NUMERO : 357

DATA : 24/09/2012

A P P U N T I

STUDENTE : Gotta

MATERIA : Fisica I

Prof. Barbero

FISICA 1

14-03-11

giovanni.barbero@polito.it

Telefono interno : 7356

L'esame scritto è costituito da due domande di teoria e da due esercizi presi dal libro.

INTRODUZIONE

Le grandezze si suddividono in:

- Grandezze non misurabili
- Grandezze misurabili. Sono quelle per cui si può dire quando una è uguale all'altra, o quando una è più grande dell'altra e per le quali si può prendere un'unità di misura. Ad esempio: lunghezza, tempo, volume, massa, area, forza. Sono le grandezze di cui si occupa la fisica.

Concetto di misura: Confronto tra la grandezza unità e la grandezza considerata. Un sistema fisico di misura parte da certe grandezze considerate fondamentali. Il sistema metrico decimale ha cinque grandezze fondamentali, per le quali si può definire la grandezza 1, cioè l'unità di misura:

Lunghezza	L	m	Grandezze meccaniche
Massa	M	Kg	
Tempo	T	s	
Corrente elettrica	I	A	Grandezza elettrica
Temperatura	t	°K	Grandezza termica

Tutte le altre grandezze sono derivate da queste.
Vedremo che il processo di misura è in genere complicato.

La fisica si suddivide in diversi campi:

- Cinematica: studia il moto dei corpi indipendentemente dalle cause che l'hanno generato.
- Dinamica: studia il moto dei corpi tenendo conto delle cause che l'hanno generato.
  - Del punto
  - Dei sistemi
  - Dei sistemi continui
  - Dei fluidi
- Gravitazione universale: studia il moto dei pianeti (in teoria fa parte della dinamica, ma è considerata a parte).
  - Massa
  - Carica
- Termodinamica: è una scienza assiomatica. Ha sviluppato la meccanica statistica, che dà previsioni in accordo con la scienza termodinamica.

Finora abbiamo considerato un problema diretto, cioè la legge oraria $x(t)$ è nota e si deve calcolare $v(t)=\frac{dx}{dt}$.
In genere, però, si ha il problema inverso, cioè si conosce la $v=v(t)$ e si deve calcolare $x=x(t)$.
In questo secondo caso si procede così:

data $v(t)=\frac{dx}{dt}$, considero questa equazione in x, cioè l'equazione differenziale $dx=v(t)dt \Longrightarrow$

$$\int dx=\int v(t)dt$$

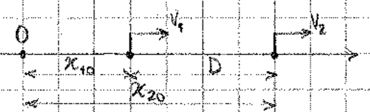
Per risolvere questo problema, cioè per calcolare la posizione in funzione del tempo, devono essere note le condizioni iniziali: $\begin{cases}\text{Per } t=t_0\\ x=x_0\end{cases}$

$$\int_{x_0}^{x} dx=\int_{t_0}^{t} v(t')dt' \Longrightarrow x(t)-x(t_0)=\int_{t_0}^{t} v(t')dt' \Longrightarrow \boxed{x(t)=x(t_0)+\int_{t_0}^{t} v(t')dt'}$$

Moto rettilineo uniforme (MRU): in questo tipo di moto la velocità non dipende dal tempo, cioè $v=\text{cost}$.

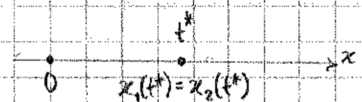
$$x(t)=x_0+v\int_{t_0}^{t} dt=x_0+v(t-t_0) \quad \text{con condizioni iniziali} \begin{cases}\text{Per } t=t_0\\ x=x_0\end{cases}$$

Esercizio: Due punti materiali si trovano nell'istante iniziale $t_0=0$ sullo stesso asse x rispettivamente nelle posizioni x_{10} e $x_{20}=x_{10}+D$. Il corpo 1 ha velocità v_1 e il corpo 2 ha velocità v_2, entrambe costanti. Sapendo che $v_1>v_2$, determinare dopo quanto tempo ea che distanza dall'origine il corpo 1 sorpassa il corpo 2.



Metodo 1

$x_1(t)=x_{10}+v_1t$



$x_2(t)=x_{20}+v_2t$

t^* = Tempo del sorpasso

$$\begin{cases}x_1(t^*)=x_{10}+v_1t^*\\ x_2(t^*)=x_{20}+v_2t^*\end{cases}$$

$$x_1(t^*)=x_2(t^*) \Longrightarrow x_{10}+v_1t^*=x_{20}+v_2t^* \Longrightarrow (v_1-v_2)t^*=x_{20}-x_{10} \Longrightarrow \underline{t^*=\frac{x_{20}-x_{10}}{v_1-v_2}}$$

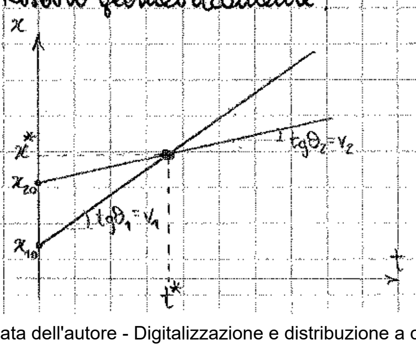
$$x_1(t^*)=x_{10}+v_1t^*=x_{10}+v_1\frac{x_{20}-x_{10}}{v_1-v_2}=\frac{\cancel{x_{10}v_1}-x_{10}v_2+v_1x_{20}-\cancel{v_1x_{10}}}{v_1-v_2}=\frac{v_1x_{20}-v_2x_{10}}{v_1-v_2}=$$

$$=\frac{v_1(x_{10}+D)-v_2x_{10}}{v_1-v_2}=\frac{v_1x_{10}+v_1D-v_2x_{10}}{v_1-v_2}=\frac{(v_1-v_2)x_{10}+v_1D}{v_1-v_2}$$

$$x_1(t^*)=x_2(t^*)=\underline{x_{10}+\frac{v_1}{v_1-v_2}D}$$

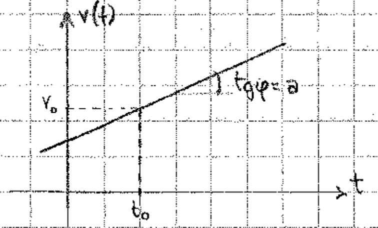
Metodo 2

Risolvo geometricamente:



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 5 di 258

$v(t) - v_0 = a(t-t_0)$



$$\boxed{v(t) = v_0 + a(t-t_0)}$$

$\frac{dx}{dt} = v_0 + a(t-t_0)$

$dx = [v_0 + a(t-t_0)]dt$

$$\int_{x_0}^{x(t)} dx = \int_{t_0}^{t} [v_0 + a(t'-t_0)]dt'$$

$$x(t) - x_0 = \int_{t_0}^{t} (v_0 - at_0 + at')dt' = \int_{t_0}^{t} (v_0 - at_0)dt' + \int_{t_0}^{t} at'dt' = (v_0 - at_0)(t-t_0) + \frac{1}{2}a(t^2 - t_0^2)$$

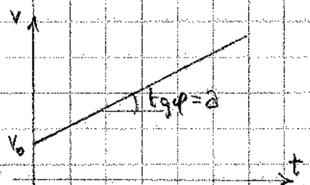
$$x(t) = x_0 + (v_0 - at_0)(t-t_0) + \frac{1}{2}a(t^2-t_0^2) = x_0 + v_0(t-t_0) - at_0(t-t_0) + \frac{1}{2}a(t^2-t_0^2) =$$

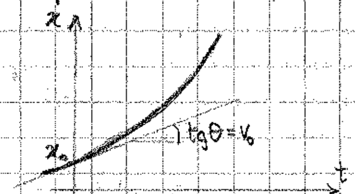
$$= x_0 + v_0(t-t_0) + \frac{1}{2}a(t^2 - t_0^2 - 2tt_0 + 2t_0^2) = x_0 + v_0(t-t_0) + \frac{1}{2}a(t^2 - 2tt_0 + t_0^2)$$

$$\boxed{x(t) = x_0 + v_0(t-t_0) + \frac{1}{2}a(t-t_0)^2}$$

Quando si fa un'osservazione, in genere si considera $t_0 = 0$. In questo caso le formule del MRUA diventano:

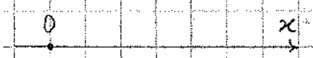
$$\begin{cases} v(t) = v_0 + at \\ x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \end{cases}$$





Se un corpo si muove di MRUA, la sua v cambia linearmente con il tempo, mentre la sua posizione varia quadraticamente con il tempo.

<u>Esercizio</u>: Un punto materiale parte dall'origine con velocità iniziale v_0 ed è sottoposto ad una accelerazione negativa costante. Calcolare la massima distanza dall'origine raggiunta dal punto lungo il semiasse positivo, l'istante t_1 in cui si ferma, l'istante t_2 in cui ripassa per l'origine e la velocità che ha per $t = t_2$.



Condizioni iniziali $\begin{cases} \text{Per } t = t_0 \\ x(0) = 0 \\ v(0) = 0 \end{cases}$

MRUA $\quad a = -|a| = cost$

$$\begin{cases} v(t) = v_0 - |a|t \\ x(t) = v_0 t - \frac{1}{2}|a|t^2 \end{cases}$$

t_1 è tale che $v(t_1) = 0$

$v(t_1) = v_0 - |a|t_1 = 0 \implies t_1 = \frac{v_0}{|a|}$

$x(t_1) = v_0 t_1 - \frac{1}{2}|a|t_1^2 = v_0 \frac{v_0}{|a|} - \frac{1}{2}|a|\frac{v_0^2}{|a|^2} = \frac{v_0^2}{|a|} - \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{|a|} = \frac{v_0^2}{2|a|}$

t_2 è tale che $x(t_2) = 0$

$x(t_2) = v_0 t_2 - \frac{1}{2}|a|t_2^2 = 0$

$x(t_2) = t_2(v_0 - \frac{1}{2}|a|t_2) = 0$ $\quad$ $t_2 = 0$ non interessa (è la condizione iniziale) ; $t_2 = \frac{2v_0}{|a|}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 7 di 258

$$\frac{dx}{dt} = v$$

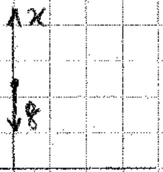
$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}Kt^2$$

$$dx = \frac{1}{2}Kt^2 dt$$

$$\int_0^x dx = \int_0^t \frac{1}{2}Kt'^2 dt'$$

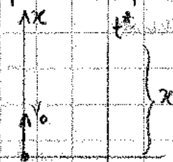
$$\underline{x(t) = \frac{1}{6}Kt^3}$$

Il MRUA è particolarmente importante poichè in prossimità della superficie terrestre (cioè per altezze molto minori rispetto al raggio terrestre) i corpi si muovono di MRUA, con accelerazione uguale a g, detta <u>accelerazione di gravità</u> ($g = 9{,}8\ m/s^2$)



$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \\ v(t) = v_0 - gt \end{cases}$$

<u>Esercizio:</u> Un corpo viene sparato da terra con una velocità v_0. A che altezza giunge? Dopo quanto tempo?



Condizioni iniziali: $\begin{cases} \text{Per } t = 0 \\ x = 0 \\ v = v_0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \\ v(t) = v_0 - gt \end{cases}$$

t^* è tale che $v(t^*) = 0$

$$v(t^*) = v_0 - gt^* = 0 \implies \underline{t^* = \frac{v_0}{g}}$$

$$x(t^*) = v_0 t^* - \frac{1}{2}g t^{*2} = v_0 \frac{v_0}{g} - \frac{1}{2}g\frac{v_0^2}{g^2} = \frac{v_0^2}{g} - \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g} = \underline{\frac{v_0^2}{2g}}$$

16-03-11

A volte, conviene considerare come variabile indipendente la posizione anzichè il tempo.
Per il MRUA, allora, si ottiene

$$\begin{cases} v = v_0 + at \longrightarrow t = \frac{v - v_0}{a} \\ x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \end{cases}$$

$$x = x_0 + v_0 \cdot \frac{v - v_0}{a} + \frac{1}{2}a\left(\frac{v - v_0}{a}\right)^2$$

$$x - x_0 = \frac{v_0(v - v_0)}{a} + \frac{(v - v_0)^2}{2a}$$

$$(v - v_0)^2 + 2v_0(v - v_0) = 2a(x - x_0)$$

$$v^2 + v_0^2 \cancel{-2vv_0} + \cancel{2vv_0} - 2v_0^2 = 2a(x - x_0)$$

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0) \implies \boxed{v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)}$$

Questa relazione permette, per un MRUA, di correlare v ad x ed è valida solo se a è costante.

Sostituendo otteniamo:

$$\begin{cases} x(0) = A\,\text{sen}\varphi \\ v(0) = \omega A\cos\varphi \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_0 = A\,\text{sen}\varphi \\ v_0 = \omega A\cos\varphi \end{cases}$$

Dividendo membro a membro si ha: $\frac{1}{\omega}\,\text{tg}\varphi = \frac{x_0}{v_0} \Longrightarrow \boxed{\text{tg}\varphi = \omega\frac{x_0}{v_0}}$

$$\begin{cases} A\,\text{sen}\varphi = x_0 \\ A\cos\varphi = \frac{v_0}{\omega} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} A^2\text{sen}^2\varphi = x_0^2 \\ A^2\cos^2\varphi = \frac{v_0^2}{\omega^2} \end{cases}$$

Sommando membro a membro si ottiene: $A^2(\text{sen}^2\varphi + \cos^2\varphi) = x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2 \Longrightarrow \boxed{A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}}$

Dunque, A e φ dipendono da come il moto è iniziato e dalla caratteristica del moto, cioè ω.

Il moto armonico soddisfa una particolare equazione differenziale:

$$x(t) = A\,\text{sen}(\omega t + \varphi)$$

$$\frac{dx}{dt} = \omega A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 \underbrace{A\,\text{sen}(\omega t + \varphi)}_{x(t)} \Longrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

In un moto armonico semplice, l'accelerazione è proporzionale allo spostamento e il coefficiente di proporzionalità è il quadrato della pulsazione.

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0}$$ <u>Equazione del moto armonico semplice</u>

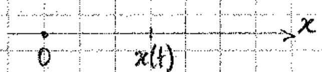
Si tratta di un'equazione differenziale lineare del II ordine. Essa è soddisfatta da una funzione del tipo $x_1(t) = c_1\,\text{sen}(\omega t)$ oppure da $x_2 = c_2\cos(\omega t)$.
Quindi questa equazione ha almeno due soluzioni e, poiché è lineare, anche la loro combinazione è ancora soluzione: $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$.

Dunque, la soluzione generale è del tipo $x(t) = c_1\,\text{sen}(\omega t) + c_2\cos(\omega t)$.

