



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

**Appunti universitari**

**Tesi di laurea**

**Cartoleria e cancelleria**

**Stampa file e fotocopie**

**Print on demand**

**Rilegature**

NUMERO : 360

DATA : 24/09/2012

# A P P U N T I

STUDENTE : Gotta

MATERIA : Idraulica Ambientale

Prof. Ridolfi

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

24-04-12

# IDRAULICA AMBIENTALE

Prof. Luca Ridolfi, Fulvio Boano

## ARGOMENTI

- ① Richiami
- ① Turbolenza
- ② Processi di trasporto all'interno dei fluidi
  - Diffusione molecolare
  - Convezione
  - Diffusione turbolenta
  - Dispersione
- ③ Fiumi
- ④ Trasporto solido
- ⑤ Morfodinamica fluviale (monodimensionale)
- ⑥ Dinamica dei laghi
- ⑦ Seminario sull'eco-idraulica

L'esame è in forma orale. Durante il corso saranno molte cinque esercitazioni, che andranno portate all'esame.

### Si definisce tensore

- di ordine 0, uno scalare;
- di ordine 1, un vettore;
- di ordine 2, una matrice;
- di ordine n, una matrice di ordine n.

Quindi, un tensore è una generalizzazione di una matrice.

Consideriamo un generico tensore di ordine 2, cioè una matrice:

$$\begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{bmatrix}$$

Il tensore è detto simmetrico se  $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ , mentre è antisimmetrico se  $\tau_{ij} = -\tau_{ji}$ .

Questa definizione è importante, perché qualunque matrice può essere scritta come somma di una matrice simmetrica e di una antisimmetrica:

$$B_{ij} = \underbrace{\frac{1}{2}(B_{ij} + B_{ji})}_{\text{Matrice simmetrica}} + \underbrace{\frac{1}{2}(B_{ij} - B_{ji})}_{\text{Matrice antisimmetrica}}$$

### Teorema di Green

Desidero risolvere degli integrali del tipo  $\iiint_V \text{div } \vec{Q} dV$

$\vec{Q}$  è un qualsiasi campo di cui si calcola la divergenza, lo quale viene poi integrato sul volume complessivo V. In pratica, per ogni volumetto dV si calcola lo scalare  $\text{div } \vec{Q}$  e poi si sommano tutti questi valori sull'intero volume V.

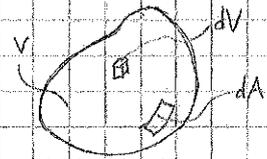
È un integrale triplo e notiamo che si deve fare l'integrale di una derivata; ci chiediamo quindi se queste due operazioni si possono semplificare tra loro in qualche modo.

Il teorema di Green afferma che:

$$\iiint_V \text{div } \vec{Q} dV = \iint_A \vec{Q} \cdot d\vec{A}$$

dove A è la superficie del contorno.

Il problema è stato di molto semplificato: mentre nell'integrale triplo è richiesto di conoscere  $\vec{Q}$  in tutti i punti del volume, col Teorema di Green si richiede di conoscere  $\vec{Q}$  solo sul contorno.

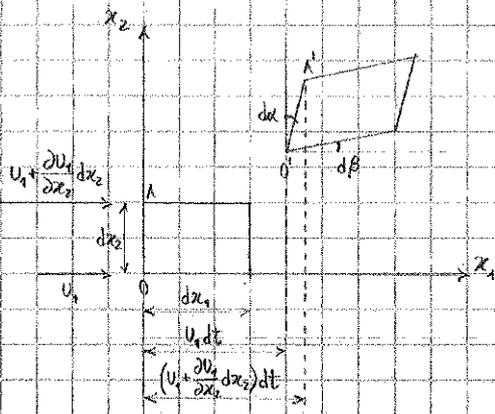


### Punto di vista lagrangiano

Scrive l'accelerazione come

$$\vec{A} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$$

Quando parliamo di accelerazione, tendiamo a sottintendere di chi è questa accelerazione: nella nostra esperienza, espressa dal punto di vista lagrangiano, è sempre di un corpo ben preciso.



L'obiettivo è descrivere come variano gli angoli \$d\alpha\$ e \$d\beta\$. Occupiamoci in primo luogo di \$d\alpha\$.

$$d\alpha \approx \tan(d\alpha) = \frac{\frac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2 dt}{dx_2} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} dt \implies$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2}$$

Per l'angolo \$d\beta\$ il ragionamento è analogo:

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1}$$

Quindi, la deformazione è data dai gradienti incrociati.

In generale, l'angolo che prima era di \$\pi/2\$ è cambiato di una quantità

$$\frac{d(\alpha+\beta)}{dt} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}$$

Mettendo insieme tutto, troviamo il  tensore della celerità di deformazione :

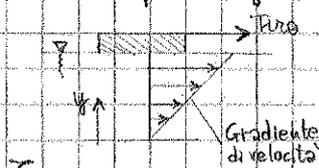
$$C_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

cioè una matrice \$3 \times 3\$ che dice come può dilatarsi (o contrarsi) e deformarsi un fluido.

## Reologia

Il passo successivo è quello di legare le tensioni alle deformazioni.

Nel caso dei fluidi, le cose sono complicate, al punto che nasce una materia chiamata reologia, che si occupa di legare il gradiente di velocità alla tensione che bisogna applicare per spostare il corpo.



Si mette in relazione la celerità con cui si deforma il fluido con le tensioni che nascono, e che devono essere applicate, sul fluido stesso.

Fra tutte le curve, la più semplice è la retta che sta sulle asse:

$$\tau = 0 \quad \text{Fluidi ideali}$$



Una seconda legge semplice è espressa da una retta passante per l'origine e il cui unico parametro è il coefficiente angolare \$\mu\$, detto viscosità dinamica. I fluidi che seguono questa legge sono detti fluidi newtoniani.

Potremmo ora definire l'equazione della dinamica dei fluidi.

Per i fluidi ideali, vale l'equazione di Eulero:

$$\rho(\vec{R} - \vec{A}) = \text{grad } p$$

dove \$\vec{R}\$ sono le forze di gravità, \$\vec{A}\$ sono le forze di inerzia e \$\text{grad } p\$ è il gradiente di pressione.

Per i fluidi newtoniani, invece, vale l'equazione di Navier-Stokes:

$$\rho(\vec{R} - \vec{A}) = \text{grad } p - \mu \nabla^2 \vec{U}$$

dove \$\nabla^2 \vec{U}\$ è il laplaciano secondo del campo di moto.

# TURBOLENZA

La turbolenza è importante per tre ragioni principali:

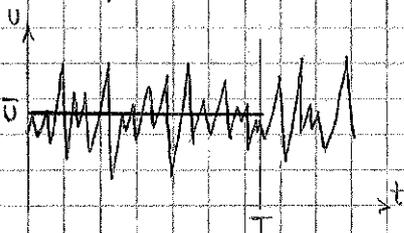
- Motori ingegneristici: l'ingegnere ha molto spesso a che fare con fluidi che si muovono di moto turbolento.
- L'aria e l'acqua, naturalmente, si muovono quasi sempre di moto turbolento.
- La turbolenza è il paradigma del processo complesso.

## Caratteristiche generali

- Casualità/Chaos. Il moto turbolento è il moto più complesso che mai sia stato osservato e sembra dettato dal caso.  
Con caso si intende ciò che non si riesce a comprendere.
- Aumenta enormemente i processi di trasporto.
- La turbolenza aumenta molto i processi di dissipazione.
- La turbolenza è un fenomeno fortemente non lineare.
- La turbolenza esiste in un mondo tridimensionale.
- La turbolenza presenta un elevatissimo contenuto di vorticità.  
Un vortice è un moto rotatorio del fluido. La turbolenza può essere interpretata in prima approssimazione come la sovrapposizione di tanti vortici a scale diverse.  
Esiste un operatore vorticità, espresso dal rotore del campo di moto:  $\text{rot } \vec{V} = \vec{\omega}$ .

## Media temporale

Ci si chiede se si può studiare tutto il fenomeno in termini di grandezze medie, per non entrare dentro il problema della turbolenza.



Si è di fronte ad un paradosso però, perché si dovrebbe prima risolvere tutto il campo turbolento, per poi mediarlo.

Dovremmo trovare un modo per mediare fin dall'inizio. In un moto turbolento tutte le grandezze misurate hanno un andamento del tipo riportato a fianco.

Non è un primo problema concettuale, legato a quale tipo

di media si sta cercando.

Si definisce media temporale la grandezza:

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} u(t) dt$$

La media temporale  $\bar{u}$  soffre di due problemi:

1) La scelta del tempo  $T$  in cui fare la media.

$T$  è il tempo per cui il sistema ha potuto dare luogo a tutte le sue possibili manifestazioni; a rigore, non c'è mai un tempo che ci assicuri di aver visto tutto quello che potremmo vedere.

Dovrebbe essere:

$$\bar{u} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} u(t) dt$$

Bisogna pensare come conosciuta, nella pratica.

Si definisce media d'insieme la grandezza:

$$\langle u(\vec{x}_*, t_*) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\vec{x}_*, t_*) p(u(\vec{x}_*, t_*)) du(\vec{x}_*, t_*)$$

La media d'insieme non soffre dei problemi della media temporale, quindi è questa che bisogna usare. La media d'insieme, inoltre, è un operatore trasparente alle operazioni lineari:

- $\langle \frac{\partial u}{\partial t} \rangle = \frac{\partial}{\partial t} \langle u \rangle$
- $\langle \frac{\partial u}{\partial x} \rangle = \frac{\partial}{\partial x} \langle u \rangle$
- $\langle \int x dx \rangle = \int \langle x \rangle dx$

Quindi, possiamo scambiare gli operatori media d'insieme con integrali e differenziali.

### Definizione

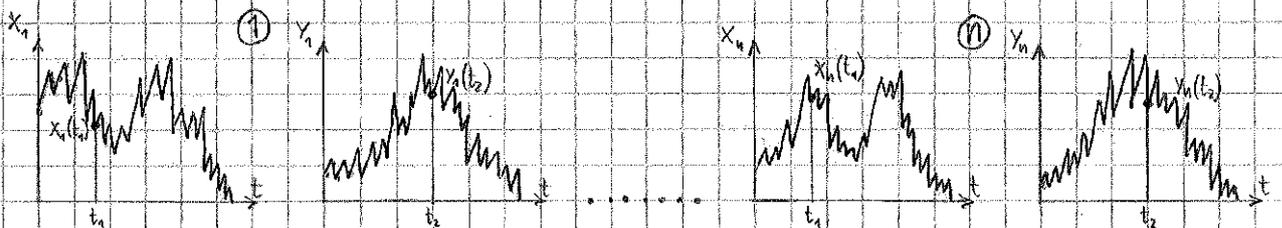
Un processo si dice omogeneo quando le grandezze medie non dipendono dallo spazio.

Un processo si dice stazionario quando le grandezze medie possono dipendere dallo spazio, ma non dipendono dal tempo.

### Covarianza e correlazione

Consideriamo due variabili  $X$  e  $Y$  viste come manifestazione di un processo stocastico.

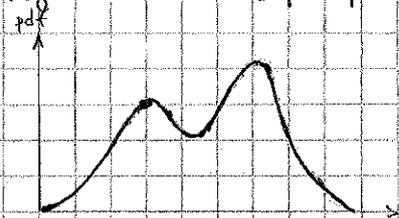
Facciamo tante realizzazioni:



Fissiamoci ora su due tempi arbitrari,  $t_1$  per la variabile  $X$  e  $t_2$  per la  $Y$ . Per tutte le realizzazioni possiamo estrarre le seguenti coppie di valori:

$$X_1(t_1) \text{ e } Y_1(t_2), \dots, X_n(t_1) \text{ e } Y_n(t_2)$$

Vogliamo cercare di capire quanto il fenomeno  $X$  al tempo  $t_1$  è legato al fenomeno  $Y$  al tempo  $t_2$ .

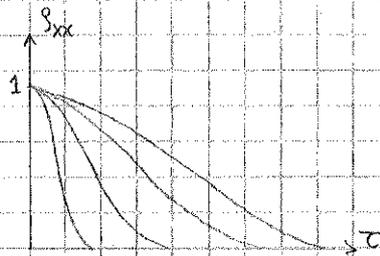


Facciamo il prodotto di tutte le coppie, così da  $n$  coppie otteniamo  $n$  numeri. In questo modo abbiamo la popolazione e la relativa pdf di tutti i possibili valori di

$$X(t_1) \cdot Y(t_2)$$

A questo punto, facendone la media si ricorre la covarianza fra la variabile  $X$  al tempo  $t_1$  e la variabile  $Y$  al tempo  $t_2$ :

$$R_{xy}(t_1, t_2) = \langle X(t_1) \cdot Y(t_2) \rangle$$



A questo punto possiamo tracciare un diagramma detto autocorrelogramma che, al variare di  $\tau$ , dice come varia la auto-correlazione. Per  $\tau=0$ , il diagramma parte da  $S_{xx}=1$ , il che indica perfetta correlazione. A mano a mano che  $\tau$  cresce, la dipendenza lineare viene meno. La maniera e il tempo in cui la curva cade danno idea della memoria che hanno i processi.

Tanto più la curva scende lentamente, tanto più il sistema mantiene la memoria lineare (il che implica alte prevedibilità).

Dato che prima o poi la curva va a zero, ha senso calcolarne l'integrale, definendo in questo modo la scala integrale  $\beta$ :

$$\beta = \int_0^{\infty} g(\tau) d\tau$$

Se  $\beta$  è alto, la variabile è molto correlata con se stessa e viceversa.

Un sistema di qualunque tipo è detto ergotico quando la sua scala integrale è finita.

C'è un teorema che afferma che, quando ciò succede, per tempi infiniti la media d'insieme è uguale alla media temporale:

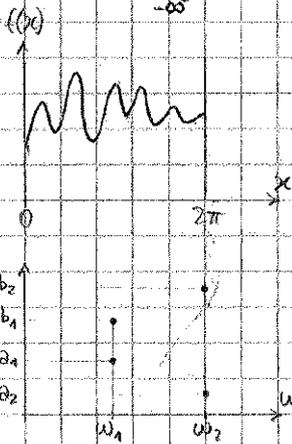
$$\beta < \infty \implies \langle \cdot \rangle = \bar{\cdot}$$

Nei processi turbolenti questo vale e quindi possiamo applicare il teorema.

