NUMERO : 361

DATA : 24/09/2012

A P P U N T I

STUDENTE : Arlotta

MATERIA : Elettrotecnica + esercizi
Prof. Gilli

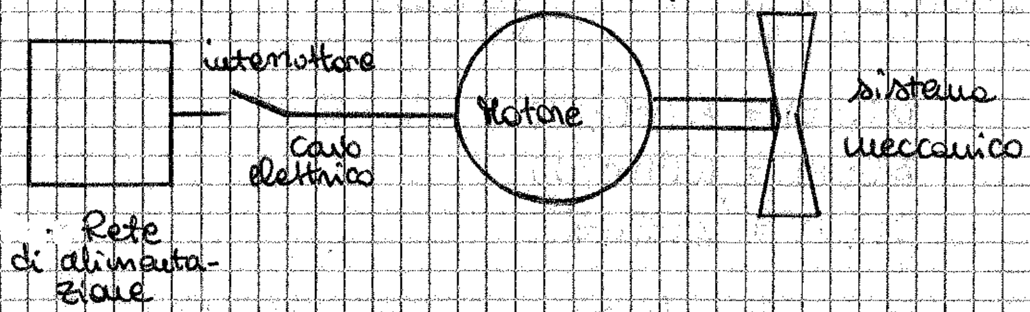
INTRODUZIONE

SISTEMI ELETTRICI

I sistemi elettrici per l'energia o per l'informazione sono basati sui fenomeni macroscopici che coinvolgono le cariche elettriche e le loro interazioni.

come obiettivo: trasportare l'energia proveniente da una fonte destinata ad un certo utilizzo.

come obiettivo: trattare l'informazione nei segnali da elaborare nel modo più verosimile.



Il sistema elettrico è sede di fenomeni elettromagnetici che necessitano di

1) grandezze fisiche appropriate
2) relazioni costitutive dei materiali
3) equazioni di Maxwell

1) Grandezze Fisiche

Campo Magnetico $E(r,t)$ — r posizione, t tempo

si misura in $\frac{V}{m}$

2) Relazioni Costitutive: parametri che caratterizzano il materiale

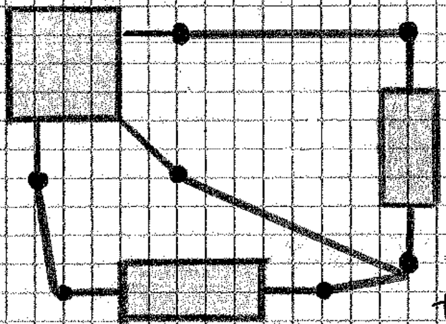
ε costante dielettrica

γ conducibilità

μ permeabilità magnetica

sono quantità scalari, lineari, non variano nel tempo.

Le leggi e i modelli sono solo in termini di
- correnti elettriche dei terminali
- tensione tra i terminali

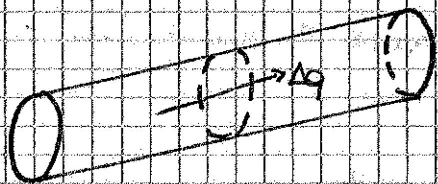


Elementi circuitali con più terminali (3 in un caso, 2 negli altri)
CIRCUITO ELETTRICO costituito da tre elementi circuitali, descritto in termini di corrente e terminali.

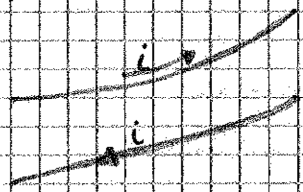
CORRENTE
- legata al movimento 'ordinato' delle cariche;
- l'intensità attraverso una sezione del conduttore è indipendente dalla sezione scelta (a condizioni stazionarie)

$\Downarrow$

PRINCIPIO di CONSERVAZIONE della CARICA



In condizione di stazionarietà si può approssimare abbastanza



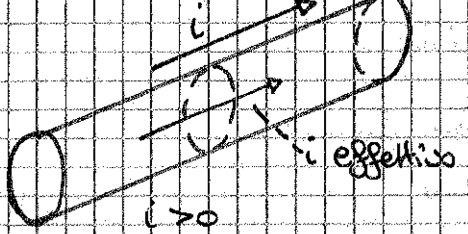
$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq(t)}{dt} = i(t)$$

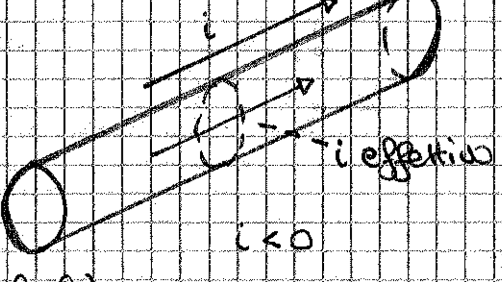
$$q(t) = \int_{-\infty}^{t} i(t)\, dt$$

i si misura in A (ampere)

$$\frac{[dq]}{[dt]} = \frac{C}{s} = A$$

il verso scelto è arbitrario





(valori di i dopo i calcoli)

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 5 di 413

ELEMENTI CIRCUITALI

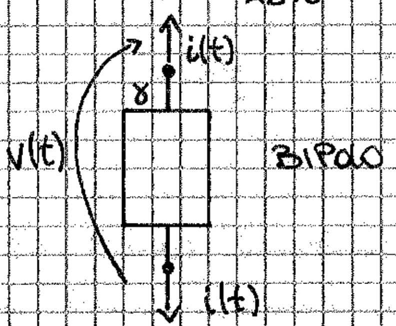
In $\frac{\delta}{\delta t} \to 0$, si definisce BIPOLO un elemento circuitale ideale a due terminali dove:

1) l'intensità di corrente di un terminale è in ogni istante uguale a quella dell'altro terminale

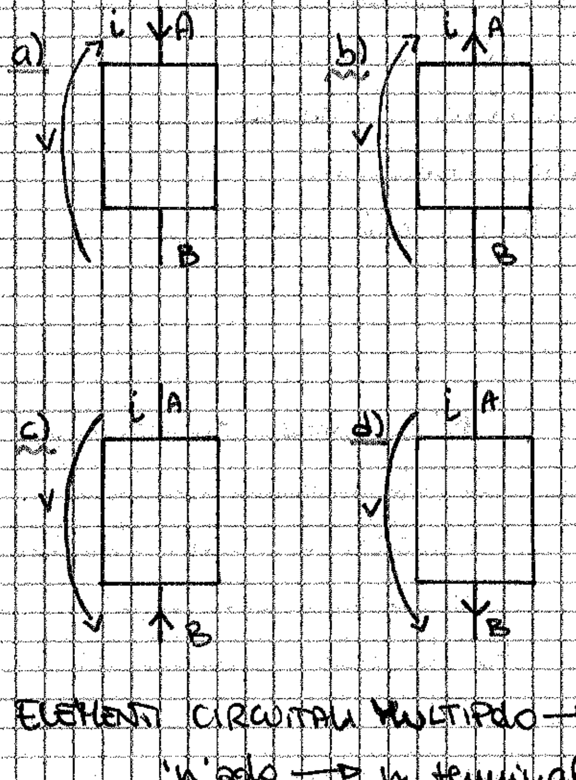
$$i_A \simeq i_B \simeq i$$

2) la tensione tra i due terminali è in ogni istante indipendente dal percorso scelto

$$v_{AB}|_{\gamma} \simeq v_{AB}|_{\gamma'} = v$$



CONVENZIONI DI RIFERIMENTO



In un Bipolo sono possibili 4 COMBINAZIONI, uguali a due a due

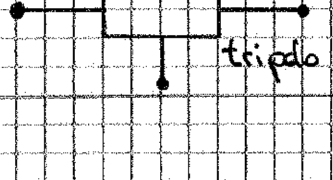
a) = d) ; b) = c)

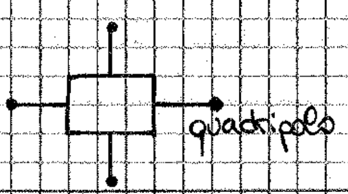
b) e c) sono definiti "convenzioni dei generatori";

a) e d) sono definiti "convenzioni degli utilizzatori"

ELEMENTI CIRCUITALI MULTIPOLO → più di due terminali

"n"polo → n terminali

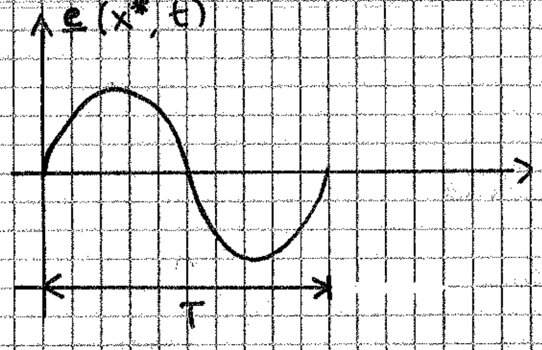




© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 7 di 413

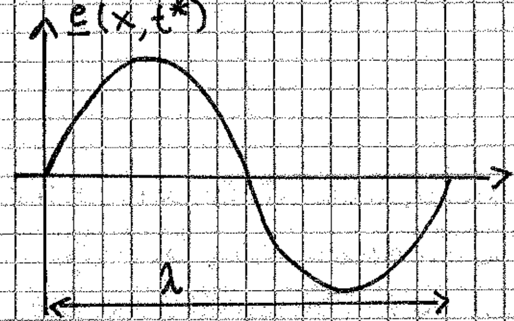
TEORIA dei CIRCUITI

LIMITI → le grandezze elettromagnetiche dipendono dal tempo e dallo spazio



In realtà, un campo elettrico ha un andamento periodico ma più complesso di questa sinusoidale (periodicità temporale)

$$f = 1/T$$



La periodicità spaziale è quella che si chiama lunghezza d'onda.

Le due grandezze non sono indipendenti

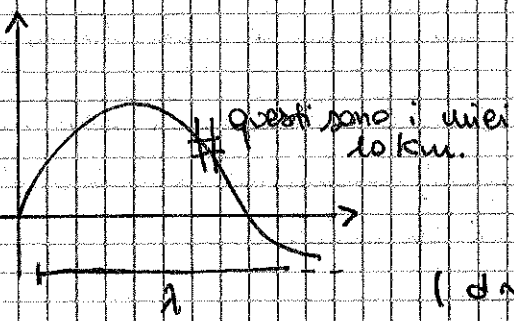
$$\lambda = \frac{c}{f}$$

dove con c si intende la velocità della luce, pari a $3 \cdot 10^8$ m/s

- Immaginiamo di progettare l'impianto elettrico di una città di diametro intorno ai 10 km (medie dimensioni)

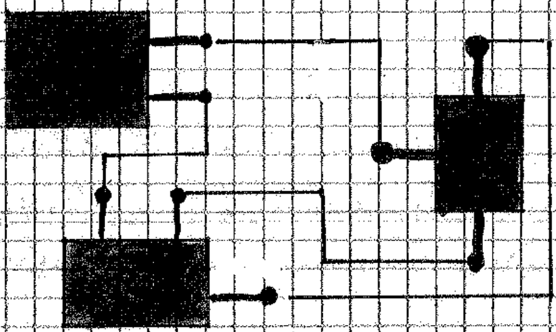
$f = 50$ Hz

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{50} = 6{,}0 \cdot 10^6 \, m = 6000 \, km$$



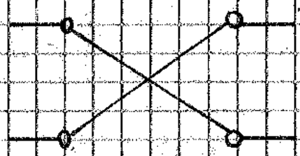
Sono nella condizione in cui $\frac{d}{\lambda} \lll 1$ e vuol dire che il fenomeno elettrostatico è SPAZIALMENTE CONFINATO

($d \sim$ dimensione di un oggetto elettrico in considerazione)

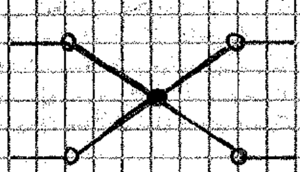


[ESEMPIO di CIRCUITO costituito da un BIPOLO e due TRIPOLI]

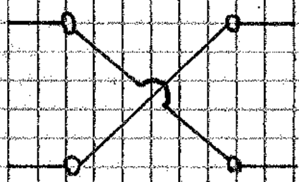
CONVENZIONE SULLE CONNESSIONI



Non posso disegnare una connessione così: non riesco a capire se si toccano o se sono su due piani (devo vedere in 3D)



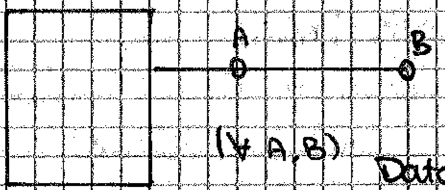
Se si incontrano disegnerò un nodo



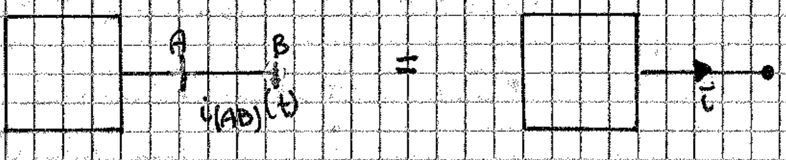
Se non toccano, userò un 'ponticello'

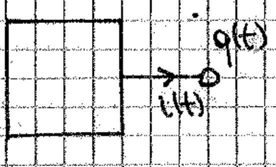
INTENSITA' di CORRENTE

Non ha senso parlare di CORRENTE ELETTRICA se non ci sono terminali.



