



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO : 368

DATA : 27/09/2012

A P P U N T I

STUDENTE : Gianfrate

MATERIA : Fondamenti di Meccanica Strutturale

Prof. Curà

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

FONDAMENTI DI MECCANICA STRUTTURALE

COORDINATE $\begin{cases} \text{vincolate} \\ \text{libere (DOF's)} \end{cases}$
 (= informazioni necessarie e sufficienti)

		CORPO RIGIDO			
2D	x_p, y_p	x_p, y_p, θ_z	} 3 (corpo rigido)		
3D	x_p, y_p, z_p	$x_p, y_p, z_p, \theta_x, \theta_y, \theta_z$			6

coordinate $\begin{cases} \boxed{u} \\ \text{libere } \boxed{l} \text{ (DOF's)} \\ \text{vincolate } \boxed{m} \end{cases} \quad u \cong l + m$

$u = m \quad l = 0 \quad \rightarrow$ ISOSTATICO
 $u = m + l \quad l \neq 0 \quad \rightarrow$ LABILE o IPDSTATICO (albero motore, ...)
 $u < m \quad l = 0 \quad \rightarrow$ IPERSTATICO (tipico delle strutture civili)

MODELLI DI VINCOLO (2D) \rightarrow (nel piano!)



INCASTRO
 (isostatico)
 0 gradi di libertà

3 coordinate

$$u = 3$$

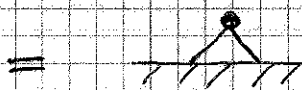
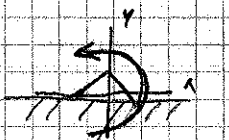
$$m = 3$$

(in questo i movimenti vincolati)

$$u - m = l \rightarrow l = 0$$

$$3 - 3 = 0$$

(può estendersi al caso tridimensionale)



CERNIERA ESTERNA

(vincolate a qualcosa di fisso)

vincolo l_y o l_x , MA libera le rotazioni attorno al proprio asse

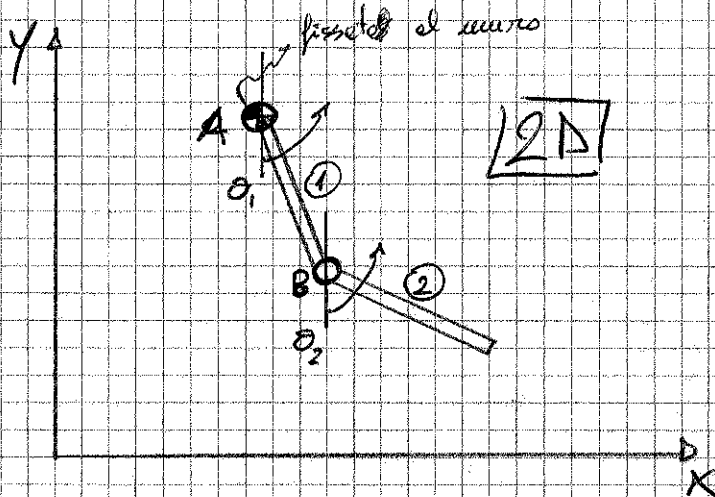


CERNIERA INTERNA

(es. penna...)

\rightarrow scatenano una rispetto all'altro, MA non permette che si separino

ES. (doppio pendolo)



2 TRAVI ① o ②
2 CERNIERE A o B

$$u = 3 + 3 = 6$$

① ②

$$u = \text{quello da vincola A} + \text{quello da vincola B} \iff$$

$$u = 2 + 2$$

$$u - u = 6 - 4 = 2$$

$$Q = 2$$

Il sistema ha 2 GRADI DI LIBERTÀ:

(cioè, la possibilità di movimento differente in modo univoco, non una rispetto all'alt. ved.)

2D in coord $\begin{cases} x & \text{traslazione} \\ y & \text{traslazione} \\ z & \text{rotazione} \end{cases}$

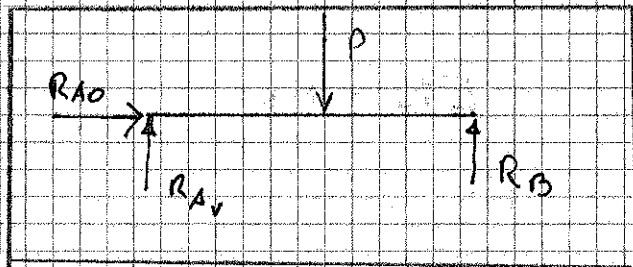
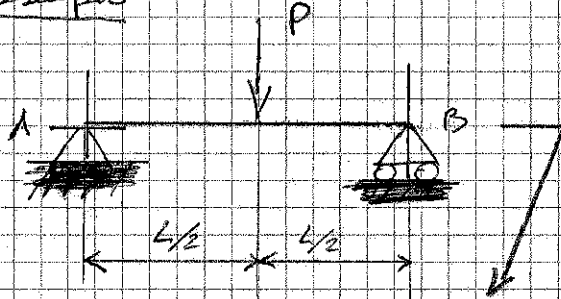
$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n F_{x_i} = 0 & \rightarrow \\ \sum_{i=1}^n F_{y_i} = 0 & \uparrow \\ \sum_{k=1}^n [C_k + F_k b_k] = 0 & \curvearrowright \end{cases}$$

(convenzionale POSITIVO senso antiorario)

$C_k \Rightarrow M_k$ (coppia)

\rightarrow eq. di equilibrio ROTAZIONALE.

1° esempio



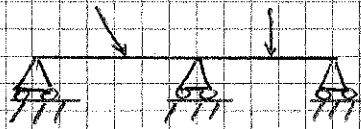
$$\rightarrow R_{A0} = 0$$

$$\uparrow R_{Av} - P + R_B = 0$$

$$\curvearrowright - P \cdot \frac{L}{2} + R_B L = 0 \rightarrow$$

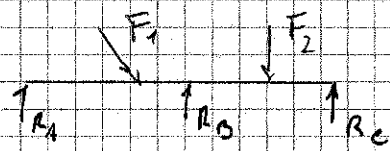
$$\rightarrow R_B = \frac{P}{2}$$

$$R_{Av} = P - R_B = P - \frac{P}{2} = \frac{P}{2} \rightarrow R_{Av} = \frac{P}{2}$$



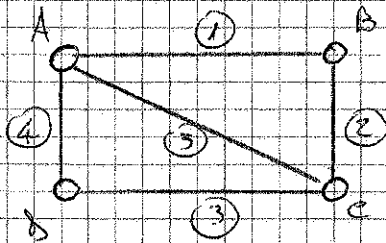
labile

è un sistema iperstatico



$1 + R_A$

ved. s.b. dis



$$M = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15$$

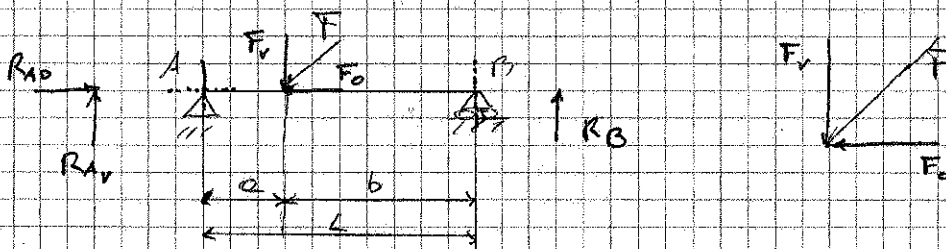
① ② ③ ④ ⑤

$N =$ num. di aste o travi concorrenti:

$$2(N-1) = M \leftarrow \text{CERNIERE INTERNE}$$

$$M = 4 + 2 + 4 + 2 = 12$$

A B C D

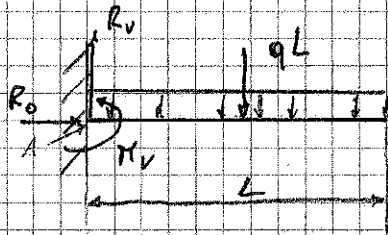


$$\sum \rightarrow R_{A0} - F_0 = 0 \rightarrow \boxed{R_{A0} = F_0}$$

$$\sum \uparrow R_{Av} - F_v + R_B = 0$$

$$\sum \curvearrowright -F_v \cdot a + R_B \cdot L = 0 \rightarrow \boxed{R_B = \frac{F_v \cdot a}{L}}$$

$$\boxed{R_{Av} = \frac{F_v \cdot b}{L}}$$

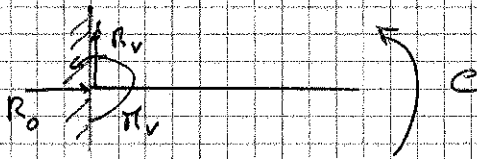


$$\rightarrow \quad R_0 = 0$$

$$\uparrow \quad R_v - qL = 0 \rightarrow R_v = qL$$

$$\curvearrowleft \quad M_v - qL \cdot \frac{L}{2} = 0$$

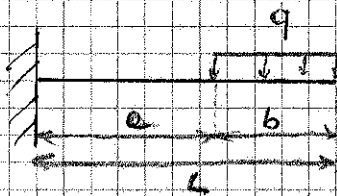
$$M_v = q \frac{L^2}{2}$$



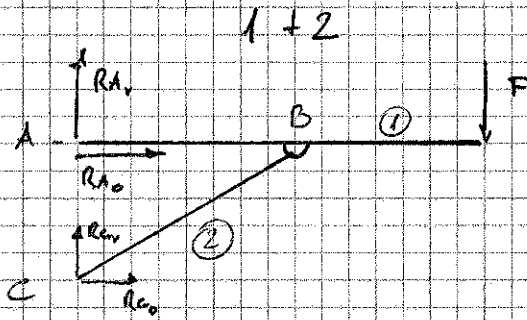
$$\rightarrow \quad R_0 = 0$$

$$\uparrow \quad R_v = 0$$

$$\curvearrowleft \quad M_v + C = 0 \rightarrow M_v = -C$$



$$\begin{cases} R_0 = 0 \\ R_v = qb \\ M_v = qb \left(a + \frac{b}{2} \right) \end{cases}$$



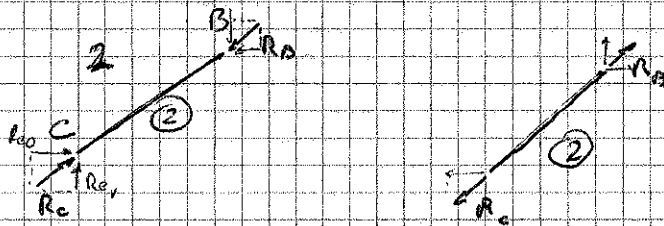
ELEMENTO STRUTTURALE ②! (ing. civile)

Quando una trave è caricata solo ed esclusivamente dalle forze vincolari alle estremità, NON è una TRAVE ma un'ASTA, e la risultante delle reazioni vincolari come lungo l'asta.

PUNTONE = elemento trave sottoposto a sola compressione.

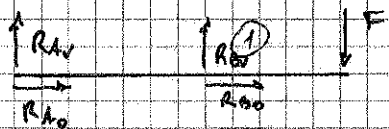
1. in questo esempio, SE l'elemento ② è un'asta, la risultante delle forze vincolari, $R_{Cv}, R_{C0}, R_{Av}, R_{A0}$, è PARALLELA all'asse stesso.

in questo caso è un PUNTONE?



→ in questo caso sarebbe un **TIRANTE**

ora considero soltanto il sistema 1, per poter analizzare più nel dettaglio le reazioni



in B agiscono onde sull'elemento ① reazioni = e contrario a quelle che agiscono sull'elem. ② tramite il vincolo interno.

poiché in plodendo il sistema torneremo a quella iniziale dove agiscono solo forze esterne.

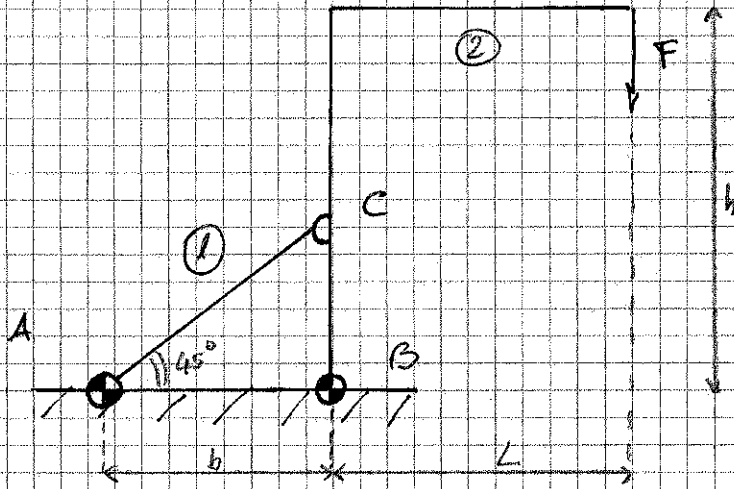
* 6 incognite → posso risolverlo attraverso 3 sistemi:

$\left\{ \begin{array}{l} 1+2 \\ 2 \end{array} \right.$	3 equazioni	$\left\{ \begin{array}{l} 1+2 \\ 1 \end{array} \right.$	3 equazioni
	1 "		5 eq. =

Oppure: $\left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array} \right.$ 3 eq.
3 eq.