## Spettro e trasformata di Fourier

Uno spettro  $S(\omega)$ , con  $\omega$  frequenza angolare, è legato all'autocorrelazione tramite un'operazione detta trasformata di Fourier:

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega\tau} \cdot g(\tau) d\tau$$

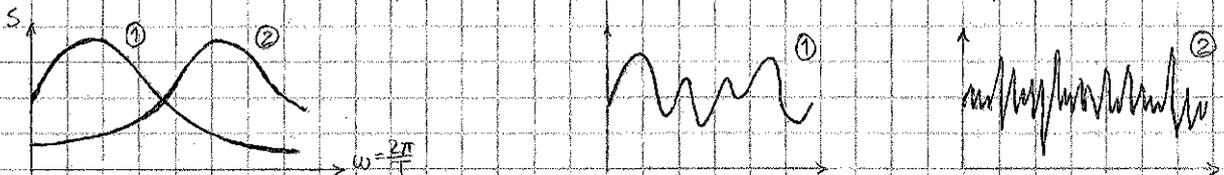


La funzione può essere scritta come somma di seni e coseni moltiplicati per opportuni coefficienti, cioè come serie di Fourier:

$$f(x) = \sum a_n \sin(\omega_n x) + b_n \cos(\omega_n x)$$

Questi coefficienti  $a_n$  e  $b_n$  possono poi essere rappresentati in funzione di  $\omega$ ; in questo modo si condensa l'informazione di una curva in alcuni numeri.

Lo spettro, cioè la trasformata di Fourier, si costruisce facendo variare la frequenza con continuità, anziché considerare frequenze discrete: i coefficienti non sono più discreti, ma si ha una curva. La forma dello spettro dà indicazione su come è fatto il segnale.



$$[L] = [Q_1^{E_1} Q_2^{\delta_2} Q_3^{\omega_1}]$$

$$[T] = [Q_1^{E_T} Q_2^{\delta_T} Q_3^{\omega_T}]$$

$$[M] = [Q_1^{E_M} Q_2^{\delta_M} Q_3^{\omega_M}]$$

Bisogna che questi due mondi si possano parlare. Torniamo nel nostro mondo, per quanto detto in precedenza, si ha:

$$q_1 = \lambda^{\alpha_1} \tau^{\beta_1} \mu^{\gamma_1}$$

$$q_2 = \lambda^{\alpha_2} \tau^{\beta_2} \mu^{\gamma_2}$$

$$q_3 = \lambda^{\alpha_3} \tau^{\beta_3} \mu^{\gamma_3}$$

Usando la stessa regola anche per l'altro pianeta si ha:

$$\lambda = q_1^{E_1} q_2^{\delta_1} q_3^{\omega_1}$$

$$\tau = q_1^{E_T} q_2^{\delta_T} q_3^{\omega_T}$$

$$\mu = q_1^{E_M} q_2^{\delta_M} q_3^{\omega_M}$$

Dobbiamo trovare il modo per passare da un mondo all'altro. Applicando il logaritmo alle espressioni del nostro mondo si ottiene:

$$\ln q_1 = \alpha_1 \ln \lambda + \beta_1 \ln \tau + \gamma_1 \ln \mu$$

$$\ln q_2 = \alpha_2 \ln \lambda + \beta_2 \ln \tau + \gamma_2 \ln \mu$$

$$\ln q_3 = \alpha_3 \ln \lambda + \beta_3 \ln \tau + \gamma_3 \ln \mu$$

Applicando il logaritmo alle espressioni dell'altro pianeta si ottiene:

$$\ln \lambda = E_1 \ln q_1 + \delta_1 \ln q_2 + \omega_1 \ln q_3$$

$$\ln \tau = E_T \ln q_1 + \delta_T \ln q_2 + \omega_T \ln q_3$$

$$\ln \mu = E_M \ln q_1 + \delta_M \ln q_2 + \omega_M \ln q_3$$

Dobbiamo risolvere un sistema lineare nelle variabili  $\ln \lambda$ ,  $\ln \tau$ ,  $\ln \mu$ . Supponendo di voler andare dal nostro mondo all'altro pianeta, il sistema può essere risolto, come ben noto, se:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

Vediamo ora come scegliere queste grandezze.

Consideriamo un fenomeno di cui interessa una certa variabile  $Y$ ; supponiamo di riuscire solo a dire che  $Y$  è funzione di altre grandezze:

$$Y = f(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, \dots, Q_n)$$

## Equazioni del moto di un fluido newtoniano

Le equazioni per descrivere il moto di un fluido newtoniano sono due.  
La prima è l'equazione di continuità:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{U}) = 0$$

Considerando l'equazione di stato per i fluidi incompressibili

$$\rho = \text{cost.}$$

la precedente equazione si semplifica come

$$\text{div} \vec{U} = 0$$

ed esprimendole con la notazione di Einstein si ottiene

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0$$

La seconda equazione è l'equazione di Navier-Stokes:

$$\rho(\vec{R} - \vec{A}) = \text{grad } p - \mu \nabla^2 \vec{U}$$

dove  $\vec{R}$  è la forza di massa per unità di massa, mentre  $\vec{A}$  è l'accelerazione allo Eulero.  
Si ottiene:

$$\rho \left( -g_{i,3} - \frac{D U_i}{D t} \right) = \frac{\partial p}{\partial x_i} - \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$$

Normalmente, l'equazione si scrive come:

$$\frac{D U_i}{D t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - g_{i,3}$$

dove  $\nu$  è la viscosità cinematica

Questa seconda equazione è scritta in questo modo per mettere in evidenza i 3 attori responsabili delle variazioni di velocità:

- legato ai gradienti di pressione
- legato alla viscosità cinematica
- legato all'accelerazione di gravità.

Queste due equazioni governano le grandezze istantanee; ci proponiamo di ricavare quelle che governano le grandezze medie. A tal fine introduciamo una simbologia.

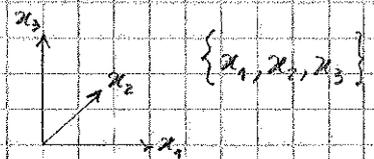
Rappresentiamo le grandezze istantanee con il simbolo  $\tilde{U}$  e immaginiamo tale valore come somma di due componenti, secondo la cosiddetta decomposizione di Reynolds:

$$\tilde{U} = \langle U \rangle + u \Rightarrow$$

$$\tilde{U} = U + u$$

La prima componente è la componente media, mentre la seconda è la componente oscillante e rappresenta tutto ciò che non è la media.

Ciò che cerchiamo sono le equazioni che governano la componente media.



## Equazione della quantità di moto del moto medio

Notiamo prima di tutto che l'equazione è non lineare (vedi  $\frac{\partial U_i}{\partial t}$ ), quindi non potremo dividere il moto medio da quello turbolento.

Prendiamo l'equazione e ne facciamo la media: sarà la somma della media applicata ad ogni singolo addendo. Supponiamo  $\rho$  e  $\nu$  costanti.

$$\underbrace{\left\langle \frac{\partial}{\partial t} (U_i + u_i) \right\rangle}_{\textcircled{1}} + \underbrace{\left\langle (U_j + u_j) \frac{\partial}{\partial x_j} (U_i + u_i) \right\rangle}_{\textcircled{2}} = -\frac{1}{\rho} \underbrace{\left\langle \frac{\partial}{\partial x_j} (P + p) \right\rangle}_{\textcircled{3}} + \nu \underbrace{\left\langle \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} (U_i + u_i) \right\rangle}_{\textcircled{4}} - g \delta_{i,3}$$

Termine ①

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle (U_i + u_i) \rangle = \frac{\partial U_i}{\partial t}$$

È lo stesso operatore di partenza applicato direttamente alla media

Termine ②

Sviluppando il termine si ha:

$$\langle U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \rangle + \underbrace{\langle u_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle U_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \rangle}_{=0} + \langle u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \rangle$$

I due termini centrali sono nulli, infatti:

$$\langle U_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \rangle = U_j \langle \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \rangle = U_j \frac{\partial}{\partial x_j} \langle u_i \rangle = 0$$

Quindi il termine ② risulta uguale a:

$$U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \langle u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \rangle$$

La conseguenza del fatto che l'operatore sia non lineare è che ci portiamo dietro il secondo addendo; esso si può sviluppare.

$$u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} - u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j}$$

Il termine ② diventa allora:

$$U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \langle \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} \rangle - \langle u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \rangle$$

In definitiva si ottiene quindi:

$$U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \langle u_i u_j \rangle$$

Il termine evidenziato, diverso da zero, rappresenta i gradienti spaziali della covarianza fra le componenti di agitazione turbolenta. Se la turbolenza fosse tale da non determinare correlazione tra  $u_i$  e  $u_j$ , questo termine sarebbe nullo. In realtà non è così, quindi anche se cerchiamo un'equazione che descriva lo stato medio, le componenti di agitazione turbolenta danno contributo perché sono correlate fra loro.

Termine ③

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i}$$

È un termine lineare

• Gradienti spaziali di una tensione. Questa tensione è costituita da tre termini:

① Tensioni legate agli sforzi normali (pressione P).

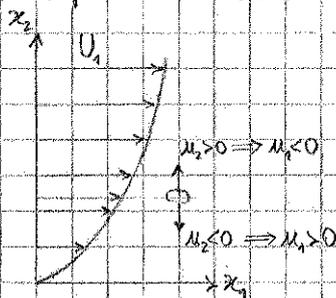
② Somma algebrica delle derivate incrociate.  
Se si cerca di deformare un fluido newtoniano, questo risponde generando delle tensioni, dette tensioni viscosse.  
Quindi, se ci sono gradienti spaziali delle tensioni viscosse, ci sono variazioni di velocità.



③ Tensioni di Reynolds. Sono l'eredità che dà la turbolenza sul moto medio della particella. Le sue velocità subisce delle variazioni a causa del fatto che ci sono dei gradienti nella struttura di correlazione  $\langle u_i u_j \rangle$ .

Le tensioni di Reynolds sono molto maggiori delle tensioni viscosse, solo così particolari (come molto vicine alle pareti).

Vediamo perché in un fluido esiste questa struttura di correlazione, considerando una particella all'interno di un certo profilo di velocità.



Se la particella si sposta verso l'alto ( $u_2 > 0$ ), si sposta in zone dove la velocità media è più alta e l'effetto è quello di rallentare e si ha un'oscillazione negativa rispetto al valor medio ( $u_1 < 0$ ).

Viceversa, se la particella si sposta verso il basso, si ha  $u_2 < 0$  che implica  $u_1 > 0$ . Ci aspettiamo che la media di  $u_1 u_2$  sia minore di zero.

In questo modo si compensa il segno negativo che precede il termine ③ nell'espressione di  $\langle \tau_{ij} \rangle$  e ne risulta un contributo maggiore di zero.

### Equazione dell'energia del moto medio

$$\frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{2} U_i^2 \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ - \frac{P U_j}{\rho} + 2 \nu U_i E_{ij} - \langle u_i u_j \rangle U_j \right] - 2 \nu E_{ij} E_{ij} + \langle u_i u_j \rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - g U_j$$

dove  $\frac{1}{2} U_i^2$  è l'energia cinetica, mentre  $E_{ij}$  è il tensore celerità di deformazione, cioè:

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$$

#### Termine ①

Considerando una massa finita di fluido e immaginando di voler determinare la variazione di energia complessiva, si dovrebbe integrare sull'intera massa fluida. Quindi risulterebbe l'integrale di una derivata e si potrebbe applicare il teorema di Green. Dato che sulla superficie la velocità è nulla, si evince che il termine ① non genera né sottrae energia, ma la trasporta soltanto.

#### Termine ②

È sempre minore di zero, cioè sottrae sempre energia ed è legato alle viscosità: rappresenta l'energia dissipata in calore a causa della viscosità del fluido.

Termine ②

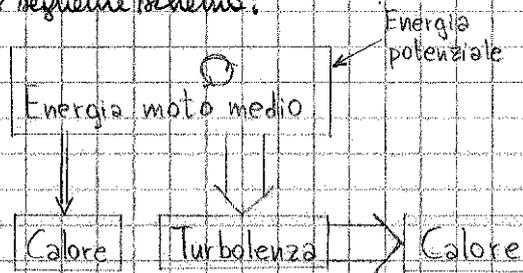
È esattamente uguale al termine ③ dell'equazione dell'energia del moto medio, però con il segno cambiato: è il termine che converte alla turbolenza di ricevere l'energia del moto medio; è la fonte. Affinché sia diverso da zero, è necessario che sia una struttura di correlazione  $\langle u_i u_j \rangle \neq 0$  fra le oscillazioni, ma anche che ci siano gradienti spaziali di velocità del moto medio, cioè che  $\partial u_i / \partial x_j \neq 0$  (tipicamente vicino alla parete).

Termine ③

Rappresenta l'energia dissipata in calore a causa della viscosità e della velocità di deformazione.

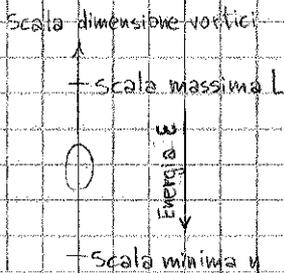
Notiamo anche che è scomparso l'effetto della gravità: ai fini della turbolenza, il campo di gravità non gioca alcun ruolo.

Raccogliendo quanto detto riguardo l'energia del moto medio e della turbolenza, possiamo disegnare il seguente schema:



07-05-12

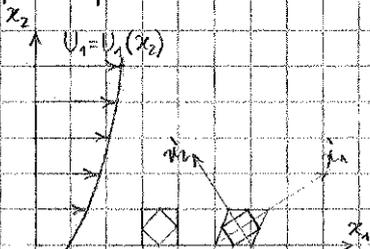
Turbolenza come cascata di vortici



Tutti i moti che ci sono in un fluido turbolento possono essere visti come vortici annidati, da grandi a via via più piccoli e ogni vortice è essenzialmente un moto rotatorio che contiene al suo interno più moti rotatori. La variabile rotore  $\vec{W} = \text{rot } \vec{U}$  dà indicazioni su questi moti rotatori.

Scale massime

- la scala più grande è dettata dalle condizioni al contorno: il vortice più grande che ci può essere è quello che fisicamente ci può stare (ad esempio in un tubo è dettato dalla dimensione del diametro).
- Se è così, le scale massime rientrano nelle condizioni al contorno, quindi questi vortici grandi possono diversi da caso a caso: non sono universali.
- Come abbiamo detto, la turbolenza sottrae energia al moto medio; in questo senso, il processo più importante è il cosiddetto vortex stretching. Vediamos in cosa consiste.



Seguiamo un elemento di forma quadrata immerso in un campo di moto per un tempo  $dt$ . Se il campo di velocità è del tipo riportato e lento, ci aspettiamo che il quadrato diventi un parallelogramma, cioè si deformi. Consideriamo ora un altro quadrato, inscritto nel precedente. Questo si trasforma in un rettangolo, cioè non subisce deformazione, ma dilatazione lungo  $x_1$  e contrazione lungo  $x_2$ .