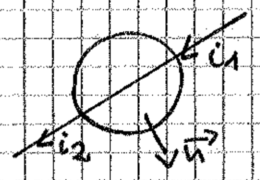
Dato un generico terminale di un multipolo e definite due sezioni A e B sul terminale si definisce INTENSITA' di CORRENTE ELETTRICA $i_{AB}(t)$ la quantità di carica elettrica che nell'unità di tempo transita nel terminale nel verso che va dalla sezione A alla sezione B.





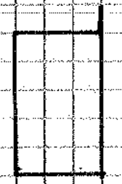
$$\boxed{i(t) = \frac{dq(t)}{dt}}$$

Si misura in Ampere [A]

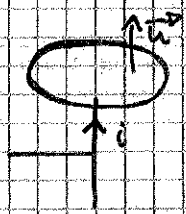


$-i_1(t) + i_2(t) = 0$

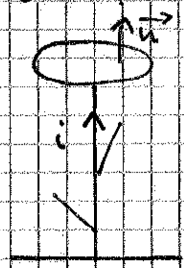
$i_1 = i_2$ la corrente lungo il filo è uguale in ogni punto



Cellulare con antenna



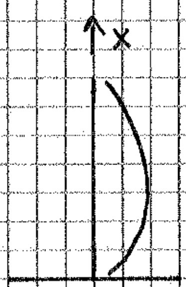
$i = 0$? Allora come fa a funzionare?



Antenna

$i = 0$?

! La legge di Kirchhoff valgono per circuiti non per elementi singoli!

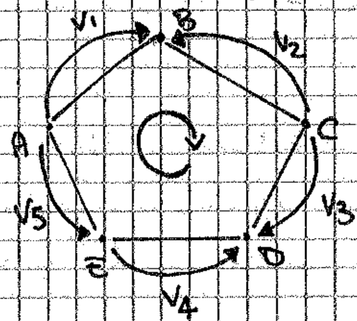


i sarà nulla agli estremi ma lungo l'antenna assume diversi valori

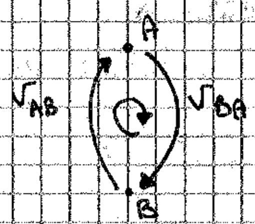
↳ Non è così ovvio che lungo un filo, la corrente sia sempre uguale!

LEGGE di KIRCHHOFF delle TENSIONI (KVL)

Dato un insieme di terminali e definito il poligono che li connette e un suo verso di percorrenza, la somma (algebrica) delle tensioni definite sui lati del poligono, assumendo con segno ⊕ quelle concordi al verso di percorrenza e con segno ⊖ quelle discordi, è uguale a 0.



$+v_1(t) - v_2(t) + v_3(t) - v_4(t) + v_5(t) = 0$



$v_{AB} + v_{BA} = 0$

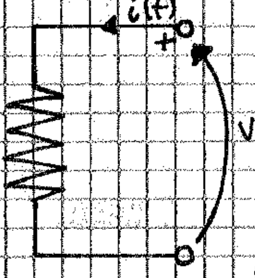
$v_{AB} = -v_{BA}$

i terminali sono perpendicolari al foglio

COSA LEGA CORRENTI e TENSIONI? Il legame tra $v(t)$ e $i(t)$ si chiama "RELAZIONE COSTITUTIVA del BIPOLO"

BIPOLI FONDAMENTALI

1- RESISTORE IDEALE



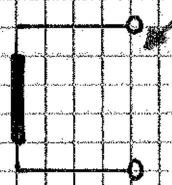
$v(t) = R\,i(t)$

R = resistenza = $[\Omega]$

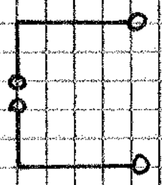
Se $R \neq 0$, si può dire che $i(t)$ si definisce $i(t) = \frac{1}{R} v(t) = G\,v(t)$

G è l'inverso della resistenza, ovvero la CONDUTTANZA e si misura in $[\Omega^{-1}]$

Se $R = 0$, allora la relazione diventa $v(t) = 0$, $\forall\, i(t)$, e si definisce CORTO CIRCUITO IDEALE e si indica con



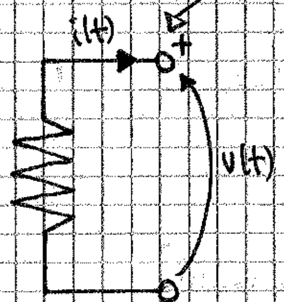
Se $G = 0$, allora la relazione è $i(t) = 0$, $\forall\, v(t)$, è sempre un resistore e si chiama CIRCUITO APERTO e si rappresenta con



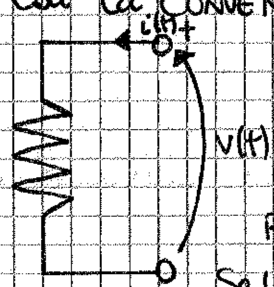
Posso mettere i blocchetti ideali perché una volta 'assemblati' e rappresentare un oggetto fisico reale.

Se usassi la CONVENZIONE di GENERATORE, la relazione diventa

$v(t) = -R\,i(t)$ $\longmapsto$ la relazione è legata alla convenzione che uso



Con la CONVENZIONE di UTILIZZATORE



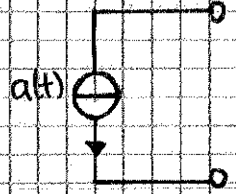
$$p(t) = v(t)\,i(t) = R\,i(t) \cdot i(t) = R(t)\,i^2(t)$$

$R \geq 0 \longmapsto p(t) \geq 0 \quad \forall\, i(t)$

Se la resistenza è positiva, la potenza assorbita è positiva.

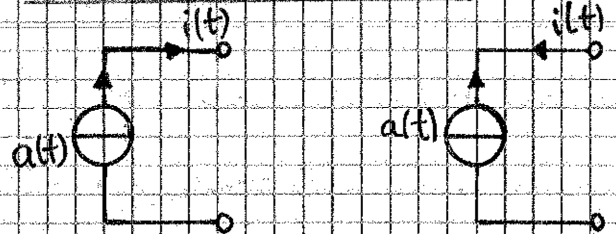
R non è sempre positiva.

Se uso la convenzione di GENERATORE



$i(t) = -a(t) \quad \forall\, v(t)$

SIMBOLOGIA della FRECCIA



$a(t) = i(t)$ $\qquad$ $-a(t) = i(t)$

Se $a(t) = 0 \longmapsto i(t) = 0 \quad \forall\, v(t)$

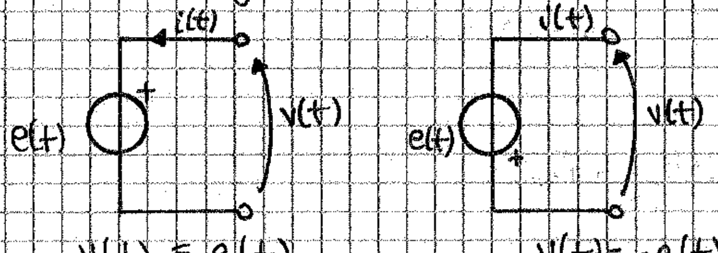
diventa un CIRCUITO APERTO

La potenza si esprime come $\qquad$ In simbologia IEEE

$$p(t) = v(t)\, i(t)$$
$$= \underbrace{v(t)\, a(t)}_{\gtrless 0}$$

(non sono noti)

→ Simbologia della FRECCIA (GEN. IDEALE di TENSIONE)

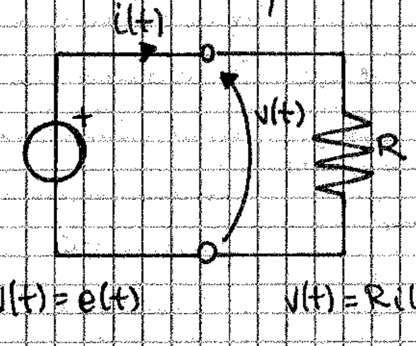


$v(t) = e(t)$ $\qquad$ $v(t) = -e(t)$

CIRCUITI FONDAMENTALI

Ho bisogno di
- qualcosa che eroga $p(t)$
- qualcosa che assorba $p(t)$

①



Convenzione di UTILIZZATORE per il RESISTORE; Convenzione di GENERATORE per il GENERATORE IDEALE di TENSIONE

$v(t) = e(t)$ $\qquad$ $v(t) = R\,i(t)$

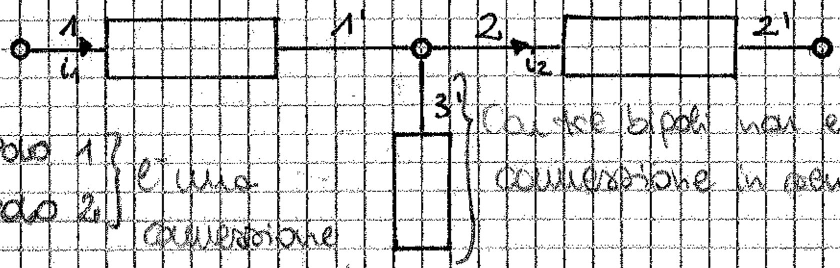
$$i(t) = \frac{e(t)}{R}$$

CONNESSIONI FONDAMENTALI

→ CONNESSIONI SERIE di BIPOLI

Due bipoli si dicono CONNESSI IN SERIE se si verificano le seguenti condizioni:

1) hanno almeno un terminale in comune;
2) in corrispondenza del terminale comune non afferisce alcun altro terminale del circuito (eccetto al più un circuito aperto)

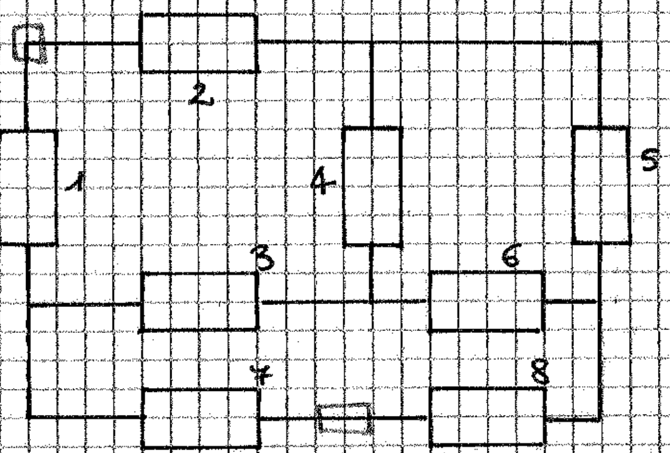


BIPOLO 1 } BIPOLO 2 } è una connessione in serie

Con tre bipoli non è una connessione in serie

Scrivendo le leggi di Kirchhoff, $i_1 = i_2$

Posso attaccare un circuito aperto perchè $i(t) = 0$ e non mi cambia nulla nella legge di Kirchhoff.



I BIPOLI IN SERIE sono:
- 1 e 2
- 7 e 8

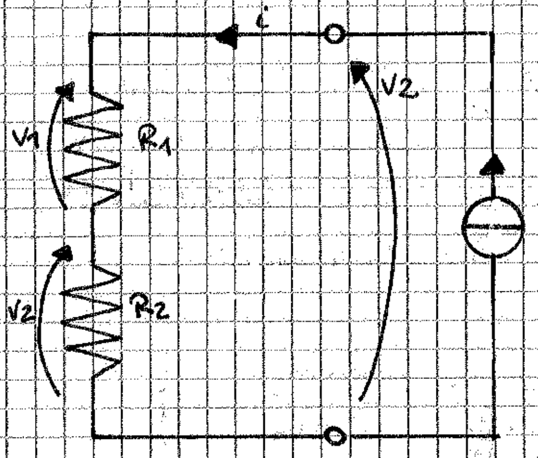
→ CONNESSIONE PARALLELO di BIPOLI

Due bipoli si dicono "connessi in parallelo" se hanno entrambi i terminali in comune

↓ cosa vuol dire?

