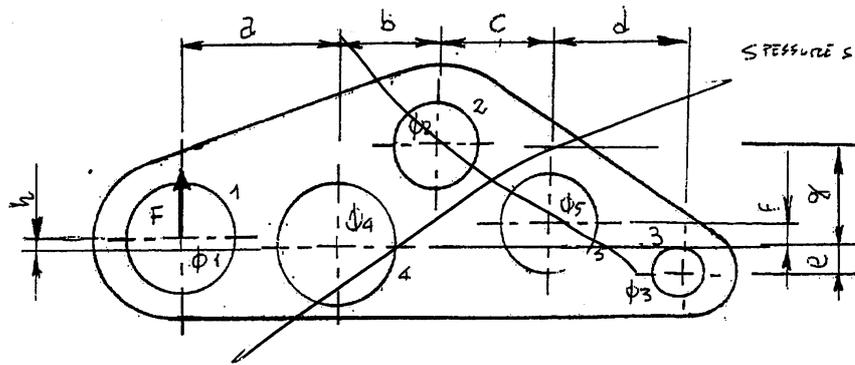
(secondo recupero primo accertamento)

1. Ricavare l'espressione del fattore di carico da raffica, giustificare con opportune considerazioni fisiche il relativo coefficiente di attenuazione e tracciare il diagramma di raffica nel piano (n-V) secondo le norme JAR (appendice 1 volumetto di testo), per quote di volo fino a 6100 m. [punti 8].
2. Ricavare l'espressione del fattore di carico, o coefficiente di contingenza, in tutti i punti caratteristici della manovra di gran volta (looping) e tracciare il corrispondente diagramma sul piano (n, V), riportando esplicitamente gli equilibri coinvolti [punti 8].
3. Ricavare l'espressione del fattore di carico nella virata corretta [punti 2].
4. Ricavare l'espressione del fattore di carico di un velivolo in moto stazionario su traiettoria ascendente [punti 2].
5. Per lo schema strutturale rappresentato in figura, tracciare a mano libera i diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione, quotandone tutti i punti caratteristici. Riportare esplicitamente tutti i calcoli coinvolti (es.: reaz.vincolari, etc.) [punti 10].

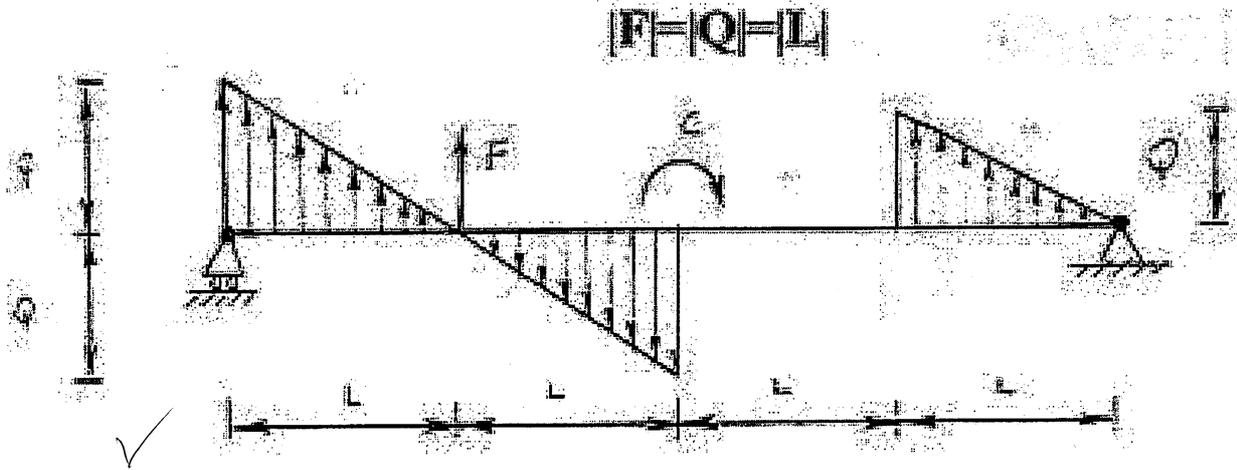


Si prega di scrivere ordinatamente e con una grafia comprensibile. Usare solo fogli protocollo, su ognuno dei quali dovrà essere indicato Cognome e Nome in stampatello. L'ordine di esposizione sarà apprezzato. Nello svolgimento, seguire l'ordine degli esercizi come proposto. A buon intenditor .....