## Osservazioni

- $\eta$  dipende da  $\nu^{3/4}$ , quindi  $\nu$  è micrometro romano circa di pari passo.
- $\eta$  dipende da  $\epsilon^{1/4}$ : per diminuire lo microscafo bisogna moltiplicare l'energia fornita per 16.
- Sperimentalmente si trova che  $A = 1 \pm 1.5$ , quindi senza commettere grossi errori si può assumere:

$$\eta = \sqrt[4]{\frac{\nu^3}{\epsilon}}$$

- Le scale dissipative sono non universali.
- $\eta_{max}, \eta_{min} \approx \mathcal{O}(10^{-3} \text{ m})$  (ordine del millimetro)

Per quanto detto, le scale intermedie, dette anche range inerziale, sono universali perché sono sufficientemente piccole da non vedere le condizioni al contorno, ma sono sufficientemente grandi da non vedere ancora la viscosità.



Consideriamo uno spettro; vorremmo capire come l'energia si ripartisce sulle varie armoniche, cioè come è fatto lo spettro della turbolenza.

$$K = \frac{2\pi}{\lambda} \text{ è detto numero d'onda}$$

dove  $\lambda$  è la lunghezza d'onda dell'armonica.

L'energia maggiore ce l'hanno i vortici con  $K$  piccolo, cioè quelli più grandi, perché l'hanno sottotro al moto medio. Inoltre, dato che questi vortici vedono le condizioni al contorno, non c'è universalità nel primo tratto.

Il tratto intermedio, riportato in un diagramma logaritmico, ha un andamento rettilineo; Kolmogorov ne ha ricavato la pendenza, utilizzando il Teorema 7:

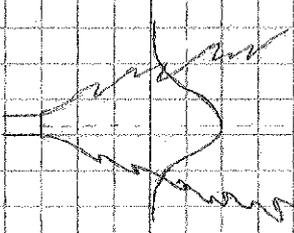
$$S = f(K, \epsilon) \Rightarrow$$

$$S = \alpha \epsilon^{2/3} K^{-5/3} \Rightarrow$$

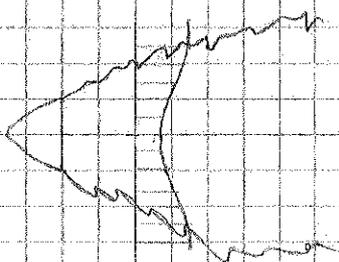
In diagramma logaritmico, il tratto centrale ha pendenza pari a  $-\frac{5}{3}$ .  
 Il terzo tratto rappresenta il cut-off dato dalla viscosità:  $K \approx \eta^{-1}$ .

## Turbolenza libera

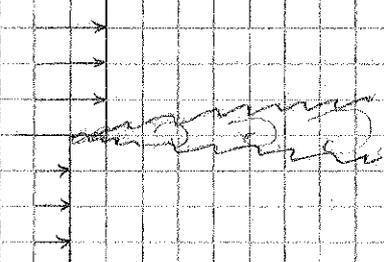
Si manifesta tutte le volte in cui non c'è una parete, quindi non è confinata.



Getti



Scie



Strati di miscelamento

$$M_e = M_u \Rightarrow M = \text{cost}$$

Il flusso di quantità di moto rimane costante lungo  $x$ .

$$M = \int_{A_e} \rho v_n \vec{U} dA = \rho Q U \Rightarrow$$

$$M_e = M_u = \rho \int U^2 dy = \text{cost}$$

Ricordando che c'è autosimilarità, si ha:

$$U = U_c(x) \cdot f\left(\frac{y}{\delta(x)}\right) \Rightarrow$$

$$M_e = M_u = \rho \int U_c^2 \delta \int f^2 d\left(\frac{y}{\delta}\right) = \text{cost} \Rightarrow U_c^2(x) \cdot \delta(x) = \text{cost}$$

Dipendenza da  $x$

Non dipendenza da  $x$

Per capire come è fatta  $U_c(x)$  applichiamo il teorema  $\pi$ :

$$U_c = U_c(x, \rho, M)$$

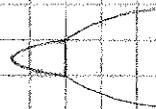
N.B. Non c'è dipendenza dalla viscosità  $\mu$ , perché il processo ha numero di Reynolds molto elevato.

$$U_c \propto \sqrt{\frac{M}{\rho x}} \quad (U \propto x^{-1/2}) \Rightarrow$$

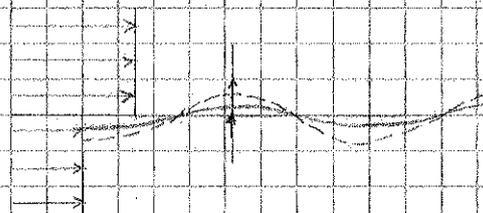
$$\delta(x) \propto x \Rightarrow$$

Il getto si allarga in media seguendo due rette.

Facendo gli stessi passaggi per un'ala si scopre che  $\delta(x) \propto \sqrt{x}$



Considerando gli strati di miscelamento si può studiare l'instabilità di Kelvin-Helmholtz.



Ci si chiede perché la superficie di contatto non rimane piatta. Se la superficie, per qualche motivo, viene debolmente perturbata, dove c'è un cresta la sezione si allarga e la velocità scende; per Bernoulli, in quel punto la pressione da sotto deve crescere. Viceversa, da sopra la pressione scende perché la velocità aumenta. Quindi, la perturbazione infinitesima tende ad esaltarsi e si

esalte sempre più fino ad innescare la turbolenza.

Questo tipo di instabilità fa sì anche che i getti dopo un po' si rompano. Immaginiamo che ci sia una debole perturbazione sul bordo.

Si applica lo stesso ragionamento di prima. Dove c'è allargamento di sezione, la velocità si riduce e la pressione aumenta; la perturbazione si amplifica fino a che il getto si rompe.

Per  $y=0$  si ha  $U=0$ , quindi  $cost=0 \implies$

Nel sottotratto viscoso il profilo è semplicemente:

$$U = \frac{\tau_0}{\mu} y$$

Moltiplicando e dividendo per  $U_*$  si ottiene:

$$\frac{U}{U_*} = y_+$$

Abbiamo scoperto come è fatta  $f$  nel sottotratto viscoso (retta passante per l'origine).

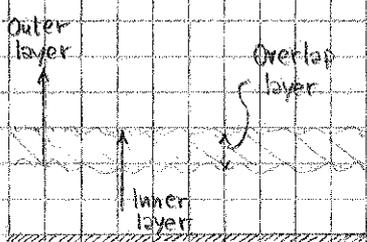
Focalizziamo ora la zona un po' distante dalla parete, dello strato esterno o outer layer. Per convenzione, la  $U$  è data come di fatto di velocità, ossia nella forma  $U_{\infty} - U$ , dove  $U_{\infty}$  è la velocità massima. Applichiamo il teorema  $\Pi$ :

$$U_{\infty} - U = F(y, U_*, \delta)$$

$$\frac{U_{\infty} - U}{U_*} = F\left(\frac{y}{\delta}\right)$$

$$\frac{U_{\infty} - U}{U_*} = F\left(\xi\right) \quad \text{ovvero posto, per convenzione, } \frac{y}{\delta} = \xi$$

Si suppone che esista uno strato di sovrapposizione o overlap layer tra strato esterno e strato interno. In questo strato devono valere contemporaneamente:



$$\frac{U}{U_*} = f(y_+) \quad \text{e} \quad \frac{U_{\infty} - U}{U_*} = F\left(\xi\right)$$

Quindi si impone un vincolo uguagliando le espressioni:

$$\frac{dU}{dy} = \frac{U_*^2}{\nu} \frac{df}{dy_+} \quad \text{e} \quad \frac{dU}{dy} = \frac{U_*}{\delta} \frac{dF}{d\xi}$$

da cui si ottiene:

$$\xi \frac{dF}{d\xi} = y_+ \frac{df}{dy_+} = \frac{1}{K} \text{ costante}$$

Abbiamo ricavato due equazioni differenziali che dicono come vanno i gradienti di velocità nello strato di sovrapposizione, da cui si ricavano:

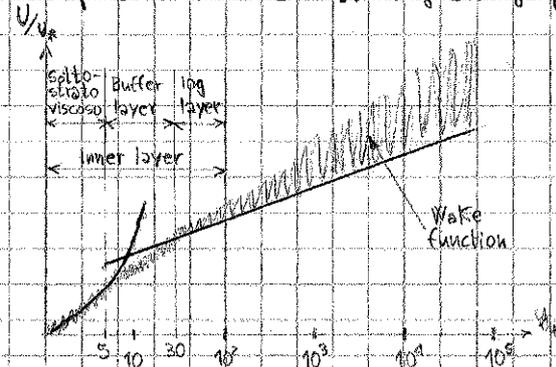
$$f(y_+) = \frac{1}{K} \ln\left(\frac{y U_*}{\nu}\right) + A$$

$$F(\xi) = \frac{1}{K} \ln\left(\frac{y}{\delta}\right) + B$$

Attraverso degli esperimenti sono stati ricavati i valori delle costanti:

$$A \approx 5.0, \quad B \approx -1.0, \quad K \approx 0.4$$

Allo fine si sintetizza tutto nel seguente grafico:



La prima curva è quella legge lineare che nel tratto viscoso, la retta rappresenta le altre leggi trovate. La linea oscillante rappresenta l'insieme di dati sperimentali. Fino a circa  $y_+ = 5$ , i dati sperimentali stanno molto bene sul profilo teorico. Per  $5 < y_+ < 30$  non vale più la legge di prima, ma neanche quella logaritmica: buffer layer; c'è poi una zona di sovrapposizione (log layer). Oltre, nasce una funzione di scia o wake function e i dati sperimentali si discostano un po' dal profilo logaritmico.

# PROCESSI DI TRASPORTO

## Diffusione molecolare



Consideriamo del fluido fermo in un contenitore e immaginiamo di mettere del colorante in un volume sferico di raggio  $r_0$ .  
 Assumiamo come sistema di riferimento un raggio  $r$  e riportiamo l'andamento della concentrazione (massa/unità di volume) al variare di  $r$ .  
 Poco alla volta l'inchiostro tende a diffondersi nella nave circostante, perciò si osservano sferette di colore via via più debole che si vanno allungando.  
 Notiamo che l'area sottesa delle curve nel diagramma  $C, r$  è sempre la stessa.  
 Ad un certo punto, la sfera sente le condizioni al contorno e dopo molto tempo, tutto il bicchiere ha la stessa concentrazione di inchiostro, uniformemente distribuita.  
 Il processo è lento e isotropo, finché le condizioni al contorno non impongono una certa simmetria.

Partiamo dalla legge di Fick:

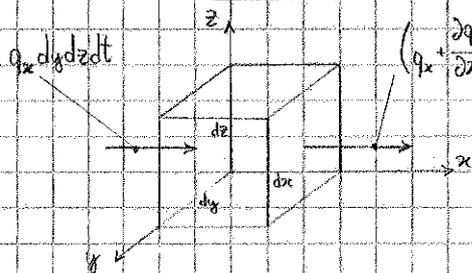
$$\vec{q} = -D \nabla C$$

dove:

- $\vec{q}$  è il flusso di sostanza, cioè la massa di sostanza che passa attraverso l'unità di superficie nell'unità di tempo.
- $\nabla C$  è il gradiente della concentrazione. Un gradiente elevato determina un flusso forte, mentre un gradiente basso determina un flusso debole.
- $D$  è uno scalare ed è il coefficiente di proporzionalità che lega il gradiente di concentrazione al flusso di sostanza. Il fatto che  $D$  sia uno scalare e non un tensore testimonia il fatto che il processo è isotropo.

Il segno meno nella formula indica che la diffusione avviene da concentrazioni maggiori a concentrazioni minori.

Scriviamo ora il bilancio di massa:



in direzione  $x$ :

$$q_x dy dz dt - \left( q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \right) dy dz dt = - \frac{\partial q_x}{\partial x} dx dy dz dt$$

Mettendo insieme sulle tre direzioni abbiamo il bilancio complessivo fra ciò che entra e ciò che esce:

$$- \frac{\partial q_x}{\partial x} dx dy dz dt - \frac{\partial q_y}{\partial y} dy dx dz dt - \frac{\partial q_z}{\partial z} dz dy dx dt = \frac{\partial C}{\partial t} dt dx dy dz$$

da cui si ricava:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = - \text{div} \vec{q}$$

Inserendo nell'equazione di bilancio la legge di Fick si ottiene l'equazione differenziale che regola la diffusione molecolare:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \nabla^2 C$$

dove  $\nabla^2 C$  è il laplaciano di  $C$ .

$$\frac{C}{M/\sqrt{4\pi Dt}} = g\left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}}\right)$$

Nella soluzione,  $x$ ,  $D$  e  $t$  sono sempre bloccati nell'argomento di  $g$

$$C = \frac{M}{\sqrt{4\pi Dt}} \cdot g\left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}}\right) = \frac{M}{\sqrt{4\pi Dt}} \cdot g(y) \quad \text{avendo posto } y = \frac{x}{\sqrt{4Dt}}$$

L'incognita è solo più  $g(y)$ . Per ricavarla, per prima cosa consideriamo l'equazione sopra e la deriviamo rispetto a  $t$  e a  $x$ :

$$\frac{\partial C}{\partial x} = \frac{M}{\sqrt{4\pi Dt}} \cdot \frac{dg}{dy} \cdot \frac{1}{\sqrt{4Dt}}$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \dots$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \frac{M}{\sqrt{4\pi Dt}} \cdot \frac{d^2g}{dy^2} \cdot \frac{1}{4Dt}$$

Sostituiamo queste espressioni nell'equazione differenziale di partenza e troviamo:

$$2g(y) + 2y \frac{dg}{dy} + \frac{d^2g}{dy^2} = 0$$

Abbiamo ricavato un'equazione differenziale alle derivate ordinarie che dice come è fatta la  $g$ , nell'unica variabile da cui  $g$  dipende, cioè  $y$ .

Il prezzo da pagare è che questa equazione contiene un termine di non linearità:  $2y \frac{dg}{dy}$ .

Tuttavia, questa equazione è una cosiddetta equazione perfetta, cioè può essere riscritta come:

$$\frac{d}{dy} \left[ 2y g(y) + \frac{dg}{dy} \right] = 0 \quad \Rightarrow$$

$$2y g(y) + \frac{dg}{dy} = \text{cost}$$

In questo modo, abbiamo abbassato l'ordine di derivazione. Applicando il metodo di separazione delle variabili otteniamo:

$$g(y) = C_0 \cdot e^{-y^2}$$

Sostituendo a  $y$  la sua espressione, otteniamo finalmente la soluzione di Green:

$$C(x,t) = \frac{M}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$$

cui si aggiunge la condizione di conservazione della massa  $M$ , da cui si ottiene  $C_0 = 1$  (ecco perché non c'è più nelle formule sopra).

