



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

**Appunti universitari**

**Tesi di laurea**

**Cartoleria e cancelleria**

**Stampa file e fotocopie**

**Print on demand**

**Rilegature**

NUMERO : 363

DATA : 27/09/2012

# A P P U N T I

STUDENTE : Brigante

MATERIA : Controllo delle Macchine e dei Sistemi Energetici  
Prof. Misul

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

# CONTROLLO DELLE MACCHINE E DEI SISTEMI ENERGETICI

DOCENTE: Daniele Misol

Contatti: daniele.misol@polito.it tel: 4436

Esame orale; contattare il docente

Cosa si intende per sistema?

Intendo una porzione di spazio o materia, entità separabile dall'ambiente in modo reale o concettuale.

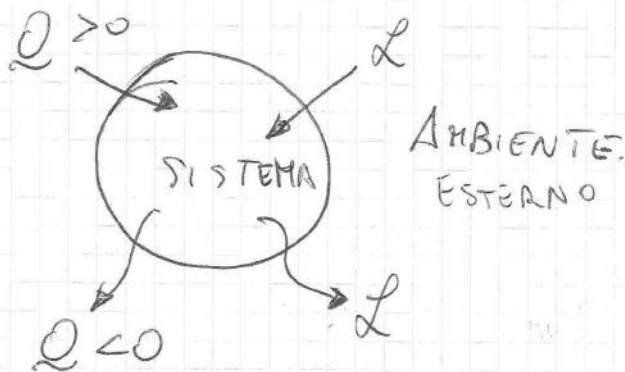
Questa linea di separazione chiamata interfaccia, rappresenta il confine del sistema ed è la linea attraverso cui il sistema interagisce con l'ambiente.



AMBIENTE

Attraverso l'interfaccia quindi il sistema interagisce con l'ambiente.

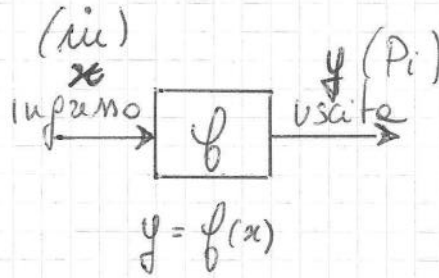
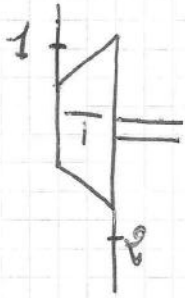
Quando si parla di interazione si parla di scambio di calore e lavoro del sistema con l'ambiente esterno.



Una volta definito il sistema ho bisogno di costruire un modello che è una rappresentazione del sistema <sup>stesso</sup> e tiene anche in sistema di esplicitazione che mi descrivono il sistema.

Il problema che nasce riguarda la semplificazione del sistema stesso, facendo astrazione e non trascurare dei fattori che possono evitare di descrivere accuratamente il sistema.

Possiamo rappresentare ogni sottosistema con dei simboli chiamati blocchi, cercando di scovare delle equazioni. Ad esempio prendendo la turbina possiamo scovare che:



Esempio di rappresentazione a blocchi delle turbine

Ad esempio la potenza di questo sistema sarà:

$$P_i = \dot{m} L_i \quad \text{Potenza interna}$$

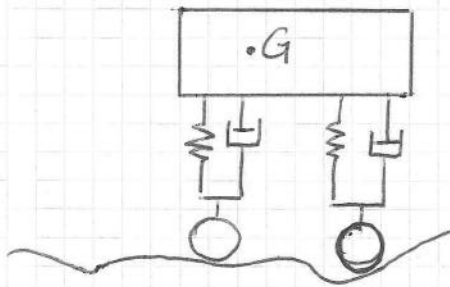
$$L_i = (h_1 - h_2)$$

$$P_i = \dot{m} (h_1 - h_2)$$

Cio vuol dire che la variabile in uscita  $y$  è controllata dalle variabile in ingresso che è la portata in massa

Usare l'apote dei blocchi risulta molto efficace nella descrizione del sistema considerato.

Proviamo a fare un esempio di tipo meccanico: Schematizziamo le sospensioni di una vettura

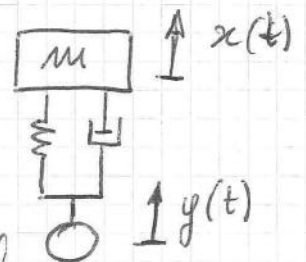
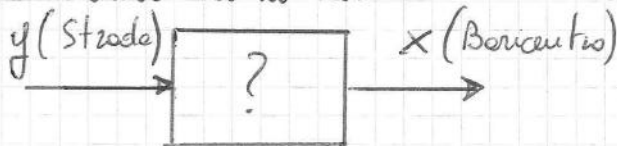


Sostanzialmente i componenti che misuriamo per descrivere il sistema sono quelli indicati.

La strada mi dà il profilo di eccitazione del baricentro e in uscita ottengo la mobilità del baricentro.

strada  $\equiv$  ingresso  
mobilità baricentro  $\equiv$  uscita

Proviamo a schematizzare il nostro sistema con dei blocchi: Cosa dobbiamo mettere all'interno del blocco?



$$Kx + C\dot{x} + m\ddot{x} = F \quad \text{Equazione del moto di questo sistema}$$

# CONTROLLO IN ANELLO APERTO E IN ANELLO CHIUSO

Controllo in anello aperto:



Un esempio di tale sistema è la temporizzazione dei semafori del traffico.

Per un anello aperto si intende non sapere quale sia la condizione della ~~variabile~~ variabile in uscita.

Un sistema in anello aperto va bene quando ha bisogno di un sistema ripetibile, prevedibile e ripetitivo e affidabile.

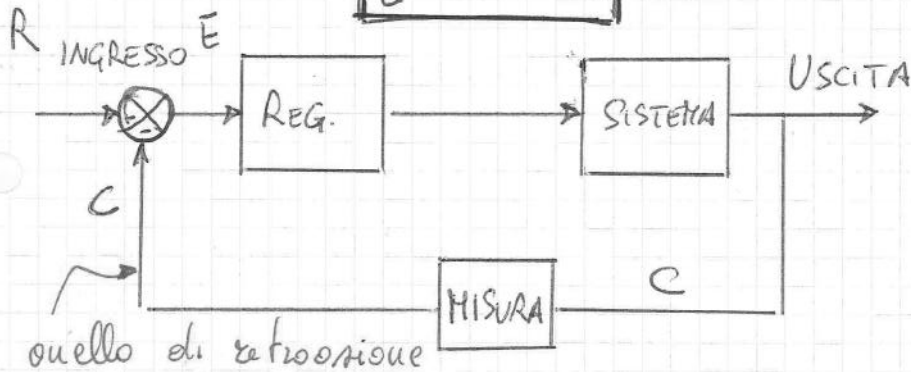
Tali sistemi non vanno bene nel caso in cui ho degli imprevisti.

Ad esempio il sistema di condizionamento di una stanza.

Ho bisogno di ~~lavorare~~ lavorare nella stanza del calore, però cioè come a seconda del fatto che ci sono più o meno persone, oppure se apro una finestra, ecc... Ci sono in questo caso dei disturbi. In un sistema di questo tipo devo quindi misurare la variabile in uscita, confrontando l'ingresso con la misura in modo da regolare l'uscita.

R: variabile di set point

$$E = R - C$$



R = temperatura  
 ↓  
 in questo caso impostata sul termostato

R attiva il sistema di riscaldamento

E: errore termico

L'errore mi dice di quanto si discosta la temperatura in uscita rispetto alla temperatura del termostato.

Una cosa molto importante in tali sistemi è la protezione delle diverse parti componenti.

Ne è un esempio l'isteresi delle molle, che denotano il comportamento normale della molla stessa.

Se R è variabile nel tempo si chiama Servovariabile

R: variabile di Set point

Proviamo a condensare una situazione generale:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$y_0 = f(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$$

Come esprimiamo il  $\Delta y = y - y_0$ ? Lo facciamo con Taylor:

$$y - y_0 = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{x_i=x_{i0}} (x_i - x_{i0}) \right] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \Big|_{x_i=x_{i0}} (x_i - x_{i0})^2 \right] +$$

termini misti  $\rightarrow$

$$+ \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \Big|_{\substack{x_i=x_{i0} \\ x_j=x_{j0}}} (x_i - x_{i0})(x_j - x_{j0}) \right]$$

È ragionevole pensare di omettere lo sviluppo al primo ordine purché gli spostamenti sono piccoli. Quindi mi fermo allo sviluppo sottolineato.

$$dy_0 = \frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_{x_{10}} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \Big|_{x_{20}} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \Big|_{x_{n0}} dx_n$$

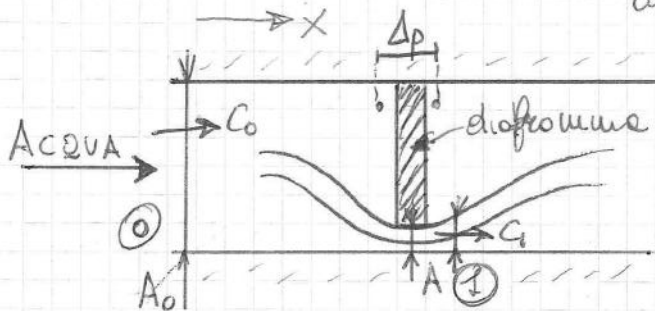
limite di un sistema di grado n.

Quindi se gli argomenti sono approssimati con errori molto piccoli, il  $dy$  sotto può essere approssimato ad  $y$ .

Posso quindi dire nel mio esempio che la curva è la somma di n rette che descrivono la curva stessa.

Esempio: Misuratore di portata a diorama o a sonda

Immaginiamo di avere un condotto con diorama:



Nella sezione A l'acqua aumenta le velocità  
Nel nostro studio usiamo l'annullamento A1

$A(x)$

Viene in funzione delle coordinate  $x$

$m = A/A_0$	→	Rapporto di contrazione
$\mu = A_1/A$	→	Rapporto fluidodinamico di contrazione

Quindi ciò vuol dire che:

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\varphi^2} - \mu^2 m^2}} \sqrt{\frac{\rho(P_0 - P_1)}{\rho}} \quad C_1 = f(\Delta p)$$

Siamo riusciti a sapere una caduta di pressione e una velocità.

Posso quindi pensare di scrivere la portata come:

$$\dot{m} = \rho A_1 C_1 = \rho \underbrace{\left(\frac{A_1}{A}\right)}_{=\mu} A C_1 = \rho \mu A C_1 \rightarrow \text{PORTATA}$$

le scriviamo funzione di A

Riferisco tutto rispetto ad A, perché A è misurabile  
 Per questo riguardo il  $\Delta p$  misurabile è quello a cavallo del diaframma. Quindi riscrivendo il tutto avrò:

$$\dot{m} = \rho A \cdot \frac{\mu}{\sqrt{\frac{1}{\varphi^2} - \mu^2 m^2}} \sqrt{\frac{P_0 - P_1}{\Delta p}} \sqrt{\frac{2 \Delta p}{\rho}}$$

moltiplico e divido per  $\sqrt{\Delta p}$

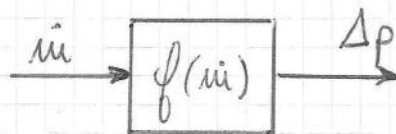
$\Delta p$  è quello a cavallo del diaframma

$C_d$  = Coefficiente di efflusso della valvola  
 oppure  $C_d$  = coefficiente di sporcizia

$$\dot{m} = \rho A C_d \sqrt{\frac{\rho \Delta p}{\rho}}$$

Questo dispositivo è un misuratore di portata. In termini controllistica ribalto le prospettive. Cioè controllo il  $\Delta p$  mediante la portata

Mi interessa quindi sapere la relazione di ordine tra  $\Delta p$  ed  $\dot{m}$ .  
 In termini di blocchi di controllo avrò:

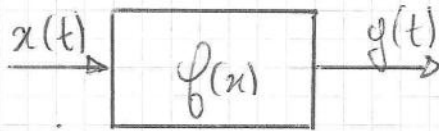


Abbiamo detto che esistono sistemi lineari e non lineari e per risolverli costruiamo un modello matematico. Per risolvere tali sistemi si fanno tre ipotesi:

1. Linearità del sistema;
2. Rappresentazione a parametri concentrati;
3. Il sistema ha dei parametri costanti nel tempo.

La terza ipotesi implica l'esistenza di equazioni differenziali a coefficienti costanti.

Dobbiamo quindi studiare il comportamento di un sistema in funzione dei dati in usate.



In tal caso le usate di posto natura è la sottoposizione di tale sistema a: delle sollecitazioni:

- Impulso
  - Gradino
  - Rompe
  - Armonico semplice
  - periodico
  - A-periodico
- } Tipologie di ingressi o di Sollecitazioni

Il segnale periodico e a-periodico può essere ricostruito mediante lo studio delle trasformate di Fourier o quello di un segnale armonico semplice.

È più utile studiare il gradino e l'armonico semplice in quanto da tali ingressi posso ricavare esattamente le informazioni che mi servono.



Quindi la soluzione di transitorio è per  $a$ :

$$\boxed{y_T = k e^{-t/\tau}} \quad \text{SOLUZIONE GENERALE}$$

E la soluzione completa è data da:

$$y(t) = x_0 + k e^{-t/\tau} \quad y(t) = y_T(t) + y_R$$

dove  $k$  lo calcolo o con le condizioni iniziali o finali.

Calcolo di  $k$ :

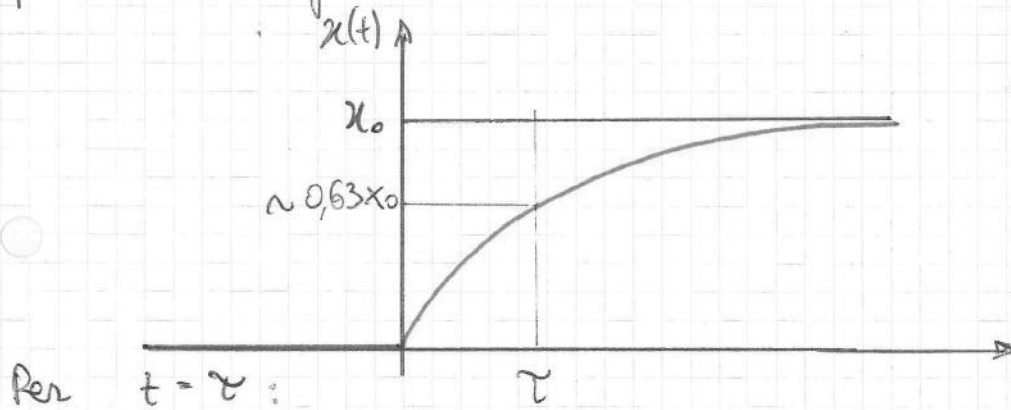
$$y(t=0) = 0 \quad y(t=0) = x_0 + k = 0$$

$$k = -x_0$$

Quindi l'equazione diventa

$$\boxed{y(t) = x_0 (1 - e^{-t/\tau})} \quad \text{SOLUZIONE COMPLETA}$$

L'equazione appena scritta rappresenta le risposte alle sollecitazioni provocate dal gradino come sollecitazione.



$\tau$  è la costante del sistema, cioè come cambia il sistema in seguito ad una eccitazione (in termini di rapidità)

$$\rightarrow y(t) = x_0 (1 - e^{-t/\tau})$$

Effettivamente  $\tau$  è la ~~velocità~~ <sup>rapidità (prontezza)</sup> del sistema. Si sostiene che il sistema è a regime solo dopo  $5\tau$  con un errore del  $(7 \times 1000)$ . Tanto più basso è  $\tau$  tanto è più corta la risposta; tanto più è alta, tanto più è lunga la risposta (in termini di tempo).

$\tau$  viene chiamata prontezza del sistema, ed è una componente di elevato importanza nei sistemi di controllo.

$$dU = dU_T + \frac{dU_{ch}}{=0} \rightarrow \text{Verosimile di energie interne}$$

- $dU_T =$  contributo termico
- $dU_{ch} =$  contributo chimico  $\rightarrow$  Compara solo pseudo entalpia in gioco reazioni di tipo chimico. Nel nostro caso è quindi pari a zero.

Quando abbiamo l'approccio leggiungiamo vedo e considerare il lavoro della fonte di superficie, cioè a deve essere un lavoro dovuto a superficie che si muovono.

Questo sistema può essere visto come somma di sottosistemi

1. Sistema bulbo  $\rightarrow$  non produce lavoro

2. Sistema capillare  $\rightarrow$  Produce lavoro, però poiché nel capillare non c'è pressione, di tensione di vapore, ma c'è vuoto, non vi è lavoro, e quindi tale termine è nullo.