Facciamo vedere che essa è equivalente a $x(t) = A\,\text{sen}(\omega t + \varphi)$:

$$x(t) = A\left[\text{sen}(\omega t)\cos\varphi + \cos(\omega t)\text{sen}\varphi\right] = \underbrace{A\cos\varphi}_{c_1}\text{sen}(\omega t) + \underbrace{A\,\text{sen}\varphi}_{c_2}\cos(\omega t) = c_1\,\text{sen}(\omega t) + c_2\cos(\omega t)$$

Affrontiamo ora il problema, per un corpo che si muove di moto rettilineo, di scrivere in un altro modo l'accelerazione, usando come variabile indipendente la posizione.



$$a = \frac{dv}{dt}$$

Supponiamo sia $t = t(x)$.

$$v = v[t(x)]$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx} = a$$

$$\boxed{a\,dx = v\,dv}$$

Avendo come condizioni sulla velocità in una certa posizione $\begin{cases} \text{Per } x = x_0 \\ v = v_0 \end{cases}$, integrando si ottiene:

Vediamo se il moto è limitato:

$$\lim_{t\to\infty}\left[x(t)-x_0\right]=\lim_{t\to\infty}\frac{v_0}{K}\left(1-e^{-kt}\right) \implies \lim_{t\to\infty}\left[x(t)-x_0\right]=\frac{v_0}{K}$$

la particella si allontana dal punto x_0 di una quantità $\frac{v_0}{K}$, quindi il moto è limitato.

Ricordando che $a\,dx=v\,dv$, nel nostro caso, poiché $a=-Kv \implies -Kv\,dx=v\,dv$

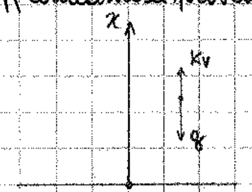
$$dv=-K\,dx$$

$$\int_{v_0}^{v}dv=-\int_{x_0}^{x}K\,dx \implies \boxed{v-v_0=-K(x-x_0)}$$

Per $v=0 \implies -v_0=-K(x-x_0) \implies x-x_0=\frac{v_0}{K}$ che è il risultato già trovato in precedenza.

Esiste un moto in cui $a=-Hv^2$, dove H è detto coefficiente di attrito idraulico.

Affrontiamo il problema del paracadute.



$$a=-g+Kv$$

Si arriva ad una velocità limite, che è la velocità a cui tende il corpo.

$$a_{lim}=-g+Kv_{lim}=0 \implies \boxed{v_{lim}=\frac{g}{K}}$$

Il coefficiente K è legato a come è fatto il corpo e viene chiamato fattore cx.

Risolviamo il problema:

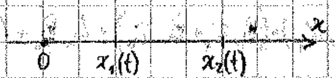
$$a=\frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt}=Kv-g=K\left(v-\frac{g}{K}\right)=K\left(v-v_{lim}\right)$$

$$\frac{dv}{v-v_{lim}}=K\,dt$$ e poi si procede integrando nel solito modo.

21-03-11

Si possono definire posizione, velocità e accelerazione relative di un corpo rispetto ad un altro:

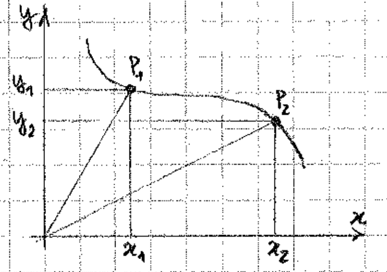


$x_{21}(t)=x_2(t)-x_1(t)$ posizione relativa del corpo 2 rispetto al corpo 1

$v_{21}(t)=\frac{dx_{21}(t)}{dt}=\frac{dx_2(t)}{dt}-\frac{dx_1(t)}{dt}=v_2(t)-v_1(t)$ velocità relativa

$a_{21}(t)=a_2(t)-a_1(t)$ accelerazione relativa

Usando i vettori, la posizione del corpo è descritta dal vettore $\vec{r}(t) = x(t)\vec{u}_x + y(t)\vec{u}_y$.



$$\vec{r}(t_1) = \underbrace{x(t_1)}_{x_1}\vec{u}_x + \underbrace{y(t_1)}_{y_1}\vec{u}_y$$

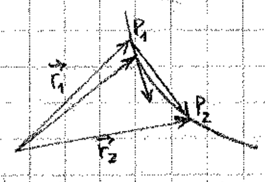
$$\vec{r}(t_2) = \underbrace{x(t_2)}_{x_2}\vec{u}_x + \underbrace{y(t_2)}_{y_2}\vec{u}_y$$

Introduciamo il concetto di velocità vettoriale media: $\vec{v}_m = \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1}$.

Si tratta di un vettore dato dalla variazione di posizione fratto l'intervallo di tempo impiegato a compierla. Esso è diretto come il vettore $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ ed è parallelo alla secante passante per P_1 e P_2.

Usando le coordinate cartesiane: $\vec{v}_m = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}\vec{u}_x + \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1}\vec{u}_y$ il vettore ha per componenti le velocità medie lungo x e lungo y.

Si introduce il vettore velocità istantanea:



$\Delta t \to 0$, $t_2 \to t_1$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{\Delta t}$$

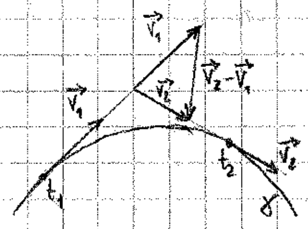
Troviamo un vettore tangente alla traiettoria.

Usando le coordinate cartesiane:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x \vec{u}_x + \Delta y \vec{u}_y}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{u}_x + \frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{u}_y \right) = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{u}_x \right) + \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{u}_y \right) =$$

$$= \vec{u}_x \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \vec{u}_y \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \vec{u}_x \frac{dx}{dt} + \vec{u}_y \frac{dy}{dt}$$

$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{u}_x + \frac{dy}{dt}\vec{u}_y$ La velocità vettoriale istantanea è un vettore che ha per componenti le velocità istantanee lungo l'asse x e lungo l'asse y.



Siano ora $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ le velocità vettoriali istantanee del mobile ai tempi t_1 e t_2.

Definiamo accelerazione vettoriale media $\vec{a}_m = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$

L'accelerazione media è un vettore diretto in genere verso la concavità.

Definiamo, invece, accelerazione vettoriale istantanea $\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

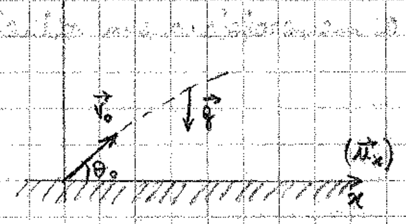
Con coordinate cartesiane:

$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{u}_x + \frac{dy}{dt}\vec{u}_y = v_x \vec{u}_x + v_y \vec{u}_y$

$\vec{a} = \frac{dv_x}{dt}\vec{u}_x + \frac{dv_y}{dt}\vec{u}_y$ Il vettore accelerazione ha per componenti le variazioni di $\vec{v}$ lungo x e lungo y.

$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{u}_x + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{u}_y$

Moto del proiettile



θ_0 è detto angolo di tiro

Condizioni iniziali: $\begin{cases} \text{Per } t_0 = 0 \\ \vec{v}(0) = \vec{v}_0 \\ \vec{r}(0) = 0 \end{cases}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 15 di 258

Determiniamo la gittata x_G:

$y(x_G)=0$

$$y(x_G)=x_G\left(\operatorname{tg}\theta_0-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta_0}x_G\right)$$

- $x_G=0$ Non interessa (condizione iniziale)
- $\operatorname{tg}\theta_0-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta_0}x_G=0 \Longrightarrow x_G=\frac{2v_0^2\cos^2\theta_0}{g}\cdot\frac{\operatorname{sen}\theta_0}{\cos\theta_0} \Longrightarrow \boxed{x_G=\frac{v_0^2}{g}\operatorname{sen}(2\theta_0)}$

Calcoliamo il tempo di volo t_G:

$$x_G=(v_0\cos\theta_0)t_G \Longrightarrow t_G=\frac{x_G}{v_0\cos\theta_0}=\frac{2v_0^2\operatorname{sen}\theta_0\cos\theta_0}{g\,v_0\cos\theta_0} \Longrightarrow \boxed{t_G=2\frac{v_0}{g}\operatorname{sen}\theta_0}$$

Determiniamo ora la massima altezza h raggiunta dal proiettile e il tempo t_M necessario a raggiungerla:

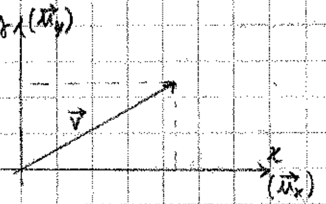
t_M è tale che $v_y(t_M)=0 \Longrightarrow$

$v_0\operatorname{sen}\theta_0-gt_M=0 \Longrightarrow \boxed{t_M=\frac{v_0}{g}\operatorname{sen}\theta_0}$ che è esattamente la metà del tempo di volo.

$$h=y(t_M)=(v_0\operatorname{sen}\theta_0)t_M-\frac{1}{2}g\,t_M^2=v_0\operatorname{sen}\theta_0\cdot\frac{v_0}{g}\operatorname{sen}\theta_0-\frac{1}{2}g\frac{v_0^2}{g^2}\operatorname{sen}^2\theta_0=\frac{v_0^2}{g}\operatorname{sen}^2\theta_0 \Longrightarrow \boxed{h=\frac{v_0^2}{2g}\operatorname{sen}^2\theta_0}$$

Descrizione del movimento in coordinate polari piane

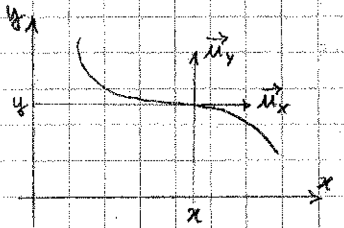
Usando coordinate cartesiane, tutto è semplice, poichè i versori $\vec{u}_x$ e $\vec{u}_y$ non variano nel tempo.



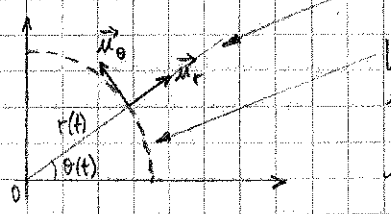
$$\vec{r}=x\vec{u}_x+y\vec{u}_y$$

$$\vec{v}=\frac{dx}{dt}\vec{u}_x+\frac{dy}{dt}\vec{u}_y$$

$$\vec{a}=\frac{dv_x}{dt}\vec{u}_x+\frac{dv_y}{dt}\vec{u}_y=\frac{d^2x}{dt^2}\vec{u}_x+\frac{d^2y}{dt^2}\vec{u}_y$$



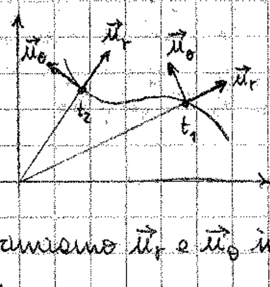
Lungo una linea coordinata (x o y), cambia una sola coordinata, mentre l'altra rimane costante.



Linea coordinata r, detta linea radiale. $\vec{u}_r$ è detto versore radiale

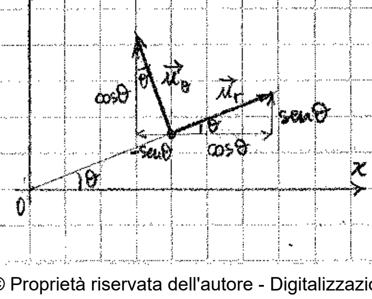
Linea coordinata θ (circonferenza), detta linea trasversa.
$\vec{u}_\theta$ è detto versore trasverso.

$\vec{u}_r$ e $\vec{u}_\theta$ sono tra loro ortogonali.



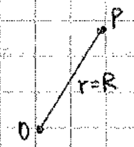
Se il corpo si muove, i versori radiale e trasverso cambiano con il tempo.

Esprimiamo $\vec{u}_r$ e $\vec{u}_\theta$ in funzione di $\vec{u}_x$ e $\vec{u}_y$:



$$\begin{cases}\vec{u}_r=\cos\theta\,\vec{u}_x+\operatorname{sen}\theta\,\vec{u}_y\\ \vec{u}_\theta=-\operatorname{sen}\theta\,\vec{u}_x+\cos\theta\,\vec{u}_y\end{cases}$$

$$\vec{u}_r\cdot\vec{u}_\theta=-\operatorname{sen}\theta\cos\theta+\operatorname{sen}\theta\cos\theta=0 \Longrightarrow \vec{u}_r\perp\vec{u}_\theta$$



Moto circolare: è un moto la cui traiettoria è una circonferenza.
$OP = cost$
le formule viste diventano:

$r = R = cost \implies \frac{dr}{dt} = 0 \,,\quad \frac{d^2r}{dt^2} = 0$

$\vec{v} = R\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta$ la velocità è tutta trasversa.

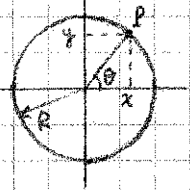
$\vec{a} = -R\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\vec{u}_r + R\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{u}_\theta$

Nel caso del moto circolare si introducono la velocità angolare $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ (rad/s) e la accelerazione angolare $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$ (rad/s^2).

L'espressione dell'accelerazione diventa $\boxed{\vec{a} = -R\omega^2\vec{u}_r + R\alpha\vec{u}_\theta}$, dalla quale si evince che l'accelerazione radiale è proporzionale al quadrato della velocità angolare e l'accelerazione trasversa è proporzionale all'accelerazione angolare.

Moto circolare uniforme (MCU): per questo tipo di moto si ha che $\omega = cost$ e $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = 0$, perciò $\vec{a} = -\omega^2 R\vec{u}_r$ L'accelerazione è tutta centripeta.

Esercizio: Un corpo si muove di MCU su una circonferenza di raggio R. Studiare il moto delle sue proiezioni sugli assi x e y.



$\omega = \frac{d\theta}{dt} = cost$

$\begin{cases} \text{Per } t = 0 \\ \theta(0) = \theta_0 \end{cases}$

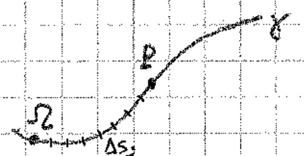
$\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\,sen\,\theta \end{cases}$

$\frac{d\theta}{dt} = \omega \implies d\theta = \omega dt \implies \int_{\theta_0}^{\theta(t)} d\theta = \int_0^t \omega dt \implies \theta(t) - \theta_0 = \omega t \implies \theta(t) = \theta_0 + \omega t$

$\begin{cases} x(t) = R\cos(\omega t + \theta_0) \\ y(t) = R\,sen(\omega t + \theta_0) \end{cases}$ Si tratta di moti armonici semplici.

Analisi in componenti intrinseche

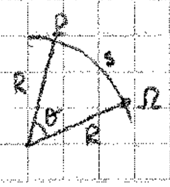
In una descrizione intrinseca del movimento si ipotizza di conoscere la traiettoria e di esprimere gli altri elementi in funzione di questa, in modo da svincolarsi dai problemi di espressione mediante coordinate.
Si definisce luogo traiettoria il luogo dei punti occupati dal mobile durante il suo movimento.



Il punto Ω è assunto come origine sulla traiettoria γ.

Si definisce ascissa curvilinea s la distanza del punto P da Ω misurata sulla traiettoria.