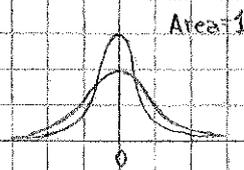
$$M = \int_{-\infty}^{+\infty} C(x,t) dx = \text{cost}$$

L'equazione ottenuta è una gaussiana, la quale è, quindi, la soluzione fondamentale dei fenomeni di diffusione molecolare. La gaussiana è il risultato sintetico di un fenomeno che ha dentro di sé tante componenti casuali, ognuna delle quali distribuita secondo una certa legge, ma che sono tra loro indipendenti. Tutte le volte che c'è una derivata nel tempo e una derivata seconda nello spazio, dentro c'è una gaussiana. In generale, la gaussiana è:

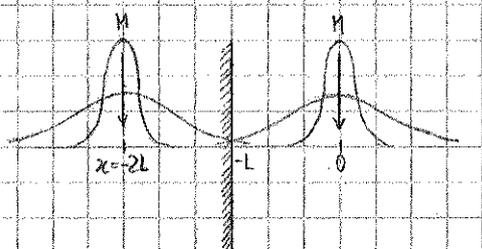
$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Nel nostro caso:

- $\mu = 0$
- $\sigma^2 = 2Dt$  è tale da dare area pari a 1



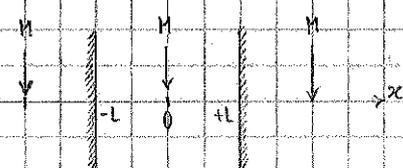
In particolare, osservando l'ultima condizione, si nota che la varianza del processo cresce linearmente con il tempo. Questo succede in tutti i processi governati dalla diffusione. Tutti i processi in cui  $\sigma^2 = 2Dt^\alpha$  con  $\alpha \neq 1$  sono detti di diffusione anomala.



Se non ci fosse stata la parete, abbiamo visto come si muovevano le cose.  
 Si suppone che in  $x = -2L$  si immette la stessa massa  $M$ .  
 Per simmetria, in  $x = -L$  da destra e da sinistra si vedono gli stessi valori e la stessa forma della curva, cioè dalle due parti c'è lo stesso gradiente e in  $x = -L$  i due flussi si compensano. Quindi, per considerare l'effetto della parete, scriviamo:

$$C(x,t) = \frac{M}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} + \frac{M}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{(x+2L)^2}{4Dt}}$$

Naturalmente, la soluzione è valida per  $x > -L$ .



Se pressino due pareti anziché una sola, la soluzione sarebbe data come sommatoria di infinite sorgenti immagine.

Consideriamo ora il caso bidimensionale. In questa situazione, l'equazione differenziale di partenza ha una variabile in più:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}$$

L'equazione continua ad essere lineare. Si usa il metodo della separazione delle variabili, cercando una soluzione che possa essere scritta come:

$$C(x,y,t) = C_1(x,t) \cdot C_2(y,t)$$

Sostituendo nell'equazione differenziale si ottiene:

$$C_1 \frac{\partial C_2}{\partial t} + C_2 \frac{\partial C_1}{\partial t} = D_x \cdot C_2 \frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2} + D_y \cdot C_1 \frac{\partial^2 C_2}{\partial y^2}$$

Riorganizzando i termini si ricorre:

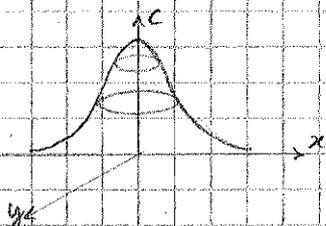
$$C_2 \left[ \frac{\partial C_1}{\partial t} - D_x \frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2} \right] + C_1 \left[ \frac{\partial C_2}{\partial t} - D_y \frac{\partial^2 C_2}{\partial y^2} \right] = 0$$

Dato che  $C_1$  e  $C_2$  sono diversi da zero, affinché il primo membro sia nullo lo devono essere le due parentesi. Si deve quindi risolvere il sistema:

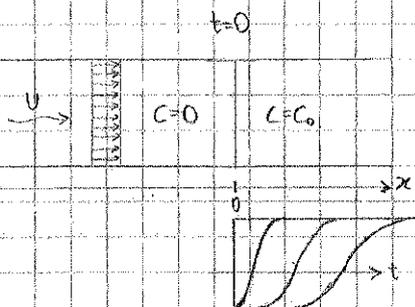
$$\begin{cases} \frac{\partial C_1}{\partial t} = D_x \frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2} \\ \frac{\partial C_2}{\partial t} = D_y \frac{\partial^2 C_2}{\partial y^2} \end{cases}$$

Queste equazioni le sappiamo risolvere; dunque, quello che cerchiamo è il prodotto di due gaussiane:

$$C(x,y,t) = \frac{M}{4\pi t \sqrt{D_x D_y}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4D_x t} - \frac{y^2}{4D_y t}}$$



La soluzione è una gaussiana che ha dominio bidimensionale. Nel caso di pura diffusione molecolare,  $D_x = D_y$  e quindi le sezioni sono dei cerchi.



Consideriamo la situazione riportata a lato. Il problema è unidimensionale:

$$U \frac{\partial C}{\partial t} + D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$

È conveniente cambiare il sistema di riferimento, passando ad un sistema mobile che si muove con velocità  $U$ :

$$\begin{cases} \xi = x - Ut \\ \tau = t \end{cases} \quad \text{con } \frac{\partial \xi}{\partial t} = -U \quad \text{e} \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} = 1$$

Per passare dal sistema  $\{x, t\}$  al sistema  $\{\xi, \tau\}$  consideriamo:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \tau}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \tau}$$

e ricorriamo:

$$\frac{\partial C}{\partial \xi} \cdot (-U) + \frac{\partial C}{\partial \tau} + U \frac{\partial C}{\partial \xi} = D \frac{\partial^2 C}{\partial \xi^2}$$

da cui si ottiene:

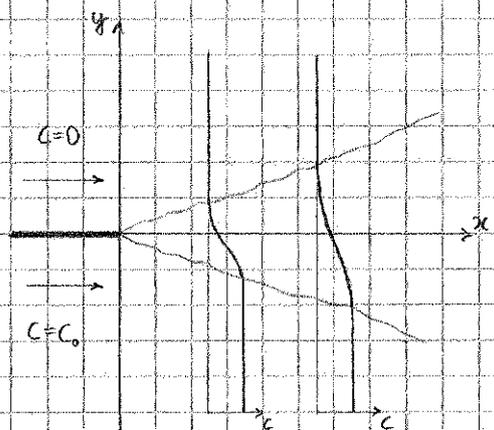
$$\frac{\partial C}{\partial \tau} = D \frac{\partial^2 C}{\partial \xi^2}$$

In questo sistema di riferimento la soluzione la conosciamo già:

$$C(\xi, \tau) = \frac{C_0}{2} \left[ 1 + \text{Erf} \left( \frac{\xi}{\sqrt{4D\tau}} \right) \right]$$

e tornando al sistema di riferimento  $(x, t)$  otteniamo infine:

$$C(x, t) = \frac{C_0}{2} \left[ 1 + \text{Erf} \left( \frac{x - Ut}{\sqrt{4Dt}} \right) \right]$$



Consideriamo ora quest'altro caso, la concentrazione non dipende dal tempo, quindi siamo interessati a determinare, semplicemente, l'andamento di  $C(x, y)$ . L'equazione è:

$$U \frac{\partial C}{\partial x} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}$$

In cui il termine  $D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$  è trascurabile rispetto alla convezione; quindi:

$$U \frac{\partial C}{\partial x} = D \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}$$

La  $U$  è un numero, quindi può essere portata dentro

l'operatore di derivata e ponendo

$$x' = \frac{x}{U}$$

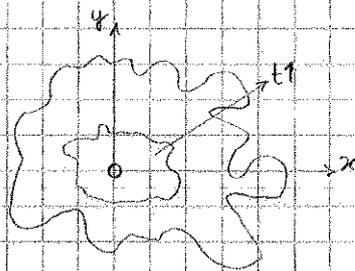
si ottiene

$$\frac{\partial C}{\partial x'} = D \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}$$

che è la stessa equazione del caso precedente, dove al posto di  $t$  c'è  $x'$ .

# Diffusione turbolenta

Ci domandiamo cosa succede se immettiamo una certa concentrazione di sostanza in un campo di moto turbolento

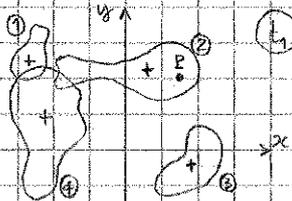


La situazione appare aggregata e vediamo che le particelle tendono a diffondere, cioè ad aumentare la propria distanza relativa. Vorremmo ricavare come varia la concentrazione nello spazio e nel tempo:

$$C(x, y, t)$$

La macchia, deformata, evolve sentendo tutte le scale della turbolenza; quindi per rispondere a queste domande dovremmo risolvere il campo di moto istante per istante, per ogni punto, il che è assurdo. L'alternativa è concentrarsi sulla media delle macchie, cioè su:

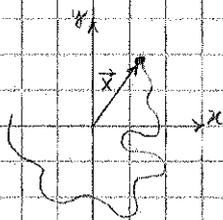
$$\langle C(x, y, z, t) \rangle$$



Bisogna però tenere ben presente un aspetto. Consideriamo 4 realizzazioni in un punto P. Solo la realizzazione 2 ha dato un valore di concentrazione non nullo nel punto considerato. Quindi, la media d'insieme risulta di molto abbassata, perché molte volte i valori sono nulli. Dunque, considerare la media è di sfavore di sicurezza. Per contrastare questo aspetto, si potrebbe seguire l'approccio proposto da Batchelor, secondo cui si dovrebbero sovrapporre i bordanti delle macchie prima di mediare.

Non seguiremo la teoria di Taylor e ciò che stiamo cercando è

$$\langle C(x, y, z, t) \rangle$$



Un modo per descrivere la traiettoria è dare la grandezza vettore posizione:

$$\vec{x} = \vec{x}(t)$$

Se abbiamo n particelle, abbiamo n vettori che le stiamo seguendo. Macroscopicamente, ciò corrisponde a sapere, partendo dalla situazione in cui le particelle sono tutte concentrate in un punto, come queste si allargano nel tempo. Matematicamente, ciò significa definire la varianza dei vettori posizione:

$$\langle X^2 \rangle(t)$$

e, meglio, la sua variazione temporale:

$$\frac{d}{dt} \overline{X_\alpha^2}$$

Notiamo che, dato che ci stiamo occupando di sistemi ergodici, possiamo confondere la media d'insieme con la media temporale.

Il pedice  $\alpha$  si riferisce alle componenti  $\alpha$ -esima del vettore, con  $\alpha = 1, 2, 3$ .

Per le proprietà di linearità delle medie si ha:

$$\frac{d}{dt} \overline{X_\alpha^2} = \frac{d \overline{X_\alpha^2}}{dt} = 2 \overline{X_\alpha \frac{dX_\alpha}{dt}} = 2 \overline{X_\alpha u_\alpha}$$

essendo  $u_\alpha = \frac{dX_\alpha}{dt}$  la componente della velocità lungo  $\alpha$ , da cui si ricava anche

$$X_\alpha = \int_0^t u_\alpha(t') dt'$$

Abbiamo quindi individuato 3 regimi:

- $\tau$  bassi (all'inizio).
- Zona intermedia, di cui non sappiamo dire niente.
- $\tau$  lunghi, per cui la correlazione delle velocità si è spenta.

Concentriamoci in particolare su quest'ultima fase, in cui  $\overline{X_\alpha^2}(t)$  è proporzionale a  $t$  attraverso due coefficienti:

- $\overline{u_\alpha^2}$ : Più il campo di moto è agitato, ossia più la sua varianza è alta, più ci aspettiamo che la diffusione sia efficace.
- $\beta$ : lo scale integrale è lo scale della memoria lineare del processo. Tanto più c'è memoria, tanto più la varianza cresce, a parità di tempo, perché c'è correlazione.

Su questi tempi, si va e fuori su un processo Fickiano, in quanto c'è variazione lineare con il tempo; se è così, allora l'equazione di diffusione turbolenta per tempi lunghi può essere scritta come:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \epsilon_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \epsilon_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \epsilon_z \frac{\partial^2 C}{\partial z^2}$$

In realtà, si tratta di un fenomeno diffusivo anisotropo e non omogeneo, in quanto gli  $\epsilon$  dipendono dallo spazio, quindi bisogna scrivere:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \epsilon_x \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \epsilon_y \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \epsilon_z \frac{\partial C}{\partial z} \right) \quad \text{con } \epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z = f(x, y, z)$$

Facendo il parallelo con la diffusione molecolare, in cui eravamo abituati a scrivere

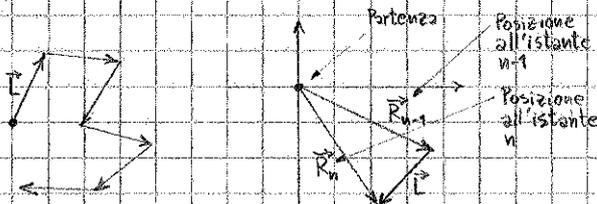
$$\sigma^2 = 2Dt \quad \text{e} \quad \frac{d\sigma^2}{dt} = 2D$$

nel caso della diffusione turbolenta abbiamo:

$$\epsilon_\alpha = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \overline{X_\alpha^2} = \beta \overline{u_\alpha^2}$$

Concludendo, la teoria di Taylor può essere applicata quando vale ②, cioè nello spazio per cui lo scalo è più grande delle massime scale della turbolenza; quando ciò si verifica, lo scalo è diventato così grande che sente i colpi di tutte le scale, ma tre loro indipendenti: tutto va come una gausiana e il processo è Fickiano.

### Feynman e la random walk



Consideriamo una persona che fa, completamente a caso, passi lunghi  $L$ . Ci chiediamo come cambia la posizione di questa persona e quanto e quanto che occorre il tempo.

$$\vec{R}_n = \vec{R}_{n-1} + \vec{L}$$

Cerchiamo il valor medio  $\langle R_n^2 \rangle$ .

$$R_n^2 = \vec{R}_n \cdot \vec{R}_n = (\vec{R}_{n-1} + \vec{L}) \cdot (\vec{R}_{n-1} + \vec{L}) = R_{n-1}^2 + L^2 + 2\vec{R}_{n-1} \cdot \vec{L}$$

$$\langle R_n^2 \rangle = \langle R_{n-1}^2 \rangle + \langle L^2 \rangle + 2\langle \vec{R}_{n-1} \cdot \vec{L} \rangle$$

dove  $\langle L^2 \rangle = L^2$  e  $\langle \vec{R}_{n-1} \cdot \vec{L} \rangle$  rappresenta la cross-correlazione fra posizione all'istante  $n-1$  e passo  $L$ , dato che il processo è completamente casuale, questo termine è nullo.