Quindi il termine  $\boxed{dL = 0}$  e l'equazione diventa:

$$\boxed{dQ_e = dU_T} \quad \text{I principio della termodinamica}$$

$$hS(T_e - T_b) dt = m c dT_b \rightarrow \text{Attenzione è la derivata della temperatura bulbo.}$$

Nella modellazione equivalente la superficie considerata è la superficie del liquido e la massa è la massa del bulbo.

Riscrivendo l'equazione otteniamo:

$$\boxed{\frac{m_b c_b}{h \cdot S} \cdot \frac{dT_b}{dt} + T_b = T_e}$$

$$\left[ \begin{aligned} dQ_e &= hS(T_e - T_b) dt \\ &\rightarrow \text{flusso termico disperso} \end{aligned} \right.$$

$$\left[ \begin{aligned} dU_T &= m c dT_b \\ &\rightarrow \text{Verosimile energie interne} \end{aligned} \right.$$

Abbiamo ricondotto il sistema in forma canonica, cioè ~~di~~ tipo seguente:

$$\boxed{\tau_c \dot{y} + y = x}$$

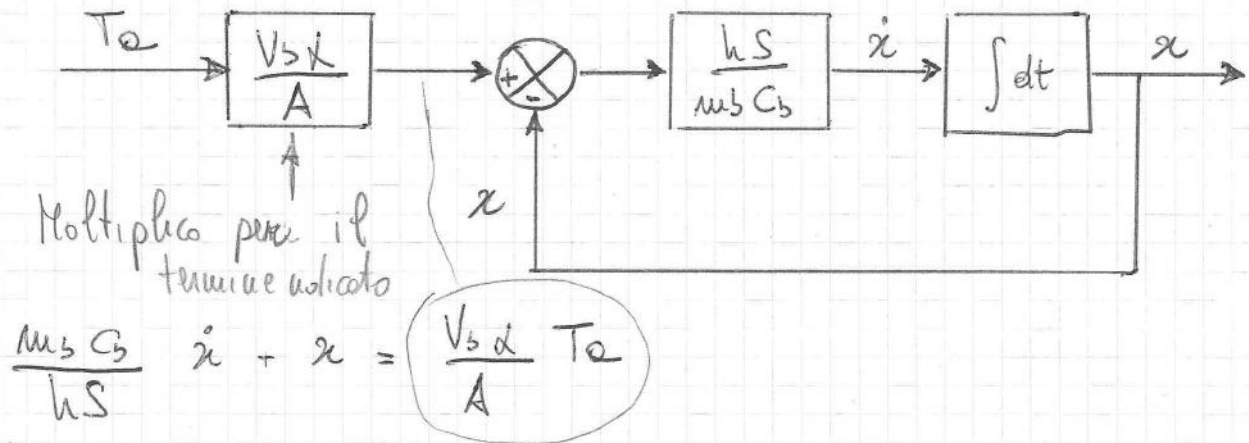
Il pedice  $\tau$  indica il ritardo al bulbo.

L'equazione diventa:

$$\frac{m_b C_b}{hS} \frac{A}{V_b d} \frac{dx}{dt} + \frac{A}{V_b d} x = T_e$$

dividendo per  $\frac{V_b d}{A}$  ho ottenuto l'equazione di  $\dot{x}$

Ho trovato quindi una nuova  $\tau$  legata a serbatoio e fluido.  
Proviamo a fare lo schema a blocchi di questa equazione.



L'algebra dei blocchi però non viene utilizzata nel dominio del tempo ma in altri campi di variazione.

Vediamo ora la risposta del sistema all'armonica semplice.

$$\tau \dot{y} + y = x$$

Voglio studiare le soluzioni  $x(t) = x_0 \sin(\omega t)$

L'ampiezza e fase non cambia mai, quindi vedo direttamente e studiare la risposta di regime.

Mi aspetto una risposta del tipo:

$$y(t) = y_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

$\varphi$  = fase  
 $y_0$  = ampiezza

Devo capire come valutare  $\varphi$  e  $y_0$ . Per fare questo utilizzo i numeri complessi.

$$x(t) = x_0 e^{j\omega t}$$

La fase è data da:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{I_m}{Re}\right)$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{-x_0 \omega \tau}{x_0}\right) = \arctan(-\omega \tau)$$

$$I_m = -j \frac{x_0 \omega \tau}{1 + (\omega \tau)^2}$$

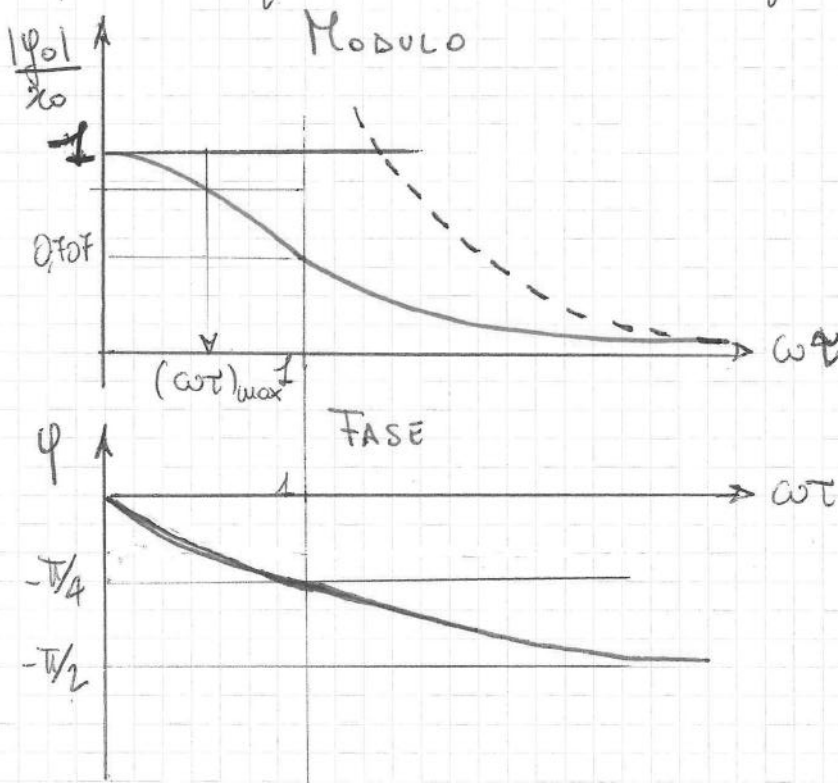
$$Re = \frac{x_0}{1 + (\omega \tau)^2}$$

Quindi:

$$|y_0| = \frac{x_0}{\sqrt{1 + (\omega \tau)^2}} \quad ; \quad \varphi = \arctan(-\omega \tau)$$

Se riesco ad intuire la fase e il modulo delle risposte, ho risolto il sistema e quindi ho ottenuto la soluzione.

Riporto la fase e il modulo in funzione di  $\omega \tau$



Questi diagrammi sono esemplari per qualunque sist del II ordine. Poiché abbiamo su due assi due variabili adimensionate

Ricorda: più sono le variabili adimensionate in un sistema, più è un sistema universale.

Proviamo ora ad individuare qualche punto e qualche andamento del sistema preso in considerazione.

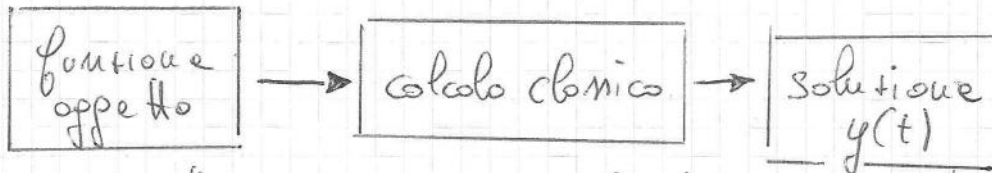
$$\frac{|y_0|}{x_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega \tau)^2}} \quad \rightarrow \omega \tau \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{y_0}{x_0} = 1$$

$$\rightarrow \omega \tau \rightarrow \infty \quad \text{allora}$$

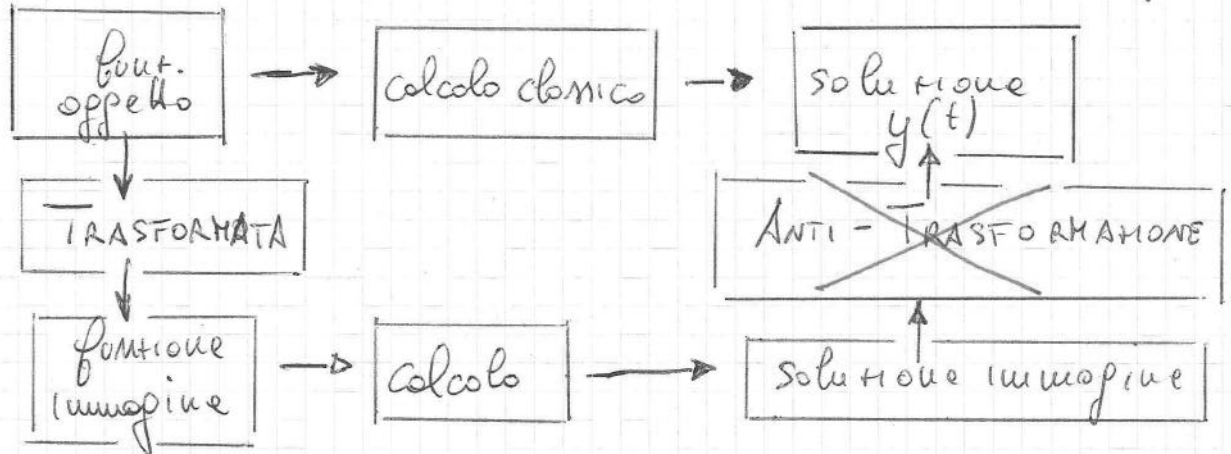
$$\lim_{\omega \tau \rightarrow \infty} y_0 \sim \lim_{\omega \tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{(\omega \tau)^2}} \propto \frac{1}{\omega \tau} = 0$$

Comportamento iperbolico

L'ordine logico delle cose che ho fatto è questo:



Con funzione oggetto un po' più complicate non è tanto facile tale risoluzione, così la trasformo in una funzione immagine



Normalmente l'operatore di calcolo che dobbiamo utilizzare sono le trasformate di Laplace, che permettono di trasformare una equazione differenziale in equazioni algebriche.

Molte volte non è neanche ritrasformare e quindi possono per l'anti-trasformate per arrivare alla soluzione.

### TRASFORMATE DI LAPLACE

È un operatore matematico che trasforma una  $f(t)$  in  $F(s)$

$$f(t) \rightarrow F(s)$$

$f(t) \rightarrow$  funzione del tempo  
 $F(s) \rightarrow$  funzione non temporale

$F(s)$  variabile complessa  $s$

La condizione necessaria è che:

$$\left. \begin{aligned} f(t) &= 0 & t < 0 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) e^{-st} \end{aligned} \right\} \text{ Condizioni di Esistenza}$$

→ ∃ un  $s$  tale che  $\lim$  sia finito.

Sto chiedendo che per valori di  $t$   $f$  non tenda ad infinito. la funzione quindi non deve divergere.

Quindi se ho una funzione di I ordine:

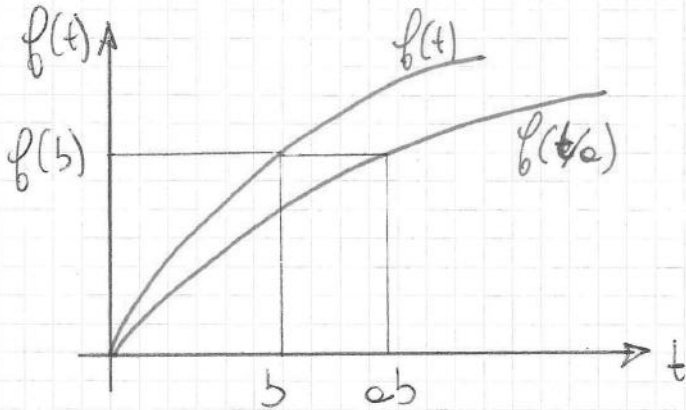
$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s)$$

Se invece devo fare il Laplace di un integrale così:

$$3. \mathcal{L}\left[\int f(t) dt\right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{-1}(0^+)}{s} = \frac{F(s)}{s}$$

Una proprietà importante è anche la seguente:

Supponiamo di avere ~~due~~ funtz. separate e fare un cambiamento di scala.



$$t/a = b$$

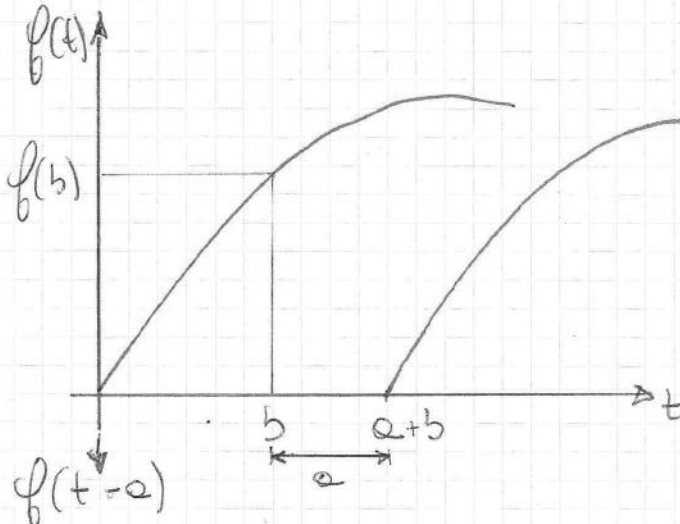
$$t = ab$$

$$f(t) \rightarrow f(t/a)$$

Quando cambio scala ad una funzione vale la proprietà:

$$4. \mathcal{L}[f(t/a)] = a F(as)$$

Vediamo la traslazione nel dominio del tempo:



$$t - a = b$$

$$t = a + b$$

Si ha quindi una traslazione di  $a$  nel dominio del tempo della funzione.

Facciamo un esempio:

$$\tau \dot{y} + y = x$$

Supponiamo di avere un ingresso e gradino ovvio del tipo:

$$x(t) = 0 \rightarrow t < 0$$

$$x(t) = x_0 \rightarrow t \geq 0$$

Ricaviamo ora la funzione immagine.

$$\mathcal{L}[\tau \dot{y} + y] = \mathcal{L}[x(t)]$$

Sono tutte in funzione di  $t$

$$\mathcal{L}[\tau \dot{y}] + \mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[x(t)]$$

$$\tau \mathcal{L}[\dot{y}(t)] + \mathcal{L}[y(t)] = \mathcal{L}[x(t)]$$

$$\tau s Y(s) + Y(s) = \left(\frac{x_0}{s}\right) \rightarrow \text{denna dalle sollecitazioni gradino}$$

$$(\tau s + 1) Y(s) = \frac{x_0}{s}$$

$$Y(s) = \frac{x_0}{s(1 + \tau s)}$$

Soluzione immagine del gradino

Proviamo a vedere e cose omologhe: le anti-trasformate:

$$Y(s) = \frac{x_0}{s(1 + \tau s)} = x_0 \frac{1}{\tau s \left(\frac{1}{\tau} + s\right)} = x_0 \frac{1/\tau}{s \left(\frac{1}{\tau} + s\right)}$$

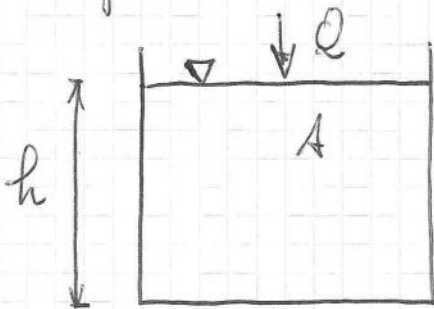
$$y(t) = x_0 (1 - e^{-t/\tau})$$

È l'espressione completa <sup>della risposta ad</sup> una sollecitazione a gradino. Proviamo ad applicare il Th. del valore finale.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s F(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \cdot x_0}{(1 + \tau s) s} \rightarrow Y(s) = x_0$$

Proviamo a risolvere un esercizio.