1) Convergono ad un nodo

→ CONNESSIONI SERIE di RESISTORI



$$V(t) = V_1(t) + V_2(t)$$

$$V_1(t) = R_1\, i(t)$$

$$V_2(t) = R_2\, i(t)$$

$$V(t) = (R_1 + R_2)\, i(t)$$

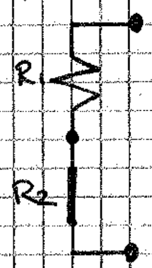
RESISTENZA EQUIVALENTE R_{eq}

$$R_{eq} = R_1 + R_2$$

CONDUTTANZA EQUIVALENTE

$$G_{eq} = \frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1 + R_2} = \frac{1}{\frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2}} = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2}$$

• Resistenza + corto circuito

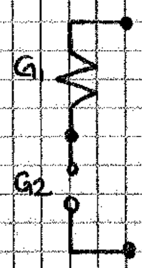


$R_{eq} = R_1$

$R_2 = 0$

Il corto circuito non da contributo

• Resistenza + Circuito aperto



$G_2 = 0$

$$G_{eq} = \frac{1}{R_{eq}} = \frac{G_1 \cancel{G_2}^{0}}{G_1 + \cancel{G_2}_{0}} = \frac{0}{G_1} = 0$$

la resistenza "perde"

→ CONNESSIONI SERIE di più RESISTORI

Per la proprietà associativa,

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^{n} R_i$$

$$G_{eq} = \frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}} =$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} + \dots + \frac{1}{G_n}}$$ = il reciproco della somma dei reciproci

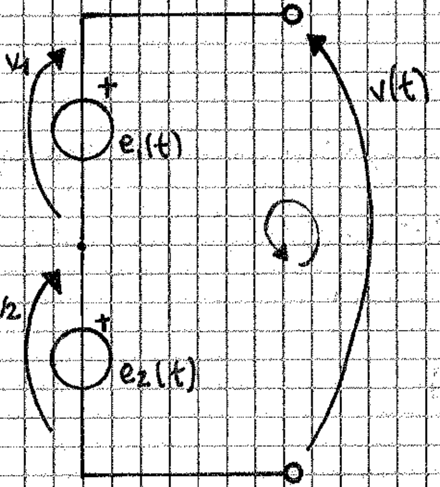
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 21 di 413

Si può anche scrivere:

$$\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = R_1 // R_2$$

$$\frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n}} = R_1 // R_2 // \ldots // R_n$$

→ <u>CONNESSIONI SERIE dei GENERATORI di TENSIONI</u>



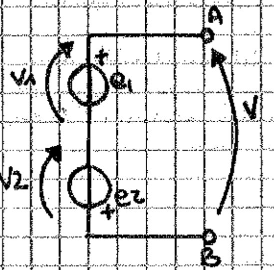
Usando la legge di Kirchhoff per le tensioni

$v_1 = e_1(t)$

$v_2 = e_2(t)$

$v(t) = v_1 + v_2 = e_1(t) + e_2(t)$

la tensione totale è la somma delle tensioni dei generatori in serie

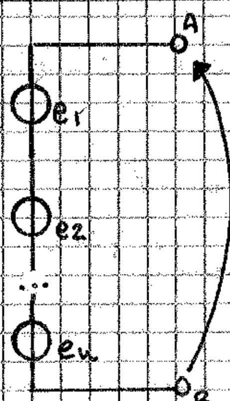


$V_1 = e(t)$

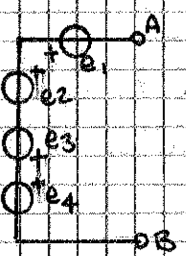
$V_2 = -e_2(t)$

$V(t) = V_1 + V_2 = e_1(t) - e_2(t)$

→ <u>CONNESSIONI SERIE di più GENERATORI di TENSIONI</u>

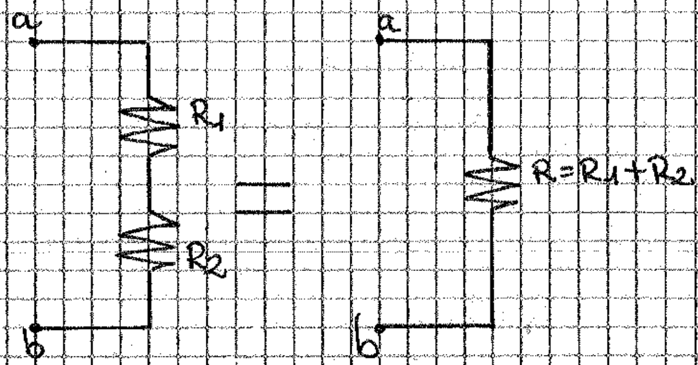


la tensione equivalente tra A e B (+ verso A) è dato dalla somma delle tensioni di tutti i generatori, assumendo con segno ⊕ quelle con verso concorde e con segno ⊖ le altre.



$e = -e_1 + e_2 - e_3 + e_4$

La CONNESSIONE PARALLELO dei generatori di tensione non ha senso.

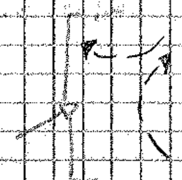


$$i = \frac{e}{R_1+R_2}$$

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= R_1 i = \left|\frac{R_1}{R_1+R_2}\right| e \\ V_2 &= R_2 i = \left|\frac{R_2}{R_1+R_2}\right| e \end{aligned}\right\} V_1 + V_2 = e$$

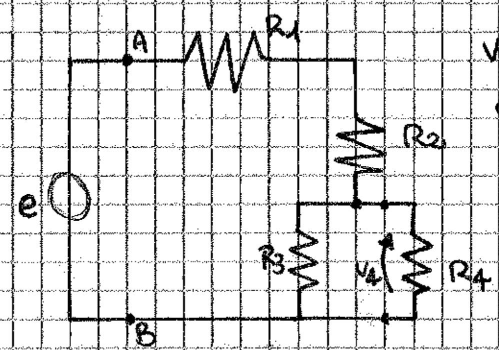
Legge di Kirchhoff per le Tensioni

fattore di partizione della tensione

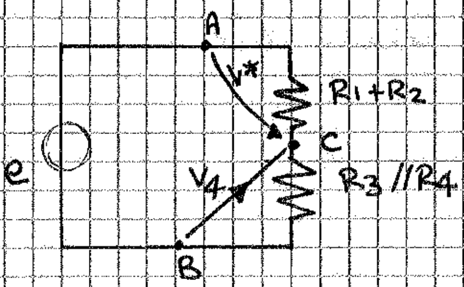


se v è orientato così; altrimenti metto ⊖

• Dato il circuito



V_4 è la tensione del bipolo $R_3 // R_4$

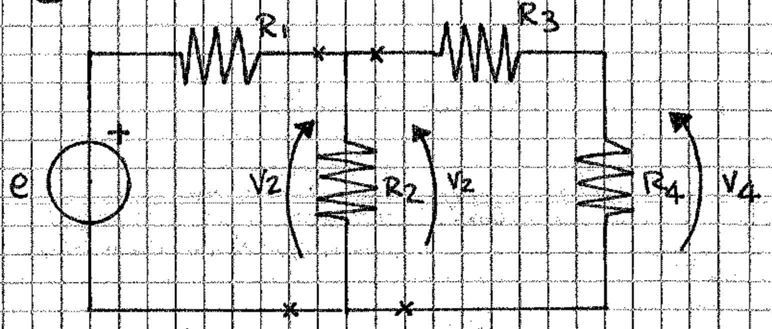


$$V_4 = \frac{R_3 // R_4}{(R_3 // R_4) + (R_1 + R_2)} e$$

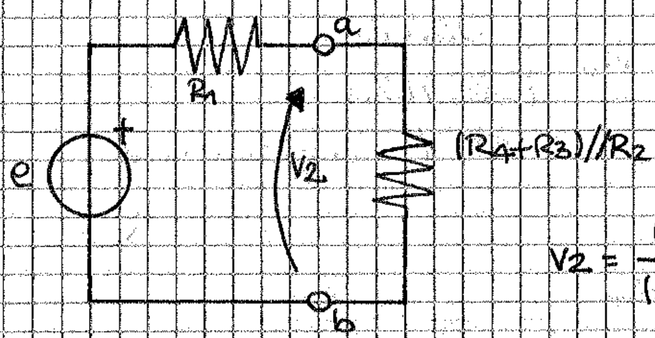
$$= \frac{\dfrac{R_3 R_4}{R_3+R_4}}{\dfrac{R_3 R_4}{R_3+R_4} + R_1 + R_2} e$$

$$V^* = -\frac{R_1 + R_2}{(R_1+R_2) + (R_3 // R_4)} e$$

RETE A SCALA

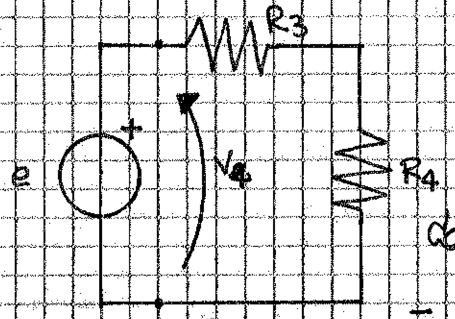


Serie - parallelo - serie - parallelo ...



$$V_2 = \frac{(R_4+R_3)//R_2}{(R_4+R_3)//R_2 + R_1}\, e$$

Per il PRINCIPIO di EQUIVALENZA



(R_3+R_4)

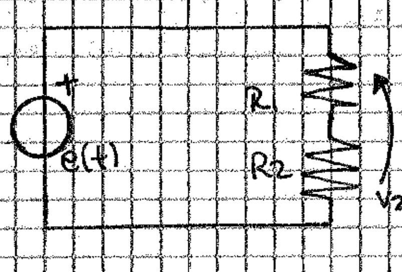
$$V_4 = \frac{R_4}{R_4+R_3}\, V_2$$

doppio partitore

$$= \frac{R_4}{R_4+R_3}\left(\frac{(R_4+R_3)//R_2}{(R_4+R_3)//R_2+R_1}\, e\right)$$

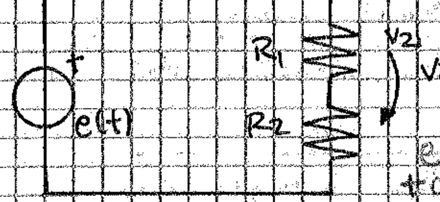
PARTITORE

→ di TENSIONE



$$v_2 = e(t)\,\frac{R_2}{R_1+R_2}$$

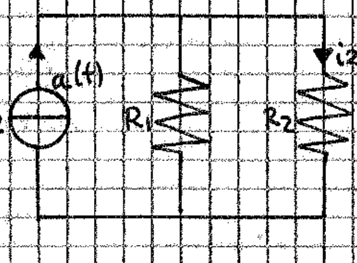
entra nel + convenzionale



$$v_2 = -e\,\frac{R_2}{R_1+R_2}$$

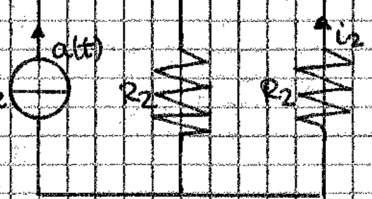
esce dal + convenzionale

→ di CORRENTE



$$i_2 = a(t)\,\frac{R_1}{R_1+R_2}$$

Si ripartiscono in modo inversamente proporzionale alle resistenze



$$i_2 = -a(t)\,\frac{R_1}{R_1+R_2}$$

$$i_1 = -i \frac{R_3}{R_3 + (R_1 + R_2 // R_5)} \qquad i_5 = i_1 \frac{R_2}{R_2 + R_5}$$

TEOREMA di SOVRAPPOSIZIONE degli EFFETTI

Cosa succede in un circuito con un numero arbitrario di generatori di corrente e di tensioni?
Immaginiamo di avere una rete elettrica contenente:

- N generatori ideali di tensione $e_1, e_2, \dots, e_N$
- M generatori ideali di corrente $a_1, a_2, \dots, a_M$
- \+ un numero arbitrario di resistori

TEOREMA Una qualsiasi grandezza di rete $y(t) = \begin{cases} v(t) \\ i(t) \end{cases}$ si scrive come segue

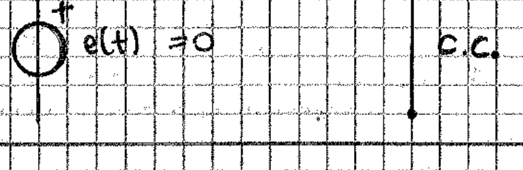
$$y(t) = \alpha_1 e_1(t) + \alpha_2 e_2(t) + \dots + \alpha_N e_N(t) + \\ + \beta_1 a_1(t) + \beta_2 a_2(t) + \dots + \beta_M a_M(t)$$

ovvero come combinazione lineare di tutti i generatori di corrente e di tutti i generatori di tensione, dove i coefficienti $\alpha_1 \dots \alpha_N$, $\beta_1 \dots \beta_M$ sono costanti e dipendono solo dai resistori della rete e vengono calcolati come segue

$$\alpha_i = \left. \frac{y(t)}{e_i(t)} \right|_{\substack{e_k = 0 \quad \forall k \neq i \\ a_l = 0 \quad \forall l}}$$

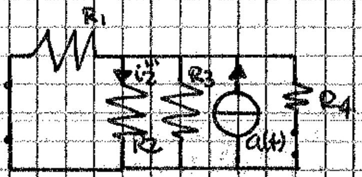
$$\beta_i = \left. \frac{y(t)}{a_i(t)} \right|_{\substack{e_k = 0 \quad \forall k \\ a_l = 0 \quad \forall l \neq i}}$$

Annullare un generatore di tensione vuol dire mettere un corto circuito:



$$\alpha_2 = -\frac{1}{R_1//R_2//R_3+R_4}\cdot\frac{R_1//R_3}{R_1//R_3+R_2}$$

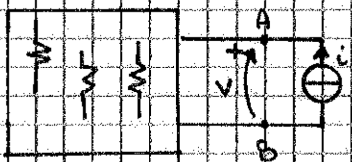
$$\cdot\ \beta = \frac{i_2(t)}{a(t)}\bigg|_{\substack{e_1=0\\ e_2=0}}$$



$$i_2''' = i_2\bigg|_{\substack{e_1=0\\ e_2=0}}$$

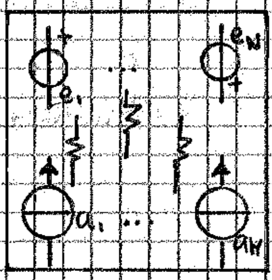
$$= a(t)\,\frac{R_1//R_3//R_4}{R_1//R_3//R_4+R_2}$$

THEVENIN

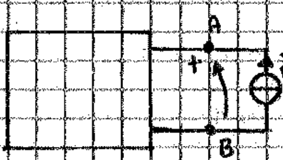


$$R_{eq} = \frac{v}{i}$$

Immaginiamo di avere un bipolo che al suo interno contiene anche generatori di corrente e di tensione