Definiamo la media spaziale delle concentrazioni  $\bar{C}$  come:

$$\bar{C} = \frac{1}{h} \int_0^h C(y) dy$$

Da qui definiamo gli scarti rispetto alla media, sempre nello spazio:

$$C' = C(y) - \bar{C}$$

Il fenomeno è l'unione di un processo convettivo e di un processo diffusivo; l'equazione è quella di convezione e diffusione:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} (\bar{C} + C')}_{\text{Termine convettivo}} + (\bar{U} + U') \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} (\bar{C} + C')}_{\text{Termine diffusivo}} = D \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\bar{C} + C') + \frac{\partial^2 C'}{\partial y^2} \right]$$

Scegliamo un sistema di riferimento mobile del tipo:

$$\begin{cases} \xi = x - \bar{U}t \\ \tau = t \end{cases}$$

in modo da far scomparire il termine convettivo  $\bar{U}$ . L'equazione in  $\xi, \tau$  diventa:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\bar{C} + C') + U' \frac{\partial}{\partial \xi} (\bar{C} + C') = D \frac{\partial^2 C'}{\partial y^2}$$

avendo trascurato il termine diffusivo in direzione  $x$ . Sviluppando i termini otteniamo:

$$\underbrace{\frac{\partial \bar{C}}{\partial \tau}}_{\uparrow} + \underbrace{\frac{\partial C'}{\partial \tau}}_{\uparrow} + \underbrace{U' \frac{\partial \bar{C}}{\partial \xi}}_{\uparrow} + \underbrace{U' \frac{\partial C'}{\partial \xi}}_{\uparrow} = D \frac{\partial^2 C'}{\partial y^2}$$

Attraverso una serie di ragionamenti, si può dimostrare che i 3 termini indicati con la freccia sono trascurabili rispetto agli altri due.

### Dimostrazione

Mediamo l'equazione sulla verticale attraverso l'operatore  $\frac{1}{h} \int_0^h$ . Otteniamo:

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial \tau} + U' \frac{\partial \bar{C}}{\partial \xi} = 0$$

Sottraiamo membro a membro all'equazione di partenza quella appena trovata; si ricorre:

$$\frac{\partial C'}{\partial \tau} + U' \frac{\partial C'}{\partial \xi} + \underbrace{U' \frac{\partial C'}{\partial \xi}}_{\times} - \underbrace{U' \frac{\partial C'}{\partial \xi}}_{\times} = D \frac{\partial^2 C'}{\partial y^2}$$

Dopo che passa un tempo sufficiente, i due termini indicati con la croce tendono ad avere lo stesso ordine di grandezza, cioè le  $C'$  tendono ad assumere valori piccoli (il processo si uniforma) e che si faccia o meno la media sulla verticale, non cambia molto:

$$U' \frac{\partial C'}{\partial \xi} - U' \frac{\partial C'}{\partial \xi} \approx 0$$

Inoltre, e man mano che passa il tempo, i gradienti tendono a smorzarsi e tutto nel tempo va sempre più lentamente:

$$\frac{\partial C'}{\partial \tau} \approx 0$$

Quindi, sopravvivono solo  $U' \frac{\partial C'}{\partial \xi}$  e  $D \frac{\partial^2 C'}{\partial y^2}$ .

c.v.d.

Esempio



Consideriamo un condotto circolare percorso da moto laminare. Il profilo di velocità è un paraboloide. Si ottiene:  

$$K = \frac{v_{max}^2 \cdot R^2}{192 \cdot D}$$

Prendiamo solo in conto e consideriamo i seguenti dati:

$D = 10 \frac{cm^2}{s}$ ,  $v_{max} = 1 \frac{cm}{s}$ ,  $R = 2mm$   $\rightarrow$   $K = 20 \frac{cm^2}{s}$

Assumiamo inegueristicamente

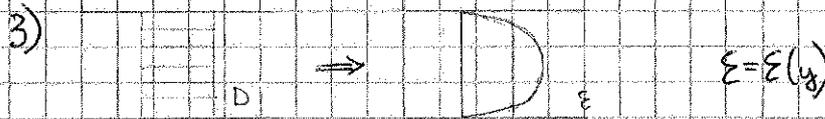
$t > 0.4 \frac{v}{D} \rightarrow t > 1500s$

In 1500 s lo portello ha percorso 400 volte il diametro.

Moto turbolento, caso 2D

Le differenze rispetto al caso di moto laminare sono le seguenti:

- 1) Il profilo è di moto turbolento, quindi si ha  $v = v(y)$  di moto turbolento, che è sicuramente meno pronunciato di quello laminare. Segue che i gradienti di velocità sono piccoli rispetto al moto laminare e la dispersione tende ad essere meno efficace.
- 2) La diffusione turbolenta sopprime di gran lunga quella molecolare, quindi  $D \rightarrow \epsilon$ . Inoltre,  $\epsilon \gg D$ , quindi la dispersione tende ad essere meno efficace.



L'equazione finale ha la stessa struttura di quella ricavata in caso di moto laminare, tenendo semplicemente in considerazione le differenze appena esposte.

L'equazione della dispersione per shear turbolento è:

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \bar{v} \frac{\partial \epsilon}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( K \frac{\partial \epsilon}{\partial x} \right)$$

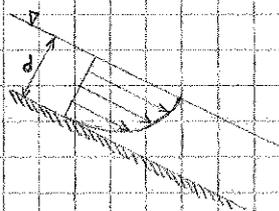
dove

$$K = -\frac{1}{h} \int_0^h \bar{v}' \int_0^y \frac{1}{\epsilon(y)} \int_0^y \bar{v}' dy dy dx$$

Esempio: Condotto circolare di raggio R:

$K = 10.1 \cdot R \cdot v_*$

Esempio:



Corrente in piano inclinato:

$K = 5.93 \cdot d \cdot v_*$  Elder

dove

$v_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$

$\tau_0 = \gamma \cdot R \cdot i$ , con R raggio idraulico.

Il motore, invece, che ha le dimensioni di una velocità, può essere espressa per  $U_*$ :

$$U_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$$

Infatti,  $U_*$  contiene l'informazione di  $\tau_0$ , che a suo volta esprime l'energia che va in turbolenza. Per un fiume si ha:

$$\tau_0 = \gamma R i$$

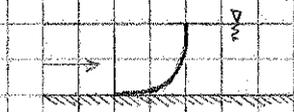
dove  $R$  è il raggio idraulico, con  $R \approx d$  e  $i$  è la pendenza motrice. In definitiva otteniamo:

$$E = a \cdot d \cdot U_*$$

dove  $a$  è un coefficiente che permetterà di particolareizzare gli  $E$  trasversali e quello longitudinale.

### E verticale $E_v$

$E_v$  esprime l'efficacia della turbolenza nello spostare le particelle lungo la verticale. Per determinare l'espressione di  $E_v$  si usa l'analogia di Reynolds.

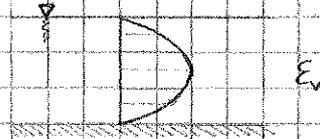


La turbolenza è un moltiplicatore della quantità di moto, quindi determina delle omogeneizzazioni, che conducono ad ottenere un certo profilo di velocità.

Ragionando a ritroso, conoscendo il profilo logaritmico della velocità, si può risalire all' $E_v$  che l'ha generato.

Si ottiene:

$$E_v = K d U_* \left( \frac{z}{d} \right) \cdot \left[ 1 - \left( \frac{z}{d} \right) \right]$$



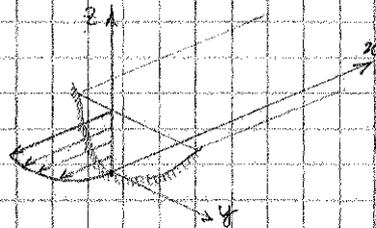
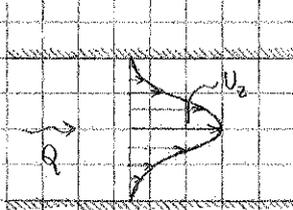
dove  $z$  è la coordinata verticale, mentre  $K \approx 0.4$

Per molti problemi è sufficiente considerare un valore medio sulla verticale:

$$\bar{E}_v = 0.067 d U_*$$

### E trasversale $E_T$

Nel caso di  $E_T$  non abbiamo più un profilo di velocità o un riferimento e quindi non possiamo usare l'analogia di Reynolds. Vediamo perché.

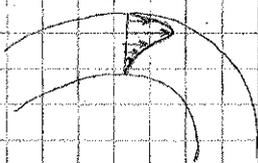


$$U = U(y, z)$$

Per ogni verticale possiamo ricavare il valore di velocità media sulla verticale  $U_2$

Il profilo trasversale della velocità media sulla verticale è:

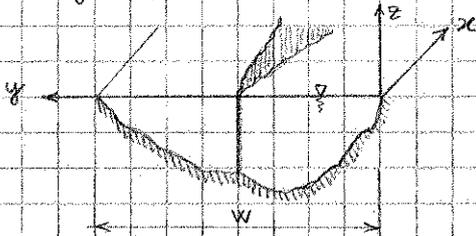
$$U_2 = \frac{1}{d} \int_0^d U(z, y) dy$$



Il problema è che questo profilo non è noto, in quanto dipende moltissimo da punto a punto. Ad esempio, in una curva ci aspettiamo che in media, sulla verticale, l'acqua sia più veloce sull'esterno.

Considerando poi che i fenomeni di dispersione per shear e diffusione turbolenta sono tra loro correlati e confrontando gli ordini di grandezza di  $K$  ed  $\epsilon_t$  (il quale, come detto, ha lo stesso ordine di grandezza di  $\epsilon_v$ ), possiamo trascurare  $\epsilon_t$ .

Voluti gli  $\epsilon$ , possiamo analizzare i meccanismi che regolano la fase (B).



Supponiamo che si sia esaurita la fase (A): ormai la sostanza recede tutta la verticale. Ci chiediamo come il pennacchio va allargandosi. La scala temporale della fase (A) è talmente piccola rispetto a quella della fase (B) che possiamo immaginare di avere una sorgente lineare

con concentrazione uniforme. Giustificiamo questa assunzione, dimostrando come la fase (A) si esaurisca in tempi molto rapidi rispetto alla fase (B), ossia dimostrando che il mescolamento verticale è molto più rapido di quello trasversale. In primo luogo, notiamo che nei fiumi:

$$W \gg d$$

Si definisce il rapporto  $\beta = \frac{W/2}{d}$  che è dell'ordine delle decine o centinaia

la scala temporale tipica  $\tau_v$  che impiega la sostanza a mescolarsi sulla verticale è

$$\tau_v \approx \frac{d^2}{\epsilon_v}$$

la scala temporale tipica  $\tau_T$  del mescolamento trasversale è

$$\tau_T \approx \frac{W^2}{\epsilon_T}$$

Facendo il rapporto tra  $\tau_T$  e  $\tau_v$  si ottiene:

$$\frac{\tau_T}{\tau_v} = \frac{W^2}{\epsilon_T} \cdot \frac{\epsilon_v}{d^2} = \left(\frac{W}{d}\right)^2 \cdot \left(\frac{\epsilon_v}{\epsilon_T}\right) \approx 10^3 \cdot 10^{-1} \approx 10^2 \quad \text{c/vd}$$

Giustificate l'assunzione di portanza, consideriamo la prima fase di allargamento del pennacchio, per una larghezza molto minore di  $w$ . Su ogni sezione  $z = \text{cost}$  abbiamo una sorgente puntiforme investita da una corrente; questo problema lo avremo già affrontato e creveremo ricorrendo:

$$C(x, y) = \frac{\dot{M}}{U \sqrt{4\pi D x}} \cdot e^{-\frac{y^2 U}{4 D x}}$$

A questa relazione bisogna, però, apportare alcune modifiche:

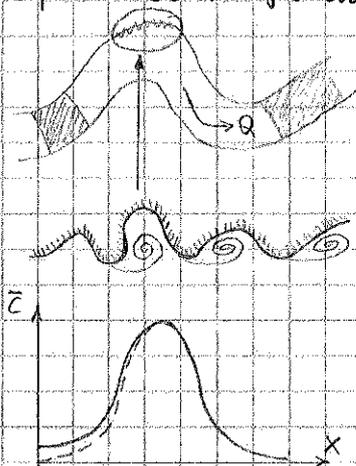
- In questo caso non si ha  $D$ , ma  $\epsilon_T$
- $\dot{M}$  è la portata in massa che entra nel punto. Nel nostro caso, però, questa  $\dot{M}$  si è distribuita su tutta la verticale, quindi il vero flusso di massa è  $\dot{M}/d$ .
- Questa espressione va bene per le prime fasi, ma prima o poi le onde si sentono e il pennacchio diventa largo  $w$ ; questo problema si risolve applicando il metodo delle immagini.

Si fa poi ricorso ai seguenti gruppi adimensionali:

$$C_0 = \frac{\dot{M}}{U d w}, \quad X' = \frac{x \epsilon_T}{U w^2}, \quad Y' = \frac{y}{w}$$

dove  $\bar{U} = \frac{Q}{A}$  è la velocità media nel fiume.

## 2) Effetto delle zone morte. la presenza di irregolarità, vegetazione e zone permeabili influenze $K$ .



la presenza di irregolarità determina la formazione di zone di ricircolo.

Le sponde continuamente trattengono pacchetti di sostanza, per poco alla volta le rilasciano.

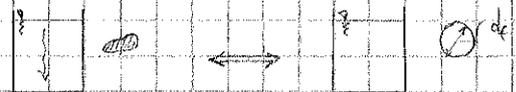
Il risultato è che la curva di concentrazione nello spazio non sarà una gaussiana simmetrica, ma avrà una coda più lunga verso monte.

Lo stesso effetto è determinato da vegetazione e permeabilità. In particolare, per quanto riguarda quest'ultima, qualunque discontinuità morfologica nell'ambito di un fiume genera gradienti di pressione, che a loro volta determinano flussi di filtrazione (zone iporreiche).

Le particelle hanno forme che talvolta ricordano le sfere, ma talvolta no. Si definiscono:

1) Diámetro di sedimentazione  $d_s$ .

È il diámetro di quella particella sferica, con stesso densità, che dà luogo allo stesso velocità di sedimentazione in acqua.