Immaginiamo di avere un serbatoio nel quale entra la portata  $Q$ :



$Q$ : è la portata che entra nel sistema serbatoio

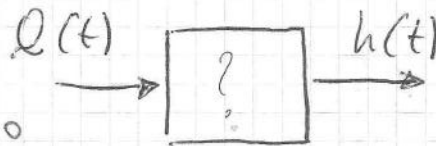
$h$ : è la parte di acqua che varia nel tempo.

$$dV = Q dt$$

$$dV = A dh$$

→ Eguagliando

$$Q dt = A dh$$



Separo i termini e usate:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{Q}{A}$$

$Q dt$  → iupremo  
 $A dh$  → usate

Voglio provare a risolvere il sistema con le trasformate di Laplace  
 Allora otteniamo:

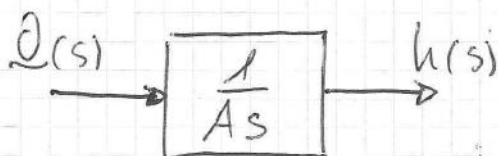
Per le proprietà della trasformata di Laplace

$$sh(s) = \frac{Q(s)}{A}$$

$$G(s) = \frac{h(s)}{Q(s)} = \frac{1}{As}$$

**IMPORTANTE:** Nel sistema preso in considerazione, come in qualsiasi altro sistema che studieremo, per prendere in iupremo ed in usate non si interrobano le grandezze fisiche, ma le grandezze concettuali che possono comandare o non comandare.

Quindi il blocchetto diventa:



La funzione  $\frac{1}{As}$  è la derivata di una capacità che va integrata ed è per noi la risposta e prodotto studiata.

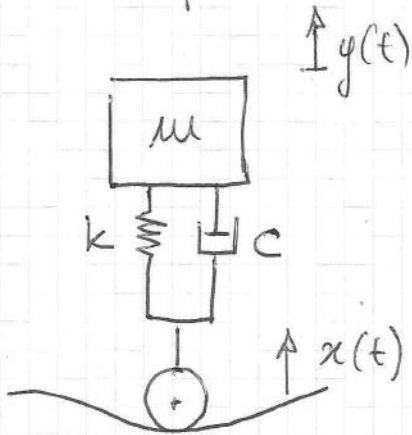


Quindi:

$$\frac{y(s)}{x(s)} = \frac{\frac{1}{(s+1)} G_1(s)}{1 + \frac{1}{(s+1)(s+3)}} = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}$$

L'idea è quella di scomporre un sistema in sottosistemi, e analizzarli uno per uno per poi assemblarli e scoprire un'equazione caratteristica del sistema stesso.

Vediamo l'esempio delle sospensioni visto prima:



Riscriviamo l'equazione chiamando  $y(t)$  l'uscita e  $x(t)$  l'entrata.

$$\underbrace{m\ddot{y} + c\dot{y} + ky}_{\text{uscita}} = \underbrace{cx + kx}_{\text{entrata}}$$

→  $x(t)$  è lo spostamento del centro della ruota

→  $y(t)$  è lo spostamento del sistema.

Proviamo a risolverlo con le trasformate di Laplace.

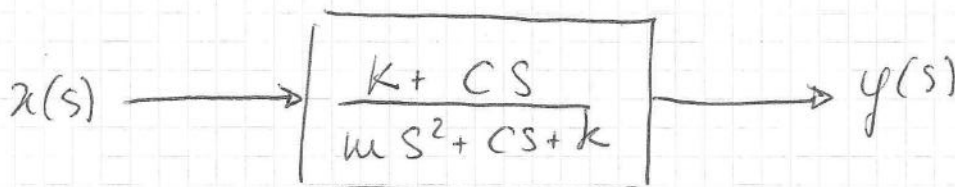
$$m s^2 y(s) + c s y(s) + k y(s) = c s x(s) + k x(s)$$

$$(m s^2 + c s + k) y(s) = (k + c s) x(s)$$

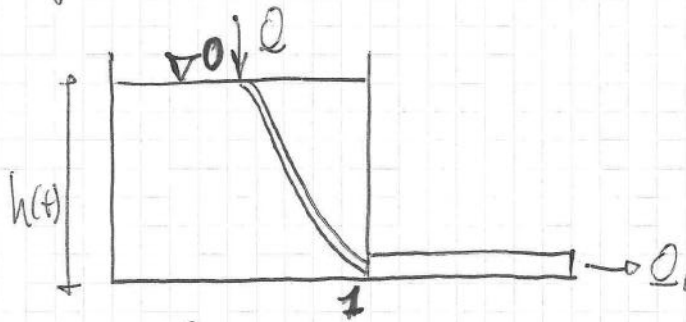
La funzione di trasferimento di questo sistema sarà:

$$G(s) = \frac{y(s)}{x(s)} = \frac{k + c s}{m s^2 + c s + k}$$

Il blocchetto dove sarà il seguente



Immaginiamo di isolare un filotto di fluido nel serbatoio:



Applichiamo il primo principio della termodinamica tra 0 e 1.

No opere mobili

$$\int_0^1 v dp + \Delta \bar{E}_p + \Delta \bar{E}_c + \frac{L \dot{W}}{l} = 0$$

tutto fermo

Sarebbe l'equazione dell'energia cinetica per un motore aperto

$$\int_0^1 v dp + \Delta \bar{E}_p + \Delta \bar{E}_c = 0$$

$$\frac{\Delta p}{\rho} + \Delta \bar{E}_p + \Delta \bar{E}_c = 0$$

Si suppone  $C_{el,2}$  trascurabile

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho} + g(h_1 - h_2) + \frac{C_1^2 - C_2^2}{2} = 0$$

$$p_1 - p_2 = \rho g (h_1 - h_2)$$

$(h_1 - h_2) = h(t) \rightarrow$  guarda il profilo del serbatoio

$$p_1 - p_2 = \rho g h \quad \text{perché } h \text{ positivo?} \quad h = h(t)$$

Quindi: 
$$Q_2 = \frac{p_1 - p_2}{R} = \frac{\rho g h}{R}$$

Sostituisco e spero i termini nell'espressione di pinna

$$\left( Q - \frac{\rho g h}{R} \right) dt = A dh$$

Dobbiamo ricondurre alla forma del tipo:

$$A \frac{dh}{dt} + \frac{\rho g}{R} h = Q \quad \begin{matrix} h = f(t) \\ Q = \bar{Q}(t) \end{matrix}$$

$$\tau \dot{y} + y = x$$

Scrivendolo un po' meglio avremo:

$$\left( \frac{AR}{\rho g} \right) \frac{dh}{dt} + h = Q \frac{R}{\rho g} \rightarrow \text{Sistemi del primo ordine}$$

$$\tau s \bar{h} + \bar{h} = \frac{\bar{Q} R}{\rho g}$$

$$\bar{h} (\tau s + 1) \frac{\rho g}{R} = \bar{Q} \quad 31$$

Proviamo a calcolare la capacità  $\tau$  del sistema e vediamo il suo ordine di grandezza.

$$m = \rho \cdot V_c = 7,87 \text{ Kg}$$

$$S = 0,06 \text{ m}^2 = \rho \cdot b$$

$$\tau = 4392,51 \text{ s}$$

$$\tau = 74 \text{ min}$$

$\tau$  è molto grande

mi servono 6 h <sup>ore (tempo)</sup> per portarmi a regime e quindi  $\tau_R = 5\tau$

$S = \rho \cdot b$  Superficie a contatto con l'ambiente

Questo blocchetto fa pompare quindi le basse frequenze.

Fino ad ora abbiamo visto le funt. di trasf. e predico che raccoglie in se le possibili risposte del sistema.

È possibile dimostrare che:

dato il sistema in forma canonica.

$$\tau \dot{y} + y = x$$

e la sollecitazione:

$$x(t) = x_0 \sin(\omega t)$$

con le sue risposte:

$$y(t) = y_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

Posso ricavare l'informazione di ampiezza e fase tramite la funzione di trasferimento  $G(s)$

→  $G(s)$  ponendo  $s = j\omega$  e quindi

$$y_0 = x_0 / |G(j\omega)|$$

$$\varphi = \arctan \left[ \frac{\text{Im} [G(j\omega)]}{\text{Re} [G(j\omega)]} \right]$$

Per ottenere la risposta in frequenza si può sostituire  $j\omega$  nelle funt. di trasf.

$$G(s) = \frac{1}{\tau s + 1}$$

Vogliamo trovare le risposte partendo dalle funzione di trasferimento.

Per ottenere la risposta in frequenza si può sostituire  $j\omega$  nella funzione di trasferimento  $G(s)$

$$|G(j\omega)| = \sqrt{\text{Re}[G(j\omega)]^2 + \text{Im}[G(j\omega)]^2} = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}}$$

Secondo la definizione data ora:

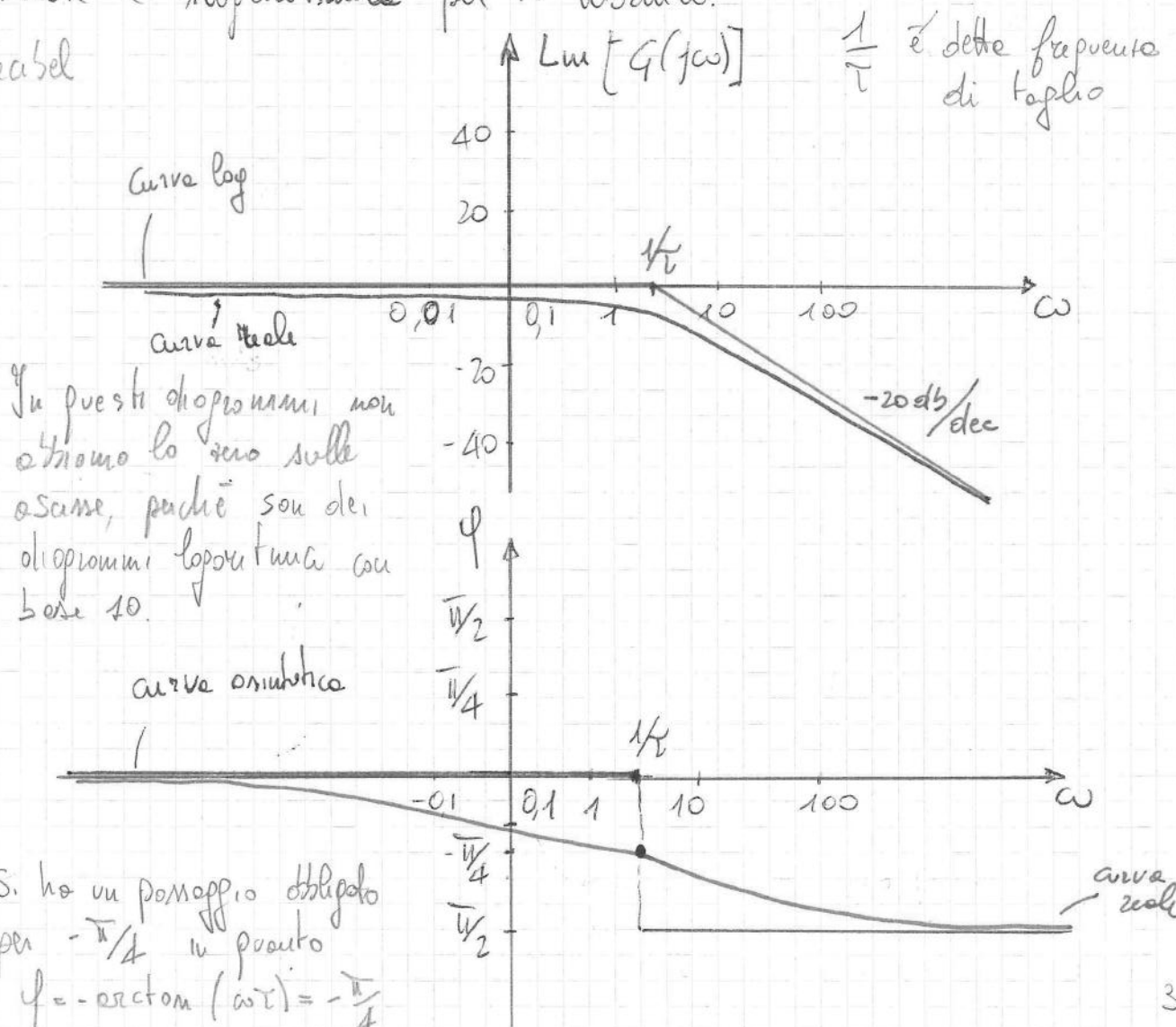
$$\varphi = \arctg(-\omega\tau) = -\arctg(\omega\tau)$$

Non meno che il sistema si complice per punto risponde le derivate, conviene un litere per la trasformazione del sistema la trasformate di Laplace.

Si preferisce riportare in forma grafica modulo e fase, su diagrammi logaritmicamente cosiddetti di "Bode".

Si riportano la fase in log sulle ascisse e ordinata sulle ordinate e logaritmicamente per il modulo.

Lin decibel



$$L_m |G(j\omega)|_{\omega=\omega_1} = -20 \log_{10}(\omega_1 T)$$

$$\circ L_m |G(j\omega)|_{\omega=\omega_2} = -20 \log_{10}(\omega_2 T) = -20 \log_{10}(10 \omega_1 T)$$

Tale curva è una retta (su un diagramma logaritmico)

Proviamo a calcolare la differenza di questi due numeri:

$$L_m |G(j\omega)|_{\omega=\omega_2} - L_m |G(j\omega)|_{\omega=\omega_1} =$$

$$= -20 \log_{10}(10 \omega_1 T) - (-20 \log_{10}(\omega_1 T)) =$$

$$\circ = -20 \log_{10} \frac{10 \omega_1 T}{\omega_1 T} = -20 \text{ dB}$$

Cioè:

"Quando la frequenza scatta di una decade perde 20 dB."

Riprendiamo la nostra funzione:

$$\frac{y_0}{x_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}}$$

$$(\omega = \frac{1}{T})$$

I due asintoti si incontrano in corrispondenza di  $1/T$ , cioè per  $\omega T = 1$ .

Stiamo cercando le condizioni per cui:

$$\circ \log_{10} \left( \frac{1}{\omega T} \right) = 0 \quad \text{che è soddisfatta quando} \\ \omega T = 1$$

Questa rappresentazione è la rappresentazione asintotica della curva.

Se nella funzione compare un numero  $\omega T = 1$

$$\circ \left| \frac{y_0}{x_0} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,707 \quad \leftarrow \frac{y_0}{x_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}}$$

$$\circ \log_{10} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \cong -3 \text{ dB}$$

Vediamo le regole per tracciare il diagramma di Bode.