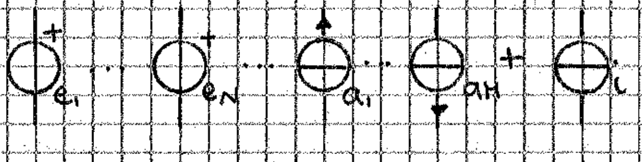


esiste un equivalente



Immetto una corrente nel bipolo per trovare la relazione sostitutiva

$\Downarrow$ Sovrapposizione degli effetti

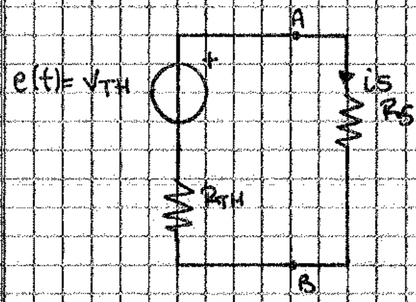


i (la corrente che aggiungo io)

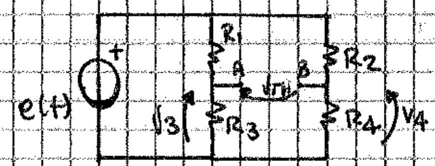
$$v(t) = \underbrace{\alpha_1 e_1(t) + \ldots + \alpha_N e_N(t) + \beta_1 a_1(t) + \ldots + \beta_H a_H(t)}_{v_{TH}} + \gamma\, i(t)$$

$$v_{TH} = v(t)\Big|_{i=0}$$ TENSIONE EQUIVALENTE di THEVENIN

Se trovassi l'equivalente di Thevenin, avrei



$$i_5 = \frac{V_{TH}}{R_{TH}+R_5}$$



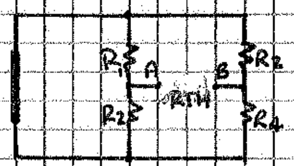
R_1 e R_3, R_2 e R_4 } serie

$$V_{TH} = V_3 - V_4$$

$$V_{TH} = e(t)\frac{R_3}{R_3+R_1} - e(t)\frac{R_4}{R_4+R_2}$$

$$= e(t)\left(\frac{R_3}{R_3+R_1} - \frac{R_4}{R_4+R_2}\right)$$

Per calcolare R_{TH}, devo avere un corto circuito

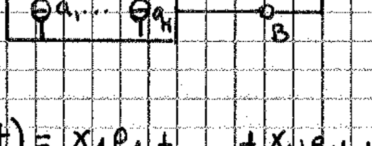


$R_1 // R_3$

$R_2 // R_4$ e $\underbrace{(R_1//R_3)+(R_2//R_4)}_{R_{TH}}$

$$i_5 = \frac{e(t)\left(\frac{R_3}{R_3+R_1} - \frac{R_4}{R_4+R_2}\right)}{[(R_1//R_3)+(R_2//R_5)]+R_5}$$

NORTON



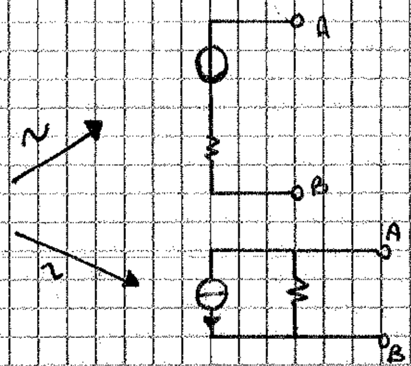
Applico una tensione e voglio la corrente

$$i(t) = \underbrace{\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_N e_N + \delta_1 a_1 + \dots + \delta_M a_M}_{i_N(t)} + \varepsilon\, v(t)$$

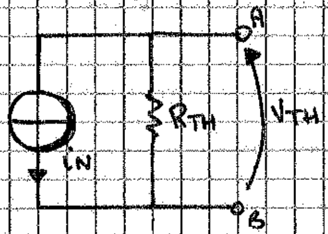
$$i_N(t) = i(t)\Big|_{v(t)=0}$$

CORRENTE EQUIVALENTE di NORTON

Corrente di Corto Circuito



Quindi anche tra loro sono equivalenti.
Ho due legami indipendenti: c'è un legame tra tensione a vuoto e corrente di corto circuito

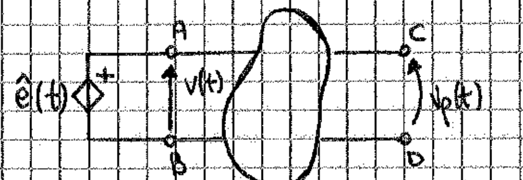


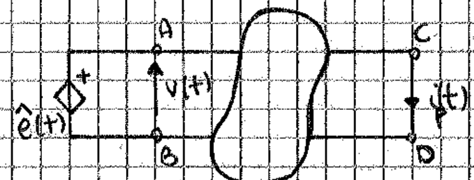
$V_{TH} = -i_N(t)\, R_{TH}$

GENERATORI DIPENDENTI (o "CONTROLLATI")

1- GENERATORE di TENSIONE DIPENDENTE

Impone una tensione che dipende da una grandezza posta in un'altra parte del circuito

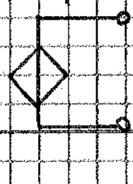


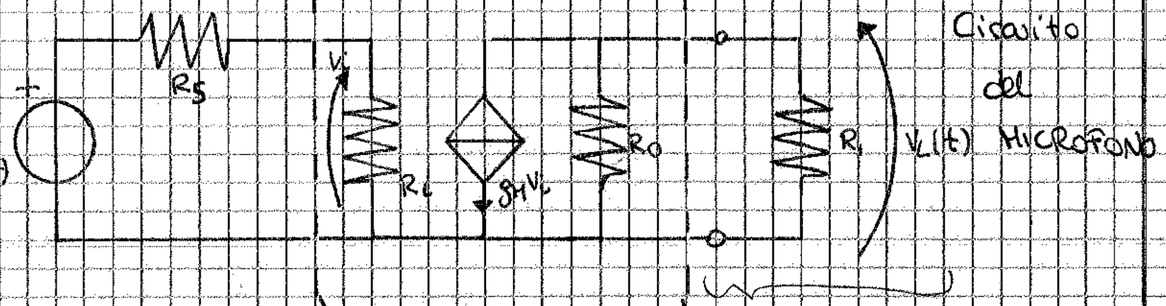


$\hat{e}(t) = \alpha\, v_p(t)$ $\qquad$ $\hat{e}(t) = r\, i_p(t)$

- $v_p(t)$ e $i_p(t)$ sono le grandezze PILOTA, quelle da cui dipende il generatore

Generatore di tensione controllato in tensione (VCVS = Voltage Controlled Voltage Source)	Generatore di tensione controllato in corrente (CCVS = Current Controlled Voltage Source)
α è adimensionato	$r = \frac{[V]}{[A]} = \Omega$

Si indica con  (usando sempre il + convenzionale)



Circuito del MICROFONO

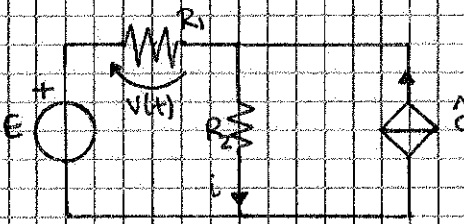
amplificatore

il segnale viene amplificato

→ METODO del PILOTA

① Determinare il pilota

Cerco un generatore dipendente e guardo come si calcola $\hat{a}(t)$ o $\hat{e}(t)$ e lo considero INDIPENDENTE



Quanto vale V?

$\hat{a}(t) = \beta \cdot i$ i è il pilota

$i = i|_E + i|_{\hat{a}} =$

$i\big|_{\substack{e \neq 0 \\ a = 0}}$

$$i = \frac{E}{R_1 + R_2}$$

$i\big|_{\substack{e = 0 \\ a \neq 0}}$

$R_1 // \hat{a} // R_2$

partitore $\dfrac{R_1}{R_1 + R_2}\hat{a} = i$

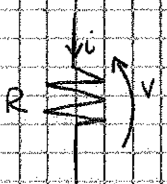
$$i = \frac{E}{R_1 + R_2} + \frac{R_1 \beta}{R_1 + R_2} i$$

② Risolvere l'equazione che ha come incognita il pilota

$$i - \frac{R_1 \beta}{R_1 + R_2} i = \frac{E}{R_1 + R_2}$$

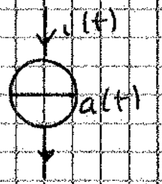
$$i = \frac{E}{R_1(1-\beta) + R_2}$$

RELAZIONE COSTITUTIVA

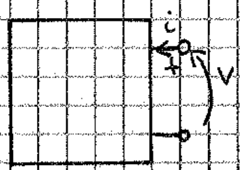


$V = Ri$

$V(t) = e(t)$



$i(t) = a(t)$



$$m V(t) + n\, i(t) + s(t) = 0$$

$m, n \in \mathbb{R}$

$s(t)$ generica funzione nel tempo, variabile di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$

↳ '$V = Ri$' → $s(t) = 0$

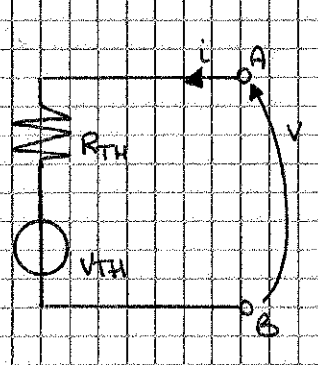
$n \neq 0 \to V(t) = -\frac{n}{m}\, i(t)$

↳ '$V(t) = e(t)$' → $n = 0$

$m \neq 0 \to V(t) = \underbrace{-\frac{s(t)}{m}}_{e(t)}$

↳ '$i(t) = a(t)$' → $m = 0$

$n \neq 0 \to i(t) = \underbrace{\frac{-s(t)}{n}}_{a(t)}$



le relazioni di THÉVENIN derivano da quella generale

$$V = R_{TH}\, i(t) + V_{TH}$$

$R_{TH} = -n/m$

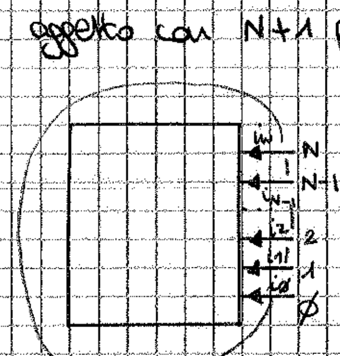
$m \neq 0$

$V_{TH} = \frac{-s(t)}{m}$

lo stesso vale per le relazioni di NORTON.

MULTIPOLI LINEARI AFFINI

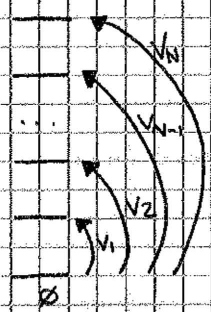
oggetto con N+1 poli



- Convenzione entrante
- Se applico Kirchoff, trovo che

$$i_\emptyset + i_1 + i_2 + \dots + i_{N-1} + i_N = 0$$

- Definisco la corrente dipendente $i_\emptyset$, quindi $i_1 \dots i_N$ sono indipendenti (a libera scelta).



Definisco un terminale di riferimento e gli altri con correnti entranti e tensione (secondo la convenzione d'utilizzatore)

VETTORE delle CORRENTI

$\underline{i}(t) = (i_1, i_2, \dots, i_N)^T$ correnti che entrano da tutti i terminali

VETTORE delle TENSIONI

$\underline{V}(t) = (V_1, V_2, \dots, V_N)^T$ tensioni degli altri terminali (escluso il terminale di riferimento)

⟶ RELAZIONE COSTITUTIVA

$$\underline{\underline{M}}\, \underline{v}(t) + \underline{\underline{N}}\, \underline{i}(t) + \underline{S}(t) = 0$$

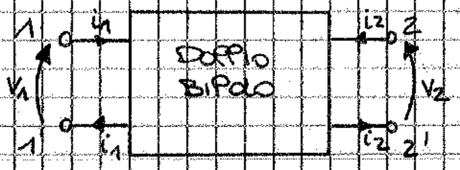
è la relazione di un bipolo ma ha un vettore per la tensione e la corrente e delle matrici al posto degli scalari.