* scegliamo quel sistema che se abbiamo l'este è preferibile sfruttarlo nelle equazioni

GRU A BANDIERA



$$\begin{aligned} n &= 3 + 3 = 6 \\ m &= 2 + 2 + 2 = 6 \\ l &= n - m = 0 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} n &= 3 + 3 = 6 \\ m &= 2 + 2 + 2 = 6 \\ l &= n - m = 0 \end{aligned}} \right\} \text{ sistema isostatico}$$

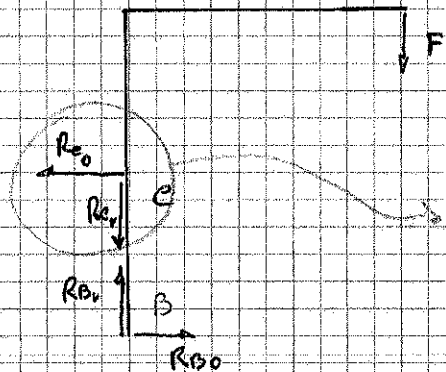
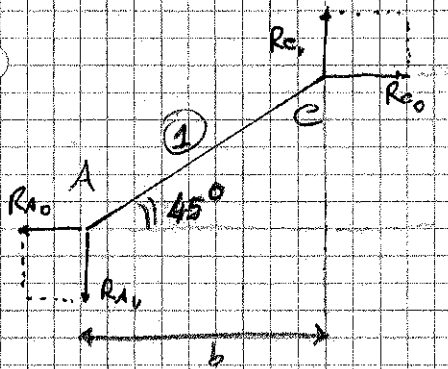
3 strade x trovare le incognite:

→ 1 + 2

1 + (1+2) → trovare i vincoli esterni

2 + (1+2) → " " " "

l'elemento 1 è un aste → TIRANTE!



uguali e contrarie al sistema 1

1978 posizionata a 45°!
quindi:

$$\begin{aligned} \rightarrow & Re_0 = RA_0 \\ \uparrow & Re_1 = RA_1 \\ A) & Re_1 \cdot b - Re_0 \cdot b = 0 \\ & Re_1 = Re_0 \end{aligned}$$

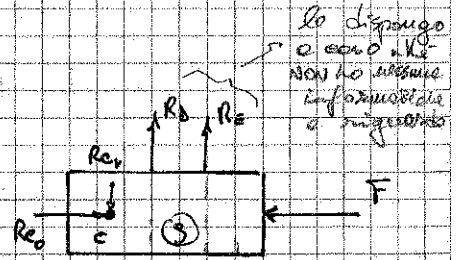
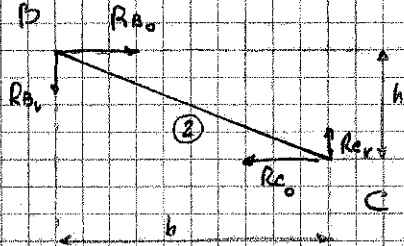
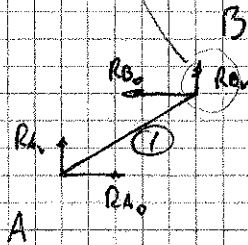
45°
le forze sono tutte uguali.

casuale, non so dove dirette.



Adesso esplodo il sistema:

(B è una cerniera interna, quindi la risultante delle forze di reazione è pari a zero)



Lo dispenso e con il Ke non ho nessuna informazione e risultato

$$R_{A0} = R_{B0} = F \cdot$$

$$R_{A1} + R_{B1} = 0 \cdot$$

$$R_{A1} = -\frac{Fh}{b}$$



$$R_{B0} = R_{C0} = F \cdot$$

$$-R_{B1} + R_{C1} = 0$$

$$R_{B1} = R_{C1} \cdot$$

$$R_{B1}b = R_{C1}h = 0 \cdot$$

$$R_{C1} = R_{B1} \frac{h}{b}$$

$$R_{C1} = \frac{Fh}{b}$$

$$R_{B1} = \frac{Fh}{b}$$

$$R_{C0} - F = 0 \cdot$$

$$R_{C0} = F$$

$$\begin{cases} 1) -R_{C1} + R_D + R_E = 0 \\ 2) R_D d + R_E f = 0 \end{cases}$$

Infine metto il sistema * : ...

$$1) R_{B0}h + R_{B1}a = M$$

$$Fh + \frac{Fh}{b}a = M \rightarrow$$

$$M = Fh \left(1 + \frac{a}{b}\right) = \text{momento motore}$$

La signfica che l'equilibrio, assegnato M ed F , dipende dalla GEOMETRIA!

direttamente il risultato:

$$* R_E = \frac{Fhd}{b(d-f)}$$

$$R_D = \frac{fFh}{b(f-d)}$$

eq. del moto



18/10/2011

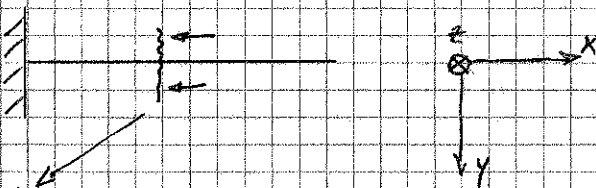
GEOMETRIA DELLE AREE

(meccanica razionale)

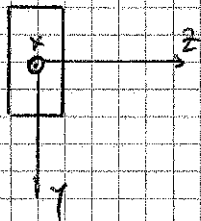
• lo studio della sezione

quantità utilizzate nella geom. della area:

- momenti statici (utili nel calcolo del BARICENTRO (x_g, y_g, z_g))
- momenti d'inerzia I_z, I_y
- " " " polari I_x (l'asse del solido stesso perpendicolare alla sezione)



SEZIONE:



1) BARICENTRI:

- momenti statici \rightarrow coordinate G
- Teorema di trasposizione dei momenti statici
- esempi (figure semplici o composte)

momenti statici:

$$S_x = \int_A y dA$$

$$S_y = \int_A x dA$$

$$S_r = \int_A d dA$$

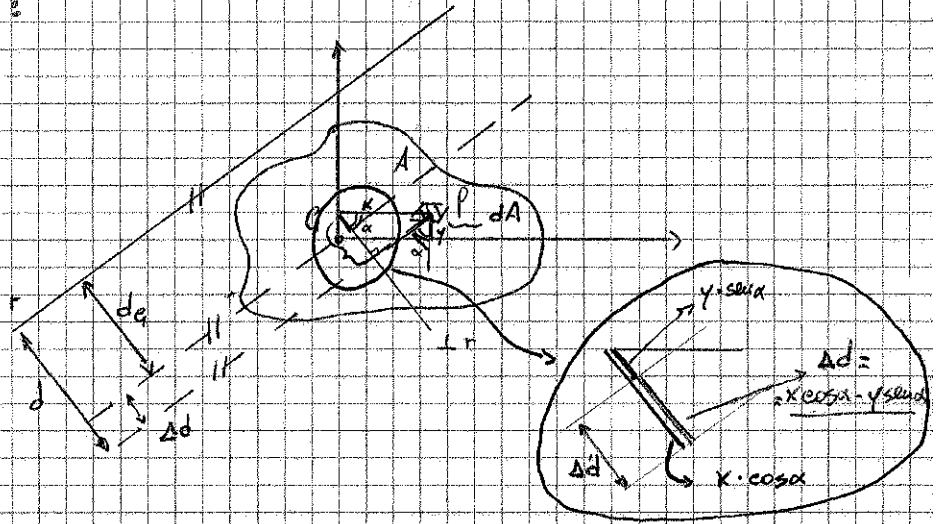
$$[S] = \text{m}^3$$

→ rispetto all'asse r orientato in modo qualsiasi rispetto al piano
d = distanze degli elementi

Lo servono a calcolare le coordinate del baricentro $\rightarrow (x_G, y_G)$.

1^a dimostrazione:

$$S_r = \int_A d \cdot dA =$$



$$S_r = \int_A d \cdot dA = \int_A (d_G + \underbrace{x \cos \alpha}_{\text{parentesi grappe}} - \underbrace{y \sin \alpha}_{\text{trattini in rosso}}) dA$$

questi termini sono uguali a zero perché i momenti di inerzia baricentrici sono nulli, e, x e y passano per G!

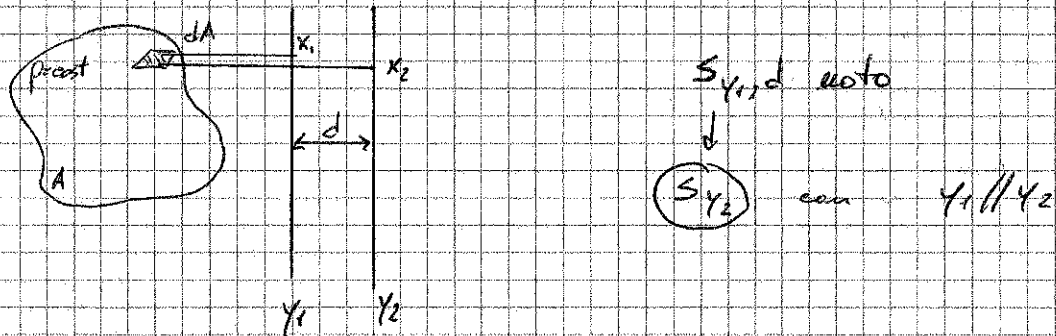
Quindi posso calcolare il momento statico di una sezione qualunque, semplicemente moltiplicando l'area della sezione A per la distanza dal baricentro della sezione dall'asse considerato!

$$S_r = d_G \cdot A$$

2^a dimostrazione:

Teorema Trasposizione dei momenti statici

se io ho noto il momento statico rispetto a un dato asse y_1 ,
 il teorema mi permette di ricavare il momento
 statico rispetto ad un asse $y_2 \parallel$ al precedente, la
 cui distanza fra i due è nota o pari a d .



$$S_{y_2} = \int_A x_2 dA = \int_A (x_1 + d) dA \quad S_{y_1} = \int_A x_1 dA$$

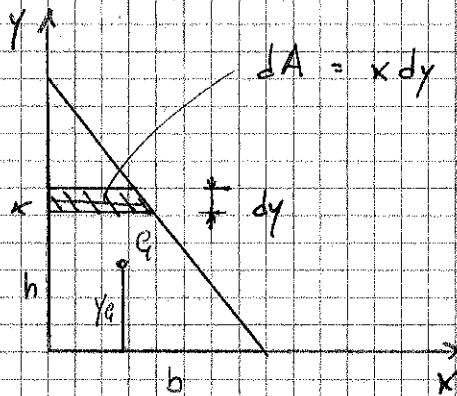
\downarrow
 cost.

$\hookrightarrow S_{y_2} = S_{y_1} + |d \cdot A|$

La termine di trasposizione

• OVRAMENTE, se y_1 è baricentrico (passa per G), $S_{y_1} = 0$!

TRIANGOLO



$$S_x = \int_A y dA$$

$$x = b \left(1 - \frac{y}{h}\right)$$

$$|S_x| = \int_0^h y b \left(1 - \frac{y}{h}\right) dy =$$

$$|S_x| = \frac{bh^2}{2} - \frac{b}{h} \frac{h^3}{3} = bh^2 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right] = \left| \frac{bh^2}{6} \right|$$

$$|\bar{y}| = \frac{S_x}{A} = \frac{bh^2}{6} \cdot \frac{2}{bh} = \left| \frac{h}{3} \right|$$

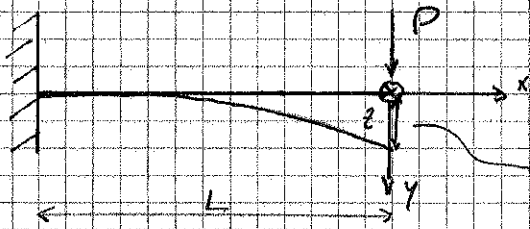
$$|S_y| = \int_A x dA = \left| \frac{hb^2}{6} \right|$$

$$|\bar{x}| = \frac{S_y}{A} = \left| \frac{b}{3} \right|$$

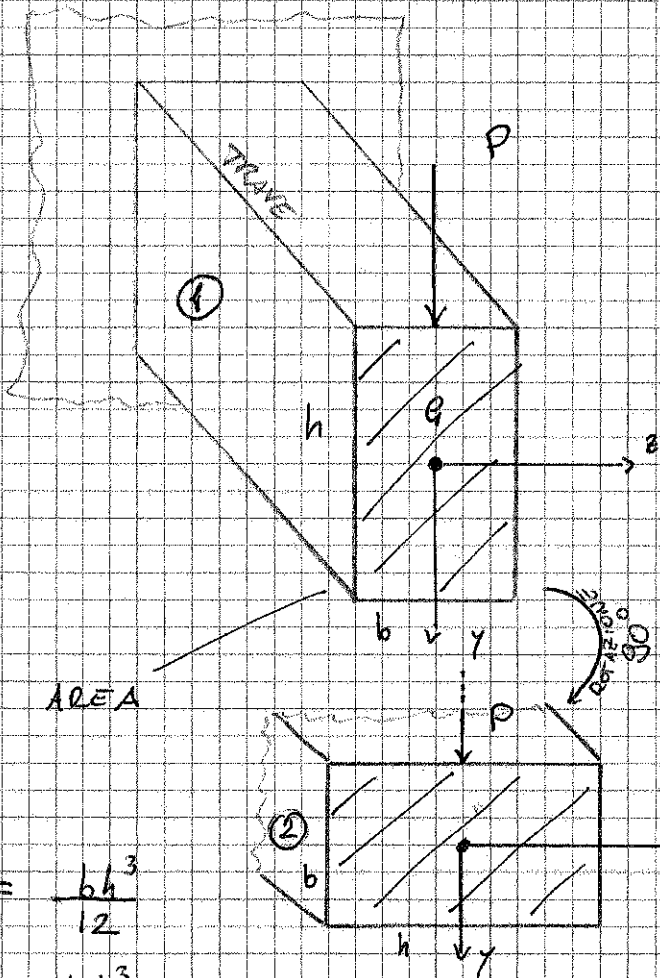
MOMENTI DI INERZIA

→ rispetto ad un asse giacente nel piano della figura.

oppure → **POLARE**: se rispetto ad un asse perpendicolare al piano della figura (solida assiale simmetrica)



SISTEMA DEFORMABILE:
 f_{max} (= freccia massima)
 = spostamento max rispetto alla posizione indeforata in direzione della forza applicata