Supponiamo di aver ricevuto un fz di trasf. del tipo:

$$G(s) = k \cdot \frac{(s-z_1)(s-z_2) \dots (s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2) \dots (s-p_n)} \quad \text{funzione razionale}$$

$z_i$  = zero della funzione  $\rightarrow$  Sono al numeratore di  $G(s)$

$p_j$  = polo della funzione  $\rightarrow$  Sono al denominatore di  $G(s)$

Dato una qualunque funzione del sistema calcoliamo  $G(j\omega)$

$$G(j\omega) = k \frac{(j\omega-z_1)(j\omega-z_2) \dots (j\omega-z_m)}{(j\omega-p_1)(j\omega-p_2) \dots (j\omega-p_n)}$$

Sappiamo che un numero complesso può essere rappresentato come un vettore:

$$(j\omega-z_i) = \overbrace{|j\omega-z_i|}^{\text{modulo}} e^{j\alpha_i} \quad \text{fase}$$

$$\alpha_i = \arctg \left( \frac{\text{Im}[(j\omega-z_i)]}{\text{Re}[(j\omega-z_i)]} \right)$$

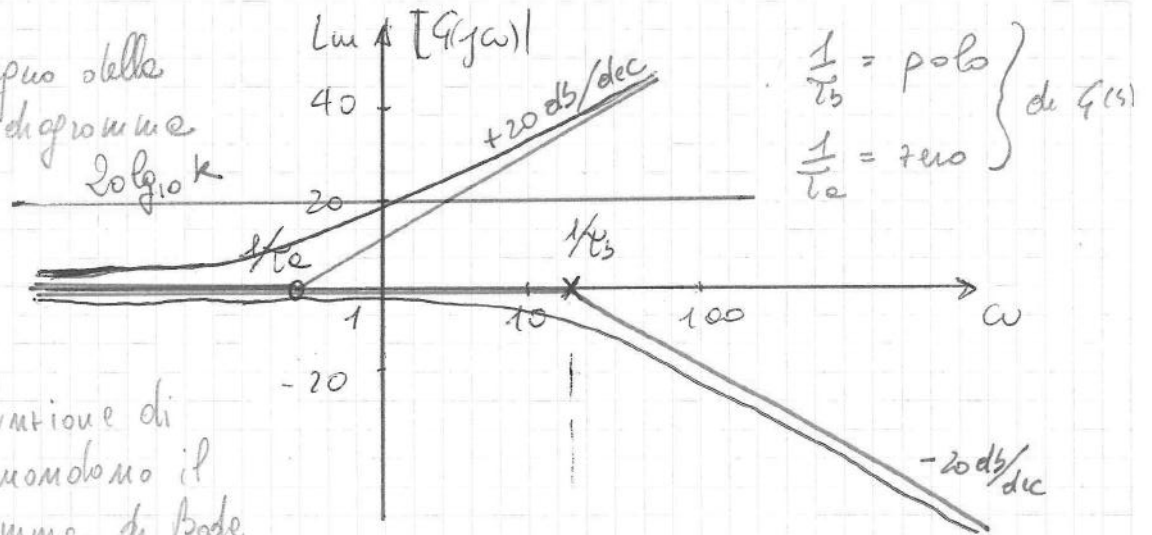
Cioè che  $G(j\omega)$  può essere scritto come:

$$G(j\omega) = k \frac{|j\omega-z_1| e^{j\alpha_1} \cdot |j\omega-z_2| e^{j\alpha_2} \dots |j\omega-z_m| e^{j\alpha_m}}{|j\omega-p_1| e^{j\beta_1} |j\omega-p_2| e^{j\beta_2} \dots |j\omega-p_n| e^{j\beta_n}}$$

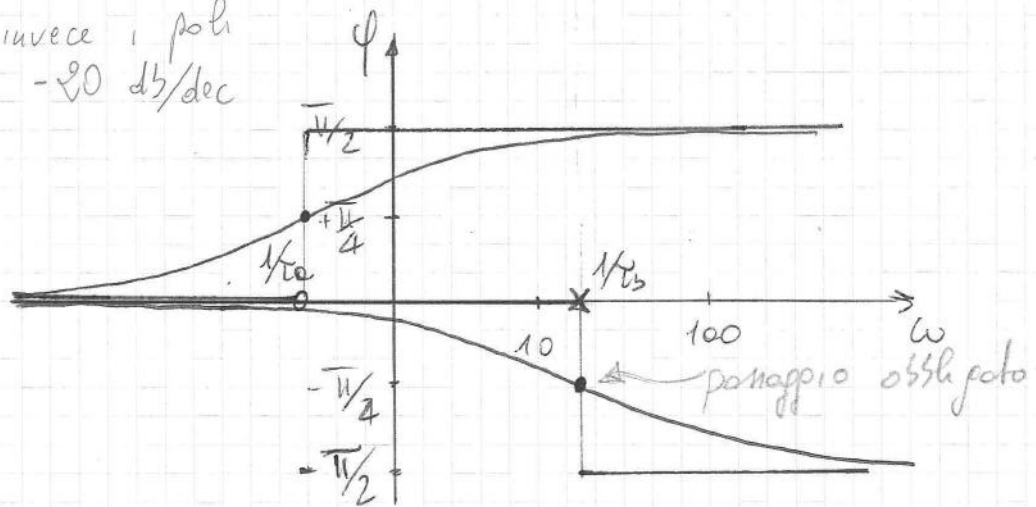
$$G(j\omega) = k \frac{|j\omega-z_1| |j\omega-z_2| \dots |j\omega-z_m|}{|j\omega-p_1| |j\omega-p_2| \dots |j\omega-p_n|} e^{j(\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_m-\beta_1-\beta_2-\dots-\beta_n)}$$

Queste scritte sono equivalenti, e solo che l'ultima è più pratica in quanto racchiama subito modulo e fase.

$k$  è il guadagno della  
 $f_+$  e su un diagramma  
 $\log_{10} - \log_{10}$  è  
 una retta  
 orizzontale



Gli zeri di una funzione di  
 trasferimento, mi monotonano il  
 modulo del diagramma di Bode  
 a  $+20$  dB/dec, invece, poli  
 me lo monotonano a  $-20$  dB/dec



Per quanto riguarda la fase:

Se  $\omega \tau_e \ll 1$  perché  $\omega \ll \frac{1}{\tau_e}$

$$\arg[(1 + j\omega\tau_e)] = \arctan(0) = 0$$

Se  $\omega \tau_e \gg 1$   $\omega \gg \frac{1}{\tau_e}$

$$\arg[(1 + j\omega\tau_e)] = \arctan(+\infty) = +\frac{\pi}{2}$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{Im}{Re}\right)$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{\omega\tau_e}{1}\right)$$

Se  $\omega \tau_e = 1 \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{4}$

Il modulo sarà uguale a:

$$|1 + j\omega\tau_e| = \sqrt{1 + (\omega\tau_e)^2} = \sqrt{2}$$

Che su rappresentazione logaritmicamente è:

$$\Rightarrow 20 \log_{10} \sqrt{2} \sim 3 \text{ dB}$$

Ricordando la nostra funzione ovvero però un  $k$  di troppo.

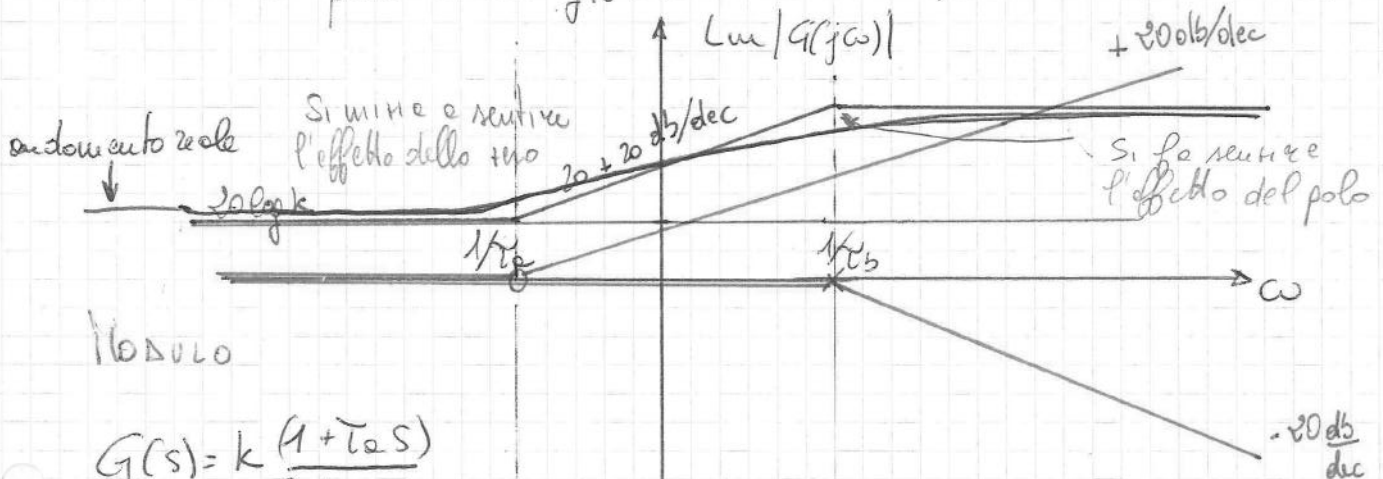
$$G(s) = k \frac{1 + \tau_z s}{1 + \tau_s s}$$

$$Lm|G(j\omega)| = Lm(k) + Lm|1 + j\omega\tau_z| + Lm\left|\frac{1}{1 + j\omega\tau_s}\right|$$

$$\text{L'argomento } [G(j\omega)] = \arg(k) + \arg(1 + j\omega\tau_z) + \arg\left(\frac{1}{1 + j\omega\tau_s}\right)$$

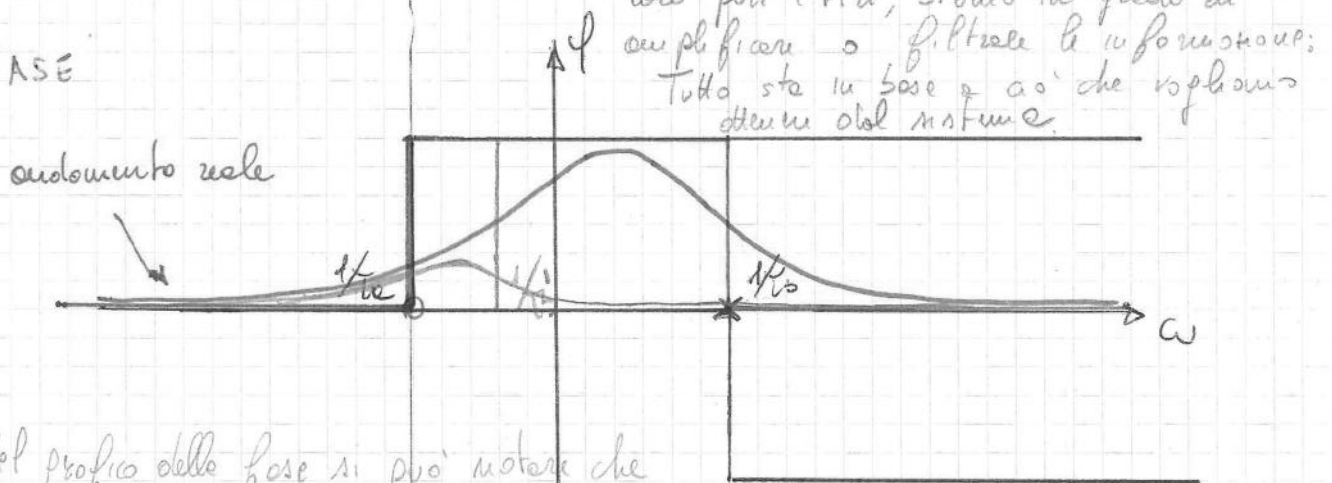
Ci manca la rappresentazione di  $k$  che sarà una retta in punto  $k$  è un numero detto "guadagno del sistema", che ha fase nulla e quindi non conta nel diagramma della fase.

Sappiamo che è bene sapere che il sistema ha un asintoto orizzontale pari a  $20 \log_{10} k$



$$G(s) = k \frac{(1 + \tau_z s)}{(1 + \tau_s s)}$$

FASE



Nel profilo della fase si può notare che se il polo  $1/\tau_s$  fosse stato più vicino allo zero  $1/\tau_z$  allora l'andamento della funzione sarebbe stato quello a matita e la fase sarebbe stata concitata in modo diverso. Questo è uno dei modi utilizzati per filtrare o amplificare le informazioni.



la funzione per ogni frequenza ha una pendenza di  $-20 \text{ dB/dec}$  che interseca le asse in 1.

Posso pensare anche di rappresentare  $\frac{K}{s}$  che sarà simile per la fase, ma il modulo sarà  $\frac{K}{\omega}$  diverso.

$$\frac{K}{s} \rightarrow \frac{K}{j\omega}$$

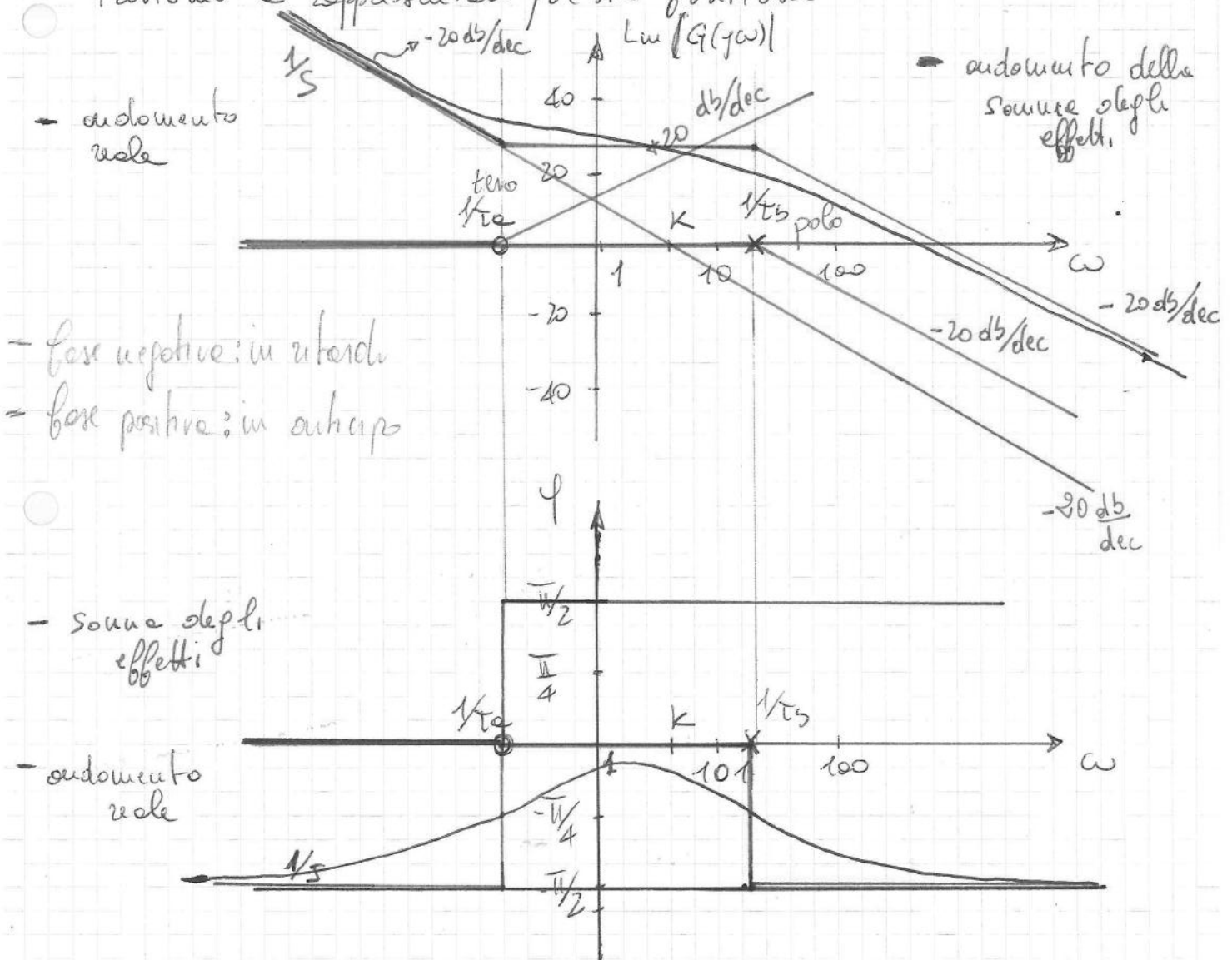
Ricorda che  $\frac{K}{s}$  interseca le asse nel punto  $K$  e  $s$  decresce sempre di  $-20 \text{ dB/dec}$

$$\left| \frac{K}{j\omega} \right| = \frac{K}{\omega}$$

$$\text{Lim} \left| \frac{K}{j\omega} \right| = 20 \log_{10} \left( \frac{K}{\omega} \right)$$

Interseca le asse per  $\omega = K$ . e decresce sempre di  $-20 \text{ dB/dec}$

Proviamo a rappresentare queste funzioni



- fase negative: in ritardo  
- fase positive: in anticipo

- somme degli effetti

- andamento reale

In questo caso il sistema è in fase tra le due frequenze di taglio, invece la risposta spicca bene tra le due frequenze di taglio, è cambiato il comportamento delle funzioni.

Vel diromana rappresentiamo direttamente il termine  $26,7/s^2$

$$\frac{26,7}{s^2} \rightarrow \frac{26,7}{(j\omega)^2} = - \frac{26,7}{\omega^2}$$

$26,7$  è dato da  
 $80/3 = 26,7$

$$\left| \frac{26,7}{(j\omega)^2} \right| = \frac{26,7}{\omega^2} = \frac{k}{\omega^2} = \frac{\sqrt{k}}{\omega} \cdot \frac{\sqrt{k}}{\omega}$$

Se volessi studiare il modulo della funzione:

$$20 \log_{10} \frac{k}{\omega^2} = 20 \log_{10} \left( \frac{\sqrt{k}}{\omega} \right) + 20 \log_{10} \left( \frac{\sqrt{k}}{\omega} \right)$$

Posso vederla anche come:

$$\begin{aligned} 20 \log_{10} \frac{k}{\omega^2} &= 20 \log_{10} \frac{k}{(10\omega_1)^2} - 20 \log_{10} \frac{k}{\omega_1^2} = \\ &= 20 \log_{10} \frac{k}{\frac{k}{\omega_1^2} \cdot 10^2} = -20 \log_{10} (10)^2 = \\ &= -40 \log_{10} 10 = -40 \text{ dB} \end{aligned}$$

Il diagramma effettivo di un polo doppio in questo caso

$$\frac{1}{(s+1)^2} = \frac{1}{(s+1)} \cdot \frac{1}{(s+1)}$$

Questo si chiama polo doppio

sarà la somma dei loro effetti, indicati in blu sul grafico del modulo.