Ad esempio:



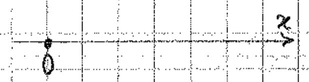
$s = R\theta$ (con θ espresso in radianti)

ESERCITAZIONE

22-03-11

ESERCIZIO 1

Un'automobile in moto con velocità v_0 frena uniformemente fino a fermarsi. Se l'accelerazione vale $-a$, calcolare il tempo di arresto t_A e lo spazio di arresto x_A.



Condizioni iniziali: $\begin{cases} \text{Per } t_0=0 \\ x(0)=0 \\ v(0)=v_0 \end{cases}$

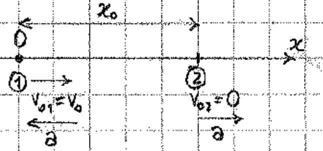
$$\begin{cases} x(t)=\underbrace{x_0}_{=0}+v_0t-\frac{1}{2}at^2 \\ v(t)=v_0-at \end{cases}$$

t_A è tale che $v(t_A)=0 \implies v(t_A)=v_0-at_A=0 \implies \underline{t_A=\frac{v_0}{a}}$

$$x_A=x(t_A)=v_0t_A-\frac{1}{2}at_A^2=v_0\frac{v_0}{a}-\frac{1}{2}a\frac{v_0^2}{a^2}=\frac{v_0^2}{a}-\frac{v_0^2}{2a}=\underline{\underline{\frac{v_0^2}{2a}}}$$

ESERCIZIO 2

Un punto parte all'istante $t_0=0$ con velocità v_0 dall'origine lungo il verso positivo dell'asse x ed è soggetto ad un'accelerazione costante negativa pari a $-a$. Un secondo punto parte con velocità iniziale nulla all'istante $t_0=0$ dalla posizione $x=x_0$ positiva e accelera uniformemente con accelerazione a. Determinare se il primo mobile può raggiungere il secondo.



All'istante $t_0=0$.

$$\begin{cases} x_1(t)=v_0t-\frac{1}{2}at^2 \\ v_1(t)=v_0-at \end{cases} \quad \text{Corpo ①} \qquad \begin{cases} x_2(t)=x_0+\frac{1}{2}at^2 \\ v_2(t)=at \end{cases} \quad \text{Corpo ②}$$

Se i due corpi si sorpassano, esiste t^* tale che $x_1(t^*)=x_2(t^*) \implies$

$$v_0t^*-\frac{1}{2}at^{*2}=x_0+\frac{1}{2}at^{*2}$$

$$at^{*2}-v_0t^*+x_0=0$$

$$t^{*2}-\frac{v_0}{a}t^*+\frac{x_0}{a}=0$$

$$t^*=\frac{v_0}{2a}\pm\sqrt{\left(\frac{v_0}{2a}\right)^2-\frac{x_0}{a}}$$

Se $\Delta<0$, non ci sarà sorpasso; se $\Delta=0$ c'è una soluzione; se $\Delta>0$, ci sono due sorpassi.

$\left(\frac{v_0}{2a}\right)^2-\frac{x_0}{a}>0 \implies \frac{v_0^2}{4a^2}>\frac{x_0}{a} \implies \underline{\underline{v_0^2>4ax_0}}$ Doppio sorpasso.

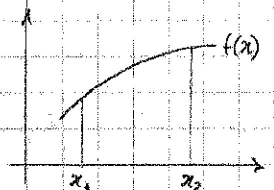
ESERCIZIO 5

La velocità di un punto che si muove di moto rettilineo è espressa dalla relazione $v=Kt^2+H$. Determinare le dimensioni di K e H e calcolare nell'intervallo di tempo compreso tra t_1 e t_2 la velocità media v_m e l'accelerazione media a_m.

$$[v]=\frac{L}{T}$$

$$[H]=\frac{L}{T}$$

$$[Kt^2]=\frac{L}{T} \implies [K]\,T^2=\frac{L}{T} \implies [K]=\frac{L}{T^3}$$



$$\bar{f}=\langle f\rangle=f_m=\frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$$

$$v_m=\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt=\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2}(Kt^2+H)\,dt=\frac{1}{t_2-t_1}\left[\frac{1}{3}Kt^3+Ht\right]_{t_1}^{t_2}=\frac{1}{t_2-t_1}\left\{\frac{1}{3}K(t_2^3-t_1^3)+H(t_2-t_1)\right\}=$$

$$=\frac{1}{t_2-t_1}\left\{\frac{1}{3}K(t_2-t_1)(t_2^2+t_2t_1+t_1^2)+H(t_2-t_1)\right\}=\frac{1}{3}K(t_2^2+t_2t_1+t_1^2)+H$$

$$a=\frac{dv}{dt}=2Kt$$

$$a_m=\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2} a(t)\,dt=\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_2}^{t_1} 2Kt\,dt=\frac{1}{t_2-t_1}\left[2K\frac{1}{2}t^2\right]_{t_1}^{t_2}=\frac{1}{t_2-t_1}K(t_2^2-t_1^2)=K\frac{1}{t_2-t_1}(t_2-t_1)(t_2+t_1)=K(t_2+t_1)$$

ESERCIZIO 6

Una particella si muove di moto rettilineo con accelerazione a dipendente dalla velocità secondo la relazione $a=A/v$. Le condizioni iniziali del moto sono $v(0)=v_0$ e $x(0)=x_0$. Calcolare le dimensioni di A, la posizione e la velocità della particella in funzione del tempo, l'istante t^* in cui si annulla la velocità e la posizione $x(t^*)$ della particella quando il corpo si ferma.

$$a=\frac{A}{v} \qquad [a]=\frac{L}{T^2} \qquad [v]=\frac{L}{T}$$

$$A=av \qquad [A]=[a][v]=\frac{L}{T^2}\cdot\frac{L}{T}=\frac{L^2}{T^3}$$

$$a=\frac{dv}{dt} \implies \frac{dv}{dt}=\frac{A}{v} \implies \int_{v_0}^{v(t)} v\,dv=\int_0^t A\,dt \implies \frac{1}{2}(v^2-v_0^2)=At \implies v^2=v_0^2+2At \implies$$

$$v(t)=\sqrt{v_0^2+2At}$$

t^* è tale che $v(t^*)=0 \implies v_0^2+2At=0 \implies t^*=-\frac{v_0^2}{2A}$ che ha senso solo se $A<0$.

$$v=\frac{dx}{dt} \implies \frac{dx}{dt}=\sqrt{v_0^2+2At} \implies \int_{x_0}^{x(t)} dx=\int_0^t \sqrt{v_0^2+2At}\,dt \implies x(t)-x_0=\int_0^t\sqrt{v_0^2+2At}\,dt$$

Risolviamo l'integrale a secondo membro operando la sostituzione $u=v_0^2+2At$

$$du=2A\,dt \implies dt=\frac{du}{2A}$$

$$\int_0^t\sqrt{v_0^2+2At}\,dt=\int_{v_0^2}^{v_0^2+2At}\sqrt{u}\,\frac{du}{2A}=\frac{1}{2A}\int_{v_0^2}^{v_0^2+2At}\sqrt{u}\,du=\frac{1}{2A}\left[\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_{v_0^2}^{v_0^2+2At}=\frac{1}{2A}\cdot\frac{2}{3}\left[u^{3/2}\right]_{v_0^2}^{v_0^2+2At}=\frac{1}{3A}\cdot\left\{(v_0^2+2At)^{3/2}-v_0^3\right\}$$

$$x(t)=x_0+\frac{1}{3A}\left\{(v_0^2+2At)^{3/2}-v_0^3\right\}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 23 di 258

ESERCITAZIONE (Squadra B) 22-03-11

ESERCIZIO 1.8

In un rally automobilistico un pilota deve percorrere in un tempo minimo un tratto d partendo ed arrivando da fermo. Le caratteristiche dell'auto sono tali che l'accelerazione è a_1 e la decelerazione è a_2. Supponendo il moto rettilineo, calcolare il tempo ottenuto nella prova.

In A inizio a decelerare.

a_1 = accelerazione $\quad a_2$ = decelerazione

$$0 \to A:\ M.U.A \Rightarrow \begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}a_1 t^2 \\ v(t) = a_1 t \end{cases}$$

$$\begin{cases} s = \frac{1}{2}a_1 t^{*2} \\ v_1 = a_1 t^* \end{cases}$$

$$A \to B:\quad t_{iniziale} = t^* \Rightarrow \begin{cases} x(t) = s + v_1(t-t^*) - \frac{1}{2}a_2(t-t^*)^2 \\ v(t) = v_1 - a_2(t-t^*) \end{cases}$$

$$v(t_p) = v_1 - a_2(t_p - t^*) = 0 \Rightarrow a_1 t^* - a_2(t_p - t^*) = 0 \Rightarrow a_1 t^* - a_2 t_p + a_2 t^* = 0 \Rightarrow (a_1+a_2)t^* = a_2 t_p \Rightarrow$$

$$t^* = \frac{a_2}{a_1+a_2} t_p$$

$$d = s + v_1(t_p - t^*) - \frac{1}{2}a_2(t_p-t^*)^2 = \frac{1}{2}a_1 t^{*2} + a_1 t^*(t_p - t^*) - \frac{1}{2}a_2(t_p - t^*)^2$$

$$t_p - t^* = t_p - \frac{a_2}{a_1+a_2}t_p = \left(1 - \frac{a_2}{a_1+a_2}\right)t_p = \frac{a_1+a_2-a_2}{a_1+a_2}t_p = \frac{a_1}{a_1+a_2}t_p$$

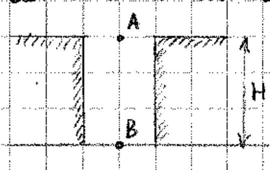
$$d = \frac{1}{2}a_1\left(\frac{a_2}{a_1+a_2}\right)^2 t_p^2 + a_1\frac{a_2}{a_1+a_2}t_p \cdot \frac{a_1}{a_1+a_2}t_p - \frac{1}{2}a_2\left(\frac{a_1}{a_1+a_2}\right)^2 t_p^2 = \left\{\frac{1}{2}\frac{a_1 a_2^2}{(a_1+a_2)^2} + \frac{a_1^2 a_2}{(a_1+a_2)^2} - \frac{a_1^2 a_2}{2(a_1+a_2)^2}\right\}t_p^2 =$$

$$= \left\{\frac{1}{2}\frac{a_1 a_2^2}{(a_1+a_2)^2} + \frac{1}{2}\frac{a_1^2 a_2}{(a_1+a_2)^2}\right\}t_p^2 = \frac{1}{2}\frac{a_1 a_2}{(a_1+a_2)^{\cancel{2}}}\cancel{(a_2+a_1)}t_p^2 = \frac{1}{2}\frac{a_1 a_2}{a_1+a_2}t_p^2 \Rightarrow$$

$$t_p = \underline{\underline{\sqrt{2\frac{a_1+a_2}{a_1 a_2}d}}}$$

ESERCIZIO 1.11

Calcolare la profondità H di un pozzo sapendo che l'intervallo di tempo tra l'istante in cui si lascia cadere un sasso (con velocità iniziale nulla) e l'istante in cui si sente il rumore vale Δt. Si trascuri la resistenza dell'aria e si assuma che la velocità del suono sia u_s.



Studiamo il moto $A \to B$:

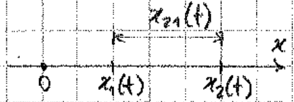
$$x_c(t) = H - \frac{1}{2}g t^2$$

$t_c = t_1$ = tempo di caduta sasso è tale che $x(t_c) = x_c = 0 \Rightarrow$

I

ESERCIZIO 1.16

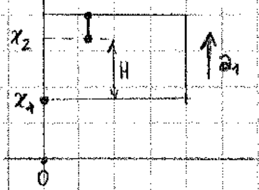
Un ascensore sale verticalmente con accelerazione a_1. All'ascensore è appesa una lampadina. Ad un certo istante viene tagliato il filo che collega la lampadina all'ascensore. Un osservatore posto sull'ascensore, con che accelerazione vede cadere la lampadina? E se l'ascensore avesse accelerazione verso il basso?



Posizione relativa: $x_{21}(t) = x_2(t) - x_1(t)$

Velocità relativa: $v_{21}(t) = v_2(t) - v_1(t)$

Accelerazione relativa: $a_{21}(t) = a_2(t) - a_1(t)$



Vediamo l'accelerazione del corpo 2 rispetto al corpo 1:

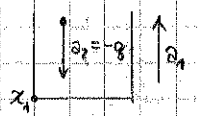
$x_2 = x_1 + H$ con H = costante finché c'è il filo

$x_{21} = x_2 - x_1 = H$

$v = v_2 - v_1 = 0$ perché sono uguali

$a_{21} = a_2 - a_1 = 0$

Quando il filo viene tagliato:



$a_{21} = -g - a_1 = \underline{\underline{-(g+a_1)}}$

Se invece l'ascensore scendesse:

$a_{21} = -g - (-A) = -g + A = \underline{\underline{-(g-A)}}$

Se A (ascensore) = g (di caduta) $\Longrightarrow$ la lampadina ha accelerazione nulla: $a_{21} = -g-(-g) = 0$

ESERCIZIO 1.17

Un corpo si muove di moto rettilineo con accelerazione dipendente dal tempo secondo la relazione $a = K/t^4$. Sapendo che per $t = t_0$, si ha $x = x_0$ e $v = v_0$, determinare le dimensioni di K e trovare come la velocità e la posizione dipendono dal tempo.

$[a] = \frac{L}{T^2}$

$k = at^4 \Longrightarrow [K] = [a]\cdot[t^4] = \frac{L}{T^2}\cdot T^4 = \underline{L\cdot T^2}$

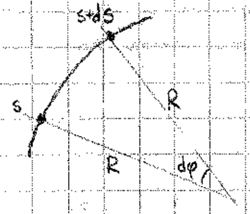
$$\frac{dv}{dt} = \frac{K}{t^4} \Longrightarrow dv = K\frac{dt}{t^4} \Longrightarrow \int_{v_0}^{v(t)} dv = K\int_{t_0}^{t}\frac{1}{t^4}dt \Longrightarrow v(t) - v_0 = K\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\left[t^{-3}\right]_{t_0}^{t} \Longrightarrow$$

$$v(t) - v_0 = -\frac{1}{3}K\left[\frac{1}{t^3}\right]_{t_0}^{t} \Longrightarrow v(t) - v_0 = -\frac{K}{3}\left(\frac{1}{t^3} - \frac{1}{t_0^3}\right) \Longrightarrow \underline{\underline{v(t) = v_0 - \frac{K}{3}\left(\frac{1}{t^3} - \frac{1}{t_0^3}\right)}}$$

$$\frac{dx}{dt} = v \Longrightarrow \frac{dx}{dt} = v_0 + \frac{K}{3t_0^3} - \frac{K}{3t^3} \Longrightarrow dx = \left(v_0 + \frac{K}{3t_0^3} - \frac{K}{3t^3}\right)dt \Longrightarrow$$

$$\int_{x_0}^{x(t)} dx = \int_{t_0}^{t}\left(v_0 + \frac{K}{3t_0^3} - \frac{K}{3t^3}\right)dt \Longrightarrow x(t) - x_0 = \left(v_0 + \frac{K}{3t_0^3}\right)(t - t_0) - \frac{K}{3}\int_{t_0}^{t} t^{-3}dt \Longrightarrow$$

III



$ds = R\,d\varphi$

$\frac{ds}{dt} = R\frac{d\varphi}{dt} \Longrightarrow v = R\frac{d\varphi}{dt}$

$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{v}{R}$

Sostituendo nell'espressione di $\frac{d\vec{u}_T}{dt}$ si ottiene allora $\frac{d\vec{u}_T}{dt} = \frac{v}{R}\vec{u}_N$.