(poiché 2 assi giacciono sul piano della sezione, A, ovvero 2 momenti di inerzia:
 I_y, I_z)

$$f_{max} = \frac{PL^3}{3EI_z}$$

dipende da caratteristiche materiali
 momento d'inerzia rispetto all'asse che giace sul piano della sezione, ma perpendicolare al carico applicato

molla a balestra

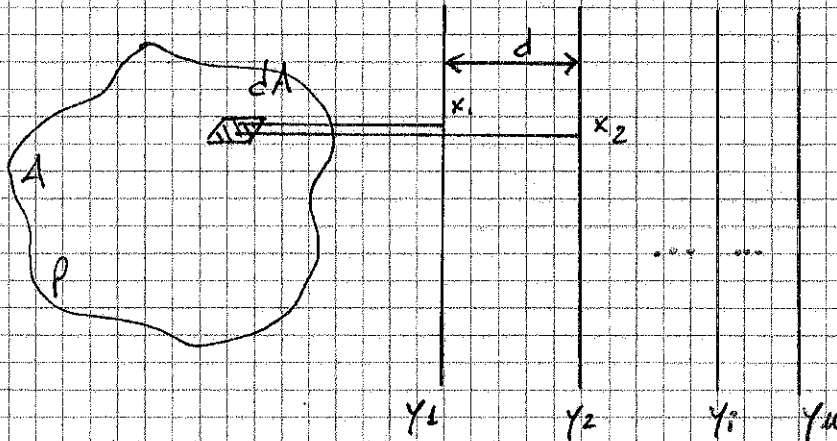
① $I_z = \frac{bh^3}{12}$
 ② $I_z = \frac{hb^3}{12}$

↳ $f_{max} \text{ ①} < f_{max} \text{ ②}$

- teorema trasposizione dei momenti di inerzia (applicato solo a masse d'inerzia rispetto assi nel piano)

stata figura A omogenea e isotropa:

(vedi rispetto a masse estese)



$$I_{y_1} = \int_A x_1^2 dA$$

$$I_{y_2} = \int_A x_2^2 dA = \int_A (x_1 + d)^2 dA =$$

$$= \underbrace{\int_A x_1^2 dA}_{I_{y_1}} + \underbrace{\int_A d^2 dA}_{d^2 \cdot A} + 2 \underbrace{\int_A x_1 d dA}_{2 \cdot S_{x_1} \cdot d}$$

↓
perché omogenea e isotropa

↓
Momento statico

$$I_{y_2} = I_{y_1} + 2S_{x_1} d + d^2 A$$

teor. utile quando:

I_{y_2} SE y_1 passa per G (BARICENTRO), perché il momento statico $S_{y_1} = 0$.

La formula si riduce a $\rightarrow I_{y_2} = I_{y_1} + \textcircled{Ad^2} \rightarrow$ termine di trasposizione

② cambiano gli intervalli di integrazione:

$$|I_{x_0}| = \int_x y^2 dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} y^2 b dy = \left. \frac{y^3}{3} b \right|_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} = \left| \frac{bh^3}{12} \right|$$

$$|I_{y_0}| = \left| \frac{bh^3}{12} \right|$$

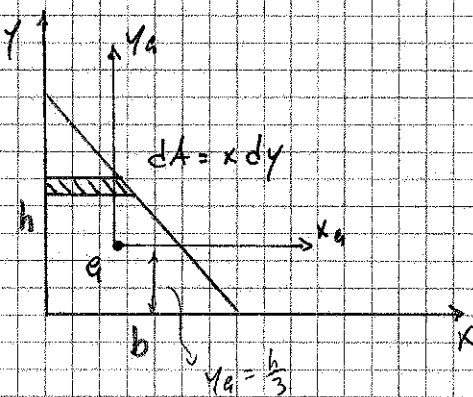
③ teorema di trasposizione se io ho I_{x_0} noto e voglio calcolarmi I_x (rispetto alla base del rettangolo)

$$I_x = I_{x_0} + A d^2$$

$d = y_0 = \left(\frac{h}{2}\right)^2$

$$I_x = \frac{bh^3}{12} + bh \cdot \frac{h^2}{4} = \frac{bh^3}{3}$$

TRIANGOLO



$$x = b \left(1 - \frac{y}{h}\right)$$

$$x = b - \frac{b}{h} y$$

$$y = -\frac{b}{h} x + h$$

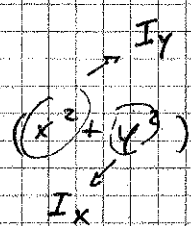
$$|I_x| = \int_A y^2 dA = \int_0^h y^2 b \left(1 - \frac{y}{h}\right) dy =$$

$$= b \left[\frac{h^3}{3} - \frac{1}{h} \frac{h^4}{4} \right] = \left| \frac{bh^3}{12} \right|$$

$$|I_y| = \left| \frac{bh^3}{12} \right|$$

momento d'inerzia diametrico:

$$I_d = \dots$$

$$I_p = \int_A r^2 dA = \int_A (x^2 + y^2) dA$$


$$I_x = I_y = I_d \rightarrow \text{ASSIAL SIMMETRICO}$$

Notiamo che:

$$I_p = I_y + I_x = 2 I_d \rightarrow \text{quindi:}$$

SEZIONE PIENA \rightarrow

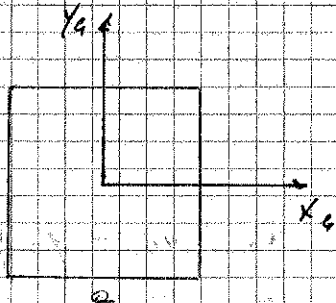
$$I_d = \frac{\pi D^4}{64}$$

SEZIONE CAVA \rightarrow

$$I_d = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4)$$

abbiamo dunque evitato l'integrazione del settore circolare.

QUADRATO



$$I_{x_c} = I_{y_c} = \frac{a^4}{12}$$

DIFFERENZA

Il uso la differenza è comodo quando esiste un'asse comune fra il PIENO e il VUOTO.

In questo caso l'asse comune è l'asse di base X, quindi possiamo trovare una volta sola.

$$I_x = I_{x_{PIENO}} - I_{x_{VUOTO}}$$

$$I_x = \frac{BH^3}{3} - \frac{(B-b)bh^3}{3}$$

$$\underline{I_x} = I_{x_c} + Ad^2 \rightarrow \text{teor. di trasposizione}$$

$$I_{x_c} = I_x - A_{tot} \cdot y_c^2 \rightarrow \text{quindi di fatto è la via più breve}$$

Chiediamo la geometria delle travi:

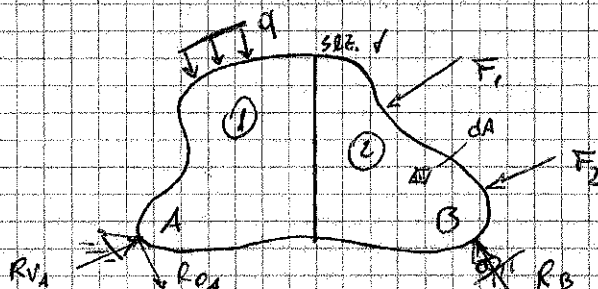
CALCOLO degli SFORZI

sforzi = forze interne. N, Nu

- def. FORZE INTERNE
- Solido di De Saint Venant (TRAVE)
- FORZE INTERNE • SFORZI $\begin{cases} 2D & \text{trave} & \text{così} & \text{più} \\ 3D & & & \text{spaziale} \end{cases}$
- CONVENZIONI

struttura qualunque vincolata, quindi isostatica:

→ def. FORZE INTERNE



SE vedo e vincolo la mia trave esternamente, e applico un peso (F) alla sua estremità, si creano delle "perturbazioni di equilibrio locale" (cerchiate in rosso).

De Saint Venant dimostra che: se mi allontano SA nel soldo, sia nell'applicare il carico alla trave di una distanza pari al LATO maggiore della trave dalle zone perturbate, b) la TRAVE, il solido di Saint Venant rimane indisturbato.

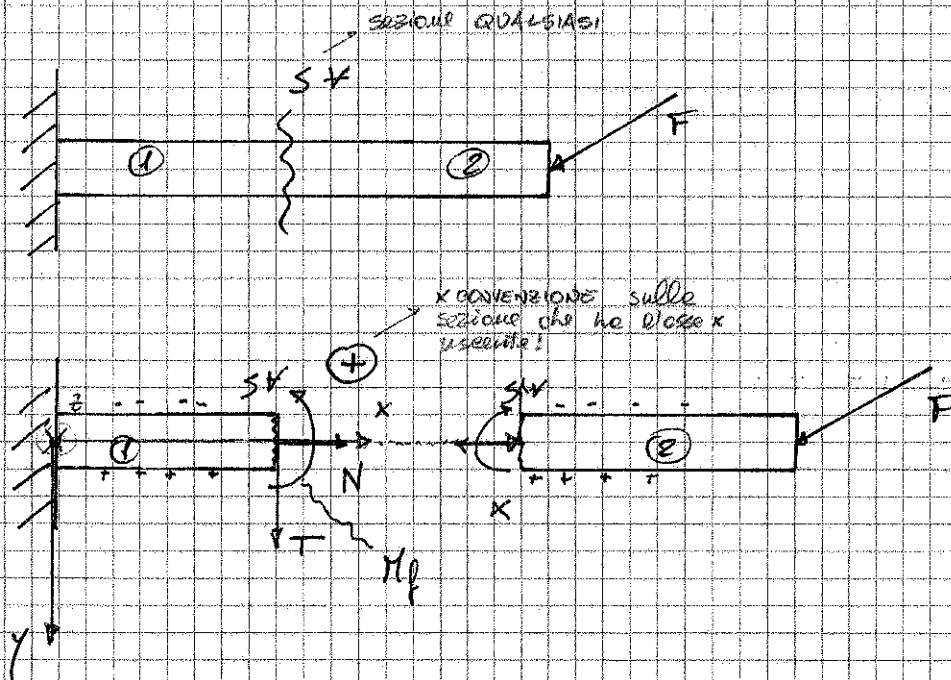
→ sforzi 2D (nel PIANO)

$$u = 3 \quad x, y, \sigma_z$$

quindi, x calcolare gli sforzi avrà bisogno di 3 eq. di equilibrio:



→ segni secondo una precisa convenzione.



N = SFORZO NORMALE:

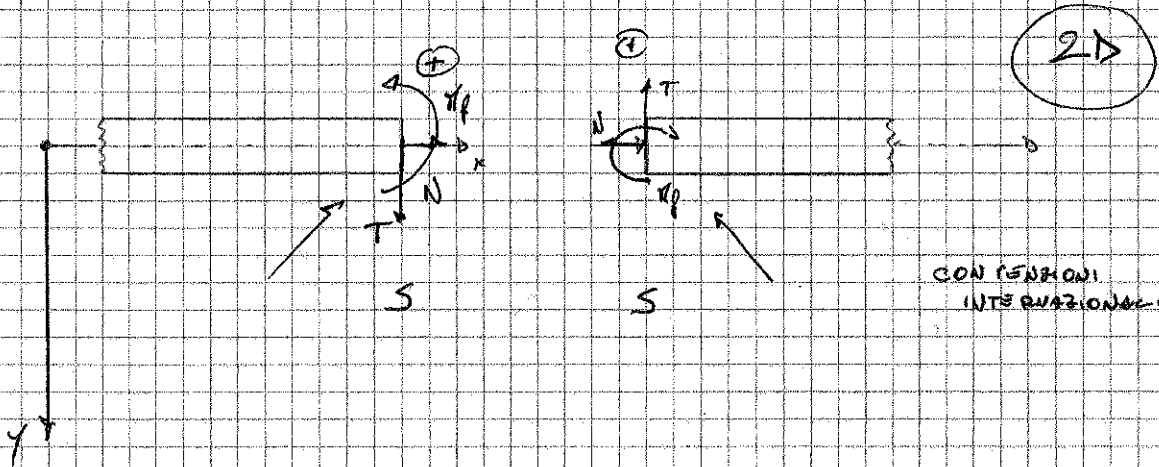
è positivo quando ha lo stesso verso dell'asse x e con il parallelo.

Mette in TRAZIONE la trave, è una forza baricentrica. se POSITIVO, tira tutte le fibre del solido nello stesso modo v.k. omogeneo e isotropo. se NEGATIVO comprime la trave.

T = SFORZO di TAGLIO:

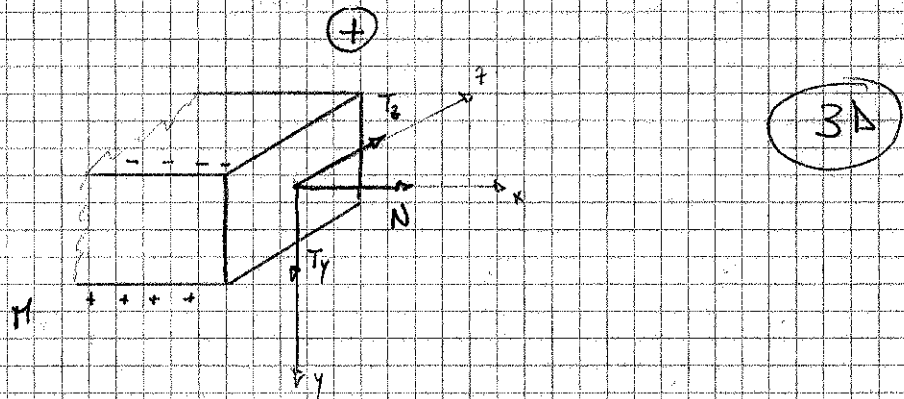
è una forza che gioca sul piano della trave, della sua sezione, tende a far scivolare una sull'altra le forze di una sezione della trave.

8/11/2011



convenzioni:

- sforzo normale positivo se diretto come l'asse x sulla faccia che ha l'asse x uscente.
- sforzo di taglio positivo se diretto come l'asse y .
- = * • il momento flettente positivo se mette in trazione le fibre della y positiva.