Lo stesso principio vale per le fasi, cioè si sommano gli effetti dei poli semplici.

Conviene rappresentare direttamente la somma dei poli complessi e tale discorso vale anche per gli zeri.

Vediamo ora la rappresentazione complessiva:

Conviene rappresentare direttamente la somma di poli e zeri solo per una questione di ordine all'interno del grafico, in questo il grafico stesso si appesantirebbe troppo.

## SISTEMI DEL SECONDO ORDINE

- Si risolvono direttamente con le trasformate di Laplace.  
Seranno del tipo:

$$a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = C_1 \frac{dx}{dt} + C_0 x$$

Applichiamo le trasformate di Laplace:

$$a_2 s^2 y(s) + a_1 s y(s) + a_0 y(s) = C_1 s x(s) + C_0 x(s)$$

Introduco la funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{y(s)}{x(s)} = \frac{C_1 s + C_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

Questa scrittura è giusta ma non è quella che utilizzeremo; perché sono abituato a vedere i sistemi nel seguente modo

$$G(s) = \frac{C_1 s + C_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{k_0 (\tau s + 1)}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + 2\zeta \frac{s}{\omega_n} + 1}$$

$\zeta$  = smorzamento interno del sistema

$\omega_n$  = pulsazione naturale del sistema

Quando studiamo un sys del II ordine un dato studio

$$G(s) = \frac{k}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + 2\zeta \frac{s}{\omega_n} + 1}$$

Ricorda: Nel sistemi del secondo ordine il fattore  $(\tau s + 1)$  <sup>di un minuto</sup> modifica la risposta del sistema, ma non è fondamentale nell'ottenere le caratteristiche fondamentali

Dobbiamo studiare il sistema a gradino e armonico con la funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{k_0}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + 2\zeta \frac{s}{\omega_n} + 1} = \frac{y(s)}{x(s)}$$

$$x(s) = \frac{x_0}{s}$$

$$y(s) = G(s) \cdot x(s) = G(s) \frac{x_0}{s}$$

ordine del gradino

$$y(s) = \frac{k_0 x_0}{\left(\frac{s^2}{\omega_n^2} + 2\zeta \frac{s}{\omega_n} + 1\right) s}$$

$k_0$  è la costante del sistema  
e non le costante delle molle

Se voglio sapere come si comporta nel tempo ho bisogno delle antitrasformate, però da questa equazione applicando il valore finale teorema e direi che:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s y(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{k_0 x_0}{\left(\frac{s^2}{\omega_n^2} + 2\zeta \frac{s}{\omega_n} + 1\right) s} = k_0 x_0$$

L'informazione di regime quindi è quella trovata dal limite.

Ritornando all'antitrasformata avremo:

Distinguiamo 3 casi in base allo smorzamento del sistema:

1.  $0 \leq \zeta < 1$  SOTTOSMORZATO

$$\rightarrow \frac{y(t)}{x_0 k_0} = 1 - \frac{e^{-\zeta \omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \cos\left(\overbrace{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}^{\omega_d} t + \varphi\right)$$

$$\varphi = -\arctan\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}}\right)$$

da dove deriva il segno negativo?

Non impazzire e memorizzare questa espressione

2.  $\zeta = 1$  CRITICAMENTE SMORZIATO

$$\frac{y(t)}{x_0 k_0} = 1 - (1 + \omega_n t) e^{-\omega_n t}$$

È scomparsa la componente oscillatoria del sistema, con il coseno, in pratica è una funzione decrescente.

$$x(t) = 0 \quad t < 0$$

$$x(t) = x_0 \quad t \geq 0$$

Proviamo ad applicarci in tal caso una sollecitazione a gradino

$$y(s) = G(s) \cdot x(s) = G(s) \frac{x_0}{s}$$

$$y(s) = \frac{x_0 k_0}{s \left( \frac{s^2}{\omega_n^2} + 2\zeta \frac{s}{\omega_n} + 1 \right)}$$

3.  $\zeta > 1$  SOVRASMORZATO

$$\frac{y(t)}{x_0 k_0} = 1 - \frac{1}{\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left[ \left( \zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) e^{-(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} + \left( \zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) e^{-(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} \right]$$

Un sistema sottosmorzato risponde con un'oscillazione; tanto più cresce  $\zeta$  tanto più l'informazione in risposta è buona

Vediamo di fare qualche esempio

Dato

$$x(t) = x_0 \sin \omega t \rightarrow \text{impulso}$$

$$y(t) = y_0 \sin(\omega t + \varphi) \rightarrow \text{risposta}$$

$$G(j\omega) = \frac{k_0}{\frac{(j\omega)^2}{\omega_n^2} + 2\zeta \frac{j\omega}{\omega_n} + 1}$$

$G(s)$  sappiamo che è  $G(j\omega)$

$$G(s) = \frac{k_0}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + 2\zeta \frac{s}{\omega_n} + 1} \Rightarrow G(j\omega) = \frac{k_0}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + j 2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}$$

perché  $j^2 = -1$  ← perché il  $\ominus$

Con riferimento alle seguenti formule:

$$|G(j\omega)| = \frac{k_0}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left(\sqrt{5} \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \quad \text{Modulo}$$

$$\varphi = \arctan \left[ \frac{\sqrt{5} \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \right] \quad \text{Fase}$$

Si è in grado di evoluzione pronto segue:

a. Se  $\frac{\omega}{\omega_n} \ll 1$  ossia la pulsazione eccitativa è molto piccola rispetto a quella propria del sistema non smorzato; si ha che:

$$\frac{y_0}{x_0 k_0} \cong 1 \quad \text{e} \quad L_m \left( \frac{y_0}{x_0 k_0} \right) \cong 0$$

ossia il guadagno in decibel (dB) del sistema è praticamente nullo.

b. Se invece  $\frac{\omega}{\omega_n} \gg 1$ , ossia se la pulsazione eccitativa è molto maggiore di quella propria del sistema non smorzato, si ha che:

$$\frac{y_0}{x_0 k_0} \cong \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^{-2}$$

e ciò significa che in definitiva che il guadagno del sistema in dB è espresso dalla relazione:

$$L_m \left( \frac{y_0}{x_0 k_0} \right) \cong -40 \text{Log} \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)$$

Per un sistema lineare del secondo ordine, le curve delle risposte in frequenza, per qualsiasi valore del fattore di smorzamento  $\zeta$ , tendono rispettivamente per pulsazioni di eccitazione  $\omega$  molto piccole e per  $\omega$  molto grandi, ai due asintoti:

$$L_m \left( \frac{y_0}{x_0 k_0} \right) = 0 \quad \text{e} \quad L_m \left( \frac{y_0}{x_0 k_0} \right) = -40 \text{Log} \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)$$

$$\frac{\omega}{\omega_n} \gg 1$$

$$\frac{y_0}{x_0 k_0} \sim \frac{1}{\sqrt{[1 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2]^2}} \approx \frac{1}{1 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2}$$

termine che prevale

Studio ora la base logaritmica

$$20 \log_{10} \left( \frac{1}{(\omega/\omega_n)^2} \right) = -40 \log_{10} \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right) = -40 \log_{10} \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)$$

studio i due estremi di una decade e studio l'ampiezza

$$\begin{cases} \omega = \omega_1 \\ \omega = \omega_2 = 10 \omega_1 \end{cases}$$

$$-40 \log_{10} \left( \frac{\omega_2}{\omega_n} \right) - \left( -40 \log_{10} \left( \frac{\omega_1}{\omega_n} \right) \right) = \text{intersecano sul} \\ \text{frequenze naturale} \\ \omega_n \text{ del } 2^{\circ} \text{ ordine}$$

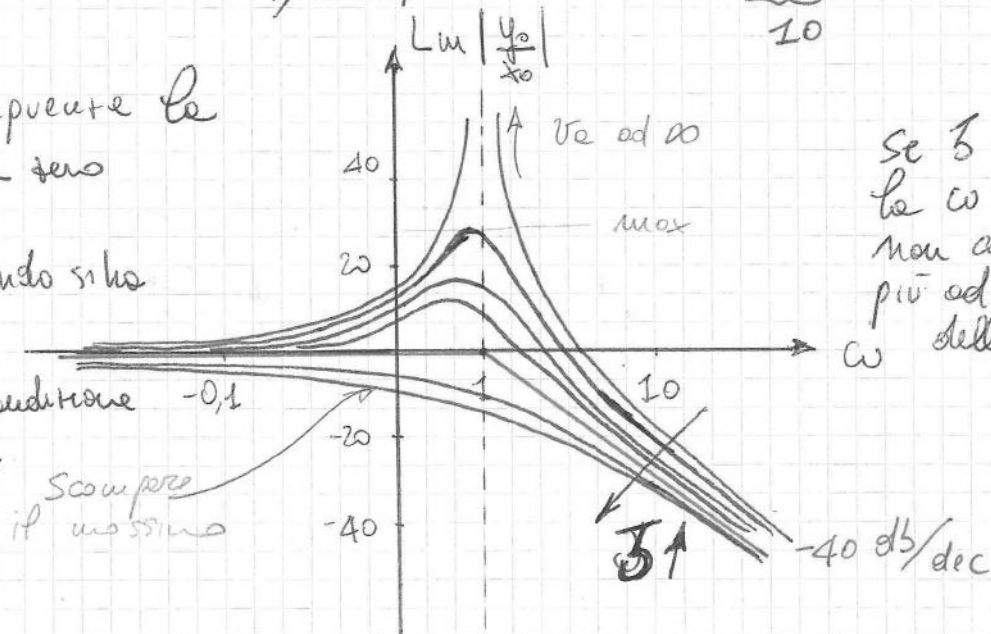
$$-40 \log_{10} \left( \frac{\omega_2/\omega_n}{\omega_1/\omega_n} \right) = -40 \log_{10} \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} \right) = -40$$

10

Per basse frequenze la funzione va a zero

Se  $\zeta = 0$  quando si ha  $\omega = \omega_n$  si

verifica una condizione di risonanza



Se  $\zeta$  cresce la  $\omega = \omega_n$  non corrisponde più ad un max della funzione

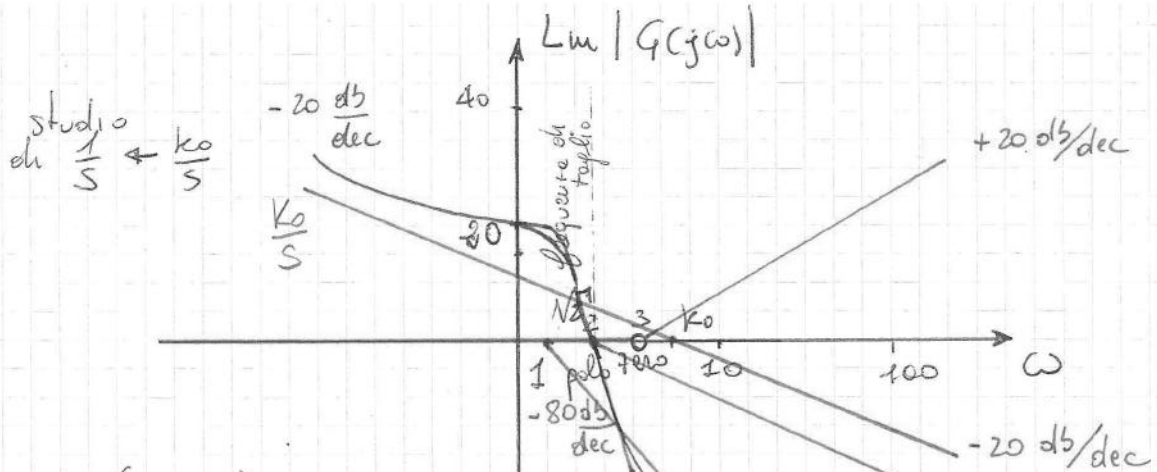
Prendendo la ④ pongo  $\zeta = 0$

$$\frac{y_0}{x_0 k_0} = \frac{1}{1 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2} \quad \text{ve e } \frac{1}{0} \rightarrow \infty \text{ le frequenze}$$

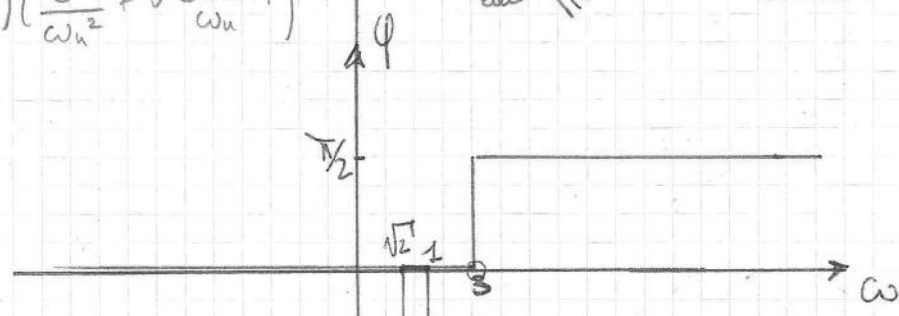
$\frac{\omega}{\omega_n}$  dove  $\omega = \omega_n$

RISONANZA: la vibrazione va ad infinito quando  $\zeta = 0$

Caso in cui il fattore di smorzamento è  $\neq 0$  essi presentano sempre un massimo che si localizza ad una frequenza  $\omega_n$ . (trovo nuove curve)



$$G(s) = \frac{k_0(\tau_1 s + 1)}{s(\tau_2 s + 1)\left(\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{\sqrt{2}s}{\omega_n} + 1\right)}$$



gli zeri crescono e poli decrescono } lo fuit.

note che non so come si comporta (devo fare uno studio puntuale x chi è 3 sono vicini, ma tanto esce a  $-\frac{3}{2}\pi$ ) comportamento che mi aspetto dalle fosse

$\omega_z = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} = 1,00$  il max si trova a 1

$\frac{y_0}{x_0} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-\zeta^2}} = 1,154 \rightarrow 1,2 \text{ dB} \rightarrow -20 \log 1,154$

Porto in forma canonica

$$G(s) = \frac{10 \cdot 3 \left(\frac{s}{3} + 1\right)}{\sqrt{2} \cdot s \left(\frac{s}{2} + 1\right) \left(\frac{s^2}{2} + \frac{s}{2} + 1\right)}$$

cioè:  $G(s) = \frac{k_0(\tau_1 s + 1)}{s(\tau_2 s + 1)\left(\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{\sqrt{2}s}{\omega_n} + 1\right)}$

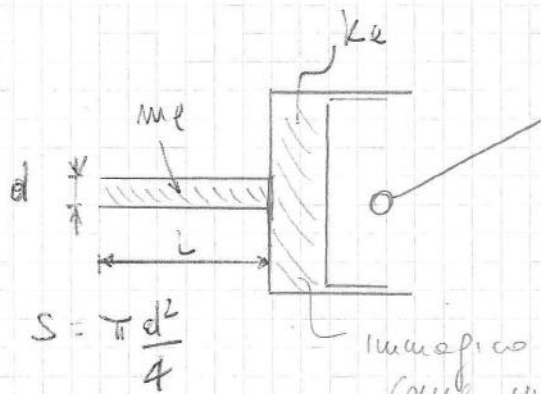
Trovo che:

$\omega_n = \sqrt{2}$  mentre  $\frac{\sqrt{2}}{\omega_n} = \frac{1}{2}$ ;  $\zeta = \frac{1}{4}\sqrt{2} = 0,353$

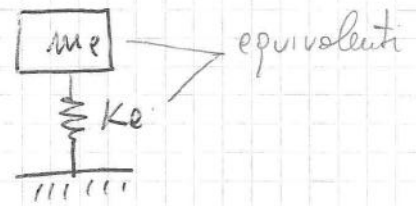
$\tau_1 = \frac{1}{3}$  ma  $\frac{1}{\tau_1} = 3$  zero | studio le impole funzioni.  
 $\tau_2 = \frac{1}{2}$  ma  $\frac{1}{\tau_2} = 2$  polo



Riprendiamo il discorso della scorsa volta.



Tutto sistema viene schematizzato con:



$$S = \pi \frac{d^2}{4}$$

immagino questo fluido come una molla con rigidezza  $k$

Le masse e rigidezze equivalenti sono:

$$m_e = \rho \frac{S L}{v}$$

Considero solo le masse nel collettore  $p v^k = \text{cost}$

Un fluido si comprime con una trasformazione politropica o isocritica (adiabatica reversibile)

$$v = \frac{V}{m} \quad \text{Volume specifico}$$

Attenzione:

$p v^k = \text{cost} \rightarrow$  presuppone che la massa sia costante

$p v^k = \text{cost} \rightarrow$  presuppone che la massa sia costante

Nel nostro motore la massa  $\neq$  da costante, in quanto vi sono delle perdite, per questo prendiamo in considerazione  $V$ .