1. Ricavare l'espressione del fattore di carico, o coefficiente di contingenza, in tutti i punti caratteristici della manovra di gran volta (looping) e tracciare il corrispondente diagramma sul piano  $(n, Vi)$ , riportando esplicitamente le equazioni di equilibrio coinvolte nei vari punti [punteggio: 5].
2. Calcolare la tensione di taglio nei bulloni della piastra in figura. I fori 4 e 5 sono di alleggerimento [punteggio: 10].



5. Per lo schema strutturale rappresentato in figura, determinare il valore della coppia che rende nulle le reazioni vincolari. Quindi tracciare a mano libera i diagrammi qualitativi delle caratteristiche di sollecitazione, quotandone tutti i punti caratteristici. Riportare esplicitamente tutti i calcoli coinvolti e le convenzioni di segno utilizzate. Tali diagrammi dovranno essere fisicamente coerenti. [punteggio: 15].

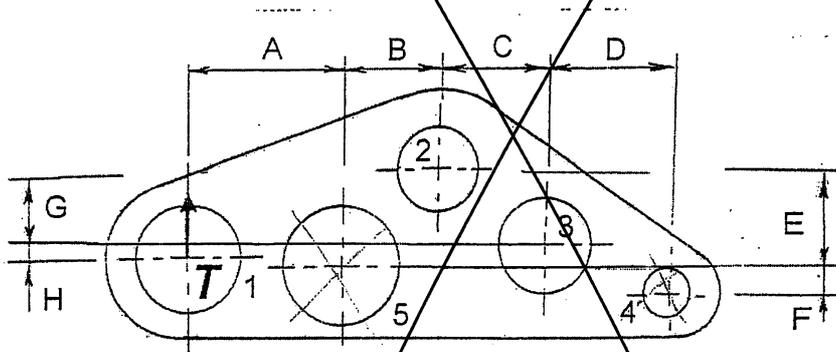


## CORSO DI COSTRUZIONI AERONAUTICHE B

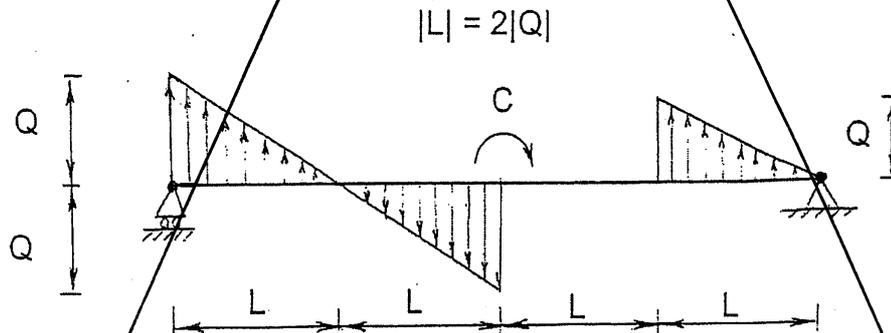
Prova scritta del 05-05-05

(primo recupero del primo accertamento)

1. Ricavare l'espressione del fattore di carico (o coefficiente di contingenza) da raffica e tracciarne il relativo diagramma nel piano (n-V), secondo le norme JAR e per quote di volo fino a 6100 m. (appendice primo quaderno di appunti: raffica a gradino corretta mediante coefficiente di attenuazione). Inoltre, ricavare l'espressione del fattore di carico nella virata corretta, del fattore di carico di un velivolo in moto stazionario su traiettoria ascendente e scrivere il sistema di equazioni che consente di determinare la ripartizione della portanza tra ala e coda [Punti 5].
2. Per la piastra di attacco rappresentata in figura, calcolare la tensione di taglio nei bulloni 2 e 3. I fori hanno diametro  $d_1, d_2, \dots, d_5$  (4 e 5 sono di alleggerimento) [Punti 5]. 10



3. Per lo schema strutturale rappresentato in figura, determinare il valore della coppia che rende nulle le reazioni vincolari, quindi tracciare a mano libera i diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione, quotandone i punti caratteristici. Riportare esplicitamente i principali calcoli coinvolti e le convenzioni di segno utilizzate [Punti 15].