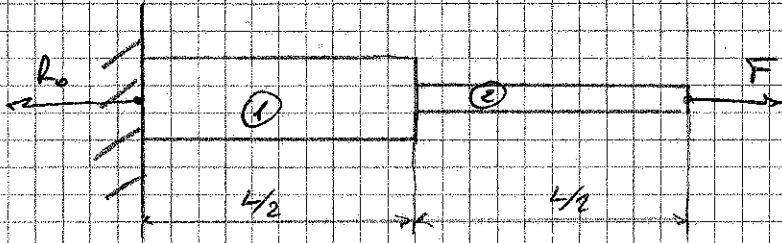
Nel caso tridimensionale agiscono 6 forze:

N	sforzo normale	M_z	momento flettente att. z
T_y	sforzo di taglio lungo y	M_y	momento flettente att. y *
T_z	sforzo di taglio lungo z	M_x	momento torcente

3) casi di caricate:

1) CARICATA: quando cambia le condizioni di equilibrio (interno)

2) CARICATA: quando cambia la geometria.



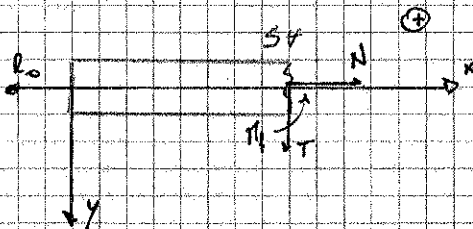
$R_0 = F$
cambia la geometria

3) CARICATA: quando cambia il materiale



$R_0 = F$

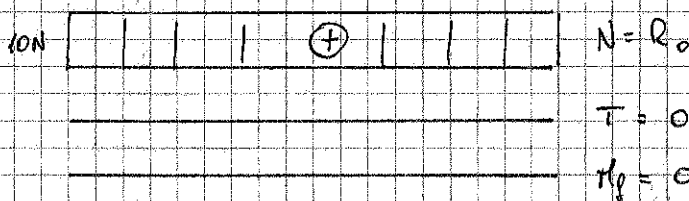
① prendo in questo caso una sezione qualunque sulla trave:



$\circlearrowright N - R_0 = 0 \rightarrow \boxed{N = R_0}$
 $\circlearrowdown T = 0$
 $\circlearrowright M_f = 0$

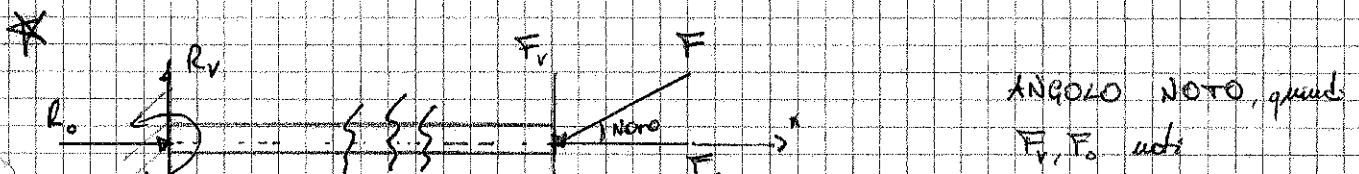
Distribuzione degli sforzi:

fecero una linea delle dimensioni della trave intera verde

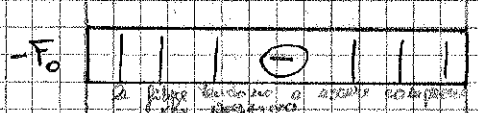
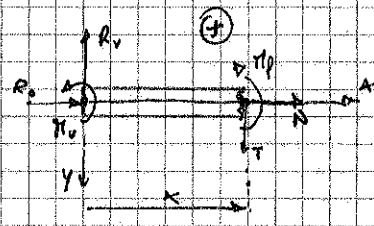


SE ho un bar perfetto da bar curva:

$\left\{ \begin{array}{l} N = F \\ T = 0 \\ M_f = 0 \end{array} \right.$



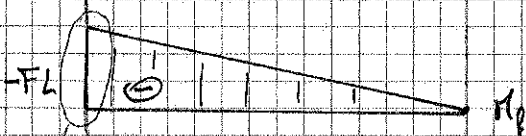
$$\begin{cases} R_o = F_o \\ R_v = F_v \\ M_v = F_v \cdot L \end{cases}$$



$R_o + N = 0 \quad \boxed{N = -F_o}$



$T - R_v = 0 \quad \boxed{T = F_v}$



poniamo il momento rispetto al punto nella sezione. Reagendo come unica incognita M_o ! che T ha valore nullo.

$M_p - R_v x + M_v = 0$

$M_p = R_v x - M_v \rightarrow \boxed{M_p = F_v x - F_o L}$

$\boxed{M_p = -F_v(L-x)}$

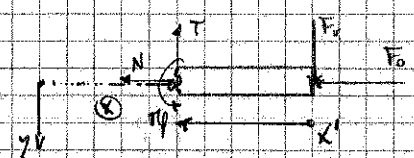
M_p POSITIVO \times convenzione verso il Basso!

si un eq. di una retta. x il mio disegnamo considero gli estremi della CAMPANA, cioè:

- $x = 0$
- $x = L$

M_p , per $x \rightarrow L$, $\bar{v} = 0$, come era intuibile sin dall'inizio, o come mette in evidenza questa rappresentazione della porta finale infinitesime della TRAVE.

PARTENDO INVECE DA dx :

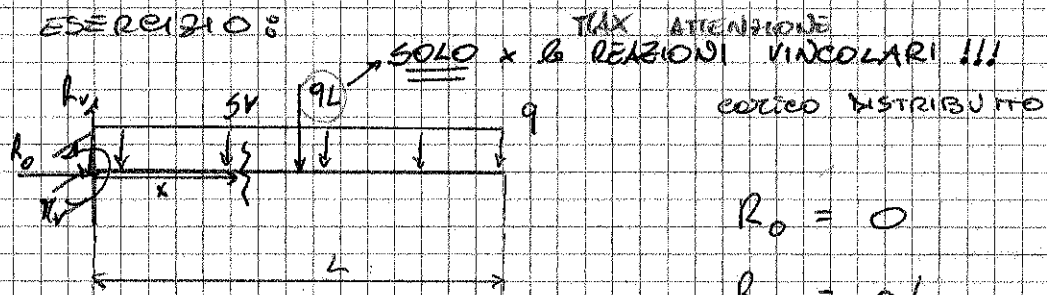


$\boxed{x' = L - x}$

Utilizzo la coordinate fittizio x' che avendo origine nel punto di applicazione del carico, QUANDO il calcolo, lo uso eq. lo calcolerò fra $x' = 0$ e $x' = L$.

la espressione nella pag. seguente...

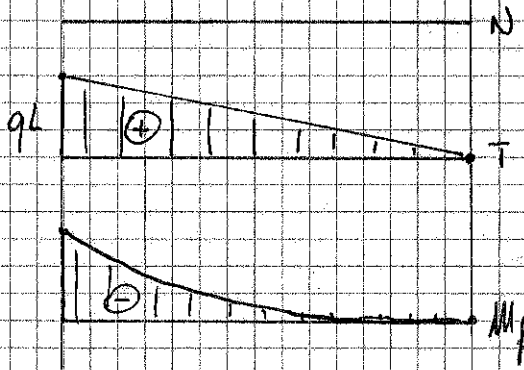
2° ESERCIZIO:



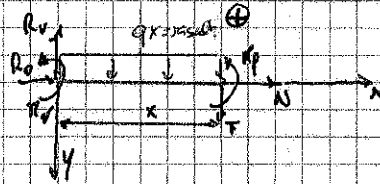
$$R_0 = 0$$

$$R_v = qL$$

$$H_v = \frac{qL^2}{2}$$



REAZIONE FINO ALLA SEZIONE:



ha x risultato del carico distribuito vale qx , applicata in $(x/2)$, perciò vado a scrivere una legge di variazione.

$$N = 0$$

$$T - R_v + qx = 0 \rightarrow$$

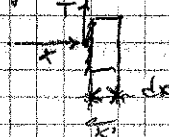
$$T = q(L-x) \quad \text{il TAGLIO non è costante.}$$

QUANDO siamo in presenza di un carico distribuito, l'andamento dello sforzo di TAGLIO è LINEARE. Po disegniamo considerando i capi estremi della CAMPATA $x=0, x=L$

$$T_{(x=0)} = qL$$

$$T_{(x=L)} = 0$$

questo è ingenerosamente dimostrato se io vado a considerare un intorno dx infinitesimo di $x=L$:



$$x' \rightarrow 0 \quad T = qx' = 0$$

$$\uparrow) \quad H_v + H_f - R_v x + \frac{qx^2}{2} = 0$$

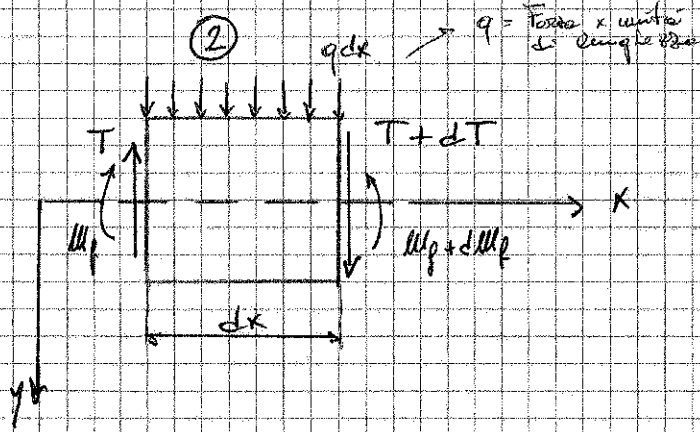
$$H_f = -\frac{qL^2}{2} + qLx - \frac{qx^2}{2} = \left| qLx - \frac{q}{2}(L^2 + x^2) \right|$$

La la cui derivata ci dà T.

è disegnare il grafico bisogna fare uno studio di funzioni, nella specifico la CONCAVITÀ.

OPPURE calcolo un punto in mezzo e trovo la concavità.

NOVE il tagli va a zero cioè una TANGENTE ORIZZONTALE.



Con carico distribuito, unica differenza è che il taglio tende ad incrementare il suo valore - $(T+dT)$

Posso in questo caso scrivere 2 equazioni di equilibrio, una alla traslazione, una alla rotazione.

① ↓ $T + dT + q dx - T = 0$

$$\boxed{\frac{dT}{dx} = -q}$$

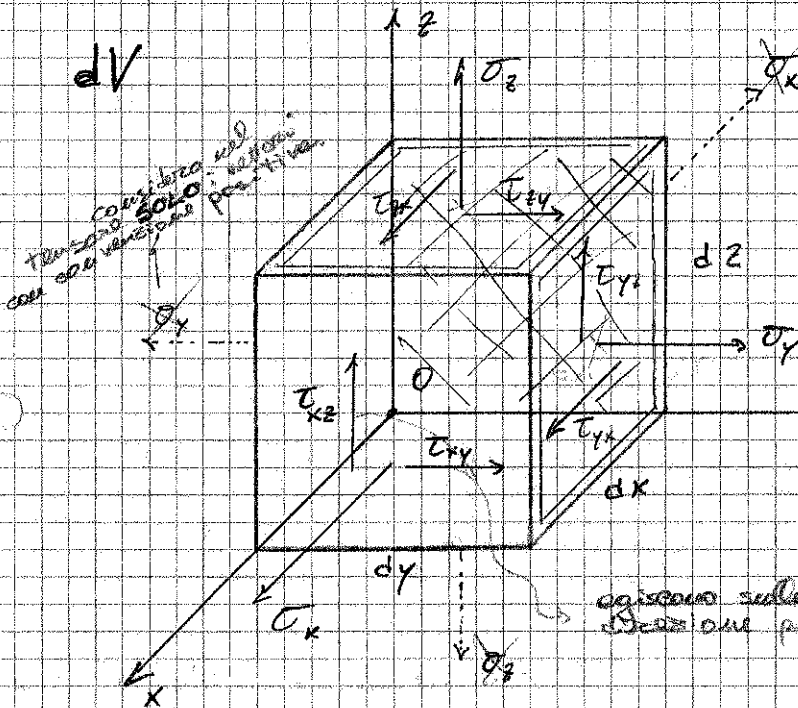
②) $M_f + dM_f - M_f - (T+dT) dx - \frac{q dx^2}{2} = 0$ tendono a zero

oppure un infinitesimo di ordine superiore che in campo ingegneristico può essere trascurato

$$\boxed{\frac{dM_f}{dx} = T}$$

Nello spazio ho 6 coordinate, 6 spazii = 6 componenti di tensione.
 $n = 6$ spazii = 6 comp. tens. spaziosi = 6 incognite

Per andare a calcolare le componenti della tensione, consideriamo il volumetto dV



9 componenti di tensione

$3 \sigma_i$	$6 \tau_{ij}$
$3 \tau_{ij}$	3

normale al piano
 direzione di σ
 $\tau_{ij} = \tau_{ji}$

nel caso di un solo pedice, il significato raddoppia i rami

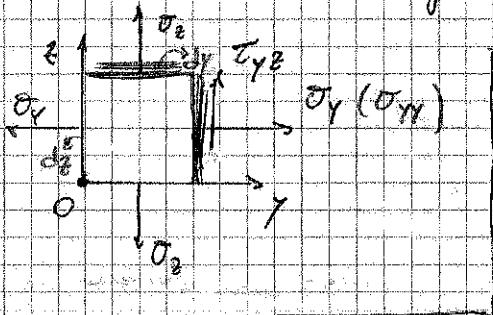
agiscono sulla faccia con l'asse x e hanno direzioni positive degli altri 2 assi.