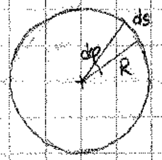
La derivata del versore tangente a una traiettoria piana è un vettore il cui modulo è $\frac{v}{R}$ ed è diretto secondo la normale a $\vec{u}_T$ verso il centro di curvatura della traiettoria. $\frac{d\vec{u}_T}{dt} = \frac{v}{R}\vec{u}_N$

R è detto raggio del cerchio osculatore: data una qualunque curva regolare, in un qualunque suo punto si può tracciare una circonferenza che in quel punto ha un contatto del II ordine con la curva.

L'espressione di $\vec{a}$ diventa $\boxed{\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_T + \frac{v^2}{R}\vec{u}_N}$

Quando un corpo descrive una traiettoria, $\vec{a}$ ha due componenti: la prima è parallela alla direzione tangente ed è legata alle variazioni di velocità, la seconda, detta centripeta, è ortogonale alla traiettoria ed esiste ogni volta che la traiettoria non è rettilinea.

Consideriamo un moto circolare uniforme (MCU).



$\omega = cost \Longrightarrow \omega = \frac{d\varphi}{dt} = cost$

$ds = R\,d\varphi$

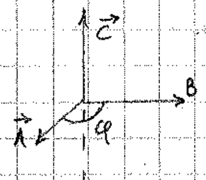
$d\varphi = \omega\,dt$

$ds = R\omega\,dt$

$v = \frac{ds}{dt} = \frac{R\omega\,dt}{dt} = R\omega \Longrightarrow$ Se ω è costante, allora v è costante.

$\vec{a} = \frac{v^2}{R}\vec{u}_N = \frac{\omega^2R^2}{R}\vec{u}_N = \omega^2R\,\vec{u}_N$ Esiste un'accelerazione diretta verso il centro che nasce dalla variazione di direzione del vettore velocità.

Dati due vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$ si possono definire due tipi di prodotto: il prodotto scalare $\vec{A}\bullet\vec{B}$ = numero e il prodotto esterno $\vec{A}\wedge\vec{B} = \vec{C}$.

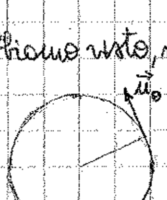


$\vec{C} = \vec{A}\wedge\vec{B}$

$|\vec{C}| = AB\,sen\varphi$

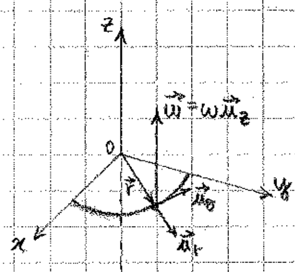
Il verso di $\vec{C}$ è dato dalla regola della mano destra.

Abbiamo visto, nel caso delle coordinate polari, che $\vec{v} = \underbrace{\frac{dr}{dt}\vec{u}_r}_{radiale} + \underbrace{r\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta}_{trasversa}$



Nel caso di moto circolare, dove $r = R = cost$, la formula diventa $\vec{v} = R\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta$

$\frac{d\theta}{dt} = \omega$ velocità angolare $\Longrightarrow \vec{v} = R\omega\vec{u}_\theta$



A volte risulta utile introdurre il vettore velocità angolare: $\vec{\omega} = \omega\vec{u}_z$

Poiché $\vec{r} = R\vec{u}_r$, si può scrivere $\vec{\omega}\wedge\vec{r} = (\omega\vec{u}_z)\wedge(R\vec{u}_r) = \omega R(\vec{u}_z\wedge\vec{u}_r)$

$\vec{u}_z\wedge\vec{u}_r = \vec{u}_\theta \Longrightarrow \vec{\omega}\wedge\vec{r} = \omega R\vec{u}_\theta$ che corrisponde alla velocità $\vec{v}$.

Quindi $\boxed{\vec{v} = \vec{\omega}\wedge\vec{r}}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 29 di 258

Affinché il corpo non tocchi la sfera deve essere $x^2(t)+y^2(t) \geq R^2$

$(v_0 t)^2 + \left(R - \frac{1}{2} g t^2\right)^2 \geq R^2$

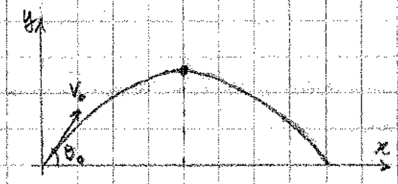
$v_0^2 t^2 + \cancel{R^2} + \frac{1}{4} g^2 t^4 - gRt^2 \geq \cancel{R^2}$

$(v_0^2 - gR)t^2 + \frac{1}{4} g^2 t^4 \geq 0 \quad \forall t$

Per $t \to 0$, $\frac{1}{4} g^2 t^4$ è trascurabile rispetto al primo termine $\Longrightarrow$

$(v_0^2 - gR)t^2 \geq 0 \Longrightarrow v_0^2 - gR \geq 0 \Longrightarrow \underline{v_0 \geq \sqrt{gR}}$

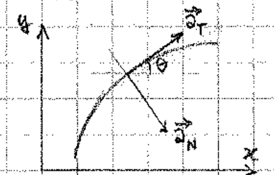
Esercizio: Calcolare il raggio di curvatura della traiettoria di un proiettile nel campo di gravità nel punto più alto raggiunto.



$$\begin{cases} v_x = v_0 \cos\theta_0 \\ v_y = v_0 \operatorname{sen}\theta_0 - gt \end{cases}$$

$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_T + \frac{v^2}{R}\vec{u}_N$



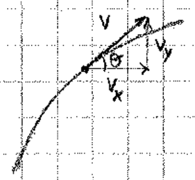
Situazione generica

$$\begin{cases} a_x = a_T \cos\theta + a_N \operatorname{sen}\theta \\ a_y = a_T \operatorname{sen}\theta - a_N \cos\theta \end{cases}$$

Legame tra componenti cartesiane e intrinseche dell'accelerazione.

$\vec{a} = \vec{g} = -g\vec{u}_y \Longrightarrow \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$

$\begin{cases} a_T \cos\theta + a_N \operatorname{sen}\theta = 0 \\ a_T \operatorname{sen}\theta - a_N \cos\theta = -g \end{cases}$ $\Longrightarrow$ Risolvendo il sistema $\Longrightarrow$ $\begin{cases} a_T = -g \operatorname{sen}\theta \\ a_N = g\cos\theta \end{cases}$



$v_x = v\cos\theta$

$v_y = v \operatorname{sen}\theta$

$\operatorname{tg}\theta = \frac{v_y}{v_x}$

$\operatorname{sen}\theta = \frac{\operatorname{tg}\theta}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\theta}} = \frac{v_y}{v}$ $\qquad$ $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\theta}} = \frac{v_x}{v}$

$a_N = \frac{v^2}{R}$

$\frac{v^2}{R} = g\frac{v_x}{v}$

$R = \frac{v^3(t)}{g v_x(t)}$ Raggio di curvatura in ogni punto

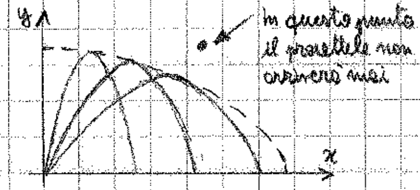
Nel punto più alto della traiettoria (t^*) si ha $v_y(t^*) = 0 \Longrightarrow$

$v(t^*) = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = v_x$

$R(t^*) = \frac{v_x^3}{g v_x} = \frac{v_x^2}{g} = \underline{\underline{\frac{v_0^2 \cos^2\theta_0}{g}}}$

Parabola di sicurezza

Si consideri un cannone che spara. La traiettoria del proiettile è $y = x\,tg\theta - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta_0}x^2$



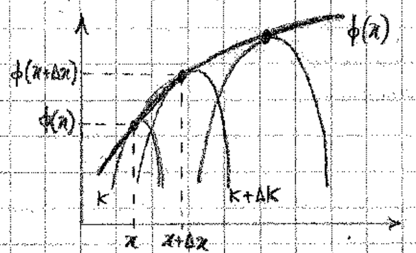
I punti che non sono mai colpiti dal cannone sono definiti all'esterno di una parabola detta <u>parabola di sicurezza</u>.

Poniamo:

- $tg\theta_0 = K$
- $\cos\theta_0 = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\theta_0}} = \frac{1}{\sqrt{1+K^2}}$
- $\frac{g}{2v_0^2} = A$ Noto una volta scelto il cannone.

$\boxed{y = Kx - A(1+K^2)x^2}$ È una famiglia di curve, ossia una <u>curva monoparametrica</u>, di parametro K.

Si chiama <u>inviluppo</u> della famiglia di curve una curva che ha in ogni punto un punto di contatto del I ordine con quella famiglia. Determiniamo l'equazione dell'inviluppo.



Per la curva di parametro K: $\phi(x) = y(x,K)$

Per la curva di parametro K+ΔK: $\phi(x+\Delta x) = y(x+\Delta x, K+\Delta K)$

Se Δx e ΔK sono molto piccoli, possiamo sviluppare al primo ordine in serie di Taylor:

$$\phi(x+\Delta x) = y(x+\Delta x, K+\Delta K) = y(x,K) + \frac{\partial y}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial y}{\partial K}\Delta K$$

L'incremento $\Delta\phi$ sarà: $\Delta\phi = \phi(x+\Delta x) - \phi(x) = \frac{\partial y}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial y}{\partial K}\Delta K$

La derivata dell'inviluppo è $\frac{d\phi}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\phi}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial K}\frac{\Delta x}{\Delta x}\right) \Longrightarrow$

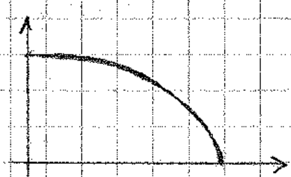
$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial K}\frac{dK}{dx} = \frac{\partial y}{\partial x} \Longrightarrow \frac{\partial y}{\partial K} = 0$$

Per la definizione di inviluppo

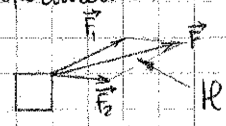
$$\frac{\partial y}{\partial K} = x - 2Ax^2K = 0 \Longrightarrow K = \frac{1}{2Ax}$$

$$y = \frac{1}{2Ax}x - A\left[1 + \frac{1}{4A^2x^2}\right]x^2 = \frac{1}{2A} - Ax^2 - \frac{1}{4A} = \frac{1}{4A} - Ax^2$$

$$\boxed{y = \frac{v_0^2\cos^2\theta_0}{2g} - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta_0}x^2}$$ Parabola di sicurezza



• Esperimento:



Il moto avviene in questa direzione

La forza è una grandezza vettoriale. $\Longrightarrow$

$\boxed{\vec{F}=M\vec{a}}$ Formulazione vettoriale della legge di Newton. L'accelerazione è sempre parallela alla forza.

Si introduce la grandezza quantità di moto: $\vec{p}=M\vec{v}$ $\Longrightarrow$

$$M\vec{a}=M\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d}{dt}(M\vec{v})=\frac{d\vec{p}}{dt} \Longrightarrow$$

$\boxed{\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}}$ Altra formulazione della legge di Newton.

Teorema della quantità di moto

$$d\vec{p}=\vec{F}dt$$

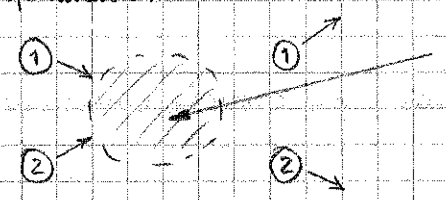
$$\int_{\vec{p}_1}^{\vec{p}_2} d\vec{p}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}dt$$

$$\vec{p}_2-\vec{p}_1=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}dt$$

Si definisce impulso della forza: $\vec{J}(t_1,t_2)=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}dt \Longrightarrow$

$\boxed{\vec{p}_2-\vec{p}_1=\vec{J}(t_1,t_2)}$ La variazione della quantità di moto è uguale all'impulso ceduto dalla forza al corpo.

• Esperimento:

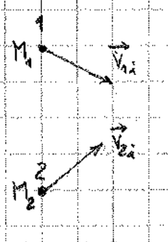


Qui dentro i due dischi urtano, scambiandosi delle forze di azione e reazione.

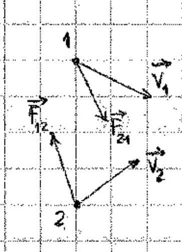
Principio di azione e reazione

La forza che il corpo 1 esercita sul corpo 2 è uguale e opposta a quella esercitata dal corpo 2 sul corpo 1.

Situazione iniziale:



Istante qualsiasi:



Chiamiamo le forze che i corpi si scambiano con $\vec{F}_{12}$ e $\vec{F}_{21}$.

Corpo 1: $\frac{d\vec{p}_1}{dt}=\vec{F}_{21} \Longrightarrow \vec{p}_{1f}-\vec{p}_{1i}=\int_{t_i}^{t_f}\vec{F}_{21}dt$

$\Longrightarrow$ Sommando membro a membro si ottiene

Corpo 2: $\frac{d\vec{p}_2}{dt}=\vec{F}_{12} \Longrightarrow \vec{p}_{2f}-\vec{p}_{1i}=\int_{t_i}^{t_f}\vec{F}_{12}dt$

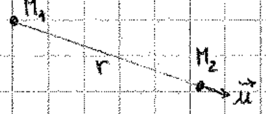
$$\vec{p}_{1f}+\vec{p}_{2f}-(\vec{p}_{1i}+\vec{p}_{2i})=\int_{t_i}^{t_f}(\vec{F}_{21}+\vec{F}_{12})dt \Longrightarrow \vec{p}_f-\vec{p}_i=\int_{t_i}^{t_f}(\vec{F}_{21}+\vec{F}_{12})dt$$

Sperimentalmente si è scoperto che, se le particelle sono sottoposte solo alla loro mutua interazione, si ha $\vec{p}_f=\vec{p}_i$, cioè la quantità di moto non cambia durante il processo. $\Longrightarrow$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 35 di 258

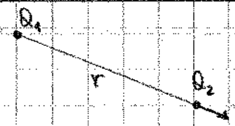
Interazioni fondamentali

- Interazione gravitazionale: i corpi possiedono una proprietà detta massa gravitazionale che origina un'interazione di tipo attrattivo.



$$\vec{F}_{21} = -\gamma \frac{M_1 M_2}{r^2}\vec{u} \qquad \text{Va come } \frac{1}{r^2}$$

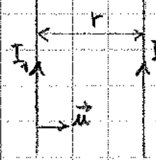
- Interazione elettrica: la proprietà responsabile di tale interazione è la carica elettrica



$$\vec{F}_{21} = K\frac{Q_1 Q_2}{r^2}\vec{u}$$

Può essere sia attrattiva che repulsiva, poiché esistono due tipi di carica elettrica. Quando si parla di corpi che possiedono la proprietà elettrica q, si definisce un campo elettrico $\vec{E}$ responsabile della forza: $\vec{E} = \vec{F}/q$.