2) Diámetro del setaccio  $d_s$ . I setacci hanno fori circolari e  $d_s$  è l'ultimo diámetro che viene attraversato dalla particella considerata.

3) Diámetro nominale  $d_v$ . È il diámetro delle sfere che ha lo stesso volume della particella.

Spendiamo due parole sulle velocità di sedimentazione e vediamo perché si raggiunge una velocità di equilibrio.

La forza di resistenza  $F$  offerta da un corpo che si muove all'interno di un fluido è:

$$F = \frac{1}{2} \rho C_R A w_s^2$$

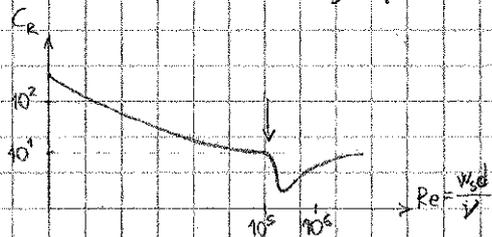
dove  $\rho$  è la densità del fluido,  $A$  è l'area frontale,  $w_s$  è la velocità e  $C_R$  è un coefficiente che tiene conto della geometria del corpo. La forma di gravità, invece, è:

$$F' = \frac{\pi}{6} d^3 (\rho_s - \rho) \quad (\text{per particella sferica})$$

Quando la velocità raggiunge un valore costante, le due forze si equilibrano:

$$F = F' \Rightarrow w_s = \sqrt{\frac{4}{3 C_R} \frac{\rho_s - \rho}{\rho} g d}$$

Notiamo che la velocità  $w_s$  dipende da  $\sqrt{d}$ .



Il coefficiente  $C_R$  dipende, anche per una particella sferica, dal numero di Reynolds, costruito come:

$$Re = \frac{w_s d}{\nu}$$

Il corpo che si muove. Nel punto indicato dalla freccia si ha una transizione brusca in cui la scia assume un'altra forma.

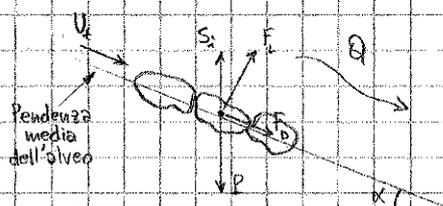
Dietro  $C_R$  c'è la struttura dello strato limite creato dietro

Ci occuperemo di una serie di aspetti legati al trasporto solido al fondo, per poi descrivere brevemente il trasporto solido in sospensione.

## CRITERI DI INCIPIENTE MOVIMENTO

Seguiremo degli approcci empirici, in cui ciascuna formula è pensata per certi tipi di fiumi. Ci sono due tipi di approccio. C'è chi fornisce valori di velocità critica  $V_{cr}$  al di sopra della quale inizia il fenomeno del trasporto. Altri hanno ragionato sulla tensione tangenziale critica  $\tau_{ocr}$ .

Si parte dal seguente modello:



Il fondo è lambito da una certa velocità, detta velocità sul fondo  $U_f$ , che però non è ben definibile.  $P$  è la forza peso,  $S$  è la spinta di Archimede,  $F_D$  è la spinta dovuta al fluido che sta scorrendo sopra, mentre  $F_L$  è la forza di portanza: un corpo, quando è investito da una corrente, e meno che non sia simmetrico, subisce sempre una spinta verso il basso o verso l'alto.

## Tabella di Fortier e Scobey

Materiale	$U_{cr}$ [m/s]		
	Corrente pulita	Presenza di materiale collidale	Presenza di materiale in sospensione
Sabbie fine	0.45	0.75	0.45
...	...	...	...

valori vanno ridotti del 25%.

I risultati della tabella vanno bene per profondità delle corrente  $Y$  tali che

$$Y \leq 1 \text{ m}$$

Per profondità maggiori, tutti i valori vanno incrementati di 0.15 m/s.

In presenza di curve significative, invece, i

## Formula di Kennedy

$$U_{cr} = 0.55 \cdot Y^{0.64} \quad \text{dove } [Y] = \text{m} \text{ e } [U_{cr}] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Il secondo approccio a cui abbiamo accennato è quello di considerare la tensione tangenziale al fondo, per evitare la questione della velocità. In generale:

$$\tau_0 = \rho g R_i \quad \text{e per sezione rettangolare larga } \tau_0 = \rho g Y_i$$

Dato che:

$$U_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = \sqrt{g R_i} = \sqrt{g Y_i}$$

e considerando che:

$$U_f^2 \propto U_*^2$$

si pone:

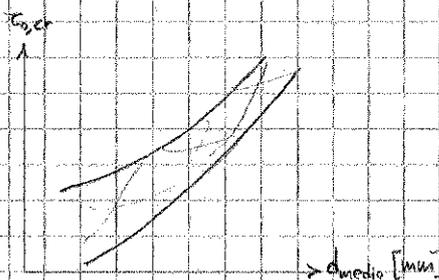
$$\tau_0 = K_s \rho U_f^2 \quad \text{dove } K_s \text{ è un coefficiente}$$

Questa espressione fa da ponte fra i due approcci. Anche in questo caso, ci sono diverse formule sperimentali.

## Formula di Schokitsch

$$\frac{\tau_{0,cr}}{(\rho_s - \rho) g d} = A'' \begin{cases} = 0.076 & \text{se } d > 6 \text{ mm} \\ = 0.000285 \cdot d^{2/3} & \text{se } 0.1 \text{ mm} < d < 3 \text{ mm} \end{cases}$$

## $\tau_{0,cr}$ secondo diversi autori



In questo diagramma in scala logaritmica è riportato il confronto fra varie formule. È da notare che le curve si distribuiscono all'interno di una fascia.

Nello condizione di moto incipiente:

$$T = R$$

da cui si ricava:

$$\frac{\tau_{0,cr}}{(\rho_s - \rho)d \cos \alpha} = \frac{K(tg \varphi - tg \alpha)}{r^{II} \left( \frac{Y}{d}, \frac{U_* d}{\nu}, \psi \right) + r^{III} \left( \frac{Y}{d}, \frac{U_* d}{\nu}, \psi \right) \cdot tg \varphi}$$

A questo punto facciamo alcune ipotesi.

Le pendenze dei fiumi di cui ci occupiamo sono molto basse:  $\alpha \approx 0$

Facendo degli esperimenti, si evince che il ruolo di  $\psi$  e  $\varphi$  conta poco (coesione trascurabile).

Segue che:

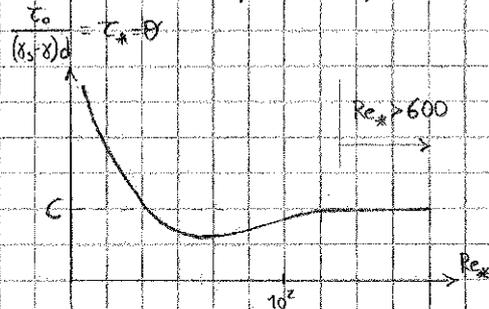
$$\frac{\tau_{0,cr}}{(\rho_s - \rho)d} = f \left( \frac{U_* d}{\nu}, \frac{Y}{d} \right)$$

Nei casi pratici, la sommersione  $\frac{Y}{d}$  è sempre molto grande, talmente grande che una sua variazione non incide più sul problema, cioè il fenomeno è autosimile nella sommersione.

Quindi si ha:

$$\frac{\tau_{0,cr}}{(\rho_s - \rho)d} = f \left( \frac{U_* d}{\nu} \right)$$

Da una serie di esperimenti, Shields ha ricavato il seguente diagramma:



Per  $Re_*$  bassi,  $C_*$  decresce quasi linearmente.

Per  $Re_*$  alti, si perde la dipendenza e  $C_*$  è costante.

Secondo Shields,  $C \approx 0,06$ .

Secondo Zeller,  $C \approx 0,047$ .

Nel tempo sono state fatte diverse estensioni alla teoria di Shields.

### Formula di Brownlie

Se come sia  $C_*$  che  $Re_*$  dipendono da  $U_*$ , si è pensato di eliminare la dipendenza di  $Re_*$  da  $U_*$  per permettere una più facile risoluzione del problema.

È stato introdotto a tal fine la seguente quantità:

$$Re_*^2 \cdot \Theta^{-1} = \frac{\rho_s \cdot \Delta \cdot d^3}{\nu^2} \quad \text{dove } \Delta = \frac{\rho_s \cdot S}{\rho}$$

Si diagramma quindi  $\Theta$  in funzione di  $Re_*^2 \cdot \Theta^{-1}$  introducendo il diametro di attrito  $D_*$ :

$$D_* = d \sqrt[3]{\frac{\rho_s \Delta}{\nu^2}}$$

L'espressione matematica della formula di Brownlie è

$$\Theta_c = 0,22 \cdot D_*^{-1} + 0,06 \cdot e^{-17,77 D_*^1}$$

Allora si può scrivere:

$$q_s = \alpha \tau_0 (\tau_0 - \tau_{cr})$$

### Formula di Shields

$$\frac{q_s \rho_s}{\rho g d} = 10 \frac{\tau_0 - \tau_{cr}}{(\rho_s - \rho) g d}$$

dove  $q$  è la portata liquida per unità di larghezza e  $i$  è la pendenza motrice.

### Formula di Scholitsch

Per granulometria uniforme

$$q_s = K_s'' \cdot i'' \cdot (q - q_{cr})$$

dove:

- $K_s'' = \frac{2500}{\rho_s}$

- $\eta = \frac{3}{2}$

- $q$  è la portata liquida

- $q_{cr}$  è la portata liquida cui corrisponde  $\tau_{cr}$  e può essere calcolata mediante la relazione:

$$q_{cr} = 0.26 \cdot \left( \frac{\rho_s - \rho}{\rho} \right)^{5/3} \cdot \frac{d_{40}^{3/2}}{i^{1/6}}$$

dove  $d_{40}$  è il diametro per il quale c'è almeno il 40% di sabbia in peso. Valida per

$$d_{40} > 0.006 \text{ m}$$

### Formula di Meyer-Peter e Müller

$$\frac{R \cdot i'}{d_s} - 0.047 \frac{\rho_s - \rho}{\rho} = 0.25 \frac{\rho_s^{2/3}}{d_s^{1/3} \sqrt{\rho_s^2}}$$

$d_s$  è il diametro del solido; se il diametro non è esattamente uniforme, si sostituisce con  $d_{50}$ .  
 $q_s$  è la portata solida in massa.

$i$  è legato alla dissipazione. Ciò che conta ai fini del trasporto solido non è  $i$ , ma solo la sua quota parte legata ai granelli.  
 Quindi:

$i'$ : dovuta alle particelle; quota che si avrebbe anche se pianissimo il fondo.  
 $i''$ : dovuta alle forme di fondo.

Per ricavare  $i'$  si può ricorrere alla seguente relazione:

$$\frac{i'}{i} = \left( \frac{K_s'}{K_s} \right)^{3/2}$$

dove  $K_s'$  è il parametro delle resistenze (ricordiamo che all'aumentare della sabbia,  $K_s$  diminuisce).

Si può allora scrivere:

$$\bar{U}_s = \int_{U_{cr}}^{\infty} (U - U_{cr}) \cdot p(U) dU$$

Strazione:

$$\frac{q_s}{U_* d} = f\left(\frac{z_{ocr}}{z_0}\right)$$

che funziona bene finché  $\frac{q_s}{U_* d} < 1$

Esplicitando l'espressione matematica di  $f$ , si giunge alla formula di Kalinske-Pezzoli:

$$\frac{q_s}{U_* d} = 1,5 \left(\frac{z_{ocr}}{z_0}\right)^{1/6} \cdot \left(\sqrt{\frac{z_0}{z_{ocr}}} - 1\right)^{5/3}$$

valida anche per  $\frac{q_s}{U_* d} > 1$ .

### Formula di Einstein

Si definiscono, per primo caso, due parametri adimensionali:

$$\phi = \frac{q_s}{\sqrt{g \Delta d^3} d} \quad \text{Parametro adimensionale che contiene } q_s$$

$$\psi = \frac{S - S_c}{S} \cdot \frac{g d}{U_*^2} = \frac{1}{\theta}$$

Einstein trova una relazione tra  $\phi$  e  $\psi$ :

$$\frac{A\phi}{1+A\phi} = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{-B\psi-2}^{B\psi-2} e^{-z^2} dz$$

dove  $A = 43,5$  e  $B = \frac{1}{7}$

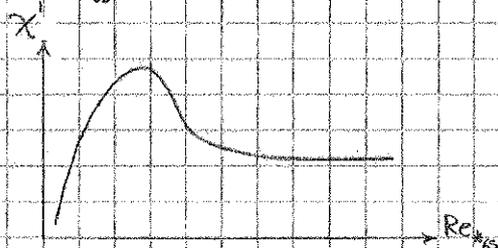
$U_*'$  è la quota parte di  $U_*$  dovuta alle sole particelle e non alle forme di fondo. Si ha:

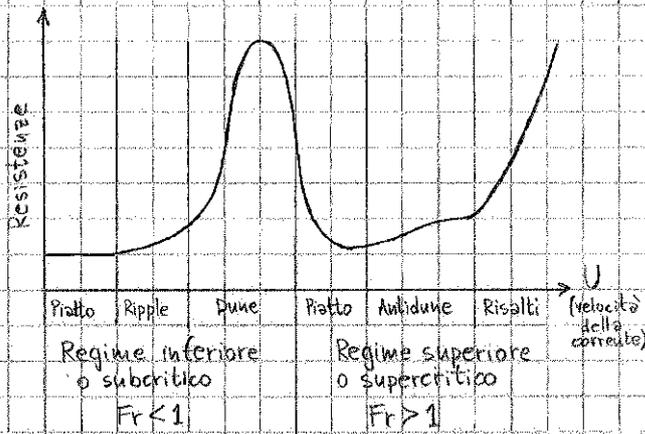
$$\frac{U_*'}{U_*} = 5,75 \cdot \log_{10} \left( 12,27 \cdot \frac{R}{d_{GS}} \cdot \chi' \right)$$

dove:

$$\chi' = 1 + 0,921 \cdot e^{-0,027 \cdot Re_{*GS}^{1,275}} \cdot \ln(0,3078 \cdot Re_{*GS})$$

e  $Re_{*GS}$  è il valore di  $Re_*$  calcolato con  $d = d_{GS}$ .





Fr è il numero di Froude, cioè

$$Fr = \frac{U}{\sqrt{gY}}$$

Nei fiumi ci aspettiamo le dune ( $Fr < 1$ ).

Le dune comportano forte incremento delle resistenze, perché ci alterna di allargamenti e restringimenti e, soprattutto nei restringimenti, si dissipa molto; inoltre, nelle zone di divergenza si formano distacchi di vena, che sottraggono energia al moto medio.