Utilizziamo le stesse convenzioni della trave:



asse x , entrante o uscente
 lo sforzo N è diretto lungo x
 lo sforzo T è diretto lungo y

consideriamo la faccia evidenziata in rosso *:



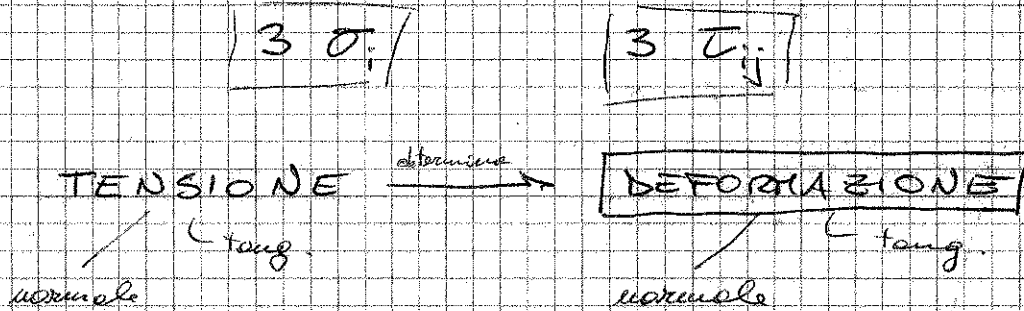
TENSORE delle TENSIONI

	x	y	z	(+) conv. positiva
x	σ_x	τ_{yx}	τ_{zx}	!
y	τ_{xy}	σ_y	τ_{zy}	
z	τ_{xz}	τ_{yz}	σ_z	

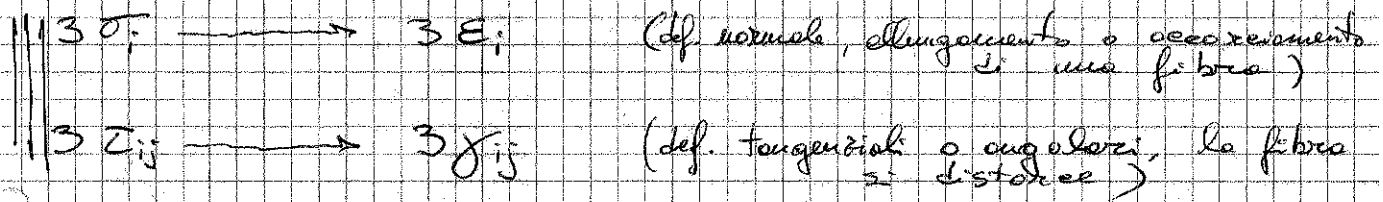
Leggiamo a colonna.

9 CASELLE da andare a riempire con le tensioni che:

- nella 1^a colonna (x) agiscono sulla faccia che ha come perpendicolare l'asse x , uscente (conv. positiva)
- nella 1^a riga (x) mettiamo tutti i vettori tensione paralleli con direzione x .

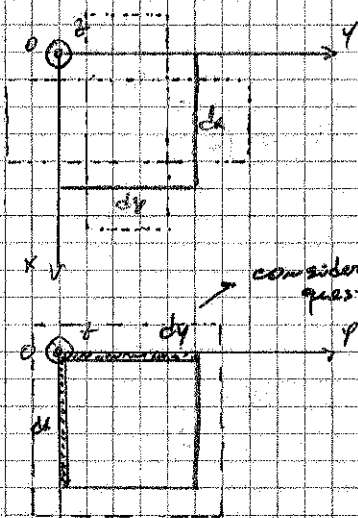


Le deformazioni NON hanno unità di misura.



Le deformazioni devono essere **CONGRUENTI**, cioè il **contorno** nel processo di deformazione.

Le deformazioni si fero fino alla rottura. Se c'è rottura non c'è deformazione.

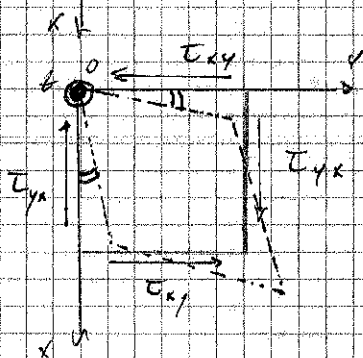


deformazioni di tipo E_x, E_y

considero le deformazioni di questi 2 lati

deformazioni di tipo E_x, E_y

ad esempio un elemento infinitesimo di una membrana che viene messo sotto pressione dall'interno.



deformazioni di tipo γ_{ij}

per comodità di apprezzamento abbiamo ruotato il nostro elemento infinitesimo dall'origine degli assi.

dato dalla somma di 2 angoli di distorsione

• il primo che ha evidenziato il legame fra tensione e deformazione fu:

HOOKE nel 1678

la 1^a legge di proporzionalità: lineare fra:

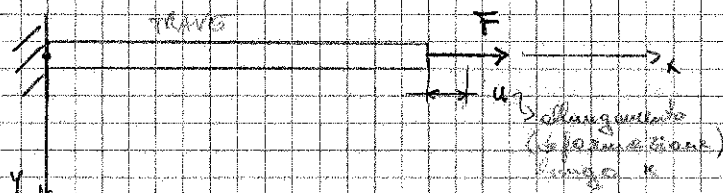
$F \rightarrow u$
 $\sigma \rightarrow \epsilon$

forza \rightarrow spostamento
 tensione \rightarrow deformazione

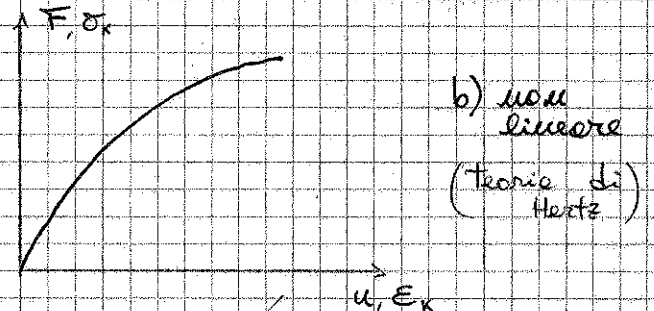
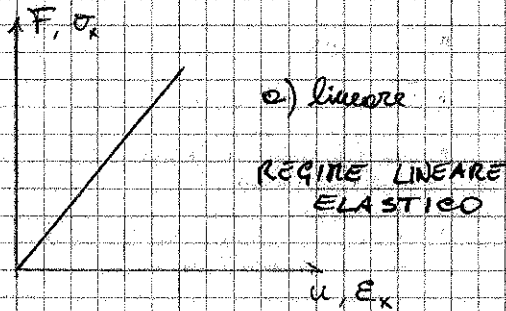
22/11/2011

Breve riassunto delle leggi fondamentali: (impostate)

→ LEGAME ELASTICO



$$E_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$



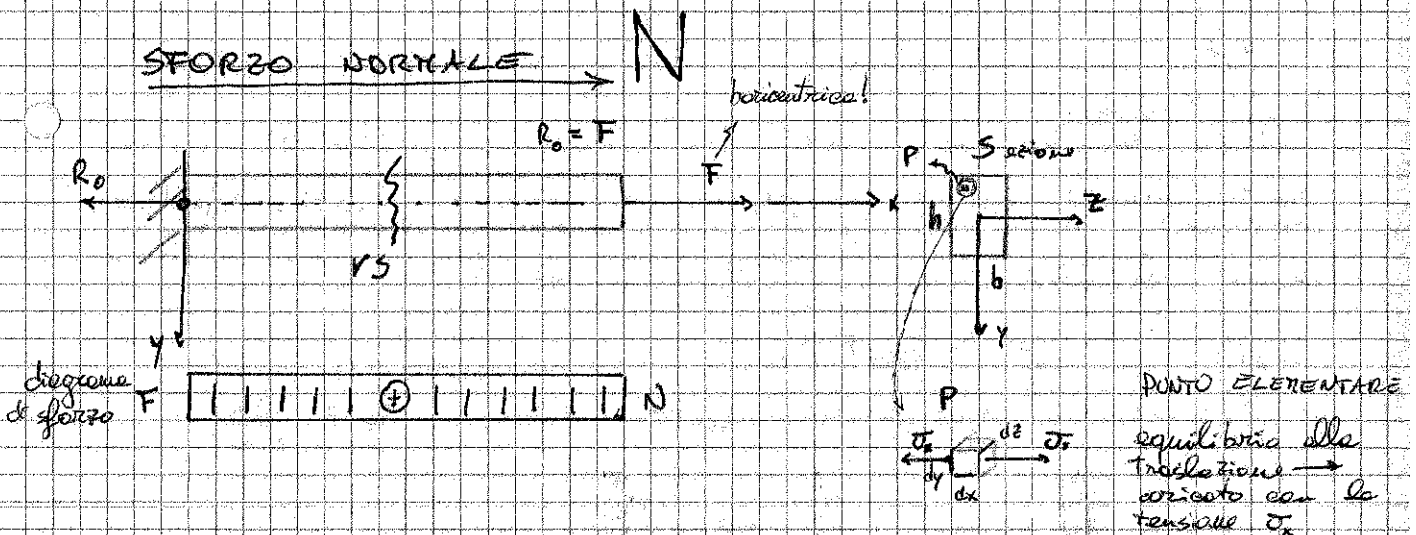
(studio nei prossimi anni)

- la variabile TEMPO non è importante.
- esiste un totale recupero allo scarico, cioè dopo il carico la struttura ritorna nella condizione di partenza.
- se il fenomeno avviene senza rottura dei vincoli atomici.

• Ora, attraverso un'analisi approfondita della forza in gioco nella TRAVE, andremo a definire un coefficiente di sicurezza.

[N], [Nm]	[N/mm ²]	dimensioni	[mm], [angoli]
sforzi	tensioni	deformaz.	spostamen.
$N \rightarrow$	$\sigma_x = \frac{N}{A}$	$\epsilon_x = \frac{\Delta L}{L} = \frac{N}{EA}$	$\Delta L = \frac{N}{EA} L = \frac{\sigma_x}{E} L = \epsilon_x L$
$M_t \rightarrow$	$\tau = \frac{M_t \cdot r}{I_p}$	$\gamma = \frac{M_t \cdot r}{G I_p}$	$\Delta \theta = \frac{M_t \cdot L}{G I_p}$
$M_f \rightarrow$	$\sigma_x = \frac{M_f \cdot y}{I_z}$	$\epsilon_x = \frac{M_f \cdot y}{E \cdot I_z}$	$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M_f}{E \cdot I_z}$ <i>freccia</i>
$T \rightarrow$	$\tau_{xy} = \frac{T \cdot S_z^*}{I_z \cdot \cos \alpha}$	$\gamma_{ij} = \frac{\tau_{ij}}{G}$	TRASCURABILE

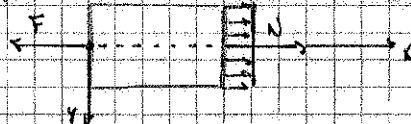
Ad ogni tipo di sforzo corrispondono...

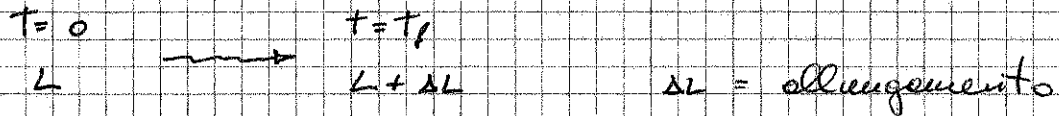


Ogni sforzo, quindi ogni forza interna sulla sezione, è la risultante delle corrispondenti distribuzioni di tensioni.

Dimostreremo che la tensione σ_x nella trave è uguale in ogni punto.

In grandimento sez. di sx :





$$\Delta L = \int_0^L E_x dx \rightarrow \text{ma poiché } E_x = \text{cost.} \rightarrow \Delta L = E_x L$$

$$\frac{\Delta L}{L} = E_x = \frac{\text{allungamento totale}}{\text{lunghezza iniziale}} \quad E_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

Orizzontale se $\sigma_x = \text{cost.}$ e pure $E_x = \text{cost.}$ esiste un termine di proporzionalità fra σ_x e ϵ_x perché le sezioni rimangono piane

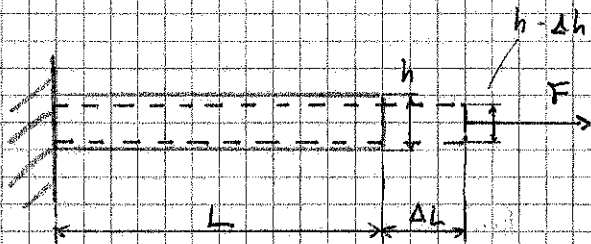
$$\sigma_x = E E_x$$

modulo elastico
o modulo di Young

lineare, elastico, met. omogeneo, isotropo
LEGGE DI HOOKE MONODIMENSIONALE

$$[E] = \frac{N}{\text{mm}^2} \rightarrow \text{per gli acciai, mediamente } = 210'000 \text{ MPa}$$

($\epsilon = 83'000 \text{ MPa}$)
vedi dopo



$$E_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$E_y = - \frac{\Delta h}{h}$$

perché si ACCORCIA

$$E_y = - \nu E_x$$

coefficiente di Poisson

legge di proporzionalità

$$\nu = - \frac{E_{\text{trasm}}}{E_{\text{long}}}$$

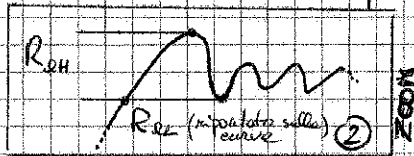
[adimensionale] \rightarrow per gli acciai $\nu = 0,3$

Le schiume elastiche, inventate negli anni '90, sono l'unico o il primo materiale ad avere ν NEGATIVO. È così se messo in trazione aumenta la sezione! Non è omogeneo e isotropo aumento di volume per via di una distorsione della cella.

- ④ A questo punto, per diminuire il carico, aumenta la deformazione, finché il provino non si rompe di schianto
 ↳ FASE DELLA STRIZIONE o NECKING
 ↳ Molto evidente nei materiali dotti, trascurabile nei materiali duri.

- Il materiale si caratterizza prima di tutto col modello elastico $\rightarrow E$ (pendenza della tangente alla prima parte della curva)

- Poi col valore massimo che raggiunge subito dopo la fase di deformazione lineare
 CARICO DI SNERVAMENTO SUPERIORE $\rightarrow R_{eH}$ [N/mm²]
 ↳ spostamento dal carico elastico, ovvero finisce la def. lineare elastica e inizia quella plastica.