- Interazione magnetica:



$$\vec{F}_{21} = K_m \frac{I_1 I_2}{r}\vec{u}$$

Può essere attrattiva o repulsiva, a seconda dei versi delle correnti I_1 e I_2.

A livello microscopico, i corpi possono possedere proprietà che permettono loro di agire su altri corpi che presentano le stesse proprietà.

Risolvere un problema dinamico significa, nota una forza, trovare la posizione in funzione del tempo, cioè risolvere l'equazione $\vec{F} = m\vec{a}$.

Ricordando che $\vec{a} = a_x\vec{u}_x + a_y\vec{u}_y + a_z\vec{u}_z = \frac{dv_x}{dt}\vec{u}_x + \frac{dv_y}{dt}\vec{u}_y + \frac{dv_z}{dt}\vec{u}_z = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{u}_x + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{u}_y + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{u}_z$ si ha:

$$F_x\vec{u}_x + F_y\vec{u}_y + F_z\vec{u}_z = m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\vec{u}_x + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{u}_y + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{u}_z\right)$$

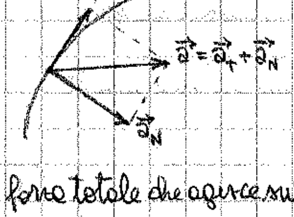
Questa equazione vettoriale dà origine a tre equazioni scalari:

$$\begin{cases} F_x = m\dfrac{d^2x}{dt^2} \\ F_y = m\dfrac{d^2y}{dt^2} \\ F_z = m\dfrac{d^2z}{dt^2} \end{cases}$$

Si tratta di tre equazioni differenziali del II ordine. Quando si conosce l'accelerazione, occorre specificare le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ v_x(0) = v_{x0} \end{cases} \quad \begin{cases} y(0) = y_0 \\ v_y(0) = v_{y0} \end{cases} \quad \begin{cases} z(0) = z_0 \\ v_z(0) = v_{z0} \end{cases}$$

Consideriamo un corpo che percorre una traiettoria γ:

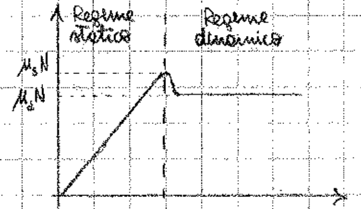


$$\vec{F} = m\vec{a}$$

In coordinate intrinseche: $\vec{F} = m\left(\frac{dv}{dt}\vec{u}_T + \frac{v^2}{R}\vec{u}_N\right)$

La forza deve essere parallela al vettore $\vec{a}$. Quando un corpo percorre una traiettoria, la forza totale che agisce sul corpo non è parallela alla traiettoria.

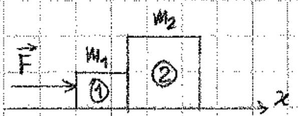
La situazione che si verifica in realtà è rappresentata nella seguente figura:



μ_s è detto coefficiente di attrito statico, mentre μ_d è detto coefficiente di attrito dinamico e si ha $\mu_d < \mu_s$.
Se N è la forza normale esercitata dal piano, $\mu_s N$ è la forza di attrito massimo, mentre $f_d = \mu_d N$ è la forza di attrito dinamico.
La forza di attrito statico è sempre un'incognita: $f_s \le \mu_s N$; la forza di attrito dinamico f_d, invece, è nota.

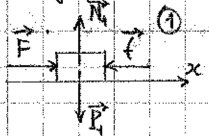
μ_s e μ_d sono numeri puri, cioè non hanno unità di misura.

Esempio:

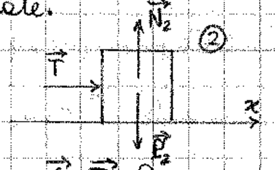


a) Studiare il movimento del sistema quando il piano d'appoggio è liscio (non c'è attrito).

Per risolvere il problema, si disegnano i diagrammi di corpo libero, in cui si rappresentano singolarmente i corpi e le forze su di essi applicate.



$\vec{f}$ è dovuta alla presenza di m_2.



$\vec{T}$ è dovuta alla presenza di m_1

$\vec{f}$ e $\vec{T}$ sono una coppia di azione e reazione $\Longrightarrow \vec{f}+\vec{T}=0$

$$\begin{cases} \vec{F}+\vec{N_1}+\vec{f}+\vec{P_1}=m_1\vec{a_1} & (1) \\ \vec{N_2}+\vec{T}+\vec{P_2}=m_2\vec{a_2} & (2) \end{cases}$$

$$\vec{a_1}=\vec{a_2}=\vec{a}=a\vec{u}_x \Longrightarrow \begin{cases} F\vec{u}_x+N_1\vec{u}_y-T\vec{u}_x-m_1g\vec{u}_y=m_1a\vec{u}_x & (1) \\ N_2\vec{u}_y+T\vec{u}_x-m_2g\vec{u}_y=m_2a\vec{u}_x & (2) \end{cases}$$

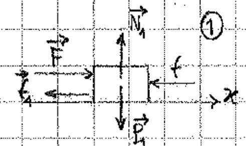
$$(1)\ \begin{cases} x) & F-T=m_1a \\ y) & N_1-m_1g=0 \Longrightarrow N_1=m_1g \end{cases}$$

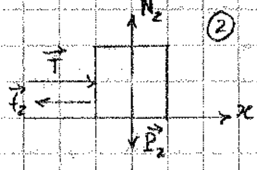
$$(2)\ \begin{cases} x) & T=m_2a \\ y) & N_2-m_2g=0 \Longrightarrow N_2=m_2g \end{cases}$$

$$\begin{cases} F-T=m_1a \\ T=m_2a \end{cases}$$

$$F=(m_1+m_2)a \Longrightarrow a=\frac{F}{m_1+m_2} \Longrightarrow \boxed{T=\frac{m_2}{m_1+m_2}F}$$

b) Studiare il movimento del sistema quando il piano è scabro (c'è attrito).





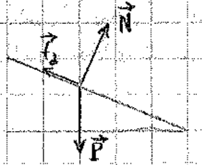
$$\begin{cases} \vec{F}+\vec{N_1}+\vec{f}+\vec{P_1}+\vec{f_1}=m_1\vec{a} & (1) \\ \vec{N_2}+\vec{T}+\vec{P_2}+\vec{f_2}=m_2\vec{a} & (2) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} F\vec{u}_x+N_1\vec{u}_y-T\vec{u}_x-m_1g\vec{u}_y-f_1\vec{u}_x=m_1a\vec{u}_x & (1) \\ N_2\vec{u}_y+T\vec{u}_x-m_2g\vec{u}_y-f_2\vec{u}_x=m_2a\vec{u}_x & (2) \end{cases}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 39 di 258

$f_s \leq \mu_s N = \mu_s mg\cos\theta \implies mg\,\text{sen}\,\theta \leq \mu_s mg\cos\theta \implies \boxed{tg\theta \leq \mu_s}$

θ^* è tale che $tg\theta^* = \mu_s \implies$ Per $\theta < \theta^*$ il corpo sta fermo.

2) Corpo in movimento. $\theta > \theta^*$ e $\vec{a} \neq 0$



$\vec{N} + \vec{P} + \vec{f}_d = m\vec{a}$

con $\vec{f}_d = -f_d \vec{u}_x$

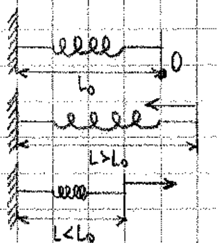
$N\vec{u}_y + mg\,\text{sen}\,\theta\,\vec{u}_x - mg\cos\theta\,\vec{u}_y - f_d\vec{u}_x = ma\vec{u}_x$

$$\begin{cases} x) & mg\,\text{sen}\,\theta - f_d = ma \\ y) & N = mg\cos\theta \end{cases}$$

$f_d = \mu_d N = \mu_d mg\cos\theta \implies mg\,\text{sen}\,\theta - \mu_d mg\cos\theta = ma \implies \boxed{a = g(\text{sen}\,\theta - \mu_d\cos\theta)}$

Se $a = 0$ (moto uniforme) $\implies \text{sen}\,\theta = \mu_d\cos\theta \implies \mu_d = tg\theta$

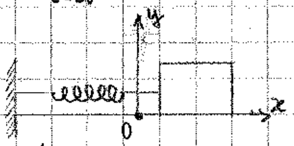
Esempio: Studiare il moto di un corpo attaccato ad una molla (senza attrito).

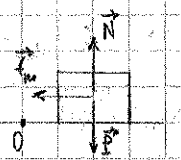


La molla dà origine ad una forza che tende a riportarlo nella condizione iniziale:

$\vec{F} = -K(L - L_0)\vec{u}$ dove K è la costante elastica della molla

Ponendo $x = L - L_0 \implies \boxed{\vec{f}_m = -Kx\vec{u}_x}$





$\vec{F} = m\vec{a} \implies \vec{f}_m + \vec{N} + \vec{P} = m\vec{a} \implies$

$-Kx\vec{u}_x + N\vec{u}_y - mg\vec{u}_y = ma\vec{u}_x$

$$\begin{cases} x) & ma = -Kx \\ y) & N = mg \end{cases}$$

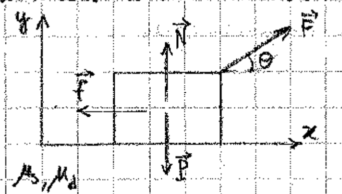
$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \implies m\frac{d^2x}{dt^2} = -Kx \implies \boxed{\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{K}{m}x}$

Ponendo $\omega^2 = \frac{K}{m} \implies \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \implies x(t) = A\,\text{sen}(\omega t + \varphi)$

Dunque, un corpo attaccato ad una molla si muove di moto armonico, dove la pulsazione ω vale K/m.

ESERCIZIO 2

Studiare il moto del sistema in figura nel caso in cui il piano d'appoggio sia scabro.



$\vec{F}+\vec{P}+\vec{f}+\vec{N}=m\vec{a}$

1° caso: equilibrio statico. $a=0$, $f=f_s \leq \mu_s N$

$$\vec{F}+\vec{P}+\vec{f_s}+\vec{N}=0 \implies \begin{cases} x) & F\cos\theta - f_s = 0 \\ y) & F\operatorname{sen}\theta + N - mg = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} f_s = F\cos\theta \\ N = mg - F\operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

Il corpo poggia sul piano se $N>0 \implies mg - F\operatorname{sen}\theta > 0 \implies \boxed{F\operatorname{sen}\theta < mg}$ (1)

Supponendo verificata questa condizione, il corpo sta fermo finchè: $f_s \leq \mu_s N \implies$

$F\cos\theta \leq \mu_s N \implies F\cos\theta \leq \mu_s(mg - F\operatorname{sen}\theta) \implies F\cos\theta + \mu_s F\operatorname{sen}\theta \leq \mu_s mg \implies$

$\boxed{F \leq \frac{\mu_s}{\cos\theta + \mu_s \operatorname{sen}\theta} mg}$ (2)

2° caso: movimento, supponendo che sia verificata (1), ma non (2), cioè che $f_s \leq \mu_s N$ non sia verificata.
Il corpo, pur rimanendo appoggiato, si muove.

$f = f_d = \mu_d N$

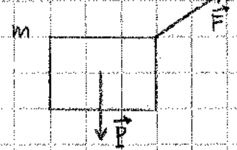
$\vec{F}+\vec{P}+\vec{f_d}+\vec{N}=m\vec{a}$ dove $\vec{a}=a\vec{u}_x$

$$\begin{cases} x) & F\cos\theta - f_d = ma \\ y) & F\operatorname{sen}\theta - mg + N = 0 \end{cases} \implies N = mg - F\operatorname{sen}\theta \implies f_d = \mu_d N = \mu_d(mg - F\operatorname{sen}\theta)$$

x) $F\cos\theta - \mu_d(mg - F\operatorname{sen}\theta) = ma \implies F\cos\theta + \mu_d F\operatorname{sen}\theta - \mu_d mg = ma \implies$

$\boxed{a = \frac{F(\cos\theta + \mu_d \operatorname{sen}\theta)}{m} - \mu_d g}$

3° caso: movimento, supponendo che non sia verificata (1), cioè che sia $N = mg - F\operatorname{sen}\theta < 0$.
Il corpo non appoggia.



$\vec{F}+\vec{P}=m\vec{a}$

$F\cos\theta\,\vec{u}_x + F\operatorname{sen}\theta\,\vec{u}_y - mg\,\vec{u}_y = m(a_x\vec{u}_x + a_y\vec{u}_y)$

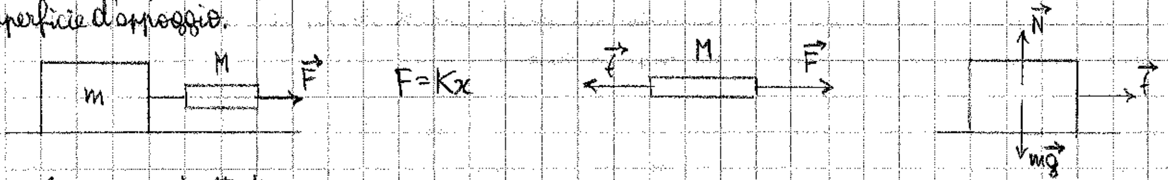
$F\cos\theta\,\vec{u}_x + (F\operatorname{sen}\theta - mg)\vec{u}_y = m(a_x\vec{u}_x + a_y\vec{u}_y)$

$$\begin{cases} ma_x = F\cos\theta \\ ma_y = F\operatorname{sen}\theta - mg \end{cases} \implies \boxed{a_x = \frac{F}{m}\cos\theta} \quad \boxed{a_y = \frac{1}{m}(F\operatorname{sen}\theta - mg)}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 43 di 258

ESERCIZIO 4

Un corpo di massa m è collegato ad una molla che lo tira. Quando il corpo si muove con accelerazione a, di quanto è deformata la molla? Considerare sia il caso senza attrito che con attrito tra corpo e superficie d'appoggio.