Si prega di scrivere ordinatamente e con una grafia comprensibile. Usare solo fogli protocollo, su ognuno dei quali dovrà essere indicato Cognome e Nome in stampatello. L'ordine di esposizione sarà apprezzato. Nello svolgimento, seguire l'ordine degli esercizi come proposto.

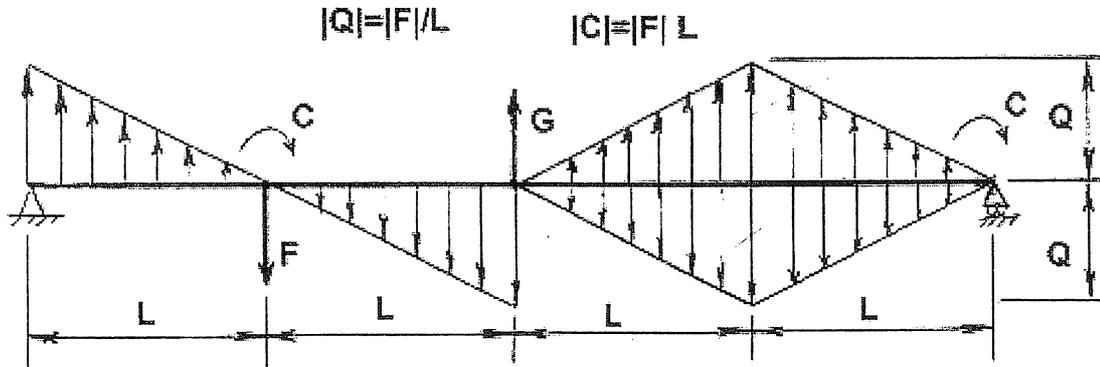


# 01EUCES A1/1 R

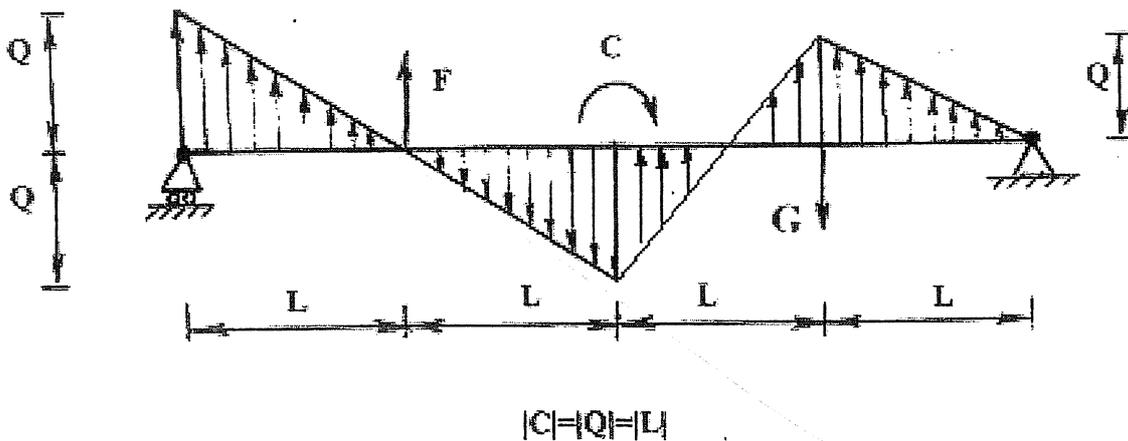
11-11-07

*Si prega di scrivere ordinatamente e con una grafia comprensibile. Usare solo fogli protocollo, su ognuno dei quali dovrà essere indicato Cognome e Nome in stampatello. L'ordine di esposizione sarà apprezzato; nello svolgimento, seguire l'ordine degli esercizi come proposto. Si prega di essere sintetici e precisi.*

Per i due schemi strutturale allegati ([punti: 15] ognuno), determinare i valori delle forze F e G che rendono nulle le reazioni vincolari; quindi tracciare a mano libera, ma in maniera fisicamente coerente, i diagrammi qualitativi delle caratteristiche di sollecitazione, quotandone tutti i punti caratteristici. Riportare esplicitamente tutti i calcoli coinvolti e le convenzioni di segno utilizzate.



Se non fosse possibile azzerare le reazioni vincolari, si assuma in ambo i casi  $|F| = |G| = L$



*Handwritten signature*