Se devo trovare una rigidezza equivalente devo trovare una forza equivalente:

$$|dF = k_e dx| \rightarrow \text{E' la forza infinitesime nel cilindro}$$

Pero sappiamo che nel nostro sistema

$$|dF = dp \cdot S| \rightarrow \text{E' la forza infinitesime nel collettore}$$

lo spostamento rappresenta lo spostamento delle colonne fluide.

Esplichiamo ora  $dp$  per sapere qualcosa di più:

$$d(p v^k) = 0$$

derivando otteniamo:

$$dp v^k + p k v^{k-1} dv = 0$$

$$\omega_{in} = \sqrt{\frac{pK}{f}} \cdot \sqrt{\frac{S}{LV_{in}}}$$

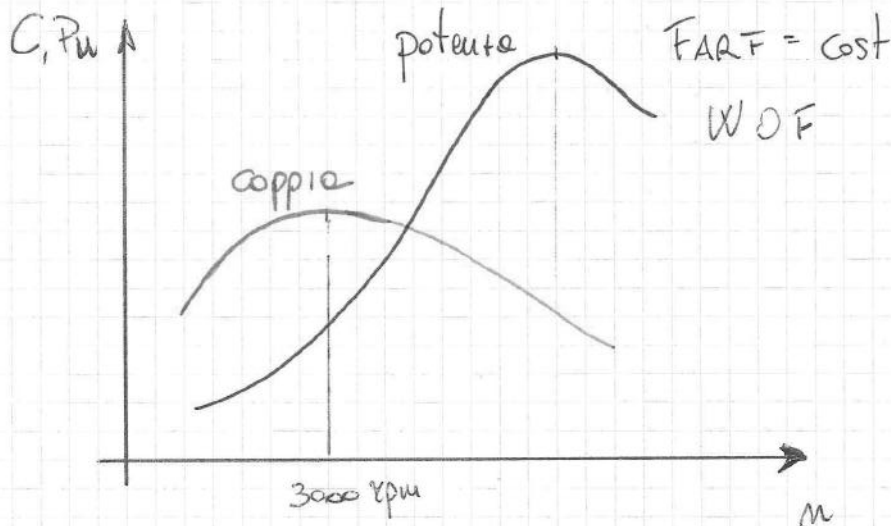
Composto da due termini, uno costante e l'altro variabile

$p, K, f$ , sono costanti del motore e non posso modificarli  
 I gradi di libertà che ho nelle scelte del controllo sono  $S$  e  $L$ , in quanto  $V_{in}$  è una costante del motore.

La sezione  $S$  non è un elemento che ci dà una grande libertà di variazione, ma, possiamo giocare tanto sulla lunghezza  $L$ .  
 Vediamo, ora, come si intende per caratteristica meccanica di un motore.

La caratteristica meccanica di un motore è la variazione di coppia e potenza a posizioni fisse degli organi di regolazione.

Nel nostro caso l'organo di regolazione è le valvole e farfelle.

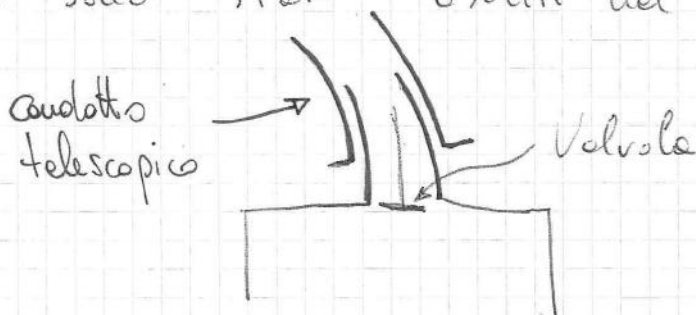


Caratteristica meccanica e prime aperture delle valvole e farfelle

di solito si lavora sempre al massimo di coppia

Le risonanze ce l'ho soltanto nel caso in cui la frequenza naturale va ad infinito (il modulo delle  $f_t$  va ad infinito alla frequenza di risonanza)

In formato I si parlava di condotti telescopici per venire le laminae del condotto e quindi la frequenza naturale poi sono stati aboliti del nuovo regolamento.



$$\begin{cases} (Q - Q_1) dt = A_1 dh_1 \\ Q_1 = \rho g \frac{(h_1 - h_2)}{R_1} \\ (Q_1 - Q_2) dt = A_2 dh_2 \\ Q_2 = \rho g \frac{h_2}{R_2} \end{cases}$$

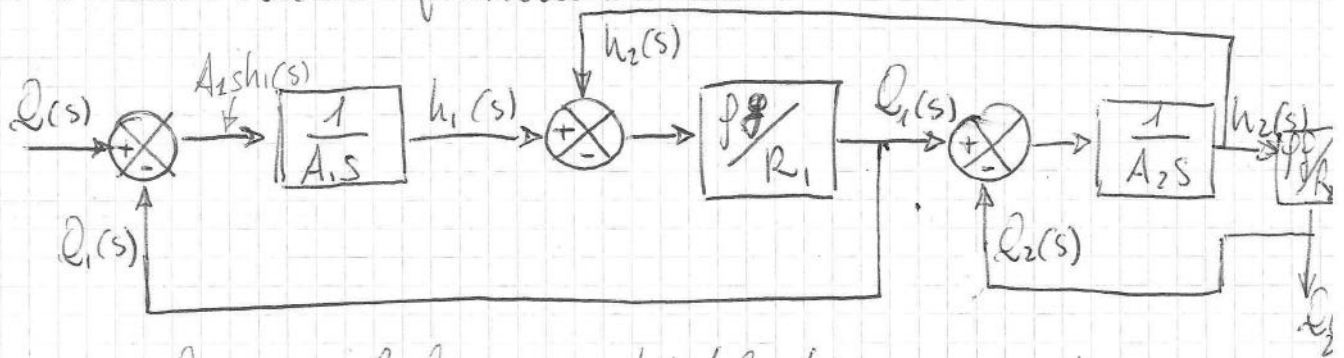
Sono le equazioni che risolvono il sistema

Riprendere le regole delle trasformate di Laplace

Passando alle trasformate di Laplace otteniamo:

$$\Rightarrow \begin{cases} (Q - Q_1) = A_1 \frac{dh_1}{dt} \\ Q_1 = \rho g \frac{(h_1 - h_2)}{R_1} \\ (Q_1 - Q_2) = A_2 \frac{dh_2}{dt} \\ Q_2 = \rho g \frac{h_2}{R_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q(s) - Q_1(s) = A_1 s h_1(s) \\ Q_1(s) = \rho g \left[ \frac{h_1(s) - h_2(s)}{R_1} \right] \\ Q_1(s) - Q_2(s) = A_2 s h_2(s) \\ Q_2(s) = \rho g \frac{h_2(s)}{R_2} \end{cases}$$

A livello dei blocchi funzionali otteniamo:



Attraverso la semplificazione dei blocchi otteniamo che:

↳ Come viene posto il nastro?

$$Q(s) = Q_2(s) + \frac{A_1 R_1 + A_1 R_2 + A_2 R_2}{(\rho g)^2} s Q_2(s) + \frac{A_1 A_2 R_1 R_2}{(\rho g)^2} s^2 Q_2(s)$$

La trasformata del sistema sarà quindi:

$$\text{uscita } Q_2(s) = \frac{1}{\text{ingresso } Q(s)} = \frac{1}{\frac{A_1 A_2 R_1 R_2}{(\rho g)^2} s^2 + \frac{A_1 R_1 + A_1 R_2 + A_2 R_2}{\rho g} s + 1}$$

## SISTEMI DI ORDINE N

La funzione di trasferimento è del tipo indicato (in tali sistemi)

$$1. G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad \boxed{n > m}$$

$$G(s) = k \frac{(s-z_1)(s-z_2) \dots (s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2) \dots (s-p_n)} \quad n > m$$

Posso passare ad evidenziare gli  $m$  poli e gli  $n$  zeri della funzione; la stessa funzione può essere scritta anche come segue:

$$2. G(s) = \sum_{i=1}^m \left[ \frac{e_i}{(s-p_i)} \right]$$

dove gli zeri saranno compresi nei termini  $e_i$ .

$$e_i = \left[ G(s)(s-p_i) \right]_{s=p_i}$$

Supponiamo di essere riusciti a passare dalla I scrittura alla seconda scrittura, sottoponendo il sistema ad una sollecitazione a gradino ovvero:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

$$X(s) = \frac{x_0}{s}$$

Sostituendolo nelle funzioni di trasferimento

$$Y(s) = G(s) \frac{x_0}{s} = \frac{e}{s} + \sum_{i=1}^m \left( \frac{e_i}{s-p_i} \right)$$

Prichi appunto: Come fa a passare e queste scritte?

$$Y(s) = k \frac{(s-z_1) \dots (s-z_m)}{(s-p_1) \dots (s-p_n)} \frac{x_0}{s}$$

Nella scrittura seguente evolvono punti più dove posso avere risposte del primo e del secondo ordine:

$$y(s) = \frac{Q}{S} + \sum_{i=1}^n \left( \frac{Q_i}{S-p_i} \right)$$

non imporre e nuovo

$$y(s) = \frac{Q}{S} + \sum_{i=1}^p \left( \frac{Q_i}{S-p_i} \right) + \sum_{j=1}^r \frac{b_j(s+b_j\omega_{nj}) + C_j\omega_{nj}\sqrt{1-\zeta_j^2}}{s^2 + 2\zeta_j\omega_{nj}s + \omega_{nj}^2}$$

Sto evidenziando i poli nulli, i poli al numeratore e al denominatore.

La soluzione è uguale a:  $q + v\tau = n$

Le risposte di un sistema sottosmorzato è:

$$y(t) = e + \sum_{i=1}^p Q_i e^{p_i t} + \sum_{j=1}^r b_j e^{-\zeta_j \omega_{nj} t} \cos(\omega_{nj} \sqrt{1-\zeta_j^2} t) + \sum_{j=1}^r C_j e^{-\zeta_j \omega_{nj} t} \sin(\omega_{nj} \sqrt{1-\zeta_j^2} t)$$

$p_i$  e  $-\zeta_j \omega_{nj}$  sono le parti reali delle radici complesse coniugate.

$$s_{1,2} = -\zeta_n \omega_n \pm j \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$$

Se tutti i poli  $p_i$  sono reali negativi e tutti i poli complessi coniugati con parte reale negativa, scoppiano risposte armonica variabile e rimane una risposta costante.

In questo modo gli esponenziali vanno a zero e così il sistema è stabilizzato e si dice stabile.

Se un polo ha parte reale positiva, le risposte diverge e il sistema è instabile.

Cond. di stabilità  $\Rightarrow$  tutti i poli devono avere parte reale negativa.

Con riferimento alle seguenti formule:

$$y(t) = a + \sum_{i=1}^q a_i e^{p_i t} + \sum_{j=1}^k b_j e^{-\zeta_j \omega_{nj} t} \cos(\omega_n \sqrt{1-\zeta_j^2} t) + \sum_{j=1}^k c_j e^{-\zeta_j \omega_{nj} t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta_j^2} t)$$

Si possono effettuare le seguenti considerazioni:

- a. Se tutti i coefficienti  $(-p_i)$  e  $(-\zeta_j \omega_{nj})$  degli esponenti sono negativi, la variabile in uscita  $y$  del sistema tende, per  $t \rightarrow \infty$ , ad un valore  $y_{\infty} = a$ , funzione unicamente del predopulo statico del sistema stesso e dell'ampiezza del predopulo  $x_0$  applicato alla variabile di ingresso. In tal caso il sistema sarà STABILE ed una tale configurazione sarà possibile solo se tutte le radici del denominatore della funzione  $G(s)$  che prendono il nome di poli della funzione di trasferimento hanno parte reale negativa.
- b. Se invece anche uno solo dei poli della  $G(s)$  ha parte reale positiva, ciò significa che uno dei coefficienti  $(-p_i)$  o  $(-\zeta_j \omega_{nj})$  degli esponenti di  $y(t)$  è positivo e che pertanto il valore della variabile in uscita  $y$  continua ad aumentare indefinitamente nel tempo; in tal caso il sistema è instabile.
- c. Nell'ipotesi infine in cui tutti i poli della  $G(s)$  abbiano parte reale negativa, si può rilevare da  $y(t)$  che la risposta di un sistema lineare di ordine superiore è costituita dalle somme di un termine costante, di intensità pari a quella del valore finale delle risposte stesse, di termini rappresentati da curve esponenziali decrescenti in funzione del tempo  $t$  e di termini individuati da curve sinusoidali smorzate. Allora, i termini della  $y(t)$  cui corrispondono valori molto o grandi dei coefficienti  $p_i$  o  $\zeta_j \omega_{nj}$  decadono rapidamente nel tempo e che tali termini influenzano di conseguenza solo la primissima parte delle risposte, mentre è altrettanto evidente che i termini che corrispondono a piccoli valori dei coefficienti  $p_i$  e  $\zeta_j \omega_{nj}$  costituiscono di solito i termini che maggiormente influenzano sull'andamento delle risposte stesse.

Proviamo a fare un esempio numerico:

$$G(s) = \frac{y(s)}{x(s)} = \frac{10(1+2s)}{(s+3)(s^2+s+1)}$$

Vediamo se il sistema è stabile come prima cosa:

le soluzioni del denominatore sono:

$$s = -3$$

$$s_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = -0,5 \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Questo sistema è stabile, in quanto ha 3 radici con parte reale negativa.

A questo punto ha senso parlare di risposte in frequenza.

$$G(j\omega) = \frac{10(j\omega+1)}{(j\omega+3)(1+j\omega-\omega^2)}$$

Sostituisco  $s = j\omega$

Scrivendolo in forme canonica:

$$G(s) = \frac{10(2s+1)}{3\left(\frac{s}{3}+1\right)(s^2+s+1)}$$

$$\gamma_z = 2$$

$$\gamma_p = \frac{1}{3}$$

$$k = \frac{10}{3}$$

$$\omega_n = 1$$

$$\frac{\zeta\omega_n}{\omega_n} = 1 \Rightarrow \zeta = \frac{\omega_n}{2} = 0,5$$

Proviamo ora a tracciare il diagramma di Bode di questa funzione.

# CIRCUITI ANTICIPATORI / RITARDA TORI

Sono costituiti dalla seguente struttura:

$$G(s) = \frac{1 + T_n s}{1 + T_d s}$$

Tale struttura è valida sia per Anticipatori che ritardatori:

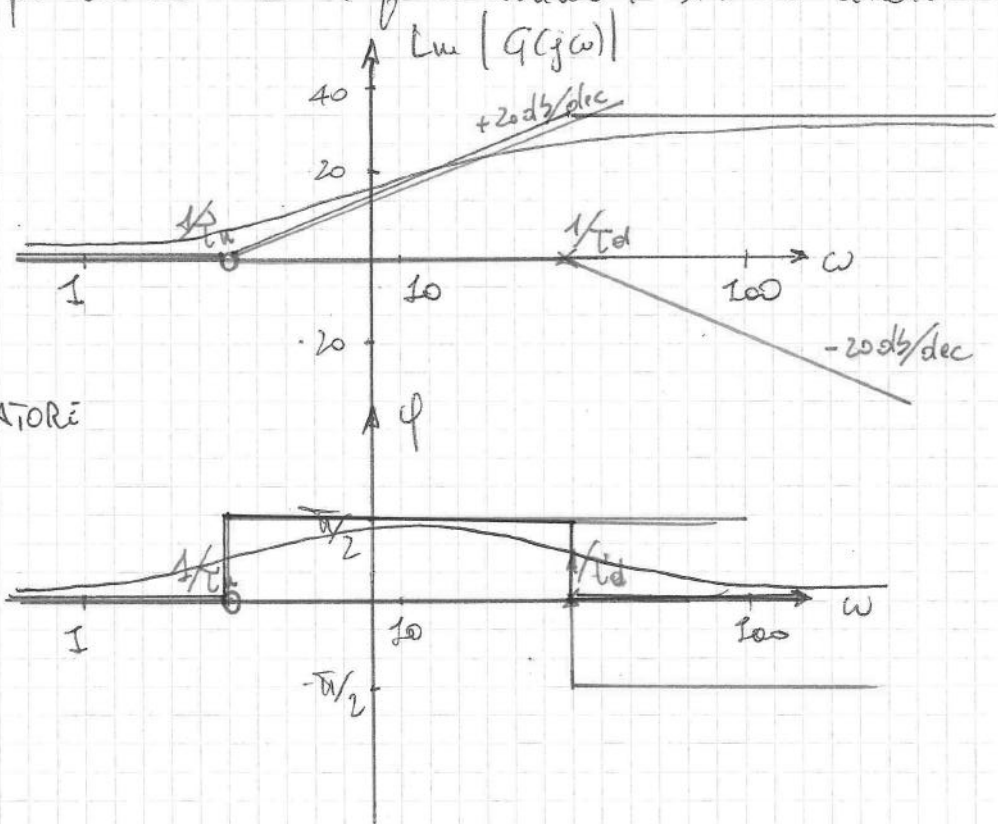
→  $T_n > T_d \Rightarrow$  ANTICIPATORE

→  $T_n < T_d \Rightarrow$  RITARDA TORI

Vediamo che tipo di modulo e fase hanno i sistemi ritardatori e anticipatori.