Caso 1: assenza di attrito

Ⓜ $F - f = Ma$

ⓜ $\begin{cases} f = ma \\ N = mg \end{cases}$

Se la molla è ideale, $M = 0 \implies$

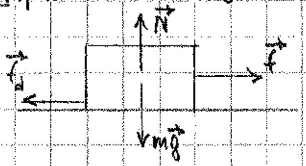
$F = f$

$f = ma$

$Kx = ma$

$x = \frac{m}{K} a$

Caso 2: presenza di attrito



$f_d = \mu_d N = \mu_d mg$

Ⓜ $T - f = Ma$

ⓜ $\begin{cases} f - f_d = ma \\ N = mg \end{cases}$

$f = ma + f_d = ma + \mu_d mg$

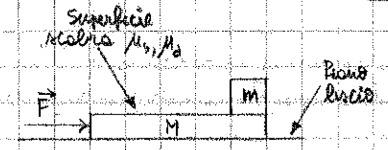
$f = Kx$

$Kx = m(a + \mu_d g) \implies$

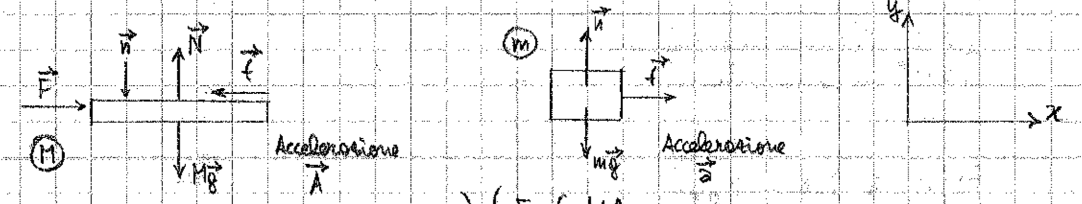
$x = \frac{m}{K}(a + \mu_d g)$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 45 di 258

ESERCIZIO 6



Studiare il moto del sistema rappresentato in figura. Quanto vale la massima forza F che si può applicare affinchè il corpo m non scivoli?



(M) $\vec{F}+\vec{N}+\vec{n}+\vec{f}+M\vec{g}=M\vec{A} \Longrightarrow$ $x)\ F-f=MA$; $y)\ N-n-Mg=0 \Longrightarrow N=n+Mg$

(m) $\vec{n}+\vec{f}+m\vec{g}=m\vec{a} \Longrightarrow$ $x)\ f=ma$; $y)\ n-mg=0 \Longrightarrow n=mg$

$\Longrightarrow N=(m+M)g$

$$\begin{cases} F-f=MA \\ f=ma \end{cases}$$

Caso 1: movimento solidale. $a=A$, $f=f_s \leq \mu_s n = \mu_s mg$

$$\begin{cases} F-f_s=MA \\ f_s=mA \end{cases}$$

$F=(m+M)A \Longrightarrow A=\frac{F}{m+M}$

$f_s=mA=\frac{m}{m+M}F$

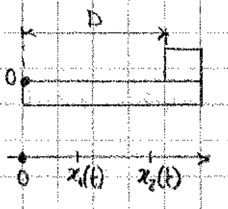
$f_s \leq \mu_s mg \Longrightarrow \frac{\cancel{m}}{m+M}F \leq \mu_s \cancel{m}g \Longrightarrow \boxed{F \leq \mu_s (m+M)g}$

Finchè questa condizione è verificata, il corpo m rimane fermo sul corpo M.

Caso 2: $F > \mu_s (m+M)g$ Non c'è movimento solidale. $a \neq A$, $f=f_d=\mu_d n=\mu_d mg$

$$\begin{cases} F-f_d=MA \\ f_d=ma \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} F-\mu_d mg=MA \\ \mu_d mg=ma \end{cases} \Longrightarrow \begin{matrix} A=\frac{F-\mu_d mg}{M} \\ a=\mu_d g \end{matrix}$$

Ci sarà un movimento relativo. Quanto tempo impiega il corpo a cadere?



$x_{21}(t)=x_2(t)-x_1(t)$

$v_{21}(t)=\frac{dx_{21}}{dt}=v_2(t)-v_1(t)$

$a_{21}(t)=\frac{dv_{21}}{dt}=a_2(t)-a_1(t) \Longrightarrow$

$a_{21}(t)=a_r=a-A=\mu_d g-\frac{F-\mu_d mg}{M}=\frac{\mu_d(M+m)g-F}{M} \quad <0$

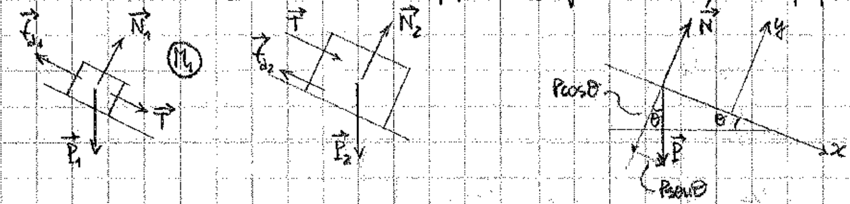
$x_{21}=D+\frac{1}{2}a_r t^2$

t^* è tale che $x_{21}(t^*)=0 \Longrightarrow t^*=\sqrt{\frac{2D}{a_r}}$

ESERCIZIO 9

Studiare il moto del sistema rappresentato in figura, considerato in movimento. Se $\mu_{d_1} \neq \mu_{d_2}$, c'è sempre contatto fra i due corpi?

Descriviamo la situazione in cui i due corpi sono sempre a contatto, cioè M_1 spinge su M_2.



$$(M_1)\quad \begin{cases} x) & N_1 = M_1 g\cos\theta \\ y) & M_1 g\,\mathrm{sen}\theta - f_{d_1} - T = M_1 a_1 \end{cases} \qquad (M_2)\quad \begin{cases} x) & N_2 = M_2 g\cos\theta \\ y) & M_2 g\,\mathrm{sen}\theta - f_{d_2} + T = M_2 a_2 \end{cases}$$

$$f_{d_1} = \mu_{d_1} N_1 = \mu_{d_1} M_1 g\cos\theta$$

$$f_{d_2} = \mu_{d_2} N_2 = \mu_{d_2} M_2 g\cos\theta$$

$a_1 = a_2 = a$ (M_1 spinge su M_2)

$$\begin{cases} (M_1)\ x) & M_1 g\,\mathrm{sen}\theta - \mu_{d_1} M_1 g\cos\theta - T = M_1 a \\ (M_2)\ x) & M_2 g\,\mathrm{sen}\theta - \mu_{d_2} M_2 g\cos\theta + T = M_2 a \end{cases}$$

$$(M_1+M_2)g\,\mathrm{sen}\theta - (\mu_{d_1}M_1 + \mu_{d_2}M_2)g\cos\theta = (M_1+M_2)a \implies$$

$$a = g\,\mathrm{sen}\theta - \frac{\mu_{d_1}M_1 + \mu_{d_2}M_2}{M_1+M_2}\, g\cos\theta$$

Usando l'espressione di a si può ricavare T (passaggi omessi):

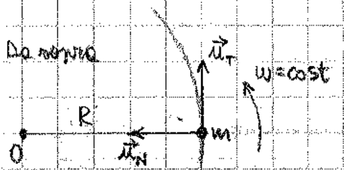
$$T = (\mu_{d_2} - \mu_{d_1}) \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} g\cos\theta$$

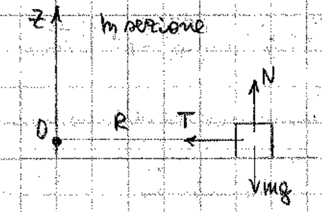
Il movimento che abbiamo descritto esiste se $T > 0$, cioè se $\mu_{d_2} > \mu_{d_1}$.
In caso contrario, il corpo M_1 non preme su M_2 e i due corpi si muovono indipendentemente l'uno dall'altro:

$$(M_1)\quad \begin{cases} x) & N_1 = M_1 g\cos\theta \\ y) & M_1 g\,\mathrm{sen}\theta - f_{d_1} = M_1 a_1 \end{cases} \qquad (M_2)\quad \begin{cases} x) & N_2 = M_2 g\cos\theta \\ y) & M_2 g\,\mathrm{sen}\theta - f_{d_2} = M_2 a_2 \end{cases}$$

Forze centripete

Consideriamo il problema di un corpo di massa m vincolato tramite una fune a ruotare attorno ad un punto O con velocità angolare costante ω. Supponiamo che il piano sia liscio e la fune sia ideale, cioè inestensibile e priva di massa. Quanto vale la forza che deve esercitare la fune?





$$\vec{F}=m\left(\frac{dv}{dt}\vec{u}_T+\frac{v^2}{R}\vec{u}_N\right)$$

$$\vec{F}=\vec{N}+m\vec{g}+\vec{T}$$

$\omega=cost$

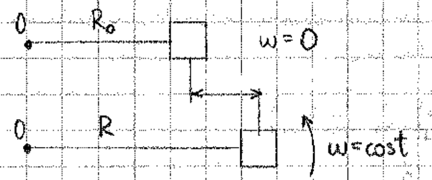
$ds=R\,d\theta$

$v=\frac{ds}{dt}=R\frac{d\theta}{dt}=R\omega$

$$\begin{array}{ll} z) & \left\{\begin{array}{l} N-mg=0 \implies N=mg \\ T=m\frac{v^2}{R} \\ 0=0 \end{array}\right. \\ \vec{u}_N) & \\ \vec{u}_T) & \end{array}$$

$$T=m\frac{\omega^2R^2}{R} \implies \boxed{T=m\omega^2R}$$

Supponiamo ora che la fune sia elastica, di lunghezza R_0. Quanto vale la sua lunghezza R in seguito al movimento?



La fune è elastica $\implies T=K(R-R_0)$

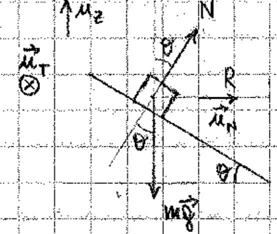
$K(R-R_0)=m\omega^2R \implies KR-m\omega^2R=KR_0 \implies$

$(K-m\omega^2)R=KR_0 \implies R=\frac{K}{K-m\omega^2}R_0 \implies$

$$\boxed{R=\frac{1}{1-\frac{m\omega^2}{K}}R_0}$$

Curve sopraelevate

Ci proponiamo di determinare il legame tra inclinazione di una curva, velocità e raggio di curvatura. Il corpo entri nella curva con una velocità uniforme v e non ci siano attriti.



$$\vec{N}+m\vec{g}=m\left(\frac{dv}{dt}\vec{u}_T+\frac{v^2}{R}\vec{u}_N\right)$$

Se $v=cost \implies \frac{dv}{dt}=0$

$$\vec{N}+m\vec{g}=m\frac{v^2}{R}\vec{u}_N$$

$$\begin{array}{ll} z) & \left\{\begin{array}{l} N\cos\theta-mg=0 \\ N\operatorname{sen}\theta=m\frac{v^2}{R} \\ 0=0 \end{array}\right. \implies \left\{\begin{array}{l} N\cos\theta=mg \\ N\operatorname{sen}\theta=m\frac{v^2}{R} \end{array}\right. \\ \vec{u}_N) & \\ \vec{u}_T) & \end{array}$$

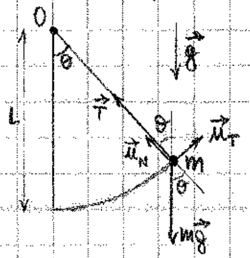
Divido membro a membro

$$tg\theta=\frac{v^2}{Rg} \implies \boxed{R=\frac{v^2}{g\,tg\theta}}$$

Più grande è la velocità, più grande è il raggio, se la curva ha inclinazione costante.

Pendolo semplice

E' un sistema costituito da una particella puntiforme collegata tramite un filo inestensibile ad un punto fisso nel campo della gravità.



$$\vec{T}+m\vec{g}=m\left(\frac{dv}{dt}\vec{u}_T+\frac{v^2}{L}\vec{u}_N\right)$$

$$v=\frac{ds}{dt}=L\frac{d\theta}{dt}$$

$$\begin{matrix}\vec{u}_T) \\ \vec{u}_N)\end{matrix}\begin{cases}-mg\,\text{sen}\theta=m\frac{dv}{dt}\\ T-mg\cos\theta=m\frac{v^2}{L}\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}-\cancel{m}g\,\text{sen}\theta=\cancel{m}L\frac{d^2\theta}{dt^2}\\ T=mg\cos\theta+\frac{m}{\cancel{L}}L^{\cancel{2}}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}-g\,\text{sen}\theta=L\frac{d^2\theta}{dt^2}\\ T=mg\cos\theta+mL\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\end{cases}\quad(1)$$

Analizziamo l'equazione (1):

$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{L}\text{sen}\theta=0$ Equazione differenziale del II ordine non lineare.

Se θ è piccolo ($<10°$), si può operare l'approssimazione $\text{sen}\theta\simeq\theta$ $\Longrightarrow$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{L}\theta=0$$

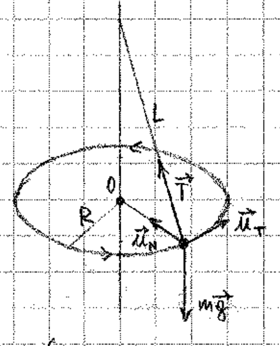
Ponendo $\omega^2=\frac{g}{L}$ si ha l'equazione del moto armonico: $\frac{d^2\theta}{dt^2}+\omega^2\theta=0$

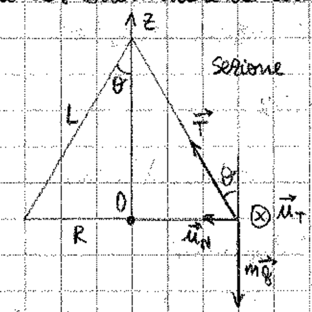
la cui soluzione è $\boxed{\theta=A\,\text{sen}(\omega t+\varphi)}$

$\omega=\sqrt{\frac{g}{L}}=\frac{2\pi}{T}\Longrightarrow\boxed{T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}}$ Il periodo di un pendolo non dipende dall'ampiezza del movimento.

Pendolo conico

Una massa m è appesa ad un filo di lunghezza L ed è messa in movimento attorno alla verticale con una velocità angolare costante ω. Determinare la relazione tra velocità angolare e angolo formato con la verticale.