$\rightarrow (R_{eL})$ dove finisce proprio il regime elastico (POCO USATO)

- Infine col carico di rottura del materiale $\rightarrow R_m$
 Cioè il carico raggiunto dal provino prima della STRIZIONE

{ MODELLO ELASTICO $\rightarrow E$
 { CARICO DI SNERVAMENTO $\rightarrow R_{eH}$
 { CARICO DI ROTTURA $\rightarrow R_m$

Riguardo la DUTTILITA', in percentuale:

$$A(\%) = \frac{L_u - L_0}{L_0}$$

L_0 → lunghezza iniziale del tratto calibrato
 L_u → lunghezza ULTIMA → NON stile !!!
 ○ ULTIME → NON CONFONDERE

• Effetto variazione di temperatura ΔT

$\Delta L_T \rightarrow$ allungamento per un incremento di temperatura

$$\begin{cases} \Delta L_T = \alpha L \Delta T \\ E_{XT} = \frac{\Delta L_T}{L} = \alpha \Delta T \end{cases}$$

$$E_X = \frac{\Delta L}{L}$$

ADIMENSIONALE

in regime lineare vale il principio di sovrapposizione degli effetti.

$\alpha =$ coeff. di dilatazione termica LINEARE

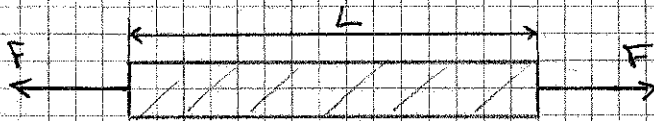
$$[\alpha] = \frac{1}{^\circ C} = \frac{1}{K}$$

$$\alpha = 0,00012 \frac{1}{^\circ C} \quad \text{Acciaio}$$

$$\alpha = 0,00017 \frac{1}{^\circ C} \quad \text{INOX}$$

la trave molla

(ASTA per chi sottoposta unicamente a sforzo normale - (TIRANTE in qsto caso))



$$\Delta L = E_X L = \frac{\sigma_X}{E} L$$

$$\frac{\Delta L}{L} = E_X$$

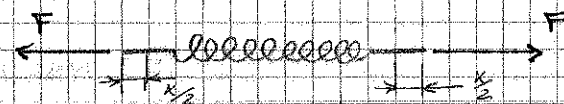
$$\sigma_X = E E_X$$

$$\Delta L = \frac{N}{AE} L$$

SPOSTAMENTO

$$\frac{\Delta L}{L} = E_X = \frac{N}{AE}$$

immaginiamo quindi la trave come una molla:



$$F = K X$$

\hookrightarrow rigidità

forza elastica generata dall'asta a seguito di una deformazione in regime lineare elastico.

RIGIDEZZA ELEMENTO ASTA

$$F = K \cdot X$$

$$[K] = \frac{N}{mm}$$

$$N = \frac{AE}{L} \Delta L$$

$$\left[\frac{AE}{L} \right] = \frac{mm^2 \cdot N}{mm} = \frac{N}{mm}$$

Legge di Hooke per le tensioni tangenziali τ

- esiste una proporzionalità diretta fra:
la tang. tang. e la corrispondente deformazione angolare γ

$$\tau = G \gamma$$

G = modulo di elasticità tangenziale

29/11/2011

$$\hat{PP}' = \gamma dl = r d\theta \quad *$$

In campo lineare elastico, dove vale il principio di sovrapposizione degli effetti, vale la legge di Hooke per le tensioni tangenziali

$$\tau = G \gamma \quad **$$

G = modulo di elasticità tangenziale

(modulo elastico per gli acciai $E = 210'000 \text{ N/mm}^2$)

$$\rightarrow G = 83'000 \text{ N/mm}^2$$

con G ricavabile come $\rightarrow \left| G = \frac{E}{2(1+\nu)} \right|$ (ν = coeff. di poisson)

relazione analitica
(ricavabile in modo analitico)
(ricavata dalla prova di trazione, e G è sperimentale tramite questa relazione)

Ora sostituisco in $*$ il valore di G ricavato da $**$:

$$\frac{\tau}{G} dl = r d\theta \rightarrow$$

$$\tau = \frac{d\theta}{dl} r G$$

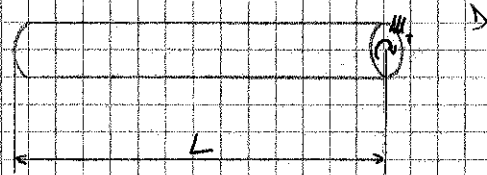
$\left[\begin{array}{l} \tau, M_t \\ \frac{d\theta}{dl} \end{array} \right]$ 2 relazioni correlate

\rightarrow da questa relazione vado a ricavare 2 relazioni fondamentali
La variazione è lineare con r .

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta L} = \frac{M_t}{G I_p}$$

$$\Delta L = \text{lunghezza finta} = L$$

$$\Delta\theta = \frac{M_t}{G I_p} \cdot L$$



Rigidità (in caso di molla):

$$\Delta\theta \cdot K = M_t$$

$$\Delta\theta \cdot \frac{G I_p}{L} = M_t$$

$$L \cdot \frac{N}{mm^2} \cdot \frac{mm^4}{mm^2} = N \cdot mm$$

→ lega il momento torcente M_t all'angolo di torsione $\Delta\theta$ (SPOSTAMENTO)

SE la barra è piena o cava abbiamo le seguenti relazioni riguardo il momento d'inerzia polare:

$$\begin{cases} I_p = \frac{\pi D^4}{32} \\ I_{p_c} = \frac{\pi}{32} [D^4 - d^4] \end{cases}$$

[la molla è una barra di torsione avvolta o alata]

Ora per ricavare la 2ª relazione che lega τ o M_t , sostituisco la ① nella ②:

$$\textcircled{1} \rightarrow \textcircled{2} \quad \frac{\tau}{r} = \frac{M_t}{r I_p} \rightarrow \boxed{\tau = \frac{M_t r}{I_p}} \quad \text{ABBIAMO RICAVATO LA 2ª RELAZIONE}$$

$$\bullet \quad \frac{\Delta\theta}{\Delta L} = \frac{M_t}{G I_p}$$

$$\bullet \quad \tau = \frac{M_t r}{I_p}$$

infine, per definire γ (la def. angolare) utilizzo la legge di Hooke $\gamma = \frac{\tau}{G}$:

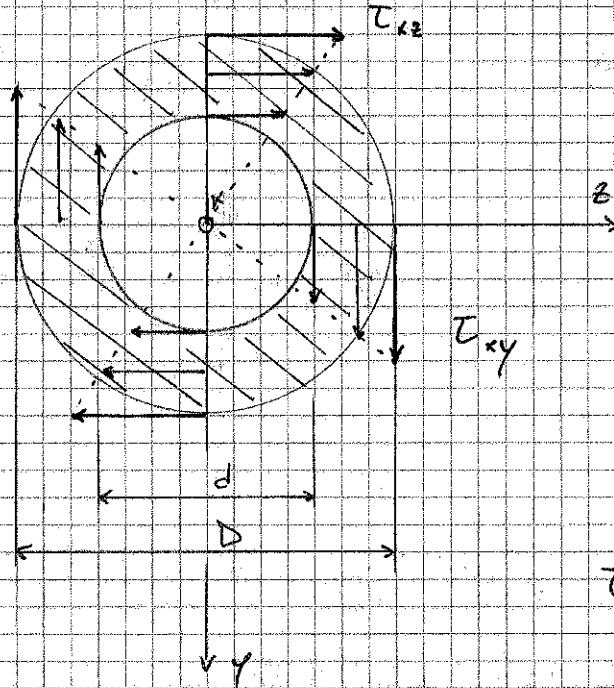
$$\bullet \quad \gamma = \frac{M_t r}{G I_p}$$

QUESTE RELAZIONI RICHIEDONO LE 3 COLONNE CORRISPONDENTI A UN MOMENTO TORCENTE.

Poiché, come è evidente dalla figura, le fibre prossime all'asse longitudinale passante per il centro dello cozziale, sono poco sfruttate nella torsione, e poiché la barra piena ha un costo maggiore, sono spesso utilizzate nella trasmissione:

barra cava

di diametro esterno = D
 " interno = d
 spessore = s



• alberi di trasmissione a base centrifugata sono cavi per il peso e per simmetria di concetto di "trave a uniforme resistenza"

il materiale viene molto più sfruttato!

da $T_{max} = \frac{M_t \tau_{max}}{I_p}$

$$T_{max} = \frac{M_t \frac{D}{2}}{\frac{\pi}{32} (D^4 - d^4)} = \frac{16 M_t D}{\pi (D^4 - d^4)}$$

UNIFORME RESISTENZA = tensioni costanti!
 ↓
 (concetto ideale)

(modello di resist. a torsione (inverso))

Barra cava, compressa, 50% di resistenza

(per un modello a trazione)

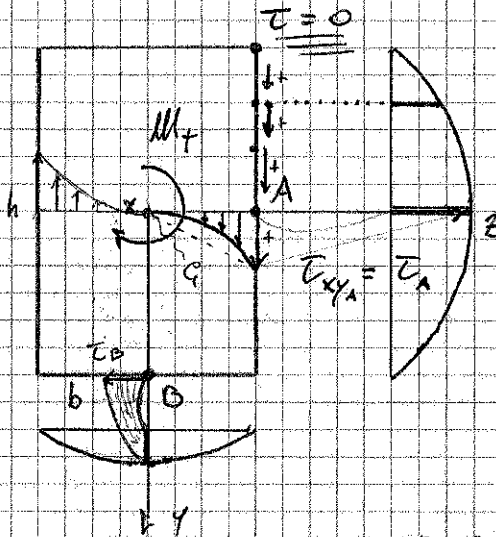
In fine, se immagino di tagliare la barra a metà con un piano xy , è presente una distribuzione di τ_x (in verde) che non interessa al progettista MA esiste.

III, TORRENTO TORCENTE X SOLIDO NON ASSIALSIMMETRICO

Nel caso di solidi NON assialsimmetrici, il momento torcente genera tensioni elevate anche per piccoli valori di quest'ultimo. Le sezioni, inoltre, non si mantengono piane durante l'applicazione del momento torcente.

Quindi: • NON c'è più linearità nell'andamento delle τ o partire dal bordo esterno al baricentro della sezione.
In questo caso, l'andamento di τ nel tratto QA seguirà una curva del secondo ordine, NON più una retta.

LE SEZIONI SI ACCARTOCCIANO!



- $\tau \parallel$ al bordo
- $\tau \neq$ costanti lungo il bordo

$\tau_{max} = \tau_A$ ovvero nella mezzina del bordo più lungo

$\tau_B = \tau_A \cdot \eta \quad (\eta < 1)$

Il valore massimo è rapp. sui moduli:

$\tau_A = \frac{M_t}{W_t} = \frac{M_t}{\alpha h b^2}$

I valori di α sono ricavati sperimentalmente:

$h/b = 1$	$h/b = 2$	$h/b = \infty$
$\alpha = 0,208$	$0,246$	$0,333$

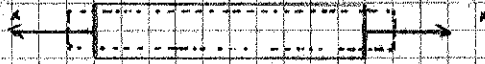
* L'andamento delle τ lungo il bordo è parallelo al bordo stesso, MA non sono costanti lungo il bordo

Nei moduli è presente una parabola lungo i bordi della sezione (in verde) che indica la variazione dell'ampiezza delle τ lungo il lato corrispondente; non c'è nulla riguardo la direzione che \rightarrow *

$$\sigma_x = E \epsilon_x$$

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad (1^{\text{a}} \text{ riga, } 1^{\text{a}} \text{ COLONNA})$$

Ma poiché la trave è trazione varia anche la lunghezza lungo y (per il coeff. di poisson):



$$\epsilon_y = -\nu \epsilon_x$$

$$\epsilon_y = -\frac{\nu \sigma_x}{E} \quad (2^{\text{a}} \text{ riga, } 1^{\text{a}} \text{ COLONNA})$$

$$\epsilon_z = -\frac{\nu \sigma_x}{E} \quad (3^{\text{a}} \text{ riga, } 1^{\text{a}} \text{ COLONNA})$$

$\frac{1}{E}$ sulla DIAGONALE, poiché ovviamente il mio
 xax o momento continuo a vedere per $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z \rightarrow$
 \rightarrow completo per sé la restanti esatta.

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E} \sigma_y - \frac{\nu}{E} \sigma_z$$

↳ Cosa succede?

- la fibra neutra NON si muove
- le sezioni si mantengono PIANE
- le sezioni sono tra loro ruotate rigidamente mantenendosi PERPENDICOLARI alla fibra neutra.
- si accorcia la fibra interna.
- si allunga la fibra esterna.
- Si può identificare un nuovo centro di curvatura O'
- " " " " nuovo raggio di curvatura r'
- " " " " nuovo angolo di curvatura φ'
- Infine la fibra "de" nella zona tesa sarà "de'".

La deformazione totale, $\epsilon_x = \frac{de' - de}{de}$

$de_{II} \rightarrow$ è la lunghezza della fibra neutra.

$$de_{II} = r d\varphi = r' d\varphi'$$

$$\epsilon_k = \frac{y}{r+y} \cdot \left[\frac{dp'}{dp} - 1 \right]$$

$$\boxed{\epsilon_k} = \frac{y}{r+y} \cdot \left[\frac{r}{r'} - 1 \right] = \frac{y r}{r+y} \left[\frac{1}{r'} - \frac{1}{r} \right] \quad \star$$

N.B.: se ho una trave inizialmente curva, la relazione fra ϵ_k (deformazione) e y (dist. della fibra neutra) NON è lineare.

Nel caso della BARRA DI TORSIONE invece, r è distanza dell'asse seguono una relazione assolutamente lineare. Se la barra di torsione viene avvolta ad elica, la relazione non è + lineare a causa della curvatura. Questo non varia la legge ma aumenta alla periferia il valore di r , che, per raggio di curvatura $\rightarrow +\infty$, torna lineare.