Ricostruiamo i grafici

SISTEMA ANTICIPATORE



Ricorda: Lo zero tutte le frequenze è + 3 dB/dec, il polo invece è - 3 dB/dec a livello delle frequenze di taglio.

Tale sistema è un sistema anticipatore in quanto il diagramma della fase è posto dalla parte delle fasi positive, invece nel caso in cui sia ritardante la fase è minore di zero.

Vediamo cosa accade per un sistema ritardante



Se proviamo ad antitrasformare ovvero:

$$y(t) = x_0 \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\tau_u}{\tau_d} \right) e^{-t/\tau_d} \right]$$

$V_0$  è un esponenziale che si esaurisce nel tempo, e il modo con cui il sistema ~~risponde~~ risponde è influenzato dai zeri e non dagli poli, in quanto  $\tau_d$  compare all'esponenziale.

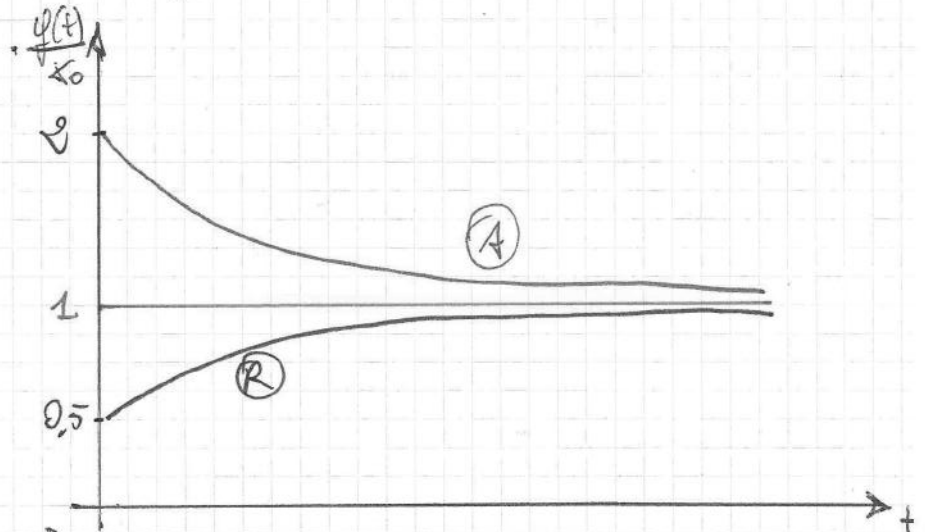
Rappresentiamo tale sistema nel caso di:

$$\tau_u = 2\tau_d \quad (A)$$

$$\tau_u = 0,5\tau_d \quad (R)$$

A: Anticipatore

R: Ritardatore



$$\left. \begin{array}{l} y(t)/x_0 \\ \left|_{t=0} \right. \end{array} \right\} \begin{array}{l} \rightarrow 2 \quad (A) \\ \rightarrow 0,5 \quad (R) \end{array}$$

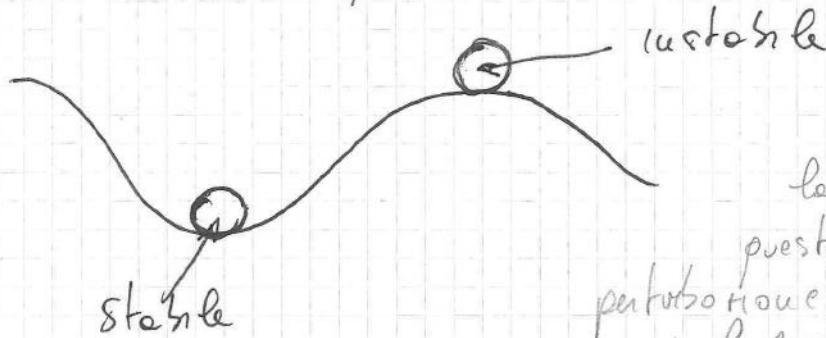
Ho due valori diversi nel caso di sys anticipatore e sys ritardatore

Cio' si dice che la forma della risposta è definita dai poli, invece gli zeri ci interessano per valutare i valori

Importante: La dinamica del fenomeno nel tempo dipende unicamente dalle costanti di tempo  $\tau_d$  del denominatore della funzione di trasferimento, mentre la costante  $\tau_u$  del numeratore contribuisce a determinare l'ampiezza delle risposte.

# STABILITÀ

Un sys è stabile se perturbiamo la situazione di equilibrio dopo un certo tempo dalla perturbazione, questo è tornato nelle sue posizione di equilibrio.

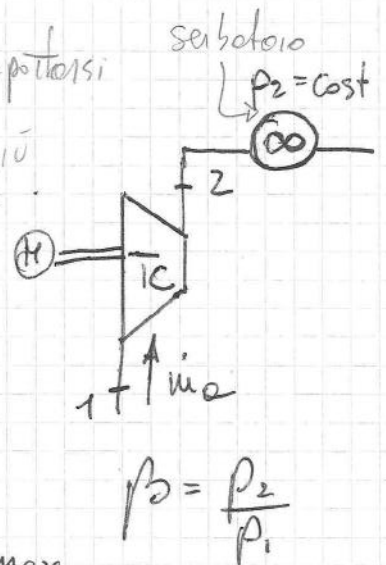
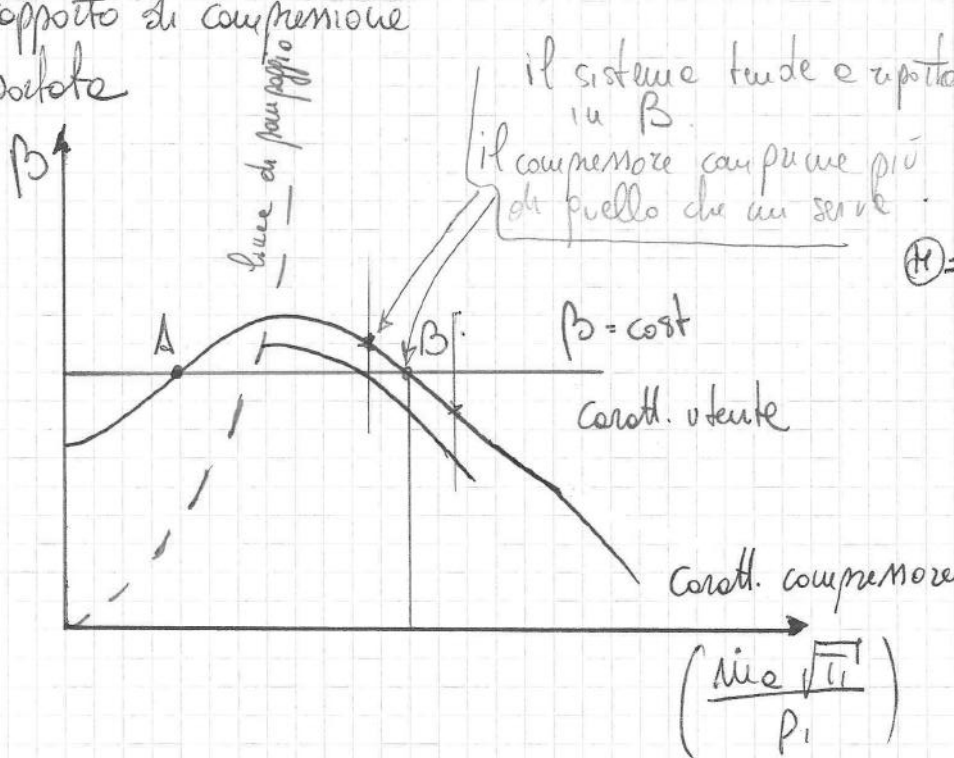


Se perturbiamo la sfera in basso questa alla fine della perturbazione si porta di nuovo in quel punto.

Capire questo concetto è molto importante, proviamo ad applicarlo in un esempio alle macchine.

Prendiamo un turbocompressore con le sue caratteristiche  $\beta$ , in

$\beta$  = rapporto di compressione  
 $m$  = portata



$$\beta = \frac{p_2}{p_1}$$

Si normalizza il rapporto di compressione in base alle condizioni di espressione delle turbomacchine

Poiché  $p_2$  è costante (richiesto dal serbatoio),  $\beta$  sarà costante

$$\beta = \text{costante}$$

Supponiamo che il sistema non sia in B e alcune cose succedano

La risposta di tale sistema è:

$$y(t) = e + \sum_{i=1}^p a_i e^{p_i t} + \sum_{j=1}^q e^{-\zeta_j \omega_{nj} t} \left[ b_j \cos(\omega_{nj} \sqrt{1-\zeta_j^2} t + \phi_j) + c_j \sin(\omega_{nj} \sqrt{1-\zeta_j^2} t) \right]$$

Se ho un polo nullo  $p_i = 0$  ho una componente costante che va a sommarsi al precedente "e".

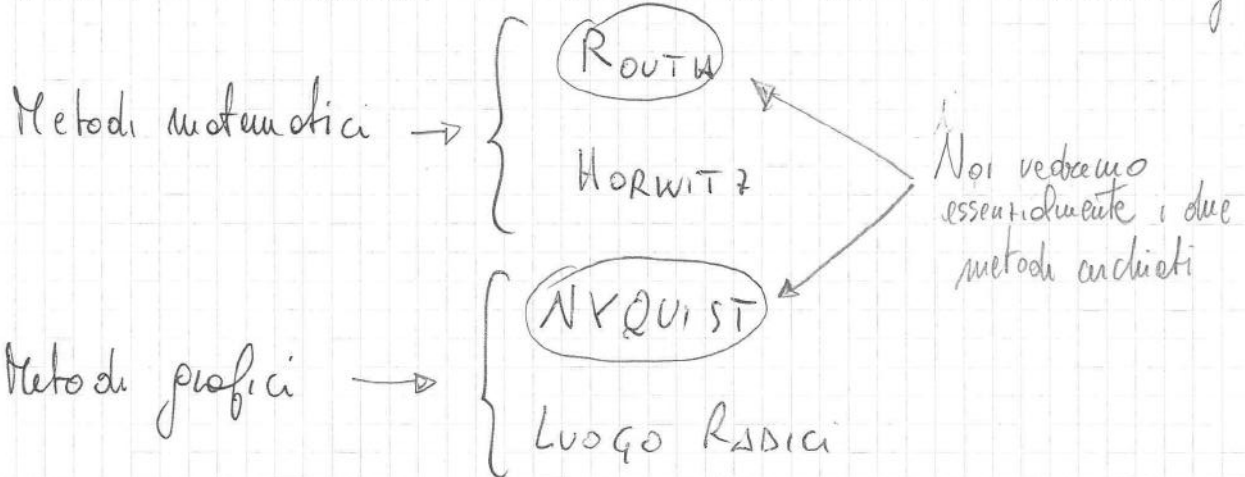
Se una funzione non diverge, ma non ritorna nella condizione di equilibrio, tale funzione si dice allora marginalmente stabile.

Invece nel caso in cui  $-\zeta_j \omega_{nj} = 0$  questo non torce nella condizione di equilibrio in quanto la componente alternata non si annulla mai. Tale funzione si chiama comunque marginalmente stabile.

Per la condizione di "margine stabile" ci deve essere almeno un polo nullo.

Esistono metodi che ci aiutano a capire i segni delle radici e le modalità di stabilità.

Tali metodi si dividono in metodi matematici e metodi grafici.



I metodi matematici mi permettono di analizzare il segno delle radici senza la risoluzione stessa del sistema.

I metodi grafici sono metodi un po' più puntuali in quanto mi dicono se il sistema è stabile e quanto presto lo sia.

Esempio:

$$s^3 + 3s^2 + 4s + 2$$

Mi preparo la tabellina sotto un coefficiente

$s^3$	1	4
$s^2$	3	2
$s^1$	$\frac{10}{3}$	0
$s^0$	2	

$$b_1 = \frac{3 \cdot 4 - 1 \cdot 2}{3} = \frac{10}{3}$$

$$b_2 = \emptyset$$

$$c_1 = \frac{10/3 \cdot 2 - 3 \cdot 0}{10/3} = 2$$

Poiché non ci sono permutazioni di segno il sistema è stabile. Applicando Ruffini e risolvendo il sistema otteniamo:

$$(s+1)(s^2 + 2s + 2)$$

$$s = -1$$

$$s_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2}$$

Routh si può applicare solo se tutti i coefficienti sono  $\neq 0$  e sono dello stesso segno.

Se ho un polinomio di grado 2 e applico Routh avrò:

$$a_2 s^2 + a_1 s + a_0$$

$s^2$	$a_2$	$a_0$
$s^1$	$a_1$	
$s^0$	$a_0$	

In un polinomio di secondo grado, se il segno dei coefficienti è positivo (o negativo), basta che non vada il polinomio è stabile.

Per un polinomio di grado 3 avrò:

$$a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0$$

Condizione di stabilità

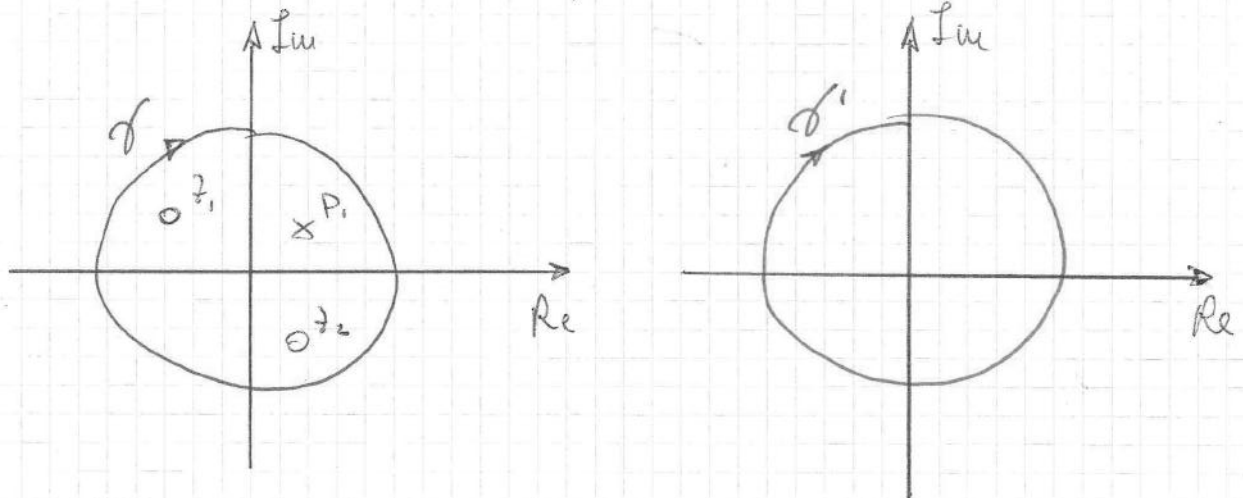
$s^3$	$a_3$	$a_1$
$s^2$	$a_2$	$a_0$
$s^1$	$\frac{a_2 a_1 - a_3 a_0}{a_2}$	
$s^0$	$a_0$	

In tale sistema posso limitarmi e calcolare il segno di:

$$a_2 a_1 - a_3 a_0 > 0$$

non voglio permutazioni di segno.