$\omega=\text{cost}$

$\vec{a}=\frac{v^2}{R}\vec{u}_N$ (poiché $v=\text{cost}$)

$R=L\,\text{sen}\theta$

$\vec{T}+m\vec{g}=m\frac{v^2}{R}\vec{u}_N$

$$\begin{matrix}z) \\ \vec{u}_N)\end{matrix}\begin{cases}T\cos\theta=mg\\ T\,\text{sen}\theta=m\frac{v^2}{R}\end{cases}$$

Divido membro a membro

$$\text{tg}\theta=\frac{v^2}{Rg}\Longleftrightarrow v=\sqrt{Rg\,\text{tg}\theta}=\sqrt{L\,\text{sen}\theta\, g\frac{\text{sen}\theta}{\cos\theta}}\Longrightarrow\boxed{v=\sqrt{\frac{gL}{\cos\theta}}\,\text{sen}\theta}$$

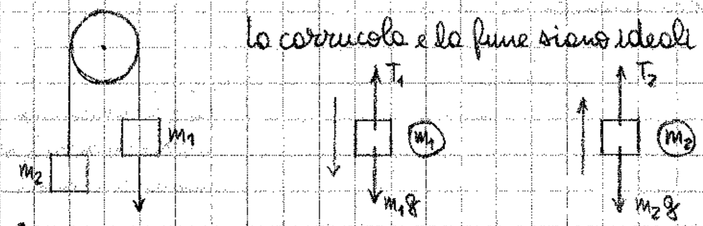
$$\omega=\frac{v}{R}=\sqrt{\frac{gL}{\cos\theta}}\,\text{sen}\theta\,\frac{1}{L\,\text{sen}\theta}\Longrightarrow\boxed{\omega=\sqrt{\frac{g}{L\cos\theta}}}$$

$\omega^2=\frac{g}{L\cos\theta}\Longrightarrow\cos\theta=\frac{g}{L\omega^2}<1\Longrightarrow\boxed{\omega^2>\frac{g}{L}}$ Condizione necessaria affinché il sistema esista, altrimenti il corpo sta fermo sulla verticale.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 53 di 258

<u>Esempio</u>: Misura della gravità tramite la <u>macchina di Atwood</u>.

la carrucola e la fune siano ideali e sia $m_1 > m_2$.



$$\begin{cases} m_1 g - T_1 = m_1 a_1 \\ T_2 - m_2 g = m_2 a_2 \end{cases}$$

la fune è ideale, quindi è inestensibile $\Longrightarrow$ $a_1 = a_2 = a$

la carrucola è ideale $\Longrightarrow$ $T_1 = T_2 = T$

$$\begin{cases} m_1 g - T = m_1 a \\ T - m_2 g = m_2 a \end{cases}$$

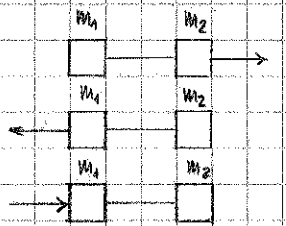
Sommo membro a membro

$$(m_1 - m_2) g = (m_1 + m_2) a \Longrightarrow \boxed{a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g}$$

$$T = m_2 g + m_2 a = m_2 (g + a) = m_2 \left(g + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g \right) \longrightarrow \boxed{T = \frac{2 m_1 m_2}{m_1 + m_2} g}$$

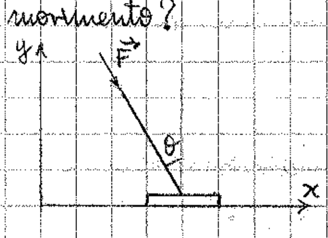
Scelte m_1 e m_2 molto vicine fra loro, l'accelerazione a è piccola e può essere misurata con facilità, in modo da ricavare g con precisione.

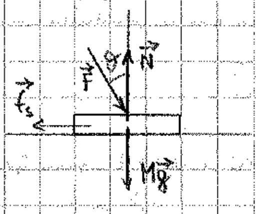
Si definisce <u>asta</u> un sistema che sopporta sia sforzi di trazione che sforzi di compressione



Fune	Asta
SI	SI
SI	SI
NO	SI

<u>Esempio</u>: Si consideri il sistema rappresentato in figura. Fino a che valore dell'angolo θ non si ha movimento?





Finché il corpo sta fermo si ha:

$$\vec{N} + M\vec{g} + \vec{F} + \vec{f_s} = 0$$

$$\begin{matrix} x) \\ y) \end{matrix} \begin{cases} F \operatorname{sen}\theta - f_s = 0 \\ N - Mg - F\cos\theta = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} f_s = F\operatorname{sen}\theta \\ N = Mg + F\cos\theta \end{cases}$$

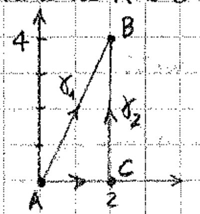
$$f_s \leq \mu_s N \Longrightarrow F\operatorname{sen}\theta \leq \mu_s (Mg + F\cos\theta) \Longrightarrow F(\operatorname{sen}\theta - \mu_s \cos\theta) \leq \mu_s Mg$$

La disequazione è sempre verificata se il termine fra parentesi tonde è < 0 :

$$\operatorname{sen}\theta < \mu_s \cos\theta \longrightarrow \boxed{\operatorname{tg}\theta < \mu_s}$$

Esempio: Sia $\vec{F} = (y^2 - x^2)\vec{u}_x + 3xy\,\vec{u}_y$

Siano dati i punti $A \equiv O$, $B = (2;4)$, $C = (2;0)$. Calcolare il lavoro fatto da $\vec{F}$ per andare da A e B lungo i percorsi γ_1 (retta $A \to B$) e γ_2 (spezzata $A \to C \to B$).



$$W_{A\to B}^{(\gamma_1)} = \int_{A,\gamma_1}^{B} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{A,\gamma_1}^{B} \left\{(y^2 - x^2)\vec{u}_x + 3xy\vec{u}_y\right\}\cdot(dx\,\vec{u}_x + dy\,\vec{u}_y)$$

poiché $d\vec{r} = dx\,\vec{u}_x + dy\,\vec{u}_y$

$$W_{A\to B}^{(\gamma_1)} = \int_{A,\gamma_1}^{B} \left\{(y^2 - x^2)dx + 3xy\,dy\right\}$$

γ_1: $y = 2x \implies dy = 2dx$

$$W_{A\to B}^{(\gamma_1)} = \int_{(0,0)}^{(2,4)} (4x^2 - x^2)dx + (3x\cdot 2x\cdot 2dx) = \int_{(0,0)}^{(2,4)} (3x^2dx + 12x^2dx) = \int_{(0,0)}^{(2,4)} 15x^2 = \frac{15}{3}\left[x^3\right]_0^2 = \underline{\underline{40\ J}}$$

$$W_{A\to B}^{(\gamma_2)} = W_{A\to C}^{(\gamma_2)} + W_{C\to B}^{(\gamma_2)} = \int_{A,\gamma_2}^{C} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{C,\gamma_2}^{B} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{A,\gamma_2}^{C} \left\{(y^2 - x^2)dx + 3xy\,dy\right\} + \int_{C,\gamma_2}^{B} \left\{(y^2 - x^2)dx + 3xy\,dy\right\}$$

$$\gamma_2: \begin{cases} y = 0 & A \to C \implies dy = 0 \\ x = 2 & C \to B \implies dx = 0 \end{cases}$$

$$W_{A\to B}^{(\gamma_2)} = \int_{(0,0)}^{(2,0)} -x^2dx + \int_{(2,0)}^{(2,4)} 6y\,dy = -\frac{1}{3}\left[x^3\right]_0^2 + 3\left[y^2\right]_0^4 = -\frac{1}{3}\cdot 8 + 3\cdot 16 = \frac{-8+144}{3} = \underline{\underline{\frac{136}{3}\ J}}$$

Il lavoro dipende dal punto iniziale, del punto finale e, in genere, anche dal percorso.

04-04-11

Esempio: Sia $\vec{F} = 2xy\,\vec{u}_x + x^2\vec{u}_y$.

Calcolare il lavoro fatto da $\vec{F}$ lungo γ_1 e γ_2 dell'esempio precedente.

$$\vec{F}\cdot d\vec{r} = (2xy\vec{u}_x + x^2\vec{u}_y)\cdot(dx\,\vec{u}_x + dy\,\vec{u}_y) = 2xy\,dx + x^2dy$$

$$W_{A\to B}^{(\gamma_1)} = \int_{A,\gamma_1}^{B} (2xy\,dx + x^2dy)_{y=2x} = \int_{(0,0),\gamma_1}^{(2,4)} (4x^2dx + 2x^2dx) = 2\left[x^3\right]_0^2 = \underline{16\ J}$$

$$W_{A\to B}^{(\gamma_2)} = \int_{A,\gamma_2}^{B} (2xy\,dx + x^2dy) = \int_{A,\gamma_2}^{C} (2xy\,dx + x^2dy)_{y=0} + \int_{C,\gamma_2}^{B} (2xy\,dx + x^2dy)_{x=2} = 0 + 4\int_{(2,0)}^{(2,4)} dy = \underline{16\ J}$$

In questo caso il lavoro non dipende dal percorso.

Consideriamo tutte le forze applicate ad un corpo e sia R la loro risultante: $\vec{R} = \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i$

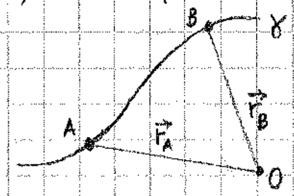
Il lavoro Totale vale:

$$W_{T(A\to B)}^{(\gamma)} = \int_{A,\gamma}^{B} \vec{R}\cdot d\vec{r} = \int_{A}^{B} \left(\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i\right)\cdot d\vec{r} = \int_{A,\gamma}^{B} \sum_{i=1}^{N}(\vec{F}_i\cdot d\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N}\int_{A,\gamma}^{B} \vec{F}_i\cdot d\vec{r} = \sum_{i=1}^{N} W_{i(A\to B)}^{(\gamma)}$$

Quando su un corpo si esercitano più forze, il lavoro totale fatto per andare dal punto iniziale al punto finale è uguale alla somma dei lavori delle singole forze.

Lavoro di una forza costante

Si consideri una forza $\vec{F}=\text{cost}$, cioè non dipendente dalla posizione $\vec{r}$.



$\vec{F}=F_x\vec{u}_x+F_y\vec{u}_y$

$d\vec{r}=dx\,\vec{u}_x+dy\,\vec{u}_y$

$\vec{F}\cdot d\vec{r}=F_x dx+F_y dy$

$$W_{A\to B}^{(\gamma)}=\int_{A\,\gamma}^{B}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_{A\,\gamma}^{B}(F_x dx+F_y dy)=\int_{A\,\gamma}^{B}F_x dx+\int_{A\,\gamma}^{B}F_y dy=F_x\int_{A\,\gamma}^{B}dx+F_y\int_{A\,\gamma}^{B}dy=F_x[x(B)-x(A)]+F_y[y(B)-y(A)]$$

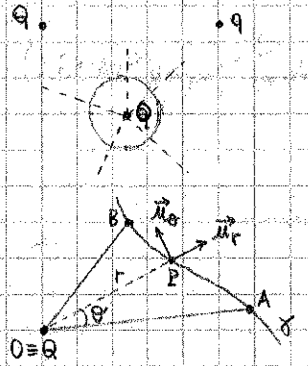
Ponendo $\vec{r}=x\vec{u}_x+y\vec{u}_y$ si ha $\vec{r}(A)=x(A)\vec{u}_x+y(A)\vec{u}_y$ e $\vec{r}(B)=x(B)\vec{u}_x+y(B)\vec{u}_y$ $\Longrightarrow$

$$W_{A\to B}^{(\gamma)}=\vec{F}\cdot[\vec{r}(B)-\vec{r}(A)]$$

Definendo l'<u>energia potenziale</u> E_p come $\boxed{E_p=-\vec{F}\cdot\vec{r}}$ $\Longrightarrow$ $\boxed{W_{A\to B}^{(\gamma)}=E_p(A)-E_p(B)}$

Una forza indipendente dalla posizione, per andare dal punto A al punto B, svolge un lavoro che non dipende dalla traiettoria percorsa, ma solo dalla posizione iniziale e finale.

Lavoro della forza di Coulomb (NO!)



$\vec{F}=K\dfrac{Qq}{r^2}\vec{u}_r$

La forza coulombiana è una <u>forza centrale</u>, cioè la sua retta d'azione passa sempre per lo stesso punto ed il suo modulo è funzione soltanto di r: $|\vec{F}|=f(r)$

Poiché la forza è radiale, conviene usare coordinate polari.

$d\vec{r}=d(r\vec{u}_r)=dr\,\vec{u}_r+r\,d\vec{u}_r=dr\,\vec{u}_r+r\,d\theta\,\vec{u}_\theta$

$$W_{A\to B}^{(\gamma)}=\int_{A\,\gamma}^{B}\left(K\frac{Qq}{r^2}\vec{u}_r\right)\cdot\left(dr\,\vec{u}_r+r\,d\theta\,\vec{u}_\theta\right)=\int_{A\,\gamma}^{B}K\frac{Qq}{r^2}dr=KQq\int_{(r_A,\theta_A)}^{(r_B,\theta_B)}\frac{dr}{r^2}=$$

$$=-KQq\left[\frac{1}{r}\right]_{r_A}^{r_B}=-K\frac{Qq}{r_B}+K\frac{Qq}{r_A}\Longrightarrow\boxed{W_{A\to B}^{(\gamma)}=K\frac{Qq}{r_A}-K\frac{Qq}{r_B}}$$

Il lavoro fatto dalla forza di Coulomb non dipende dal percorso γ.

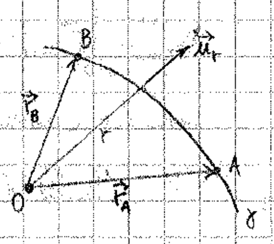
Introducendo l'<u>energia potenziale</u> E_p come $\boxed{E_p=K\dfrac{Qq}{r}}$ $\Longrightarrow$ $\boxed{W_{A\to B}^{(\gamma)}=E_p(A)-E_p(B)}$

Lavoro di una forza centrale

Sia $\vec{F}=f(r)\vec{u}_r$

$$W_{A\to B}^{(\gamma)}=\int_{A\,\gamma}^{B}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_{A\,\gamma}^{B}\{f(r)\vec{u}_r\}\cdot\{dr\,\vec{u}_r+r\,d\theta\,\vec{u}_\theta\}=$$

$$=\int_{A\,\gamma}^{B}f(r)\,dr\equiv\int_{r_A}^{r_B}f(r)\,dr$$



Il lavoro compiuto da una qualunque forza centrale per andare da un punto ad un altro punto non dipende dal percorso compiuto.

Questa funzione è quella che è stata chiamata <u>energia potenziale E_p</u>:

$$\boxed{W_{A\to B} = f(A,B) = E_p(A) - E_p(B)}$$

Forza	E_p
Peso	mgy
Costante	$-\vec{F}\cdot\vec{r}$
Coulomb	$K\frac{Qq}{r}$
Elastica	$\frac{1}{2}Kx^2$

Proprietà di una forza conservativa:

- Scambiando A con B si ha $W_{B\to A} = E_p(B) - E_p(A) = -W_{A\to B}$
- $W_{A\to B} + W_{B\to A} = 0 \Longrightarrow$

$$\oint_{\gamma_1+\gamma_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$$

la circuitazione di una forza conservativa è nulla.