$\underline{\underline{M}}$ ed $\underline{\underline{N}}$ sono matrici $\in \mathbb{R}^{n,n}$

$\underline{V}, \underline{i}, \underline{S}$ funzioni del tempo (variabile indipendente)

$V, i, S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$

MULTIPORTA a 4 TERMINALI



$\underline{i} = (i_1, i_2)^T$ Due vettori caratteristici → 4 variabili

$\underline{V} = (V_1, V_2)^T$ Combinazioni $\binom{4}{2} =$

$$= \frac{4!}{2!\,2!} = \frac{24}{4} = \boxed{6}$$

1) Matrice delle RESISTENZE

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{R}}} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$$

Se $\det \underline{\underline{R}} \neq 0$, allora esiste $\underline{\underline{G}} = \underline{\underline{R}}^{-1}$

2) Matrice delle CONDUTTANZE

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{G}}} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{G}} = \underline{\underline{R}}^{-1} = \frac{1}{R_{11}R_{22} - R_{12}R_{21}} \begin{pmatrix} R_{22} & -R_{12} \\ -R_{21} & R_{11} \end{pmatrix}$$

3) Rappresentazione IBRIDA

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{H}}} \begin{pmatrix} i_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

$\underline{\underline{H}}$ matrice ibrida

Non c'è $\underbrace{\underline{\underline{R}}^{-1}}$ (ha 2 zeri) e neanche $\underbrace{\underline{\underline{R}}^{-1}}$ (ha due zeri)

quindi non c'è la matrice delle RESISTENZE — quindi non c'è la matrice delle CONDUTTANZE

Esiste la rappresentazione IBRIDA

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{H}}} \begin{pmatrix} i_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$ $\underline{\underline{H}}$ è invertibile, quindi esiste anche la rappresentazione IBRIDA INVERSA

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1/k \\ 1/k & 0 \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{H}}^{-1}} \begin{pmatrix} v_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$$

Esiste anche la rappresentazione di TRASMISSIONE

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ -i_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1/k \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{T}}} \begin{pmatrix} v_2 \\ i_2 \end{pmatrix}$$

e quella di trasmissione inversa

$$\begin{pmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1/k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{T}}'} \begin{pmatrix} v_1 \\ i_1 \end{pmatrix}$$

Una regola generale dei doppi bipoli è che <u>NON HANNO TUTTE LE RAPPRESENTAZIONI</u>. In questo caso $\rightarrow$ 4/6

TRASFORMATORE
- $\rightarrow$ REALE : non funziona con corrente costante
- $\rightarrow$ IDEALE : funziona con corrente costante

$\rightsquigarrow$ <u>Potenza Entrante Complessivamente</u> nel Trasformatore

$$p(t) = p_1(t) + p_2(t) = v_1 i_1 + v_2 i_2 = v_1 i_1 + \underbrace{\frac{v_1}{k}}_{v_2} \underbrace{(-k i_1)}_{i_2} = \emptyset$$

Anche il giratore dissipa corrente.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 47 di 413

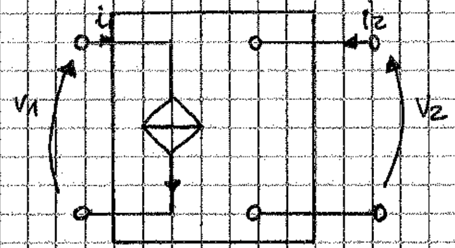
filo modellabile, come un corto circuito

Relazione costitutiva $\begin{cases} v_1 = r_m i_2 \\ v_2 = 0 \end{cases}$

- ammette la matrice delle resistenze

$$\underline{\underline{R}} = \begin{pmatrix} 0 & r_m \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Generatori di corrente pilotati in tensione

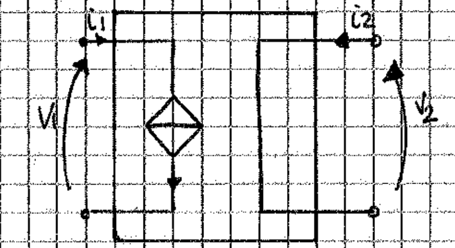


Relazione costitutiva
$\begin{cases} i_1 = g_m v_2 \\ i_2 = 0 \end{cases}$

- ammette la matrice delle conduttanze

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & g_m \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{G}}} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

- Generatore di corrente pilotato in corrente



Relazione Costitutiva
$\begin{cases} i_1 = \beta i_2 \\ v_2 = 0 \end{cases}$

- ammette $\underline{\underline{H}}'$

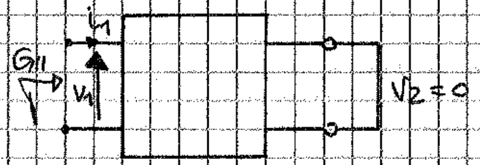
$$\begin{pmatrix} i_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{H}}'} \begin{pmatrix} v_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$$

I Generatori Pilotati sono, a tutti gli effetti, dei DOPPI BIPOLI

$R_{21} = R_{12} \rightarrow$ la matrice è simmetrica $\begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{G}}} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$G_{11} = \left.\frac{i_1}{v_1}\right|_{v_2=0}$$



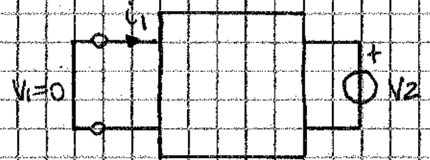
$$G_{11} = \frac{1}{R_1 + R_2 // R_3}$$

non è l'inverso di R_{11}, lo sarebbe se invece di un circuito aperto ci fosse un corto circuito

$$G_{22} = \left.\frac{i_2}{v_2}\right|_{v_1=0}$$

$$G_{22} = \frac{1}{R_4 // (R_3 + R_1 // R_2)}$$

$$G_{12} = \left.\frac{i_1}{v_2}\right|_{v_1=0}$$



$$i_1 = -v_2 \underbrace{\frac{R_1 // R_2}{R_1 // R_2 + R_3} \cdot \frac{1}{R_1}}_{G_{12}}$$

$$G_{21} = \left.\frac{i_2}{v_1}\right|_{v_2=0}$$

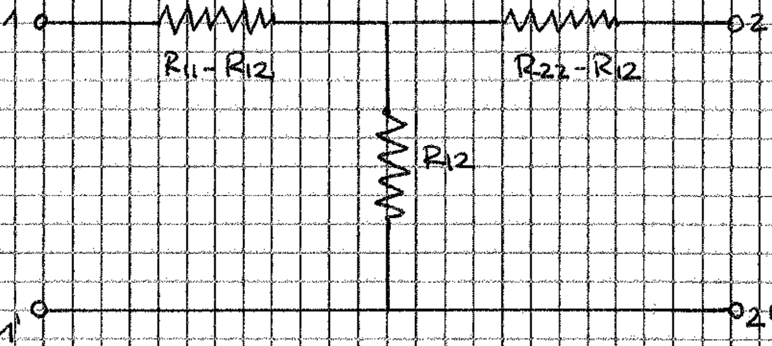
$$i_2 = -v_1 \underbrace{\frac{R_2 // R_3}{(R_1 + R_2 // R_3)} \cdot \frac{1}{R_3}}_{G_{21}}$$

CIRCUITI EQUIVALENTI per doppi bipoli

1 - R SIMMETRICA

Se $\underline{\underline{R}} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix}$ con $R_{21} = R_{12}$

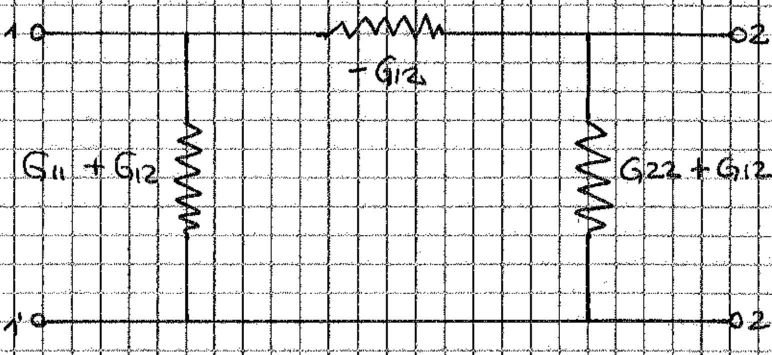
allora il bipolo (doppio) ammette il seguente circuito equivalente



2 - G SIMMETRICA

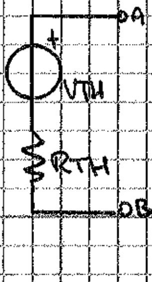
Se $\underline{\underline{G}} = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix}$ con $G_{12} = G_{21}$

allora il doppio bipolo ammette il seguente circuito equivalente, chiamato anche "circuito a π"



3 - RAPPRESENTAZIONE di THEVENIN GENERALIZZATA

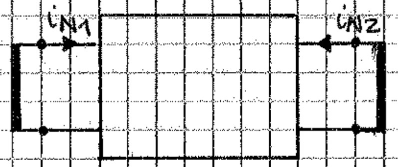
Per il bipolo, la rappresentazione è



$$V = R_{TH}\, i + V_{TH}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 53 di 413

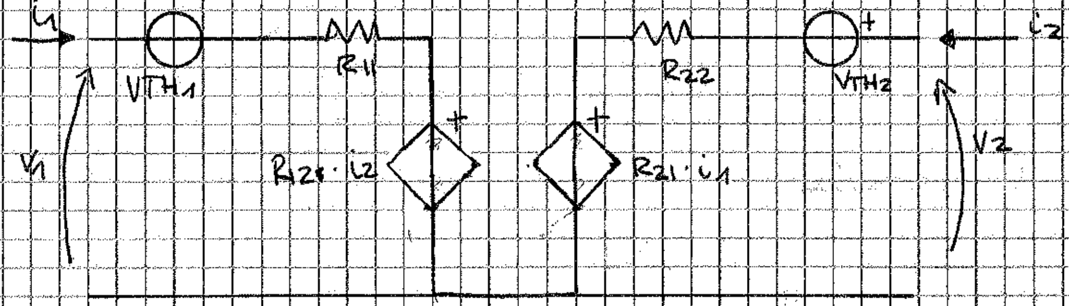
$$i = i_N = \begin{pmatrix} i_{N1} \\ i_{N2} \end{pmatrix} \qquad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$$



5 - SE LA MATRICE NON È SIMMETRICA?

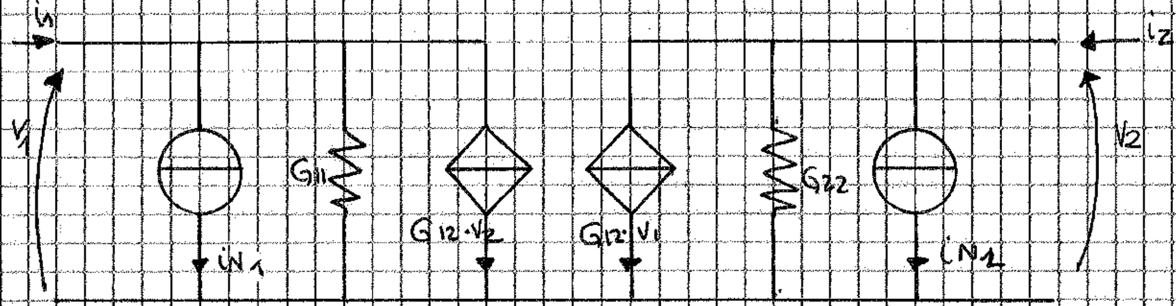
Si calcola il circuito con i generatori pilota

$$\underline{\underline{R}} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} \quad \text{con } R_{12} \neq R_{21}$$

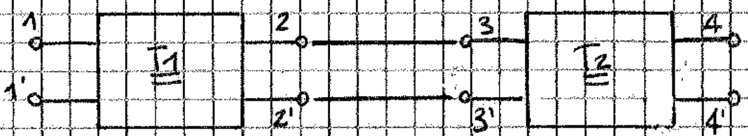


$$i = \underline{\underline{G_N}} + i_N$$

$$\underline{\underline{G}} = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix} \qquad \text{con } G_{12} \neq G_{21}$$

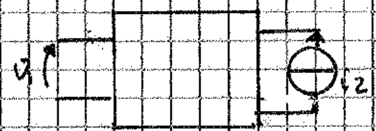


3 - IN CASCATA



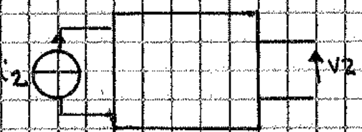
$\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T_1}} \cdot \underline{\underline{T_2}}$

CONCETTO di RECIPROCITÀ



Applico i_2 e trovo v_1

$v_1 = R_{12} \cdot i_2$



Applico i_1 e trovo v_2

$v_2 = R_{21} \cdot i_1$

$R_{12} = R_{21}$

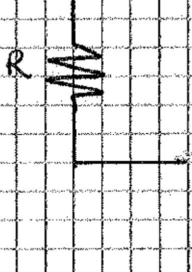
Dato un generico multipolo (o multiporta) se per ogni coppia di vettori $(\underline{v}', \underline{i}')$ $(\underline{v}'', \underline{i}'')$ che soddisfa la relazione costitutiva del multipolo (o multiporta), si ha

$$\underline{v}'' \cdot \underline{i}' = \underline{v}' \cdot \underline{i}''$$

$$\left[(\underline{v}'')^T \cdot \underline{i}' = (\underline{v}')^T \cdot \underline{i}'' \right]$$

allora il multipolo si definisce RECIPROCO.

→ Un RESISTORE è RECIPROCO?



$v' = R \cdot i'$

$v'' = R \cdot i''$

$$\left.\begin{aligned} v'' \cdot i' &= R \cdot i'' \cdot i' \\ v' \cdot i'' &= R \cdot i' \cdot i'' \end{aligned}\right\} \text{Sì, è reciproco}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 57 di 413

$$(v')^T \cdot i'' = (v_1' \, v_2') \begin{pmatrix} i_1'' \\ i_2'' \end{pmatrix} = v_1' i_1'' + v_2' i_2'' =$$

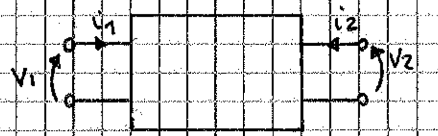
$$= k v_2' \left(-\frac{1}{k} i_2'' \right) + v_2' i_2'' =$$

$$= -v_2' i_2'' + v_2' i_2'' = 0$$

$\Rightarrow 0 = 0 \rightarrow$ e' reciproco

TEOREMA di RECIPROCITA': Un multipolo (o multiporta) costituito dalla connessione di multipoli reciproci e' reciproco.