Lo stesso avviene qui:

⊕ infatti la mia trave è inizialmente rettilinea, il raggio di curvatura iniziale r ,

$$r \rightarrow \infty$$

per cui chiameremo $r = R$

$$\star = \epsilon_k = \frac{y r}{r+y} \left[\frac{1}{r'} - \frac{1}{r} \right] = \frac{y}{r} \left[\frac{1}{r'} \right] \Rightarrow R \equiv r' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\epsilon_k = \frac{y}{R}}$$

DEFORMAZIONE X TRAVI INIZIALMENTE

RETILINEE SOTTOPOSTE A MOMENTO FLETTENTE

M_f

Evidente che se ci allontaniamo dal centro di curvatura, $y = \oplus$, quindi si allunga

se ci avviciniamo rispetto alla fibra neutra, $y = \ominus$ la trave si accorcia.

sostituisco $\sigma_x = \frac{yE}{R}$:

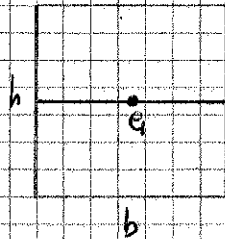
$$\int_A \frac{yE}{R} dA = 0$$

$$\frac{E}{R} \cdot \int_A y dA = 0$$

= S_x momento statico

↳ qsto si annulla per l'asse baricentrico!

→ QUINDI l'asse neutro si posiziona sull'asse baricentrico dello sezione.

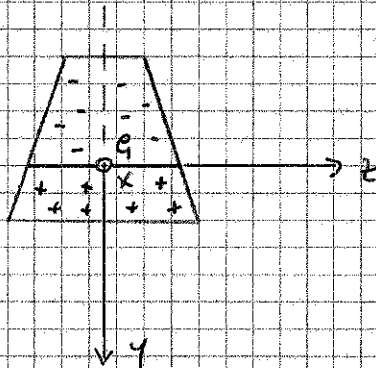


se ho una sezione rettangolare...

asse neutro

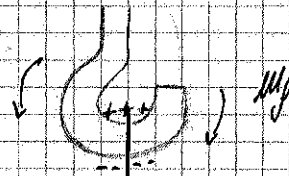
rispetto a un momento flettente ottenuto dall'asse z

Nel caso della gru, NON si hanno mai sezioni rettangolari ma:



con qsto tipo di sezione, ho nelle parte superiori fibre compresse, fibre in trazione nelle parte inferiori ed il baricentro.

QUANDO applico un carico al gancio di una gru si genera un momento flettente che tende ad aprire il gancio, quindi comprime le fibre inferiori e allunga quelle superiori. (Insolito ed uno spostamento dell'asse baricentrico)

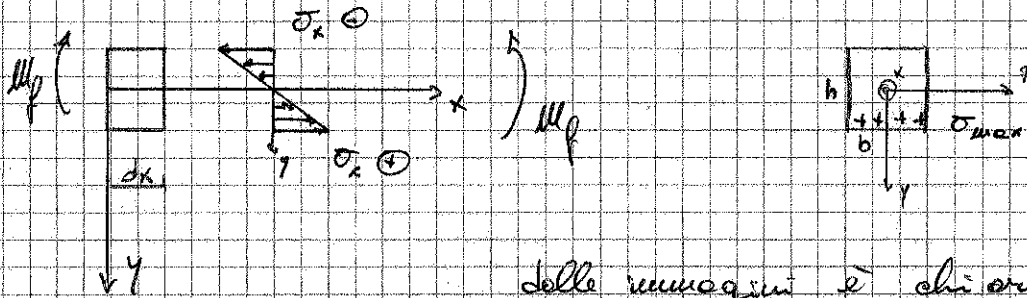


• quanto vale σ ? non lo possiamo di fatto sapere, quindi...
Vediamo il legame fra M_f e l'andamento delle tensioni!

concetto di UNIFORME RESISTENZA :

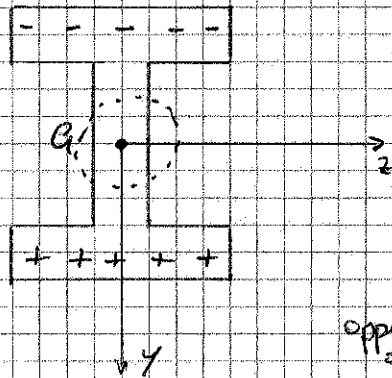
(solo teorico, in + ci si avvicina, + abbiamo una struttura resistente)

elemento infinitesimo dx di trave:



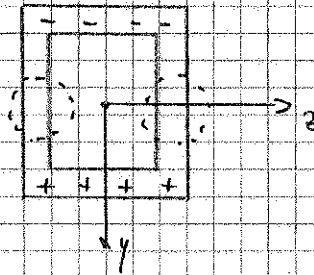
dalle immagini è chiaro intuire che le fibre centrali di una trave a sezione rettangolare sono poco usate -

Perciò una sezione molto usata è :

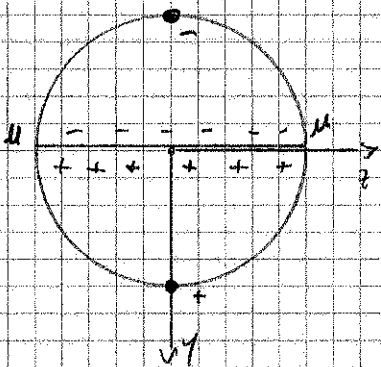


qui ho tanto materiale in corrispondenza della σ_{max} !

oppure la sezione cava funziona allo stesso modo :



• Una sezione che invece reagisce alle M_f è la sezione circolare :



in teoria, ho solo UN PUNTO a sopportare la σ_{max} e UN PUNTO per la σ_{min} .

- Andremo a definire la freccia, ovvero quanto si allontana la trave dalla sua configurazione indeformata.

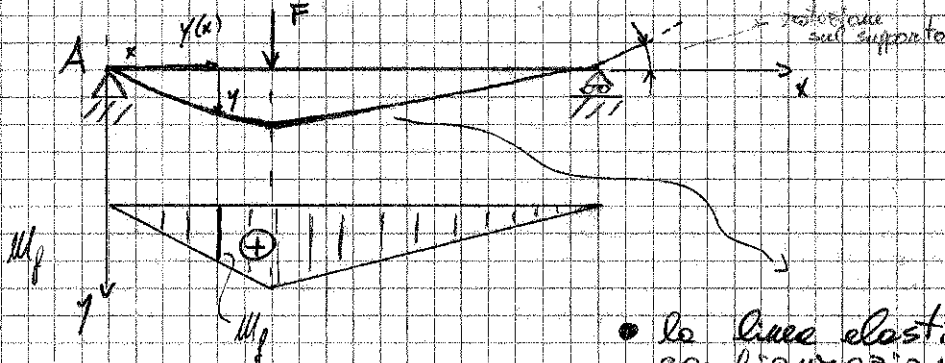
SFORZO		SPOSTAMENTO	
N	→	ΔL	
M_x	→	$\Delta \theta$	
M_y	→	freccia: eq. differenziale della linea elastica	

EQUAZIONE DIFFERENZIALE DELLA LINEA ELASTICA

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{M_f}{E I_z}$$

↗ funzione (NON + costante)
 ↘ vincoli costanti

trave deformata:



- la linea elastica è la configurazione deformata di una trave inflessa.
- $$y = f(x)$$

→ QUINDI ad ogni sezione con un momento M_f , avendo integrato 2 volte l'eq. diff., corrisponderà una $y(x)$, funzione delle distanze solo l'origine degli assi. → FRECCIA

è quindi funzione di x e cambia a seconda dei vincoli, delle condizioni di carico e della geometria:

- dimensioni
- carico
- vincoli

Al termine della dimostrazione saremo in grado di

y, y_{max}
 $\frac{dy}{dx}, \frac{dy}{dx}_{max}$ → la max rotazione

$\tan \alpha = \frac{dy}{dx}$

$\frac{d^2 y}{dx^2}$ derivando semplicemente

$\frac{d \tan \alpha}{dx}$

$\frac{d \tan \alpha}{dx} = (1 + \tan^2 \alpha) \frac{d\alpha}{dx}$

$\frac{d \tan \alpha}{dx} = (1 + \tan^2 \alpha)$

il punto di partenza x conviene
 dell'equazione differenziale è
 questo!

(1) $\frac{d^2 y}{dx^2}$ è semplicemente la derivata rispetto a x della $\tan \alpha$.
 Ma termine dell'eq. diff. l'ho già ottenuto.

Vedo ora a sviluppare (2) $(1 + \tan^2 \alpha) \frac{d\alpha}{dx} =$

$= \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] \cdot \frac{d\alpha}{d\ell} \cdot \frac{d\ell}{dx} =$

$= \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] \cdot \left(-\frac{1}{R} \right) \cdot \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]$

* dalle ipotesi **

EQUAZIONE orientata: (1) $\frac{d^2 y}{dx^2} = (2) (1 + \tan^2 \alpha) \frac{d\alpha}{dx} \rightarrow$

$\rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} \cdot \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{3/2}} = -\frac{1}{R}$

TRASCURABILE

$\rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{1}{R}$

cioè: $\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M_F}{E I_a}$

Normale esatte!

• mi dimostra l'eq. diff. della linea elastica:

la ricavo anche $\frac{1}{R} = \frac{M_F}{E I_a}$

• mi serve un esempio di integrazione (vedi dopo) e me lo sviluppi (vedi successivamente) (esercizio 38: 40.00)

• mi faccio un riassunto delle possibili condizioni al contorno (vedi dopo) NON FANNO quelle di vincoli

• una di tre esempi successivi

↳ CONDIZIONI AL CONTO RNO / BOUNDARY CONDITIONS

CONTO RNO delle FUNZIONI in campo ingegneristico sono gli estremi della struttura o della campata

▶ nel dominio della funzione ho valori noti di y e di $\frac{dy}{dx}$?

- 1) i vincoli mi dicono qualcosa? COME AL VINCULO
- 2) gli estremi della campata mi dicono qualcosa?

Per una trave a mensola:

$$\begin{cases} x = 0 & \frac{dy}{dx} = 0 \rightarrow (1) \rightarrow A \\ x = 0 & y = 0 \rightarrow (2) \rightarrow B \end{cases}$$

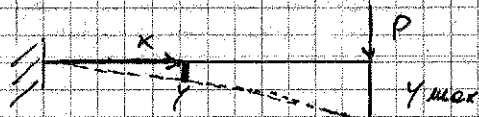
$$(1) \quad 0 = -\frac{P(L)^2}{2EI_2} + A \rightarrow A = \frac{PL^2}{2EI_2}$$

$$(2) \quad 0 = \frac{PL^3}{6EI_2} + \frac{PL^2}{2EI_2} \underset{L=0}{\cancel{x}} + B \rightarrow B = -\frac{PL^3}{6EI_2}$$

→ sostituendo A e B nelle equazioni (1) e (2) ricaviamo l'andamento della pendenza e l'andamento della freccia.

$$(2) \quad y = \frac{P(L-x)^3}{6EI_2} + \frac{PL^2}{2EI_2} x - \frac{PL^3}{6EI_2}$$

freccia
funzione
di x



$$y = y_{max} \text{ per } x = L$$

$$y_{max} = \frac{PL^3}{3EI_2}$$

13/12/2011



TENSIONI dovute allo SFORZO di TAGLIO

$T \leftarrow \tau_{ij}$

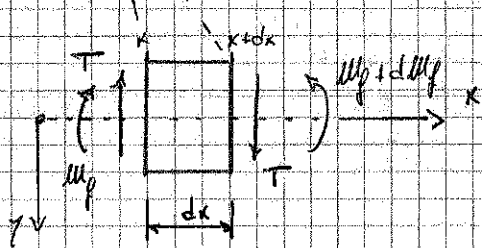
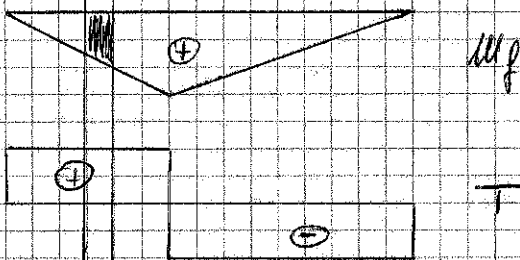
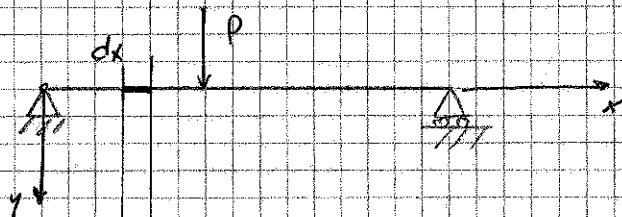
DEFORMAZIONE ANGOLARE

$\gamma_{ij} = \tau_{ij} / G$

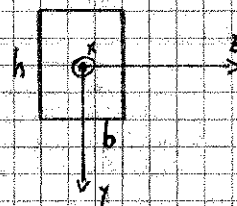
$\gamma_T \approx 0 \rightarrow$ freccia dovuta a T : trascurabile + non rigorosa (la teoria su cui si basa)

Le TENSIONI dovute a T nascono SOLO ed ESCLUSIVAMENTE se c'è un MOMENTO FLETTENTE VARIANTE

infatti: $\left| \frac{dM_f}{dx} = T \right|$



sezione in dx



T è costante e positiva (1° CAPATA)
 M_f è invece crescente

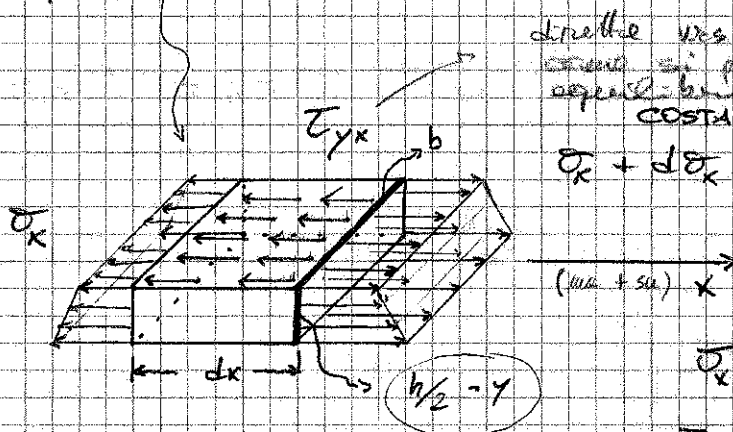
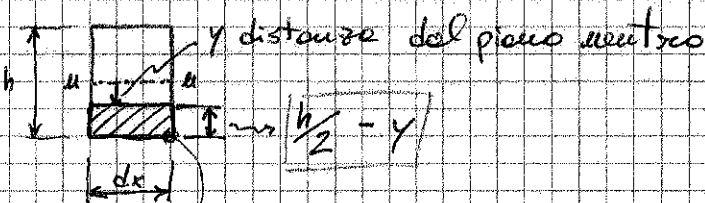
si può dire

$$\tau_{xy} \cdot b \, dy \cdot dx = \tau_{yx} \cdot b \, dx \cdot dy$$

ecco dimostrata la RECIPROCA!
(x l'ennesima volta...)