Le ripple si formano solo quando il diametro dei sedimenti è:

$$d < 0.5 \div 0.6 \text{ mm}$$

in quanto le ripple nascono per l'instabilità del sottotrato viscoso e, quindi, ci vogliono particelle particolarmente fini per interagire con il sottotrato viscoso.

Per quanto riguarda le dimensioni delle ripple, la lunghezza d'onda è  $\lambda = 5 \div 50 \text{ cm}$ , mentre l'altezza è  $h = 0.5 \div 5 \text{ cm}$ .

Per le dune,  $\lambda = 50 \text{ cm} \div \text{metri}$  e  $h = 10^1 \div 10^2 \text{ dm}$ .

Le anticdune hanno sostanzialmente le stesse dimensioni delle dune.

### Criteri previsionali

Esiste una serie di diagrammi, ciascuno suddiviso in campi, per risalire alla forma di fondo che ci aspettiamo di ritrovare in una certa situazione.

#### Diagramma di Garde e Albertson

Riconoscere dati di laboratorio, in ascissa ha  $Fr = \frac{U}{\sqrt{gY}}$  e in ordinata  $T_* = \frac{\tau_0}{(\gamma_s - \gamma)d}$

#### Diagramma di Simons e Richardson

Esistono bene per fiumi creanti profondità  $Y \leq 1.5 \text{ m}$ .

In ascissa ha  $d$  in mm e in ordinata  $\tau_0 \cdot U$

#### Diagramma di Chabert e Chauvin

In ascissa riporta la quantità  $\frac{d\sqrt{gRi}}{U}$  e in ordinata  $\tau_*$

#### Diagramma di Bogardi

In ascissa riporta  $d_s$  in cm e in ordinata  $\frac{gd_s}{U_*^2}$

Facciamo l'ipotesi che le particelle solide si muovano come si muoverebbero le particelle di fluido nella stessa posizione:

$$\tilde{U}_{i,s} = \tilde{U}_i$$

Uniamo poi la decomposizione di Reynolds:

$$\tilde{U}_i = U_i + u_i, \quad \tilde{C} = C + c$$

Puntiamo a scrivere l'equazione della concentrazione media; otteniamo:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial U_x C}{\partial x} + \frac{\partial \langle u_x c \rangle}{\partial x} + \frac{\partial U_y C}{\partial y} - \frac{\partial W_z C}{\partial y} + \frac{\partial \langle u_y c \rangle}{\partial y} + \frac{\partial U_z C}{\partial z} + \frac{\partial \langle u_z c \rangle}{\partial z} = 0$$

Notiamo che nell'equazione sono presenti termini lineari e termini non lineari, i quali sono legati alle cross-correlazioni tra oscillazioni di velocità e di concentrazione.

Dato che studiamo una corrente, c'è un moto medio che va nella sola direzione x, per cui:



$$U_y = 0, \quad U_z = 0$$

Supponiamo poi che il moto sia un moto piano sul piano x, y, cioè consideriamo una corrente indefinitamente estesa lungo z, in modo da non sentire dell'effetto dei bordi; in questa condizione, i gradienti lungo z sono nulli:

$$\frac{\partial}{\partial z} = 0$$

L'equazione allora diventa:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial U_x C}{\partial x} - \frac{\partial W_z C}{\partial y} = - \frac{\partial \langle u_x c \rangle}{\partial x} - \frac{\partial \langle u_y c \rangle}{\partial y}$$

①                      ②                      ③

Il termine ① è quello di inerzia temporale; il termine ② è quello convettivo lungo x e y dovuto alle velocità medie lungo x e alle velocità medie di caduta lungo y; il termine ③ è quello dovuto al trasporto turbolento.

Lungo x agiscono 2 processi: moto convettivo e moto diffusivo turbolento; supponiamo che:

$$\frac{\partial U_x C}{\partial x} \gg \frac{\partial \langle u_x c \rangle}{\partial x}$$

L'equazione allora diventa:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial U_x C}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} [W_z C - \langle u_y c \rangle]$$

Ma vogliamo ricavare  $C = C(t, x, y)$  noti  $U_x$  e  $W_z$ , però c'è il problema di  $\langle u_y c \rangle$ , dovuto alla turbolenza. Ricordiamo quindi nel problema di chiusura della turbolenza: dovremmo aggiungere altre equazioni del tipo:

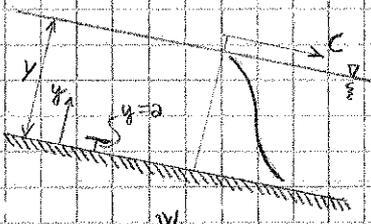
$$\frac{\partial \langle u_y c \rangle}{\partial t} = F(C, U_x, \langle u_y c \rangle^2)$$

e il problema non si chiuderebbe.

Allora utilizziamo un modello di chiusura che legghi le cross-correlazioni a grandezze note, ammettendo un certo errore.

Inserendo questa espressione nell'equazione e integrando si ottiene:

$$\frac{C}{C_a} = \left( \frac{y-y_0}{y} \cdot \frac{a}{y-a} \right)^{\frac{W_s}{K U_*}}$$



$C_a$  è la condizione al contorno, cioè è la concentrazione che c'è in  $y=a$ .

$a$  rappresenta la soglia: per  $y > a$  si ha trasporto solido in sospensione, per  $y < a$  si ha trasporto solido al fondo.

$\beta$  è ricomparsa, perché si pone  $\beta=1$  per concentrazioni molto basse.

Per quanto riguarda l'esponente, talvolta come notazione

si pone  $Z = \frac{W_s}{K U_*}$

• Dagli esperimenti:

$$a \approx 2d$$

$$C_a = \frac{1}{11.6} \cdot \frac{q_s}{a U_*}$$

dove  $d$  è il diametro caratteristico delle particelle sul fondo, mentre  $q_s$  è la portata solida al fondo.

• Secondo Van Rijn:

$$a = 0.015 \cdot Y$$

$$C_a = 0.015 \cdot \frac{d_{50}}{a} \left( \frac{\theta' - \theta_{cr}}{\theta_{cr}} \right)^{1.5} \cdot D_*^{-0.3}$$

dove  $\theta_{cr} = (\theta_{cr})_{ss}$  è il  $\theta_{cr}$  legato al trasporto solido in sospensione ed è diagrammato,  $\theta'$  è il parametro di Shields che considera solo i grani, cioè depurato delle forme di fondo e

$$D_* = d_{50} \left( \frac{\Delta \rho}{\rho} \right)^{1/3}$$

la portata solida in sospensione per unità di lunghezza  $q_{ss}$  è:

$$q_{ss} = \int_a^y C(y) \cdot U_x(y) dy$$

Risolviendo l'integrale numericamente, Van Rijn ha ricavato:

$$q_{ss} = F \cdot U \cdot Y \cdot C_a$$

dove:

•  $U = \frac{Q}{A}$  Velocità media su tutta la sezione

$$F = \frac{\left( \frac{a}{y} \right)^{1.5} - \left( \frac{a}{y} \right)^{1.2}}{\left( 1 - \frac{a}{y} \right)^{0.5} \cdot (1.2 - 2)} \cdot \phi_a$$

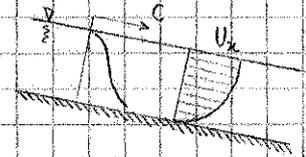
essendo:

$$z' = \frac{W_s}{K \cdot U_*} + 2.5 \left( \frac{W_s}{U_*} \right)^{0.8} \cdot \left( \frac{C_a}{C_n} \right)^{0.4}$$

$$\phi_a = \begin{cases} 1 & \text{per } C_a < 0.001 \end{cases}$$

$$1.05 + \left( \frac{C_a}{C_n} \right)^{0.6} - 2 \left( \frac{C_a}{C_n} \right)^{0.3} \quad \text{per } 0.001 < C_a < 0.65$$

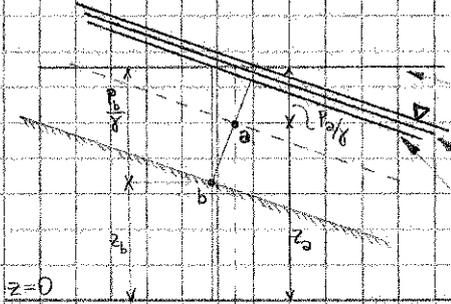
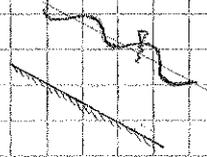
$$K \approx 0.4, \quad C_n \approx 0.65$$



4) Studiamo il caso di fosse pendente, ma minori o uguali a 1%. In questi ambiti le pendente sono effettivamente molto basse.

Due sono le ragioni per cui facciamo questa ipotesi:

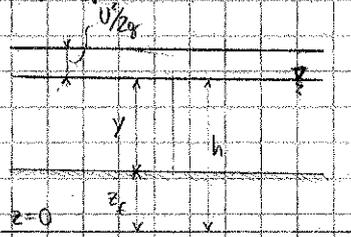
- Appena la pendenza cresce, non esiste neanche più il moto uniforme.
- Supponiamo che la pendenza sia elevata e che esista una condizione stabile di moto uniforme. Consideriamo una generica traiettoria e la linea dei carichi piezometrici corrispondente a tale traiettoria.



$$h = z + \frac{P}{g}$$

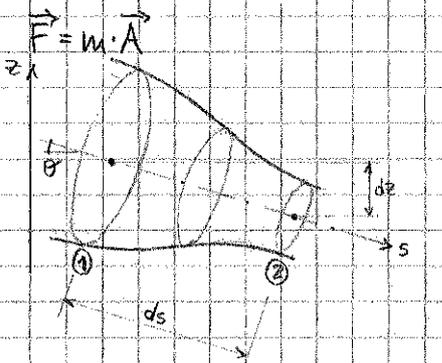
- Linea dei carichi idrostatici di tutti i punti che stanno sulla sezione.
- Linea dei carichi piezometrici di a.
- Linea dei carichi piezometrici di b.

Per ciascuna traiettoria, abbiamo una linea dei carichi piezometrici diverse e tutte queste linee stanno in una fascia, a formare un fascio improprio di rette. Quindi, abbiamo un'infinità di linee dei carichi piezometrici ed è scomodissimo trattarle.



Se la pendenza si riduce tantissimo, la fascia tende a schiacciarsi sulla superficie libera. Allora la sezione trasversale si confonde con la verticale e la linea dei carichi piezometrici coincide con la superficie libera, mentre la linea dei carichi totali sta al di sopra di questa di una quantità  $U^2/2g$ .

Sotto queste ipotesi, consideriamo un generico tratto di corrente lungo  $ds$  e cerchiamo di esplicitare l'equazione:



$$dm = \rho dV$$

$$A_s = \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial s}$$

dove  $\frac{\partial U}{\partial t}$  è l'accelerazione locale e  $U \frac{\partial U}{\partial s}$  è il termine convettivo.

- Forza peso lungo  $s$ :

$$F_p = \rho g \int \Omega ds \sin \theta =$$

$$= -\rho g \int \Omega ds \frac{\partial z}{\partial s}$$

dove  $\Omega$  è la sezione del tratto considerato e  $\frac{\partial z}{\partial s}$  è la variazione di quota spostandosi di  $ds$ .

Considerando una generica corrente, a noi interessa come variabile la profondità della corrente  $Y$  e non il corso totale. Allora poniamo:

$$H = h + \frac{U^2}{2g} = (z_f + Y) + \frac{U^2}{2g}$$

dove la seconda uguaglianza può essere scritta perché le pendenze sono bassissime. Otteniamo:

$$\left[ \frac{\partial Y}{\partial s} + \frac{U}{g} \frac{\partial U}{\partial s} + \frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t} = i_f - J \right]$$

dove:

$$i_f = -\frac{\partial z_f}{\partial s} \text{ è la pendenza del fondo}$$

L'equazione contiene due incognite,  $U$  e  $Y$ , quindi ne serve un'altra. Allora scriviamo l'equazione di continuità, che esprime la conservazione dei volumi d'acqua:

$$\frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{\partial Z}{\partial t} = 0$$

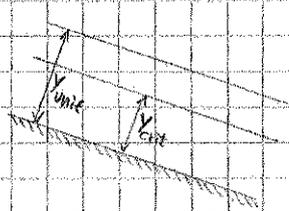
Avremo allora il sistema di equazioni di De Saint-Venant:

$$\begin{cases} \frac{\partial Y}{\partial s} + \frac{U}{g} \frac{\partial U}{\partial s} + \frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t} = i_f - J & \text{Equazione di conservazione della quantità di moto} \\ \frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{\partial Z}{\partial t} = 0 & \text{Equazione di continuità} \end{cases}$$

Commenti:

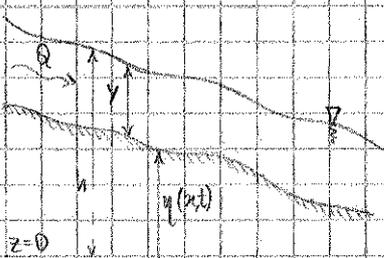
- Le equazioni sono non lineari ( $\frac{U}{g} \frac{\partial U}{\partial s}$ ), quindi non cercheremo soluzioni analitiche.
- Il modello di De Saint-Venant è il più semplice modello matematico di corrente.

De Saint-Venant  
 ↓ complessità  
 ↓ Navier-Stokes



la scelta del modello dipende dal tipo di problema. Vicino allo stato critico, il modello di De Saint-Venant non va bene.

In morfodinamica, bisogna aggiungere la coordinata  $x$  che esprime il valore locale di altezza del fondo, con  $y = y(x, t)$ :



$$h = Y + z_f = Y + y \implies$$

$$\frac{\partial h}{\partial s} = \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x}$$

L'equazione di continuità rimane sostanzialmente invariata, mentre quella di conservazione della quantità di moto subisce delle modifiche.

Prima equazione:  $\frac{\partial z_f}{\partial s} = -i_f$

Ora abbiamo:  $\frac{\partial y}{\partial x} = -i_f(x, t)$

Quindi la prima modifica si risolve nella seguente scrittura:

$$\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{U}{g} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t} = -J$$

si ottiene finalmente l'equazione di Exner:

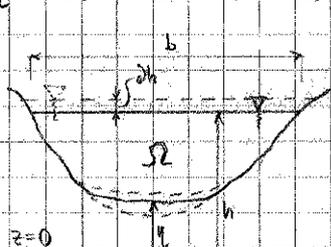
$$\frac{\partial Q_s}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} (1-p) b_f = 0$$

- Se  $\frac{\partial Q_s}{\partial x} > 0 \Rightarrow \frac{\partial h}{\partial t} < 0 \Rightarrow$  Erosione
- Se  $\frac{\partial Q_s}{\partial x} < 0 \Rightarrow \frac{\partial h}{\partial t} > 0 \Rightarrow$  Deposito

A questo punto possiamo scrivere le tre equazioni della morfodinamica monodimensionale:

$$\begin{cases} (1-p) b_f \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Q_s}{\partial x} = 0 & \text{Equazione di continuità per la fase solida} \\ \frac{\partial R}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 & \text{Equazione di continuità per la fase liquida} \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{R} \right) + g R \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{g Q^2}{R^2} R = 0 & \text{Equazione di conservazione della quantità di moto} \end{cases}$$

$\frac{\partial R}{\partial t}$  dà indicazione su come cambia la sezione del fiume nel tempo.