POTENZA di un doppio bipolo



$$p(t) = v_1 i_1 + v_2 i_2 =$$

$$= (v_1 \, v_2)^T \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \underline{v}^T \cdot \underline{i}$$

$\rightarrow$ Condizione di PASSIVITA'

$\forall (\underline{v}, \underline{i})$ che soddisfa la relazione costitutiva

$$p(t) \geq 0$$

$$\exists \, \underline{\underline{R}} \qquad \underline{v} = \underline{\underline{R}} \cdot \underline{i}$$

$$\underline{v}^T \cdot \underline{i} = (\underline{\underline{R}} \cdot \underline{i})^T \underline{i} =$$

$$= \underline{i}^T \underline{\underline{R}}^T \underline{i} = \underline{i}^T \underline{\underline{R}} \, \underline{i}$$

$$p(t) = \underline{i}^T \underline{\underline{R}} \, \underline{i} > 0$$

$\underline{\underline{R}}$ deve essere > 0

$$\underline{\underline{R}} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{R}} > 0 \rightarrow \quad R_{11} > 0 \,, \quad R_{22} > 0$$

$$R_{11} \cdot R_{21} - R_{12}^2 > 0$$

$$\underline{\underline{\tilde{A}}} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} L1 & L2 & L3 & L4 & L5 & L6 & L7 & L8 \end{array} \\ \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 \\ -1 & +1 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & +1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & +1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$\underline{\underline{\tilde{A}}}$ si chiama Matrice d'INCIDENZA

N righe
L colonne

REGOLA

- Per ogni lato metto
  - -1 dove arriva
  - $+1$ dove parte
  - 0 per tutti i nodi non toccati

In ogni colonna c'è un '+1' e un '-1'; per righe anche e
'+1' indica il lato uscente, '-1' l'entrante

! ATTENZIONE: $\rho(\underline{\underline{\tilde{A}}}) \neq \rho_{MAX}$

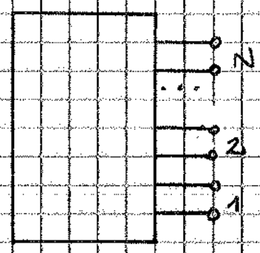
↳ Matrice di Incidenza Ridotta $\underline{\underline{A}}$

↳ è la matrice $\underline{\underline{\tilde{A}}}$ in cui si elimina una qualsiasi riga

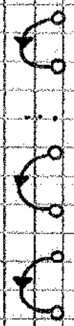
↳ ha ρ_{MAX} ovvero $\rho = (N-1)$

Un LOOP annullerebbe +1 e -1 → $\underline{\underline{\tilde{A}}}$ si complica

4) Multiporta

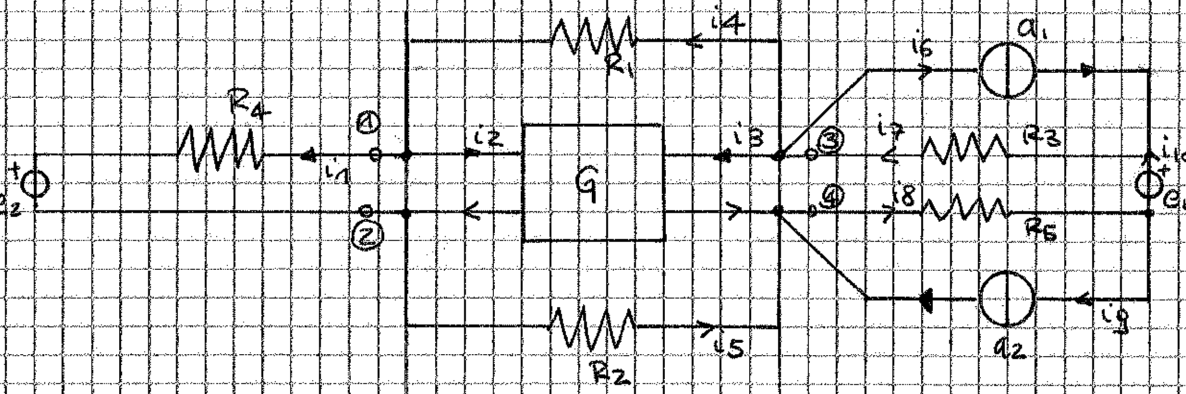


Grafo

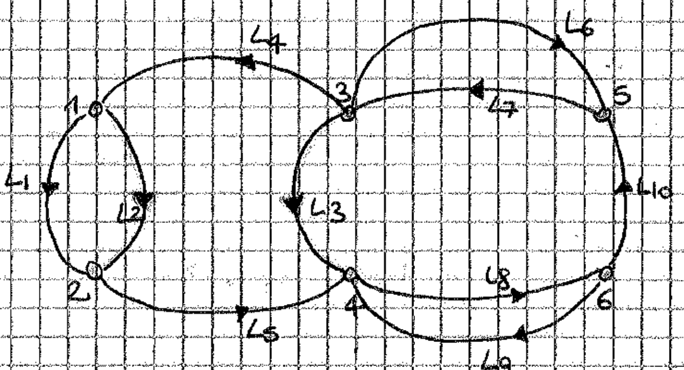


• ogni porta è un arco: i calcoli per connetterli sono un po' più complicati del caso del bipolo

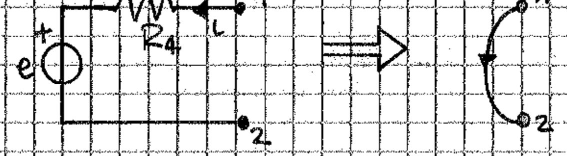
ESEMPIO (MOLTO PRATICO) di CALCOLO



ho 6 nodi

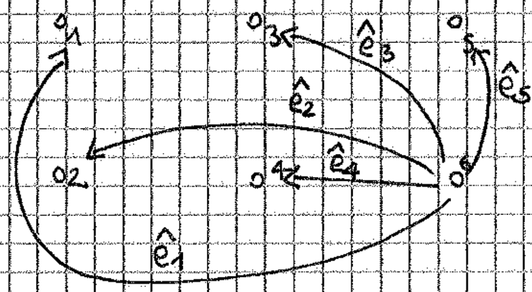


• tra 1 e 2 ci sono due bipoli in serie, equivalenti ad uno solo



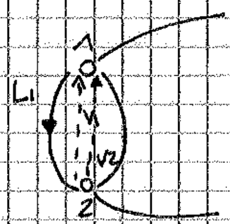
DEFINIZIONE VETTORE $\underline{\hat{e}}$ $\underline{\hat{e}}\ (\hat{e}_1, \hat{e}_2, \dots, \hat{e}_{N-1})^T$

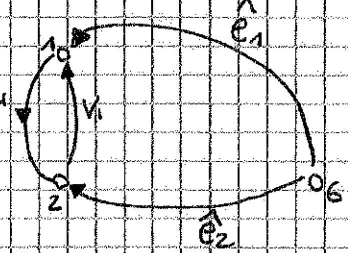
è il vettore contenente le tensioni tra i rimanenti N-1 nodi e il nodo di riferimento scelto.
(convenzionalmente positive sugli N-1 nodi)



Definiamo $\underline{v} = (v_1, v_2, \dots, v_L)^T$ il vettore delle TENSIONI di LATO sugli L lati, con la convenzione degli utilizzatori.

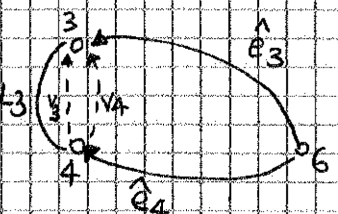
- v_1 è la tensione sul lato 1





$v_1 = \hat{e}_1 - \hat{e}_2$

- anche v_2 sta tra 1 e 2
  $v_2 = \hat{e}_1 - \hat{e}_2$



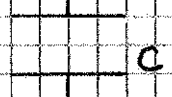
- $v_3 = \hat{e}_3 - \hat{e}_4$
- $v_4 = \hat{e}_3 - \hat{e}_4$
- $v_5 = \hat{e}_2 - \hat{e}_4$
- $v_6 = \hat{e}_3 - \hat{e}_5$
- $v_7 = \hat{e}_5 - \hat{e}_3$
- $v_8 = \hat{e}_4 - \hat{e}_6$
- $v_9 = \hat{e}_6 - \hat{e}_4$
- $v_{10} = \hat{e}_6 - \hat{e}_5$

$$
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & & & & \\
 & G_{11} & G_{12} & & & & & & & \\
 & G_{21} & G_{22} & & & & & & & \\
 & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & & \\
 & & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \\ V_7 \\ V_8 \\ V_9 \\ V_{10} \end{pmatrix}
+
\begin{pmatrix}
R_4 & & & & & & & & & \\
 & 1 & & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & & \\
 & & & R_1 & & & & & & \\
 & & & & R_2 & & & & & \\
 & & & & & 1 & & & & \\
 & & & & & & R_3 & & & \\
 & & & & & & & R_5 & & \\
 & & & & & & & & 1 & \\
 & & & & & & & & &
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \\ i_7 \\ i_8 \\ i_9 \\ i_{10} \end{pmatrix}
+
$$

$$
+ \begin{pmatrix} e_2 \\ \\ \\ \\ \\ -a_1 \\ \\ \\ -a_2 \\ -e_1 \end{pmatrix} = \varnothing
$$

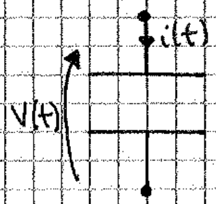
CIRCUITI DINAMICI

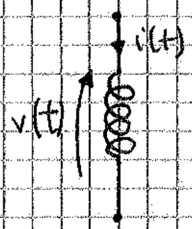
DEFINIZIONE Un CIRCUITO DINAMICO è un circuito con elementi circuitali descritti da un'equazione costitutiva contenente DERIVATE (e/o INTEGRALI)



CONDENSATORE

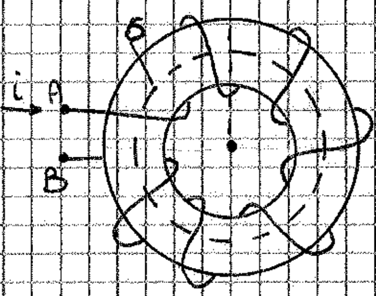
INDUTTORE





Il circuito è descritto da equazioni differenziale; sono lineari.

INDUTTORE LINEARE



$\oint \underline{H}\, dl = N i$ — dl è la linea chiusa

N è il numero di spire (avvolgimenti del filo attorno al materiale)

$|H| \cdot 2\pi r = N i$

$\underline{B} = \mu H$ — μ è la permeabilità magnetica del materiale (omogeneo e isotropo)

$$|B| = \frac{\mu N}{2\pi r} i$$

• Posso calcolare il flusso sulla sezione S

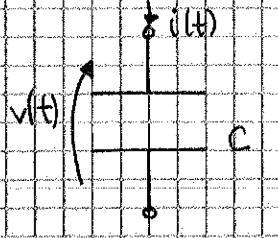
$$\phi_1 = |B| \cdot S = \frac{\mu S N}{2\pi r} \cdot i$$

$$\phi = N \phi_1 = \frac{\mu S N^2}{2\pi r} \cdot i$$

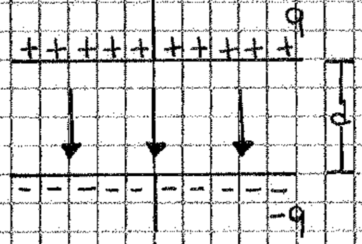
flusso concatenato con le N spire

! L si misura in H

CONDENSATORE LINEARE



Suppongo di avere due lastre con facce piane parallele di materiale conduttore, con area A e siano poste ad una distanza d



Per effetto della carica si genera un campo elettrico sarà caratterizzato da un parametro ε

Dalla legge di Gauss:

C si misura in F

$$\int \underline{D} \cdot u \, dS = q$$

$$|D| \, A = q$$

$$\underline{D} = \varepsilon \underline{E}$$

$$|E| = q / \varepsilon A$$

$$v = \int_A^B \underline{E} \, \underline{dl} = q \frac{d}{\varepsilon A}$$

$$v(t) = \frac{d}{\varepsilon A} q(t) \qquad C^{-1} = \frac{d}{\varepsilon A} \longrightarrow C = \frac{\varepsilon A}{d}$$

CAPACITÀ del CONDENSATORE

$$q(t) = C v(t)$$

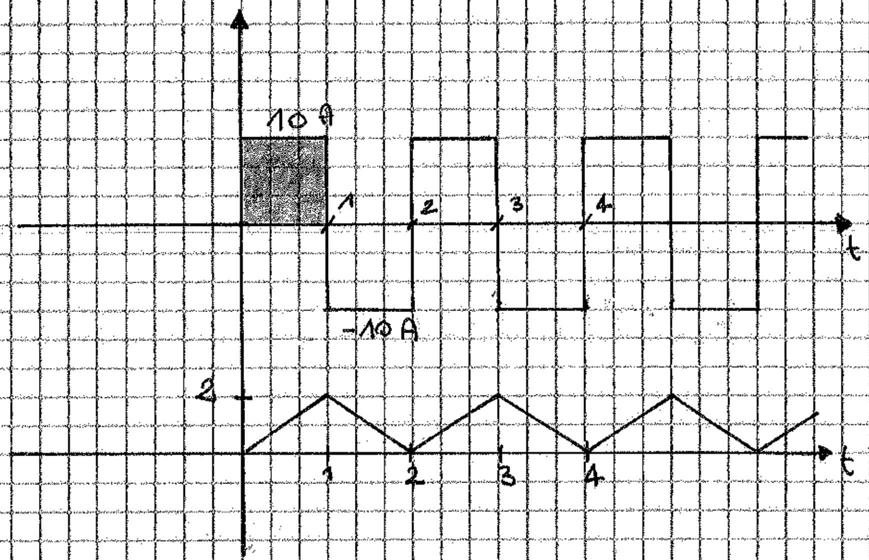
è legato alle capacità magnetiche del condensatore e al materiale

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

$$= C \frac{d}{dt} v(t) \longrightarrow i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$$

$$q(t) = \int_{-\infty}^{t} i(\tau) \, d\tau$$

$$\longrightarrow v(t) = \frac{1}{C} q(t) \longrightarrow v(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t} i(\tau) \, d\tau$$