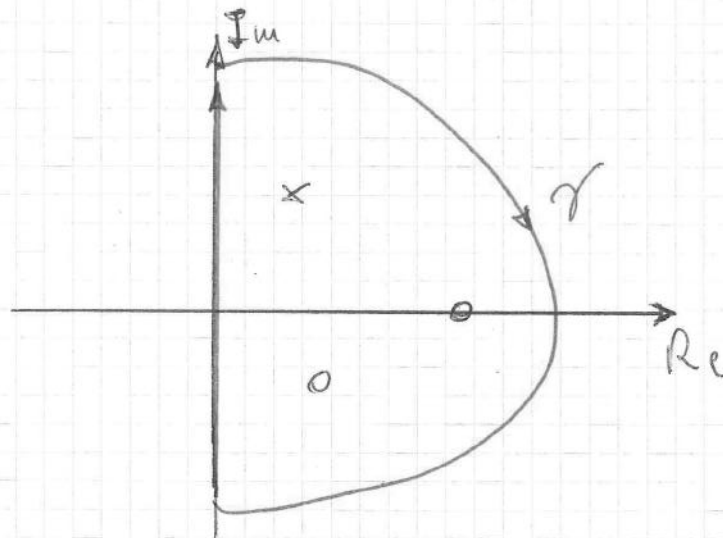
giocano sul piano immaginario su un contorno chiuso  $\gamma'$  tale per cui il numero di rotazioni percorse in verso orario di  $\gamma'$  intorno all'origine è uguale alla differenza del numero di zen e numero di poli nelle curve  $\gamma$ .



$$N^{\circ} = z - p \longrightarrow \text{Numero di rotazioni}$$

Allora Nyquist mi dice che tale curva è la seguente: cioè quella che percorre tutti i valori di Im e si chiude con valori Re positivi.

$$N = z^+ - p^+$$



IMPORTANTE: tale curva non passa per nessun polo e nessuno zero, ma li include al suo interno.

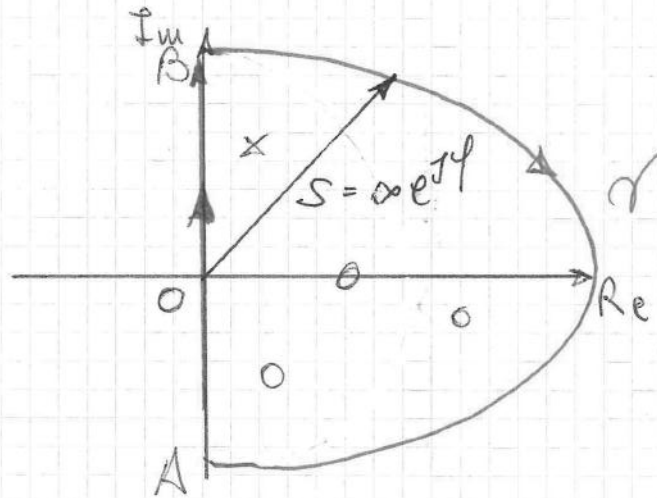
Applicato alla nostra funzione  $F(s)$  (denominatore) avio:

$$N_{1+G_H}^{\circ} = z_{1+G_H}^+ - p_{1+G_H}^+$$

Adesso vediamo cosa rappresenta  $\gamma'$

Le condizioni di stabilità si può ricondurre alla condizione di stabilità dell'anello aperto.

Previamente occorre costruire  $\gamma''$ .



$G(s)H(s)$

Analizziamo il tratto (OB)  $s = j\omega$

$\gamma'' G(j\omega)H(j\omega) \quad [0, +\infty)$

$G(j\omega)H(j\omega)$ : è la risposta in frequenza del sistema espressa come numero complesso.

Devo riuscire a trasferire le informazioni del diagramma di Bode in forma polare.

(AO)  $s = -j\omega \quad [-\infty, 0]$

$\gamma'' G(-j\omega)H(-j\omega)$

$G(j\omega)H(j\omega)$  e  $G(-j\omega)H(-j\omega)$  sono numeri complessi coniugati e quindi saranno speculari tra loro.

Rimane da vedere la chiusura ad infinito:

$s = \infty e^{j\varphi}$  e i valori corrispondenti saranno.

$G(s)H(s) = k \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad \underline{m > n}$

Indipendentemente da  $\varphi$  degenera nell'origine e quindi corrisponde ad un punto.

$$D(s) = 1 + \frac{K}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} = \frac{K + (\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$$

Studio il numeratore di  $D(s)$  che sarebbe il denominatore di  $F(s)$ .

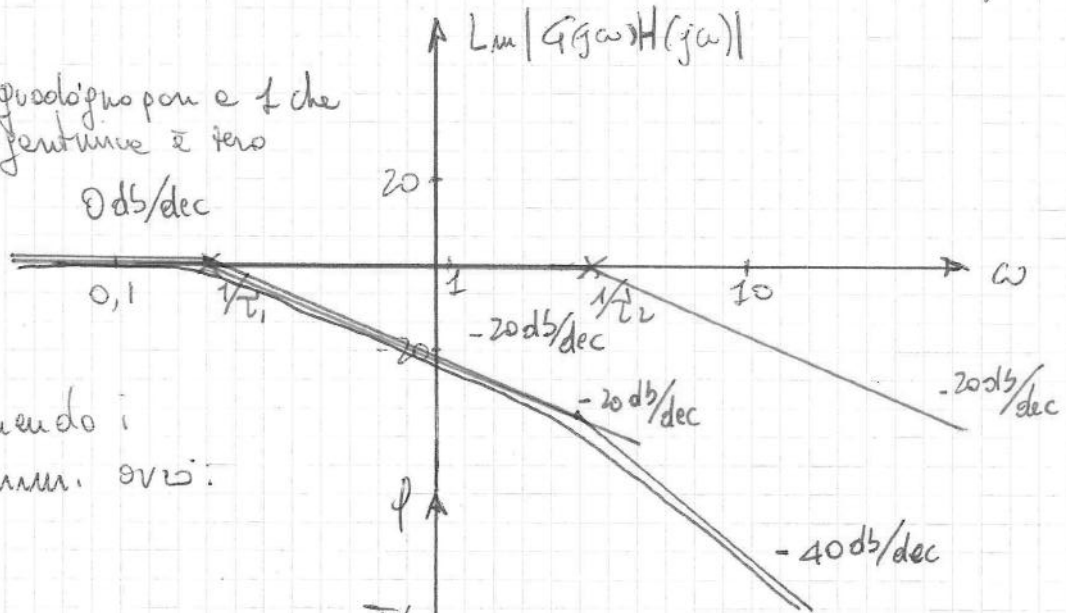
$$K + \tau_1 \tau_2 s^2 + (\tau_1 + \tau_2) s + 1$$

$$\underbrace{\tau_1 \tau_2}_{\rho_2} s^2 + \underbrace{(\tau_1 + \tau_2)}_{\rho_1} s + \underbrace{(1 + K)}_{\rho_0} = 0 \quad \text{Per un sistema di II ordine}$$

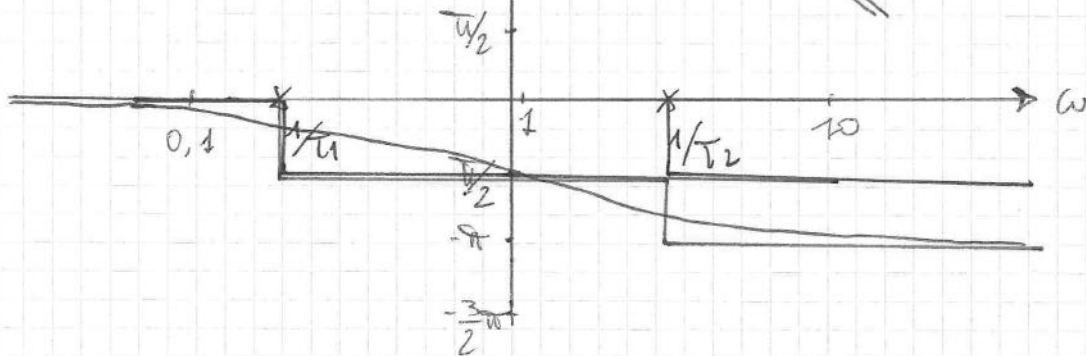
Se tutti i coefficienti hanno lo stesso segno il sistema è stabile, cioè non ha radici reali positive.

Nyquist mi dice che  $N_{\gamma^n}^{-1} = -P_{GH}^+$  proviamo a  
 trovare  $\gamma^n$  iniettando e trovare a Boole per  $G(s)H(s)$ .

$K=1$  vuol dire per  $\omega \rightarrow 0$  che su scale logaritmiche è zero



Ricomponendo i diagrammi. ovv:



## METODO DI NYQUIST

Il metodo di Nyquist si basa sul calcolo della risposta in frequenza della funzione di trasferimento ed quello aperto di un sistema automaticamente al fine di valutare la stabilità o meno del sistema stesso.

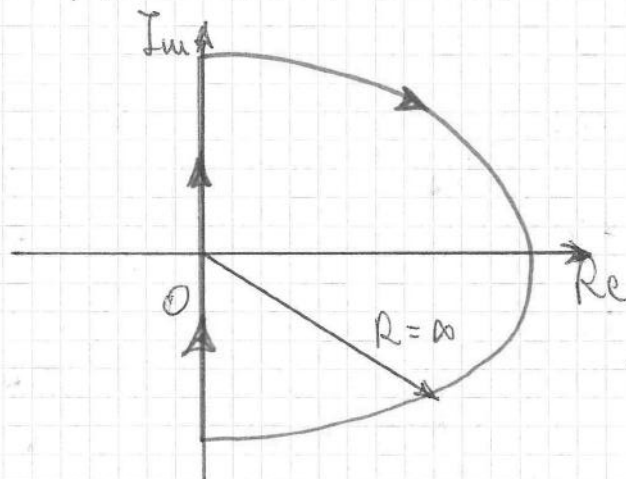
Un sistema è stabile se e solo se tutti i suoi poli, ossia tutti quei valori delle variabile complessa  $s$  che soddisfanno alle equazioni:

$$G(s)H(s) = -1$$

posseggono parte reale negativa, ed il metodo di Nyquist, sfruttando il teorema di Cauchy per le funzioni di variabile complessa permette per l'appunto di valutare il numero degli eventuali poli della funzione di trasferimento aventi parte reale positiva.

Il teorema di Cauchy, per il quale non si ritiene fornire una giustificazione analitica, afferma che se  $F(s)$  è una funzione di variabile complessa costituita dal rapporto di due polinomi in  $s$  e se la variabile stessa assume valori differenti descrivendo un piano complesso  $\mathcal{N}$  una curva  $\Gamma$  in senso orario, curva che racchiuda un numero  $Z$  di zeri ed un numero  $P$  di poli della  $F(s)$  ma che nel contempo non passi per nessuno di essi, allora i valori corrispondenti della  $F(s)$  saranno, in un nuovo piano complesso  $\mathcal{N}'$ , su di un'altra curva chiusa che descriva un numero  $N$  di giri in senso orario attorno all'origine degli assi per due differenti tra il numero degli zeri ed il numero dei poli racchiusi dalla curva  $\Gamma$  nel piano  $\mathcal{N}$ , ossia per e:

$$N = Z - P$$

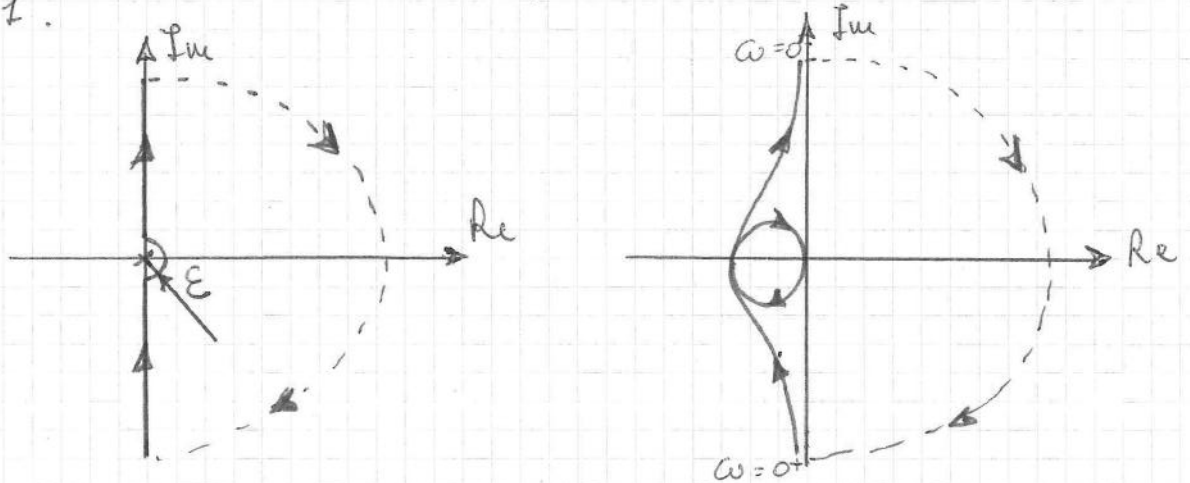




Esposti i criteri generali sui quali poggia il metodo di Nyquist occorre ora vedere come a si deve comportare se si incontra qualche caso particolare il primo dei quali è quello rappresentato da un sistema che ha numero di poli  $P$  delle  $G(s)H(s)$  con parte reale positiva nulla. In tal caso si avrà che:

$$Z = N$$

e pertanto il sistema sarà instabile o stabile o secondo che la  $G(s)H(s)$  compie o meno uno o più giri nel senso orario attorno al punto  $-1$ .



Un secondo caso particolare è quello costituito da un sistema la cui funzione di trasferimento ad anello aperto possiede uno o più poli sull'origine o sull'asse immaginario. In tal caso la traiettoria delle variabili  $s$  nel piano complesso non deve passare, al fine di soddisfare il teorema di Cauchy, attraverso zeri o poli delle  $G(s)H(s)$ ; si dovrà necessariamente scegliere quale traiettoria di Nyquist una curva che percorra sì tutto l'asse immaginario, ma che effettui anche delle piccole deviazioni costituite da una semicirconferenza di raggio  $\epsilon$  attorno all'origine o agli altri zeri o poli situati sull'asse immaginario. È chiaro allora che se il raggio  $\epsilon$  diventa infinitesimo, anche queste traiettorie di Nyquist modificate abbracciano ancora tutti gli eventuali zeri o poli eventualmente parte reale positiva, e che in base al corrispondente diagramma di Nyquist si potrà valutare la stabilità o meno del sistema in esame utilizzando la formula:  $N = Z - P$ .

A conclusione della stabilità dei sistemi lineari si vuole ancora ricordare che, se si considera in dettaglio il tratto di un generico diagramma di Nyquist posto in vicinanza dell'origine in corrispondenza delle frequenze positive, e si traccia una circonferenza

Supponiamo una funzione del tipo:

$$G(s)H(s) = \frac{k}{s(s+1)(s+2)}$$

Perché vi è una radice  $s=0$  il sistema è "marginamente stabile", però magari retroazionandolo è stabile!

Concentriamoci sulla risposta in quello chiuso:

$$F(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad D(s) = \text{denominatore}$$

$$D(s) = 1 + \frac{k}{s(s+1)(s+2)} = \frac{s(s+1)(s+2) + k}{s(s+1)(s+2)}$$

Studiamo il numeratore di  $D(s)$ , scrivendolo nel modo seguente:

$$s^3 + 3s^2 + 2s + k = 0$$

$s^3$	1	2
$s^2$	3	k
$s^1$	$\frac{3 \cdot 2 - k}{3}$	$\frac{6-k}{3}$
$s^0$	k	

Se  $6-k > 0 \rightarrow$  sys stabile

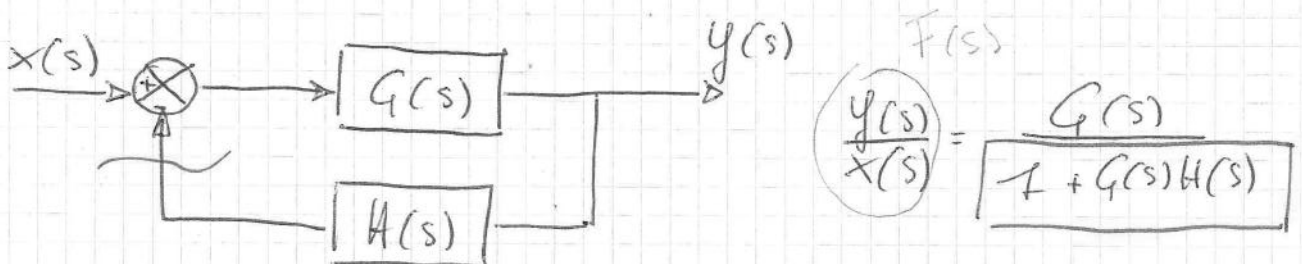
Se  $6-k < 0 \rightarrow$  sys instabile

$k < 6 \rightarrow$  stabile

La stabilità del sistema in questo caso dipende dal parametro "k".

Ricapitolando:

Dato un qualunque sistema del tipo:



● Dobbiamo verificare per vedere la stabilità che il denominatore di  $y(s)/x(s)$  non abbia radici positive.