$R$  può cambiare per due ragioni:

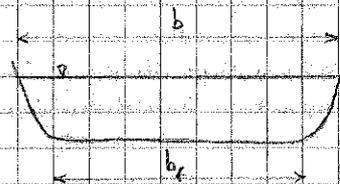
- Il livello si innalza.
- C'è erosione o deposito.

Matematicamente:

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial R}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t}$$

$\frac{\partial R}{\partial h}$  è il rapporto fra quanto cambia  $R$  e quanto cambia  $h$ , quindi in sostanza è la lunghezza della superficie libera:

$$\frac{\partial R}{\partial h} = b$$



Analogamente,  $\frac{\partial R}{\partial x}$  è la lunghezza del fondo  $b_f$ , con segno negativo.

Tenuto conto di ciò, l'equazione di continuità per la fase liquida diventa:

$$b \frac{\partial h}{\partial t} - b_f \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

Si introduce il parametro  $C$ :

$$C = \frac{x}{\sqrt{gR}} \Rightarrow C^2 = \frac{x^2}{gR}$$

L'equazione di conservazione della quantità di moto allora diventa:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{R} \right) + g R \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{g Q^2}{R^2} R = 0$$

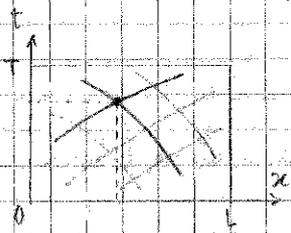
Per risolvere il sistema servono ancora le condizioni di chiusura del problema, cioè occorre scrivere la portata solida  $Q_s$  in funzione delle altre grandezze. Entrano allora in gioco le formule già viste per la portata solida, scritte nella forma:

$$Q_s = \sqrt{(s-1)} g d_s^3 \cdot f_f \cdot q_s(T_*, Re_*)$$

dove  $s = \frac{\rho_s}{\rho}$ , mentre  $q_s(T_*, Re_*)$  rappresenta il raggruppamento adimensionale  $\Phi$ , cioè:

# TEORIA DELLE CARATTERISTICHE DI RIEMANN

Riemann parte dall'osservazione dei modelli matematici costituiti da equazioni differenziali alle derivate parziali del I, II e III ordine. Generalmente questi modelli sono immaginati come riventi in un dominio di due variabili indipendenti:  $x$  e  $t$  e per tutti i punti del dominio ci sono delle equazioni che devono essere soddisfatte.



Riemann si accorge che, per una classe di modelli differenziali detti iperbolici, esiste una sorta di trame che interseca tutto il dominio: muovendosi su queste linee è possibile far degenerare il sistema alle derivate parziali in un sistema alle derivate ordinarie. Ciò che si può scrivere in questo modo è una combinazione delle variabili dipendenti  $\eta, h, \Omega$ .

Questa teoria è proprio che porta a risolvere un sistema di equazioni alle derivate ordinarie, purché ci si muova su tali linee.

I sistemi iperbolici sono caratterizzati anche dall'essere onde che si propagano. Riemann scopre che queste perturbazioni si propagano proprio lungo le linee caratteristiche, quindi questa teoria permette anche di capire come e dove le onde si stanno propagando.

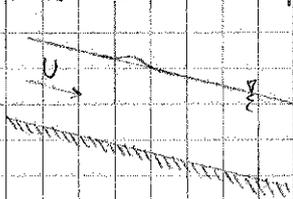
Applicando questa teoria al nostro sistema, scopriamo che tutte le soluzioni si oppongono a 3 onde. Le celerità di propagazione di queste onde sono:

$$C_{1,2} = U \pm \sqrt{gY}$$

$$C_3 = \frac{U}{1 - Fr^2} \left( \frac{\partial Q_s / \partial U}{Y} - \frac{\partial Q_s / \partial Y}{U} \right)$$

Le velocità sono reali e questo indice che il sistema è iperbolico.

Le prime due onde possono essere viste nello studio di come si propagano le piccole perturbazioni della superficie libera in un alveo a fondo fisso.



La velocità con cui si ripropaga questa perturbazione è  $\sqrt{gY}$  e si sposta in due direzioni, quindi  $\pm \sqrt{gY}$ .

Rispetto ad un osservatore fermo su una riva, le celerità con cui la perturbazione si propaga è:

- $U + \sqrt{gY}$  verso valle
- $U - \sqrt{gY}$  verso monte

Se  $U > \sqrt{gY} \Rightarrow \frac{U}{\sqrt{gY}} > 1 \Rightarrow Fr > 1$

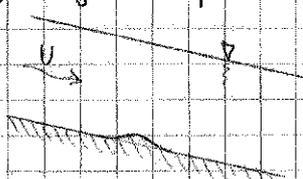
In questo caso,  $U - \sqrt{gY} > 0$ , quindi anche la seconda perturbazione si propaga verso valle.



Dunque, le correnti veloci ( $Fr > 1$ ) sono comandate da monte e, viceversa, le correnti lente sono comandate da valle.

In definitiva,  $C_{1,2} = U \pm \sqrt{gY}$  sono onde legate alla perturbazione della superficie libera e portano dentro di sé tutte le informazioni delle equazioni di De Saint-Venant.

$C_3$  è legata alle perturbazioni del fondo e si muove solo in una direzione.



Facendo i conti, si scopre che:

$$C_3 \ll C_{1,2}$$

Capito questo, in molti problemi possiamo trascurare  $\frac{\partial h}{\partial t}$  e  $\frac{\partial Q}{\partial t}$  perché possiamo supporre che l'acqua si adeguia istantaneamente alle perturbazioni del fondo.

ipotizziamo che  $T_* \gg T_{*,cr}$ , cioè di essere nel caso in cui il trasporto solido è molto importante.  
 Se ha:

$$q_s \propto T_*^{3/2}$$

Scriviamo:

$$T_* = \frac{Q^2}{s^2 c^2 (s-1)d} = \frac{Q^2}{s^2 c^2 c_1} \quad \text{avendo posto } c_1 = (s-1)d = \text{cost}$$

Otteniamo:

$$q_s \propto \left( \frac{Q^2}{s^2 c^2 c_1} \right)^{3/2} = \frac{Q^3}{s^3 c^3 c_1^{3/2}} = \frac{Q^3}{s^3 c^3 c_2} \quad \text{avendo posto } c_2 = c_1^{3/2} = \text{cost}$$

Introducendo:

$$C = \frac{X}{Nq} = \frac{cR}{Nq} = \frac{cY}{Nq}$$

abbiamo:

$$q_s \propto \frac{Q^3}{b^3 Y^3 c_2 Y^{1/2}} = \frac{Q^3}{b^3 Y^{7/2} c_2}$$

Applicando la condizione  $q_{s1} \cdot b_1 = q_{s2} \cdot b_2$  otteniamo:

$$\left( \frac{Y_1}{Y_2} \right)^{7/2} = \left( \frac{b_2}{b_1} \right)^2 \quad \text{Vincolo che deve essere soddisfatto per } Q_s = \text{cost}$$

L'altra condizione era  $Q = \text{cost}$ :

$$Q = s c X \sqrt{R \cdot i_c} = Y_1 b_1 c Y_1^{1/6} Y_1^{1/2} i_{c1}^{1/2} = b_1 c Y_1^{5/3} i_{c1}^{1/2} = b_2 c Y_2^{5/3} i_{c2}^{1/2}$$

da cui ricaviamo:

$$\left( \frac{Y_1}{Y_2} \right)^{5/3} = \left( \frac{b_2}{b_1} \right) \left( \frac{i_{c1}}{i_{c2}} \right)^{1/2} \quad \text{Vincolo che deve essere soddisfatto per } Q = \text{cost}$$

Mettendo insieme le due condizioni otteniamo:

$$\frac{i_{c2}}{i_{c1}} = \left( \frac{b_1}{b_2} \right)^{2/21}$$

Osservazioni

- $b_2 < b_1 \Rightarrow Y_2 > Y_1$  e  $i_{c2} > i_{c1}$

Se restringiamo l'alveo, questo reagisce erodendo e aumentando la pendenza.

- $b_2 > b_1 \Rightarrow Y_2 < Y_1$  e  $i_{c2} < i_{c1}$

Se allarghiamo l'alveo, questo reagisce depositando e riducendo la pendenza.

# DINAMICA DEI LAGHI

In inverno il lago si presenta praticamente con la stessa temperatura nella verticale; anche la concentrazione è circa costante nella verticale. Quindi, il lago d'inverno è omogeneo. Ciò avviene perché, dato che fa freddo, gli strati superiori si raffreddano e si approfondano: i moti d'acqua continuamente miscelano la superficie.

Con il passare delle settimane, iniziano ad arrivare le piene, che tendono a correre sul fondo del lago, perché l'acqua delle piene è fredda. Tra l'altro, le piene aumentano il contenuto solido. Le notturne cominciano ad essere oscure, terminano le piene e inizia il forte irraggiamento. Ciò fa sì che si interrompa il meccanismo di miscelamento nella verticale; le notturne diventano praticamente orizzontali; il lago è fortemente stratificato e ciò si nota ancora di più dal contenuto di ossigeno, alto in superficie e basso sul fondo. Questa stratificazione può essere contrastata dai venti.

Con l'avvio dell'autunno, nel giro di alcune settimane, riprendono i meccanismi di miscelamento.

Visti questi aspetti, le caratteristiche tipiche di un lago sono:

- Il lago non è fermo.
- I moti sono rilevanti, ma dovuti a piccoli gradienti di temperatura e salinità.
- Ci sono oscillazioni nel tempo.

Dovremo ragionare con fluidi stratificati, per i quali la densità non è più costante ovunque:

$$\rho = \rho_0 + \rho_e(z) + \rho(x, z, t)$$

dove  $\rho_0$  è il valore medio tipico del fluido,  $\rho_e(z)$  è l'effetto della stratificazione e  $\rho(x, z, t)$  è l'effetto di cause perturbatrici esterne (ad esempio, il vento).

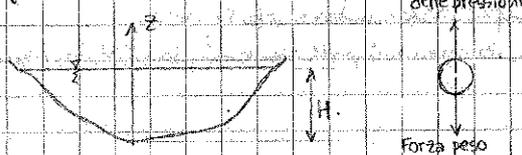
Si introduce un parametro  $\Sigma$  per descrivere quanto è accentuata la stratificazione:

$$\Sigma = -\frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_e}{dz}$$

Richiamiamo alcuni aspetti per un fluido omogeneo:

- $\rho = \rho_0 \Rightarrow \Sigma = 0$

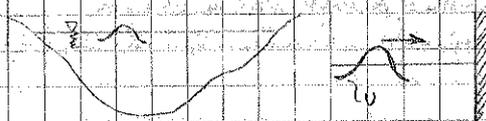
- $p(z) = \rho_0 g (H - z)$



soliamo una qualsiasi sferetta di fluido. Essa sta ferma perché la risultante delle pressioni bilancia la forza peso; ciò avviene perché il profilo di pressione è quello scritto sopra.

In questo caso, se spostiamo lentamente la particella, non compiamo lavoro.

• Effetto della superficie libera.



Se perturbiamo la superficie libera, si genera un'onda che si propaga. Quando tocca il contorno, la sua velocità deve annullarsi e la sua energia cinetica deve trasformarsi in qualcosa legato alla pressione. Allora attorno al contorno si crea una sovrappressione.

$$U \rightarrow \rho U^2$$

Questa sovrappressione fa sì che si verifichino innalzamenti o abbassamenti.

Chiediamo quando queste sovrappressioni sono significative; per capirlo, facciamo il rapporto fra la pressione legata alla causa perturbatrice e la pressione sul fondo:

$$\frac{\rho_0 U^2}{\rho_0 g H} \Rightarrow \frac{U}{\sqrt{gH}} = Fr$$

Se il numero di Froude è alto, le variazioni di pressione dovute alla causa perturbatrice sono significative.

Queste oscillazioni prima o poi si dissipano a causa degli attriti, che però sono poco efficienti, perché il fenomeno oncoso è poco dissipativo. Inoltre, la stratificazione è dovuta a gradienti di temperatura e salinità, che però tendono a muoversi per effetto della diffusione. La scala temporale tipica di dissipazione è:

$$\frac{H^2}{\nu}$$

La scala temporale tipica delle oscillazioni è, come già detto:

$$N^{-1}$$

Confrontando i quadrati di queste due, si costruisce il numero di Grashof  $Gr$ :

$$Gr = \frac{N^2 H^4}{\nu^2}$$

Se il numero di Grashof è alto, le oscillazioni dovute alla stratificazione vanno considerate; viceversa, se il numero di Grashof è basso, le oscillazioni dovute alla stratificazione non vanno considerate.

Un altro numero importante è il numero di Prandtl  $Pr$ , che tiene conto di quanto è efficace la diffusione negli smottamenti:

$$Pr = \frac{\nu}{K}$$

dove  $K$  è il termine di diffusione (termica o solina).  
Per il calore  $Pr \approx 7$ , per il sale  $Pr \approx 900$ .

Quando i laghi sono grandi, ci chiediamo se la rotazione della Terra non influenzi le oscillazioni.

La velocità angolare di rotazione è:

$$\Omega = \Omega_0 \sin \theta \quad \text{con } \theta = \text{latitudine}$$

Si ha:

$$\Omega = 0 \quad \text{all'equatore}$$

$$\Omega = \Omega_0 = 7.3 \cdot 10^{-5} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad \text{ai poli}$$

Si introduce il numero di Rossby  $Ro$ , che è dato dal rapporto fra la scala temporale legata alla rotazione del lago con senso, cioè  $\Omega^{-1}$  e la scala temporale tipica del problema, cioè  $L/U$ , dove  $L$  è la lunghezza tipica:

$$Ro = \frac{\Omega^{-1}}{L/U}$$

Se il numero di Rossby è alto, possiamo trascurare la rotazione terrestre. Viceversa, se il numero di Rossby è basso, dobbiamo considerare anche la rotazione terrestre.