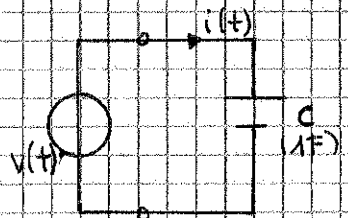
$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)\,d\tau$$

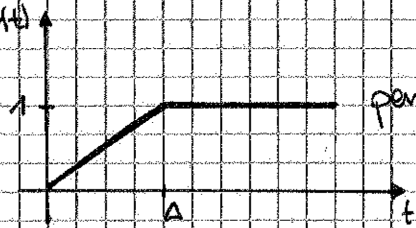
$$= \frac{1}{C}\underbrace{\int_{-\infty}^{0} i(\tau)\,d\tau}_{\phi} + \int_{0}^{t} i(\tau)\,d\tau$$

$$= \int_{0}^{t} i(\tau)\,d\tau$$ = area del quadratino $\Rightarrow 10 \cdot 1 = 10$

$$\frac{10}{5F} = 2$$

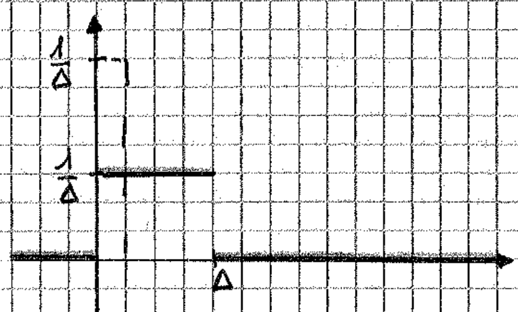
tra 0 e 2 sommo i due quadrati $10 - 10 = 0$





pende $\frac{1}{\Delta}$

$$i(t) = C\,\frac{dv(t)}{dt}$$



Se $\Delta \to 0$,
$\frac{1}{\Delta} \to \infty$

2 - INDUTTORE

- Se la corrente $i(t)$ è costante, allora l'induttore equivale ad un CORTO CIRCUITO

- $i(t)$ è una funzione continua:

  se $i(t_0^+) \neq i(t_0^-) \longmapsto v(t) \to \infty$

  vuol dire che devo dare potenza infinita

  $\downarrow$

  fisicamente impossibile

  $i(t)$ è una VARIABILE di STATO

- L'induttore NON DISSIPA ENERGIA ma può IMMAGAZZINARLA.

$$W(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} p(\tau)\, d\tau =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} v(t)\, i(t)\, dt =$$

da questa formula si evince che $v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$

$$= L \int_{i(t_0)}^{i(t_1)} i\, di = L \frac{i^2}{2} \Big|_{i(t_0)}^{i(t_1)}$$

$$W(t_0, t_1) = \frac{1}{2} L \left[i^2(t_1) - i^2(t_0) \right]$$

l'energia immagazzinata dipende da quella iniziale e finale.

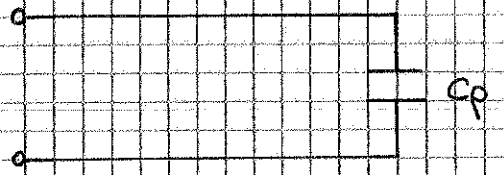
$$= W_L(t_1) - W_L(t_2)$$

$$W_L(t) = \frac{1}{2} L i^2(t)$$

$$\left.\begin{array}{l} i^2(t) \geq 0 \\ L > 0 \end{array}\right\} W_L(t) > 0$$

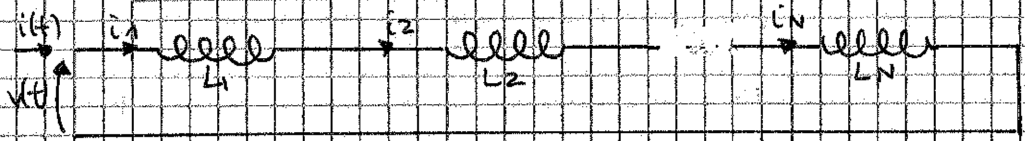
Anche l'Induttore è un bipolo PASSIVO.

$$i = C_1 \frac{dv}{dt} + C_2 \frac{dv}{dt} + \dots + C_N \frac{dv}{dt} = (C_1 + C_2 + \dots + C_N) \frac{dv}{dt}$$



C_p = somma delle capacità dei singoli N condensatori connessi in parallelo.

3 - SERIE di INDUTTORI



- vincolo di connessione

$$i_1 = i_2 = \dots = i_N = i$$

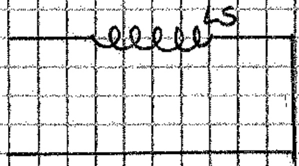
- KVL

$$v(t) = v_1 + v_2 + \dots + v_N$$

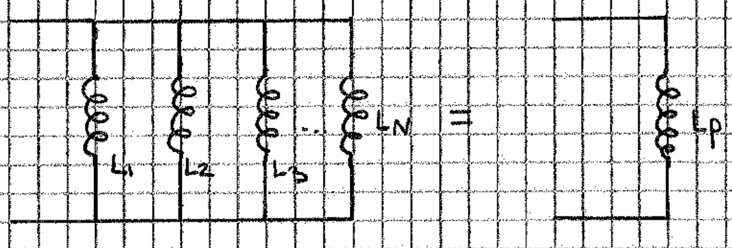
$$v_k = L \frac{di_k}{dt}$$ equazione costitutiva

$$v(t) = L_1 \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} + \dots + L_N \frac{di_N}{dt}$$

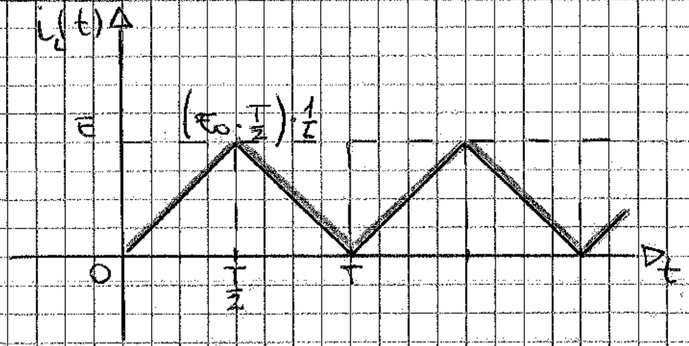
$$v(t) = \underbrace{(L_1 + L_2 + \dots + L_n)}_{L_S = \sum_{i=1}^{N} L_i} \frac{di(t)}{dt}$$



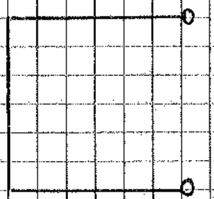
4 - PARALLELO di INDUTTORI

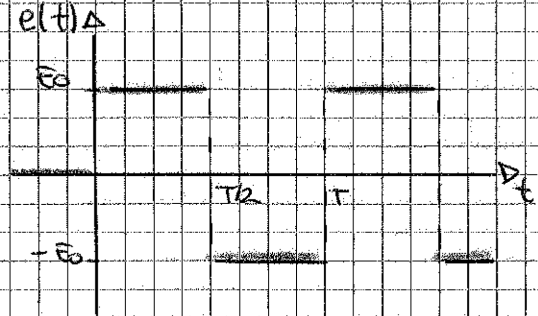


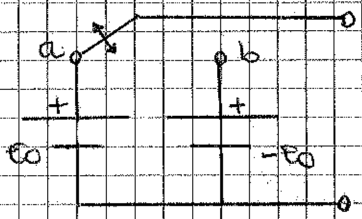
$$\frac{1}{L_p} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{L_K}$$



OSSERVAZIONE





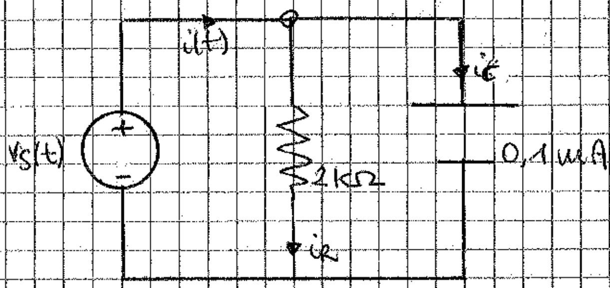


- batteria -

I salti sono modellati dalla presenza degli interruttori.

- Se e(t) è costante $\forall t \in (-\infty, +\infty)$, l'induttore si comporterebbe come un corto circuito.

②



$V_S = \cos(10t)$
$\forall t \in (-\infty, +\infty)$

$i(t) = i_R + i_C$

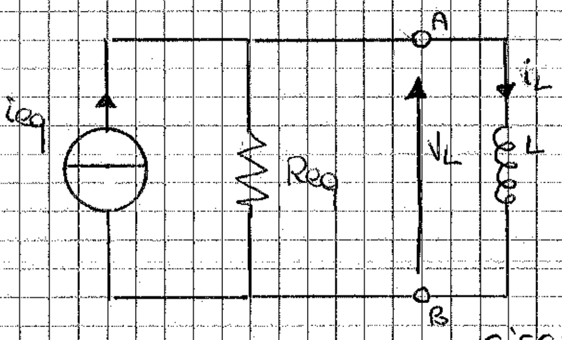
$$i_R(t) = \frac{V_S(t)}{R} = 0{,}5 \cos(10t) \text{ mA} \qquad (R = 2k\Omega)$$

$$i_C(t) = C \frac{dv_S}{dt} = 10^{-4} \cdot \frac{(-10)\sin(10t)}{\left(\frac{d}{dt}\cos(10t)\right)} = -\sin(10t) \text{ mA}$$

$$i_C = C \frac{dv_C}{dt}(t)$$

$$i(t) = [0{,}5\cos(10t) - \sin(10t)] \text{ mA}$$

INGRESSO SINUSOIDALE (non costante)

... ⟹ 

Rappresentazione NORTON

- i_L variabile di stato
- i_{eq} = corrente di corto circuito tra A e B

$$i_{eq} = \frac{V_L}{R_{eq}} + i_L = G_{eq} V_L + i_L \qquad (KCL)$$

$$V_L = L \frac{di_L}{dt} \qquad \text{equazione costitutiva}$$

$$i_{eq} = G_{eq} L \frac{di_L}{dt} + i_L$$

$$\frac{di_L}{dt}(t) = -\frac{1}{G_{eq}L} i_L(t) + \frac{1}{G_{eq}L} i_{eq}(t)$$

equazione differenziale di 1° ordine in funzione della variabile di stato

CIRCUITI RC ed RL

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\frac{1}{\tau} x(t) + \frac{x_{eq}}{\tau}(t)$$

forma generale che sintetizza entrambe le equazioni

- $x(t)$ è sempre la variabile di stato
$$\begin{cases} RC & V_C(t) \\ RL & i_L(t) \end{cases}$$

- τ $\begin{cases} RC & R_{eq}C \\ RL & G_{eq}L \quad \left(o: \frac{L}{R_{eq}}\right) \end{cases}$

- $x_{eq}(t)$ $\begin{cases} RC & V_{eq}(t) \\ RL & i_{eq}(t) \end{cases}$

$[x(t_0) - x_\infty]$ valore iniziale

τ costante di tempo

x_∞ valore finale

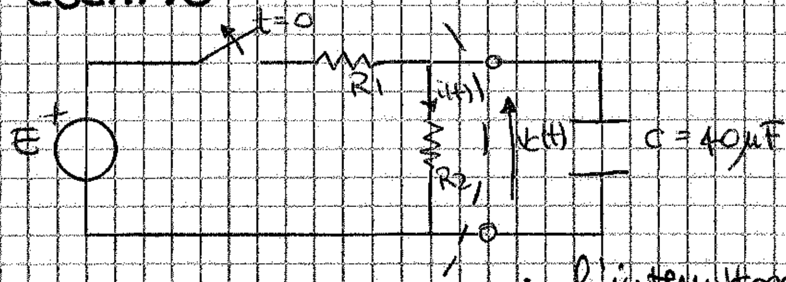
RC → V_{eq} (tensione a vuoto)

RL → i_{eq} (corrente di corto circuito)

$t \to +\infty \longmapsto \underbrace{x(t) = x_\infty}_{\text{equivale alla}}$ costante

- tensione sul condensatore quando si comporta come un circuito aperto;
- corrente sull'induttore quando si comporta come un corto circuito.