Posso adesso fare un equilibrio alla traslazione lungo l'ASSE X:

per farlo prendo un parallelepipedo infinitesimo dal tratto obrettanto già infinitesimo della TRAVE dx:



anche nei SX perché equilibrio e come si può vedere nella figura di equilibrio alla statica si deve avere COSTANTI lungo la corda b

$\sigma_x + d\sigma_x$ → solo b se ne evidenzia nella pag. precedente.

σ_x AGISCONO SUI PIANI VERTICALI A CUI SONO NORMALI

τ_{yx} AGISCONO SUL PIANO ORIZZ. SUPERIORE, CHE ATTERREBBE SCORREREBBE VERSO DX.

equilibrio: (di forze! tensioni x area)

$$\int_A (\sigma_x + d\sigma_x) \, dA - \int_A \sigma_x \, dA - \tau_{yx} \, dx \cdot b = 0$$

$$\int_A \frac{d\sigma_x}{I_z} y \, dA = \tau_{yx} \cdot b \, dx$$

$$T = \frac{d\sigma_x}{I_z} \int_A y \, dA = \tau_{yx}$$

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} = \frac{I S^*}{I_z \cdot \text{corda}}$$

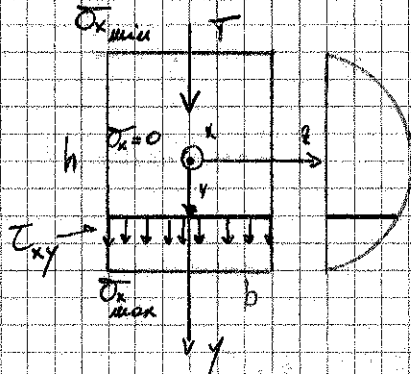
(completato, dove sezione x ha viene dalla formula del momento)

MOMENTO STATICO

* = VARIABILE perché altezza pari a $h/2 - y$
(l'altezza dell'elemento di cui si calcola il S^* è variabile con y e con essa la dist. del baricentro dell'asse Z.)

CONSIDERAZIONI SULLE TRAVI A SEZIONE PIENA

(TIMOSHENKO)



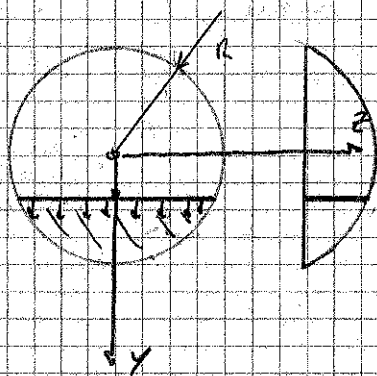
$$\tau_{xy \max} = \tau_{yx \max} = \left(\frac{3}{2} \right) \frac{T}{bh}$$

(ricavato con l'integrazione → RIGOROSO)

$$\tau_{\max} = 1,5 \tau_m \quad (\text{sui MANUALI})$$

ma è la stessa cosa!

caso sez. circolare:
con μ costante



integrando

$$\tau_{xy \max} = \tau_{yx \max} = \left(\frac{4}{3} \right) \frac{T}{\pi R^2}$$

$$\tau_{\max} = \frac{4}{3} \tau_m \quad (\text{sui manuali})$$

GENERALMENTE, molto + grandi le tensioni dovute al momento flettente rispetto a quelle dovute allo sforzo di taglio.

La TA sta commettendo un errore concettuale di base:

ovvero σ e τ agiscono su 2 piani distinti e alla zona dove σ è MIN corrisponde la zona dove τ è MIN.

→ come conseguenza τ NON viene considerata nel progetto.

fanno eccezione 2 casi PARTICOLARI → applicati nel pratica normativa sulla costruzione in acciaio (superate dall'eurocodice)

- ! → la unica volta in cui si può fare una verifica per sezione piena è quando una normativa o una verifica di un acciaio lo richiede.
- 2) lo τ_{\max} DEVE essere MINORE di qualcosa di?
 - è caratteristica del materiale
 - NON è la composizione delle tensioni

Ora analizziamo la zona ②:

$$\tau_{xy} \textcircled{2} = \frac{T}{I_z b} S_z^* = \frac{T}{I_z b} \left\{ S_{0z} + \int_y^{h/2} y b dy \right\} =$$

$$= \frac{T}{I_z b} \left\{ S_{0z} + \frac{b}{2} \left[\frac{h^2}{4} - y^2 \right] \right\}$$

(però, qui faccio il mom. statico rispetto al piano neutro (variabile)
 vado a considerare tutto quello che sta sotto la corda considerata
 indicata da y.)

$$\tau_{xy} \textcircled{min} \quad y = \frac{h}{2} = \frac{T}{b I_z} \left[S_{0z} + 0 \right]$$

$\left[\frac{1}{b} \rightarrow \frac{1}{3} \right]$ identifichiamo un SALTO in $y = \frac{h}{2}$!
se confrontata con $\tau_{xy} \textcircled{1}$

$$\tau_{xy} \textcircled{max} \quad y = 0 = \frac{T}{b I_z} \left[S_{0z} + \frac{b}{2} \frac{h^2}{4} \right]$$

~~~~~

considerazioni:

Sempre vero che dove lo  $\sigma$  è MAX lo  $\tau$  è NULLA punto A

Nel punto C sono ancora lontano dal piano neutro,   
 specie nei profili commerciali dove l'altezza   
 dell'ALA è piccola, cioè  $h/2$  NON è  $\gg$  di  $b/2$

quindi  $\tau$  a flessione è ancora grande e c'è una DISCONTINUITÀ   
 nella sforzo  $\tau$  lungo  $y$  un'ampiezza costante di  $\tau$ .

NON basta nei profili andare a considerare (x l'ingegnere) il   
 punto dove  $\sigma$  è MAX   
 MA deve considerare 2 PUNTI   
 specie C dove  $\tau$  subisce una forte discontinuità

• Nell'andamento parabolico di  $\tau$  sulla sezione è   
 evidente come il contributo dell'area allo sforzo di   
 taglio sia nettamente maggiore delle ali   
 + cui seni menzoli

$$\tau_{max} = \frac{T y}{b h}$$

APPROSSIMATA   
 (ma sovrastimata all'ottavo   
 cli-ordine)

OVVERO lo  $\tau$  costante è spalmato sull'intera SOLO.   
 RISULTA: come se tagliassi le ali e ottengo lungo l'intera un   
 valore costante

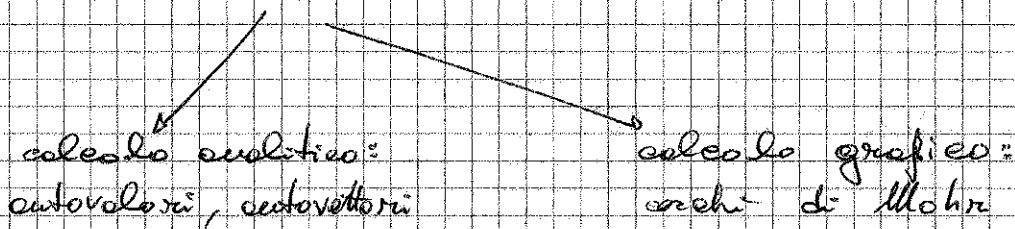
$\tau_{max}$  calcolata rigorosamente è un po' + grande MA   
 + piccola alle discontinuità! (vedi grafico sottostante)



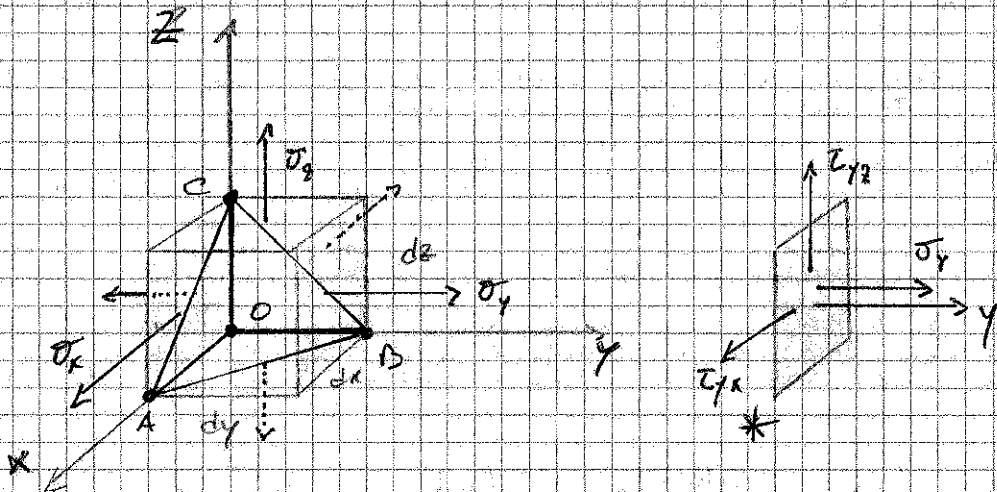
Lo scopo finale delle direzioni o tensioni principali è ottenere dei valori confrontabili con delle risposte che derivano dalla sperimentazione.

Formo:

- 3D 1) ridefinizione del tensore delle tensioni: ci da uno stato di tensione in coordinate  $x, y, z$ .
- 3D 2) tetraedro di coheny: stato di tensione in coordinate  $x, y, z$  e in coordinate  $\psi$  ( $\vec{n}$ ) (definite una normale)
- 3D 3) tensioni principali: stato di tensione in coordinate principali 1, 2, 3
- 2D 4) tensioni principali: (breve)



1)



|   | x           | y           | z           |
|---|-------------|-------------|-------------|
| x | $\sigma_x$  | $\tau_{xy}$ | $\tau_{xz}$ |
| y | $\tau_{xy}$ | $\sigma_y$  | $\tau_{yz}$ |
| z | $\tau_{xz}$ | $\tau_{yz}$ | $\sigma_z$  |

\* queste faccende ha le convenzioni dell'asse y in avanti, quindi avrò 2 z positive se seguono il verso degli assi positivi perché sono sulla faccia con la normale uscente. Per la convenzione del taglio.

eq. di equilibrio lungo i del tetraedro di Cauchy

$$\begin{cases} \vec{x} \rightarrow \sigma_x \cos\beta + \tau_{yx} \cos\alpha + \tau_{zx} \cos\gamma = p_x ABC \\ \vec{y} \rightarrow \tau_{xy} \cos\beta + \sigma_y \cos\alpha + \tau_{zy} \cos\gamma = p_y ABC \\ \vec{z} \rightarrow \tau_{xz} \cos\beta + \tau_{yz} \cos\alpha + \sigma_z \cos\gamma = p_z ABC \end{cases}$$

$\sigma_x$   
 $\tau$  NEGATIVE x  
 le componenti  
 dell'asse destrorso  
 ↓  
 Qui positive  
 perché le  
 abbiamo spostate  
 a sx dell'uguale

- divido tutto per ABC:

$$\begin{cases} \vec{x} \rightarrow \sigma_x \frac{\cos\beta}{ABC} + \tau_{yx} \frac{\cos\alpha}{ABC} + \tau_{zx} \frac{\cos\gamma}{ABC} = p_x \\ \vec{y} \rightarrow \tau_{xy} \frac{\cos\beta}{ABC} + \sigma_y \frac{\cos\alpha}{ABC} + \tau_{zy} \frac{\cos\gamma}{ABC} = p_y \\ \vec{z} \rightarrow \tau_{xz} \frac{\cos\beta}{ABC} + \tau_{yz} \frac{\cos\alpha}{ABC} + \sigma_z \frac{\cos\gamma}{ABC} = p_z \end{cases}$$

$\left| \frac{\cos\beta}{ABC} \right|$  identifica la direzione della normale  $\vec{n}$  al piano ABC che ci è conosciuta, in fatti

$$\lambda = \frac{\cos\beta}{ABC} = \cos \angle \vec{x} \vec{n}$$

ovvero il coseno direttore dell'angolo compreso fra l'asse  $\vec{x}$  e la normale  $\vec{n}$ ,

$$\mu = \frac{\cos\alpha}{ABC} = \cos \angle \vec{y} \vec{n}$$

(RICHIAMO:  
 l'angolo ABC x i coseni direttori di  $\vec{n} =$   
 = la proiezione della superficie di normale  
 $\vec{n}$  (ABC) sui piani coordinati.)

$$\nu = \frac{\cos\gamma}{ABC} = \cos \angle \vec{z} \vec{n}$$

$$\begin{cases} \vec{x} \rightarrow \sigma_x \lambda + \tau_{yx} \mu + \tau_{zx} \nu = p_x \\ \vec{y} \rightarrow \tau_{xy} \lambda + \sigma_y \mu + \tau_{zy} \nu = p_y \\ \vec{z} \rightarrow \tau_{xz} \lambda + \tau_{yz} \mu + \sigma_z \nu = p_z \end{cases}$$

ved. pag. dopo.

$$\vec{p} = \vec{\sigma} \cdot \vec{\lambda} \quad \left( \text{se } \vec{p} \text{ coincide con } \vec{n} \right)$$

$\vec{p} \cdot \vec{\lambda}$

↳ ottenuti moltiplicando  $\vec{p}$  x i coseni direttori.