ESEMPIO



$R_1 = 10\,k\Omega$

$R_2 = 2\,k\Omega$

$E = -24\,V$

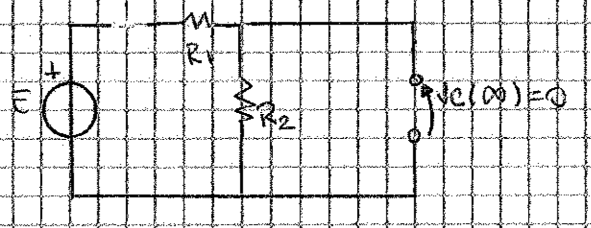
- l'interruttore si apre a $t=0$ (dopo essere stato chiuso per lungo tempo)
- E' un circuito di tipo RC

$V_c(t) = [V_c(0) - V_c(\infty)]\,e^{-t/\tau} + V_c(\infty)$ per $t \geq 0$

tensione di stabile e l'unico che regge a ∞ — da determinare

$V_c(\infty) \longmapsto t \to +\infty$

Il condensatore si comporta come un circuito aperto



in R_2, $i=0$ (c'e' un circuito aperto)

CIRCUITI RC ed RL con ingressi COSTANTI

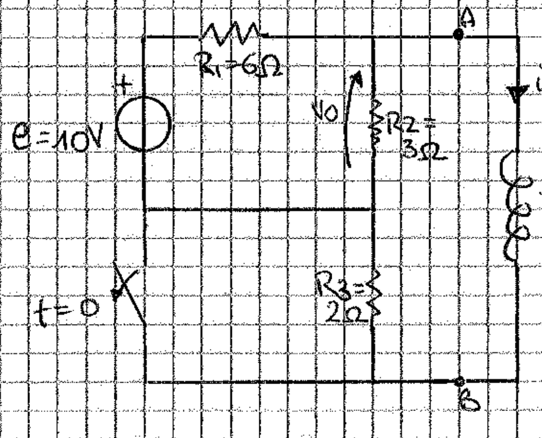
BIPOLO RESISTIVO + CONDENSATORE o INDUTTORE

↓ parte ADINAMICA — ↓ parte DINAMICA

$$\underbrace{x(t)}_{\text{è la variabile di stato}} = [x(0^+) - x_\infty]\, e^{-t/\tau} + x_\infty$$

RC	RL
$x(t) = v_C(t)$	$x(t) = i_L(t)$
$\tau = R_{eq} C$	$\tau = L/R_{eq}$
$v_C(\infty) \mapsto C \equiv C.A.$	$i_L(\infty) \mapsto L \equiv C.C.$
$v_C(0^+) = v_C(0^-)$	$i_L(0^+) = i_L(0^-)$

ESEMPIO



$v_0(t)$ a $t \geq 0$?

$$i_L(t) = [i_L(0^+) - i_L(\infty)]\, e^{-t/\tau} + i_L(\infty)$$

- Calcolo τ

$$\tau = \frac{L}{R_{eq}}$$ (siamo in un circuito RL)

- Calcolo R_{eq} = resistenza ai capi dell'elemento dinamico (A e B) la tensione E è applicata su R_1

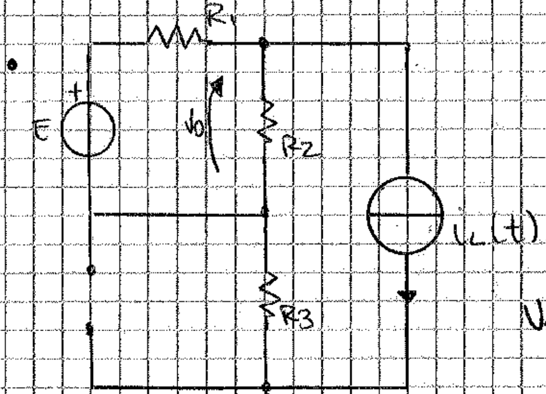
$$i_1 = \frac{E}{R_1} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}\,A$$

$$i_L(0^-) = \frac{5}{3}\,A$$

- $$i_L(t) = \left[\frac{5}{3} - \frac{5}{6}\right] e^{-t/1} + \frac{5}{6}$$

$$= \frac{10-5}{6} e^{-t} + \frac{5}{6} = \underbrace{\frac{5}{6} e^{-t} + \frac{5}{6}\,A}$$

ora posso calcolare $V_0(t)$

- 

interruttore aperto $t \geq 0$

$$V_0(t) = \frac{R_2}{R_2+R_1} E - R_1 /\!/ R_2\; i_L(t)$$

$$= \frac{3}{9} \cdot 10 - \frac{3 \cdot 6}{6+3} \cdot \left(\frac{5}{6} e^{-t} + \frac{5}{6}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\,10 - \frac{18}{9} \cdot \left(\frac{5}{6} e^{-t} + \frac{5}{6}\right) =$$

$$= \frac{10}{3} - 2\left(\frac{5}{6} e^{-t} + \frac{5}{6}\right) = \frac{10}{3} - \frac{10}{6} e^{-t} - \frac{10}{6} = \frac{10}{6} - \frac{10}{6} e^{-t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_0(t) = \frac{10}{6}\left(1 - e^{-t}\right) V \qquad (t \geq 0)$$

$\Rightarrow$ oppure: CALCOLO DIRETTO

$$V_0(t) = \left[V_0(0^+) - V_0(\infty)\right] e^{-t/\tau} + V_0(\infty)$$

$\tau = 1\,s$

$V_0(0^+)$ può essere diverso da $V_0(0^-)$

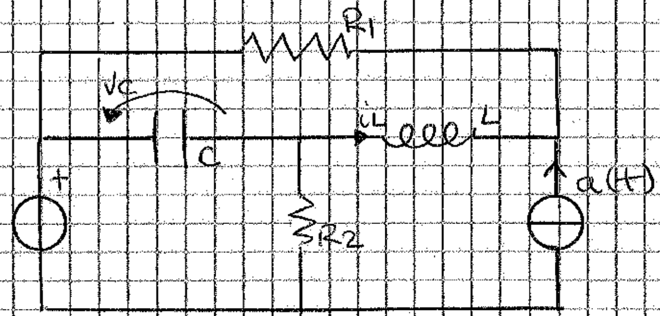
Circuiti dinamici di ordine > 1

vettore di STATO

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} v_C \\ i_L \end{pmatrix}$$

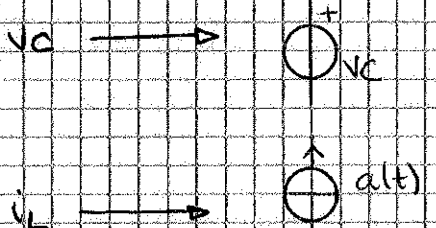
vettore di STATO CONIUGATO

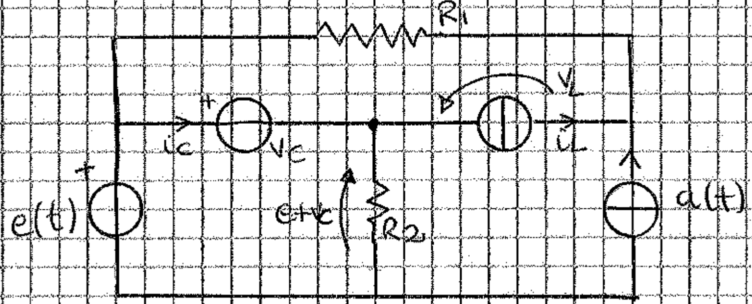
$$\hat{\underline{x}} = \begin{pmatrix} i_C \\ v_L \end{pmatrix}$$



Due equazioni differenziali di 1° ordine

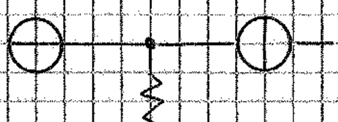
① SOSTITUISCO agli elementi dinamici dei generatori con le variabili di stato





② CALCOLO $\hat{\underline{x}}$

↳ KCL al nodo •



$$i_C = i_L + \frac{v_C + e}{R_2}$$

• $e + v_C$ tensione in R_2

$$i = \frac{v_C + e}{R}$$

EQUAZIONE di STATO $\frac{d}{dt}\underline{x}(t) = \underline{\underline{A}}\, x(t) + \underline{\underline{B}}\, u(t)$

dei circuiti dinamici di ordine superiore al primo

→ è lineare (il circuito viene considerato lineare)

→ a coefficienti costanti (le matrici $\underline{\underline{A}}$ e $\underline{\underline{B}}$ dipendono solo dagli elementi circuitali, che sono grandezze che non variano nel tempo)

→ non autonomo; abbiamo il vettore $u(t)$ che tiene conto degli ingressi, ovvero dei generatori indipendenti.

$$x(t) = \underbrace{e^{\underline{\underline{A}}t}\left[x(0^+)\right]}_{} + \underbrace{\int_0^t e^{\underline{\underline{A}}(t-t')}\underline{\underline{B}}\,\underline{u}(t')\,dt'}_{}$$

evoluzione del circuito dovuta alle condizioni iniziali (evoluzione LIBERA)
$u(t) = 0$
tiene conto della storia passata, è legata alla memoria degli elementi dinamici.

risolvo con la matrice esponenziale $e(t)$

evoluzione FORZATA: lo stato iniziale $\underline{x} = 0^+$ è nullo, $x(0^+) = 0$ (considero solo l'effetto dei generatori indipendenti)

$$\begin{pmatrix} e^{\lambda t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda n t} \end{pmatrix}$$ va a zero quando tutti gli autovalori della matrice sono nulli.

- Quando gli autovalori di A sono 0, la matrice $e(t) \to 0$ e resta solo la risposta forzata.

- Se la parte $Re[\lambda i] < 0$

$$\lim_{t\to\infty} e^{At} \to 0$$

$$\underline{x}(t) = e^{\underline{A}t}\,\underline{x}(0^+) - e^{\underline{A}t}\,\underline{x}_p(0^+) + \underline{x}_p(t)$$

$$\underline{x}(t) = \underbrace{e^{\underline{A}(t)}\left[\underline{x}(0^+) - \underline{x}_p(0^+)\right]}_{\underline{x}_t(t)} + \underline{x}_p(t)$$

$$\lim_{t \to +\infty} \underline{x}_t(t) = 0$$ la matrice esponenziale tende a 0

→ $\underline{x}_t(t)$ rappresenta la risposta/evoluzione TRANSITORIA (o 'TRANSITORIO').

→ $\underline{x}_p(t)$ rappresenta la risposta/evoluzione PERMANENTE o evoluzione di regime.

$$\underline{x}(t) = \underline{x}_t(t) + \underline{x}_p(t)$$

! Se ho ingressi sinusoidali devo risolvere l'integrale rappresentato da $\underline{x}_p(t)$. Se gli ingressi sono costanti $\underline{x}_p(t)$ sarà costante $\underline{x}_p(t) = \underline{x}_\infty$ (costante)

Se $\underline{x}_p(t) = \underline{x}_\infty$, $\underline{x}_p(0^+)$ vale $\underline{x}_\infty$

$$\underline{x}(t) = e^{\underline{A}t}\left[x(0^+) - \underline{x}_\infty\right] + \underline{x}_\infty$$

⇓

generalizzazione dei circuiti RC ed RL a ingressi costanti.

→ la somma di tutte le potenze assorbite dal bipolo è uguale a zero

↓

TEOREMA di CONSERVAZIONE delle POTENZE

- È insito nelle leggi di Kirchoff; dal punto di vista fisico derivano dalle equazioni di Maxwell.

Tutta la teoria dei circuiti è riconducibile a

$$\underline{\underline{T}}\,\underline{x} = \underline{u}$$

riassumendo così diverse cose, tra cui:

→ la SOVRAPPOSIZIONE degli EFFETTI

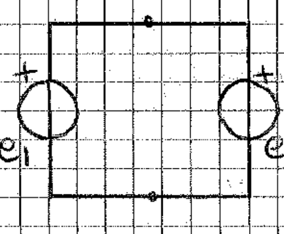
$$\underline{u} = \underline{u}_1 + \underline{u}_2$$

$$\underline{x} = \underline{\underline{T}}^{-1}(\underline{u}_1 + \underline{u}_2) = \underline{\underline{T}}^{-1}\underline{u}_1 + \underline{\underline{T}}^{-1}\underline{u}_2$$

→ quando un circuito è risolubile

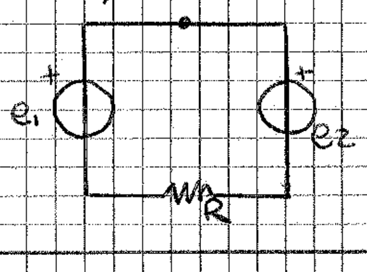
$$\det \underline{\underline{T}} \neq 0$$

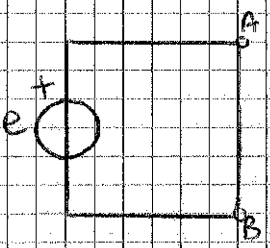
Se prendo questo circuito con $e_1 \neq e_2$, questo viola le KVL ed è un CIRCUITO IMPOSSIBILE.



Se $e_1 = e_2$, il circuito non viola le KVL ma è INDETERMINATO, la tensione può essere qualunque.

In entrambi i casi ho fatto un circuito che non va bene: il circuito è un modello, non una realtà fisica. Se $\det \underline{\underline{T}} = 0$, ci sarà un 'errore di modello'. Ad esempio, già considerare i fili a resistenza nulla è un errore: nulla ha resistenza uguale a zero. Seppur piccola, in mezzo ci sarà una resistenza.





Non ha l'equivalente di Norton.
Con la presenza del corto circuito vengono violate le leggi di Kirchhoff.

COME TROVO L'EQUIVALENTE?

1. Applico un generatore di tensione
2. Calcolo la corrente
3. devo ottenere $\det \underline{\underline{I}} \neq 0$

⟹ Se $\det \underline{\underline{I}} \neq 0$ allora c'è l'EQUIVALENTE di NORTON

'REGOLA'

Dato un bipolo lineare affine, invariabile nel tempo e senza memoria, con

$$m\,v(t) + n\,i(t) + s(t) = 0$$

m	n	Thevenin	Norton	
$\neq 0$	$\neq 0$	$\exists$	$\exists$	
$\neq 0$	$= 0$	$\exists$	$\nexists$	
$= 0$	$\neq 0$	$\nexists$	$\exists$	
$= 0$	$= 0$	$\nexists$	$\nexists$	$(\longrightarrow s(t) = 0)$

- $m\,v(t) + n\,i(t) = 0$ con $m = n = 0$
  Vuol dire che qualsiasi corrente e qualsiasi tensione vanno bene → Non esiste alcun bipolo del genere, è una pura astrazione