Condizioni di conservatività di una forza

Consideriamo una forza conservativa nel caso piano.

$$\left.\begin{aligned} W_{A\to B} &= \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} \\ W_{A\to B} &= E_p(A) - E_p(B) = -\int_A^B dE_p \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int_A^B dE_p \Longrightarrow \int_A^B (\vec{F}\cdot d\vec{r} + dE_p) = 0 \quad \forall A,B \Longrightarrow \vec{F}\cdot d\vec{r} + dE_p = 0$$

N.B. Se $f(x,y)$ è una qualsiasi funzione di due variabili $\Longrightarrow$

Il differenziale di f è $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$

Poichè E_p è, in genere, una funzione di due variabili, possiamo scrivere:

$$(F_x\vec{u}_x + F_y\vec{u}_y)\cdot(dx\,\vec{u}_x + dy\,\vec{u}_y) + \frac{\partial E_p}{\partial x}dx + \frac{\partial E_p}{\partial y}dy = 0 \Longrightarrow$$

$$F_x dx + F_y dy + \frac{\partial E_p}{\partial x}dx + \frac{\partial E_p}{\partial y}dy = 0 \Longrightarrow \left(F_x + \frac{\partial E_p}{\partial x}\right)dx + \left(F_y + \frac{\partial E_p}{\partial y}\right)dy = 0 \quad \forall dx, dy$$

dx e dy sono linearmente indipendenti. Una combinazione lineare di quantità linearmente indipendenti uguale a zero implica che le quantità che si combinano devono essere nulle, perciò:

$$F_x + \frac{\partial E_p}{\partial x} = 0 \quad e \quad F_y + \frac{\partial E_p}{\partial y} = 0$$

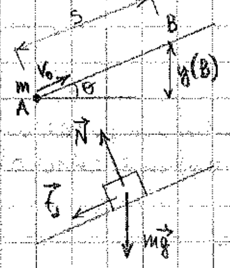
Dunque, se una forza è conservativa, esiste E_p e sussistono le relazioni $F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x}$ e $F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y}$.

Sostituendo queste ultime nell'espressione $\vec{F} = F_x\vec{u}_x + F_y\vec{u}_y$ si ottiene

$$\vec{F} = -\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{u}_x - \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{u}_y \Longrightarrow \boxed{\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p}$$ dove $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{u}_y$ è detto <u>gradiente</u>

Una forza conservativa è uguale a meno il gradiente del potenziale.

Esempio: Si consideri il sistema rappresentato in figura. La particella di massa m, posta nel punto A, viene sparata con velocità v_0. Qual è la distanza s che percorre prima di fermarsi?
Sia μ_d il coefficiente di attrito dinamico del piano.



$\vec{N}$ non fa lavoro (è ⊥ alla traiettoria) e a noi non importa.

$N = mg\cos\theta$

$W_{A\to B}^{(\gamma)}(NC) = \int_{A,\gamma}^{B} -\mu_d N ds = -\mu_d mg\cos\theta\, s$

$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + mgy$

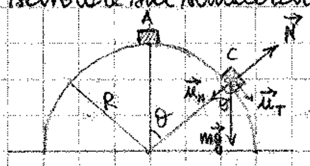
$E(A) = \frac{1}{2}mv^2(A) + mgy(A) = \frac{1}{2}mv_0^2$

$E(B) = \frac{1}{2}mv^2(B) + mgy(B) = mgs\,\text{sen}\,\theta$

$mgs\,\text{sen}\,\theta - \frac{1}{2}mv_0^2 = -\mu_d mg\cos\theta\, s$

$gs(\text{sen}\,\theta + \mu_d\cos\theta) = \frac{1}{2}v_0^2 \implies s = \dfrac{v_0^2}{2g(\text{sen}\,\theta + \mu_d\cos\theta)}$

Esempio: Si consideri un corpo di massa m posto su un semicerchio come in figura. Il corpo inizia a scivolare sul semicerchio senza attrito. In che posizione avviene il distacco?



$\vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}$

$\vec{N} + m\vec{g} = m\left(\frac{dv}{dt}\vec{u}_T + \frac{v^2}{R}\vec{u}_N\right)$

$$\begin{cases} \vec{u}_N) & -N + mg\cos\theta = m\frac{v^2}{R} \\ \vec{u}_T) & mg\,\text{sen}\,\theta = m\frac{dv}{dt} \end{cases}$$

$$\begin{cases} N = mg\cos\theta - m\frac{v^2}{R} \\ g\,\text{sen}\,\theta = \frac{dv}{dt} \end{cases}$$

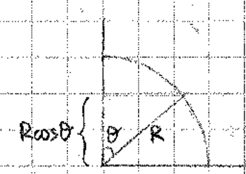
Questa equazione dà la condizione del distacco $(N=0)$

Non siamo in grado di integrare questa equazione

Possiamo allora attraverso il teorema di conservazione dell'energia per trovare l'espressione di v in funzione di θ.

$E(A) = E_k(A) + E_p(A) = 0 + mgR$ Posizione iniziale

$E(C) = E_k(C) + E_p(C) = \frac{1}{2}mv^2(\theta) + mgR\cos\theta$ Posizione finale



$E(A) = E(C) \implies \cancel{m}gR = \frac{1}{2}\cancel{m}v^2(\theta) + \cancel{m}gR\cos\theta \implies$

$v^2(\theta) = 2gR(1-\cos\theta)$ Espressione di v in funzione di θ

$N = mg\cos\theta - \frac{m}{R}2gR(1-\cos\theta) = mg(\cos\theta - 2 + 2\cos\theta) = mg(3\cos\theta - 2)$

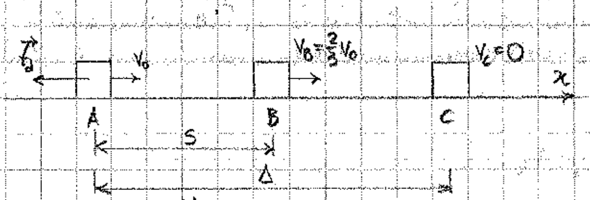
Il distacco avviene quando $N = 0 \implies$

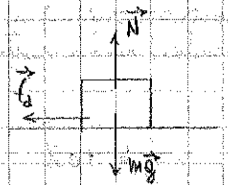
θ^* è tale che $N(\theta^*) = 0 \implies 3\cos\theta^* - 2 = 0 \implies \cos\theta^* = \frac{2}{3}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 63 di 258

ESERCIZIO 3

Un corpo di massa m scivola lungo un piano orizzontale scabro con velocità iniziale v_0. La velocità è ridotta a $\frac{2}{3}v_0$ dopo aver percorso un tratto pari a s. Determinare il coefficiente di attrito dinamico μ_d, lo spazio complessivamente percorso dal corpo prima di fermarsi Δ e il lavoro complessivo della forza d'attrito.





$N = mg$

$f_d = \mu_d N = \mu_d mg$

$$E_k(B)-E_k(A)=W^{(t)}_{A\to B}$$

$$W_{A\to B}=\int_A^B \vec{f}_d\cdot d\vec{r}=\int_A^B(-\mu_d mg\vec{u}_x)\cdot(dx\,\vec{u}_x)=-\mu_d mg\int_A^B dx=-\mu_d mg[x(B)-x(A)]=-\mu_d mgs$$

$$\frac{1}{2}mv_B^2-\frac{1}{2}mv_A^2=-\mu_d mgs \implies \frac{1}{2}m\frac{4}{9}v_0^2-\frac{1}{2}mv_0^2=-\mu_d mgs \implies \frac{4-9}{18}\cancel{m}v_0^2=-\mu_d\cancel{m}gs \implies$$

$$\frac{5}{18}v_0^2=\mu_d gs \implies \underline{\underline{\mu_d=\frac{5}{18}\frac{v_0^2}{gs}}}$$

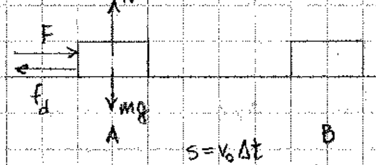
$$E_k(C)-E_k(A)=W^{(t)}_{A\to C}=-\mu_d mg\Delta$$

$$0-\frac{1}{2}mv_0^2=-\frac{5}{18}\frac{v_0^2}{gs}mg\Delta \implies \underline{\underline{\Delta=\frac{9}{5}s}}$$

$$W^{(t)}_{A\to C}=-\mu_d mg\Delta=-\frac{5}{18}\frac{v_0^2}{gs}mg\frac{9}{5}s \implies \underline{\underline{W^{(t)}_{A\to C}=-\frac{1}{2}v_0^2 m}}$$

ESERCIZIO 4

Un corpo di massa m si muove con velocità costante v_0 lungo un asse orizzontale sotto l'azione di una forza costante F parallela e concorde con la velocità. Calcolare il coefficiente d'attrito μ_d, il lavoro compiuto dalla forza F in un intervallo di tempo Δt e il lavoro compiuto dalla forza d'attrito nello stesso intervallo Δt. Ad un certo istante t_0 il corpo, sempre sotto l'azione della forza F, entra in una zona in cui il coefficiente di attrito vale $\mu_d^*=2\mu_d$. Scrivere le espressioni quantitative della velocità e della posizione del corpo a partire dall'istante t_0.



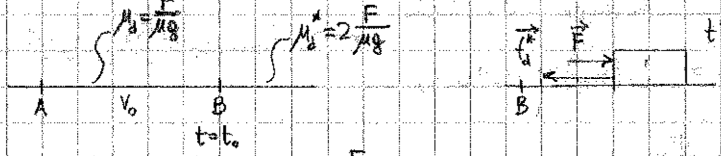
$f_d=\mu_d mg$

Poiché $v_0=\text{cost} \implies a=0$

$$F-f_d=ma=0 \implies F=f_d=\mu_d mg \implies \underline{\underline{\mu_d=\frac{F}{mg}}}$$

$$W(F,\Delta t)=Fs=\underline{Fv_0\Delta t}$$

$$E_k(B)-E_k(A)=0=W_{A\to B} \implies W_{A\to B}(F)+W_{A\to B}(f_d)=0 \implies W_{A\to B}(f_d)=-W_{A\to B}(F)=\underline{\underline{-Fv_0\Delta t}}$$

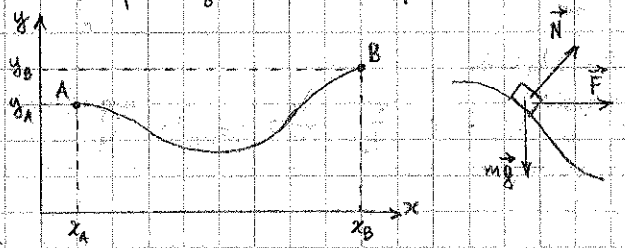


$$ma=F-f_d^*=F-\mu_d^* mg=F-2\frac{F}{mg}mg=-F \implies a=-\frac{F}{m}$$

$$\text{Per } t\geq t_0 \implies \begin{cases} v(t)=\underline{\underline{v_0-\frac{F}{m}t}} \\ s(t)=\underline{\underline{v_0t-\frac{1}{2}\frac{F}{m}t^2}} \end{cases}$$

ESERCIZIO 7

Un punto materiale di massa m si muove lungo la guida liscia indicata in figura dal punto A di ascissa x_A e quota y_A al punto B di ascissa x_B e quota y_B. Al corpo è applicata una forza costante orizzontale F. Calcolare il lavoro delle forze agenti durante lo spostamento da A a B e la velocità finale v_B se quella iniziale è nulla.



$\vec{N}$ non fa lavoro

$\vec{R} = \vec{F} + m\vec{g} = F\vec{u}_x - mg\vec{u}_y$ Risultante che fa lavoro

$R_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x}$ $\qquad R_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y}$

$$\frac{\partial E_p}{\partial x} = -R_x = -F \implies E_p(x,y) = -Fx + f(y)$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial y} = -R_y = mg \implies E_p(x,y) = mgy + g(x)$$

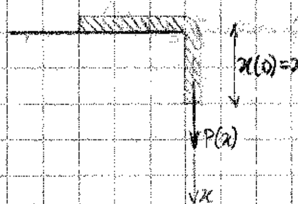
$$\implies E_p(x,y) = -Fx + mgy + K$$

$$W_{A\to B} = E_p(A) - E_p(B) = -Fx_A + mgy_A - (-Fx_B + mgy_B) = \underline{F(x_B - x_A) + mg(y_A - y_B)}$$

$$E_k(B) - \underbrace{E_k(A)}_{=0} = W_{A\to B} \implies \frac{1}{2}mv_B^2 = W_{A\to B} \implies \underline{v_B = \sqrt{\frac{2}{m}\left[F(x_B - x_A) + mg(y_A - y_B)\right]}}$$

ESERCIZIO 8

Una fune omogenea di lunghezza L e massa M è appoggiata su un piano liscio come mostrato in figura. Posto $\lambda = M/L$ la sua densità lineare di massa, determinare la legge oraria.



$$P(x) = m(x)g = \lambda x g$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$Ma = m(x)g \implies M\frac{d^2x}{dt^2} = \lambda x g \implies \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{\lambda g}{M}x = 0$$

$$\frac{\lambda g}{M} = \frac{M}{L}\cdot\frac{g}{M} = \frac{g}{L} \implies$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{g}{L}x = 0}$$ Equazione differenziale del II ordine a coefficienti costanti

$$x = ce^{\alpha t} \implies \frac{dx}{dt} = \alpha c e^{\alpha t} \implies \frac{d^2x}{dt^2} = \alpha^2 c e^{\alpha t}$$

$$\alpha^2 c e^{\alpha t} - \frac{g}{L}ce^{\alpha t} = 0 \implies ce^{\alpha t}\left(\alpha^2 - \frac{g}{L}\right) = 0 \implies \alpha^2 - \frac{g}{L} = 0 \implies \alpha = \pm\sqrt{\frac{g}{L}}$$

$$x(t) = c_1 e^{\sqrt{\frac{g}{L}}t} + c_2 e^{-\sqrt{\frac{g}{L}}t}$$

Condizioni iniziali: $\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = 0 \end{cases}$

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{g}{L}}c_1 e^{\sqrt{\frac{g}{L}}t} - \sqrt{\frac{g}{L}}c_2 e^{-\sqrt{\frac{g}{L}}t}$$

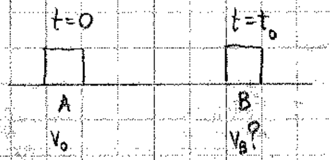
$$\begin{cases} \sqrt{\frac{g}{L}}(c_1 - c_2) = 0 \implies c_1 = c_2 \\ c_1 + c_2 = x_0 \implies c_1 = \frac{x_0}{2} = c_2 \end{cases}$$

$$x(t) = \frac{x_0}{2}\left(e^{\sqrt{\frac{g}{L}}t} + e^{-\sqrt{\frac{g}{L}}t}\right) = \underline{x_0\cosh\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right)}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 67 di 258

ESERCIZIO 11

Un'auto di massa m inizialmente in moto con velocità v_0 accelera in un intervallo di tempo t_0. Il motore eroga una potenza costante P. Calcolare la velocità dell'auto dopo il tempo t_0. Si assuma che la strada sia orizzontale e che non ci siano attriti.



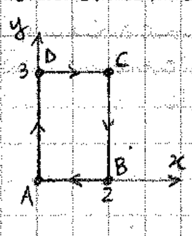
$$P=\frac{dW}{dt}=\cos t \implies dW=P\,dt \implies W_{A\to B}=\int_0^{t_0}P\,dt=Pt_0$$

$$E_k(B)-E_k(A)=W_{A\to B}$$

$$\frac{1}{2}mv_B^2-\frac{1}{2}mv_0^2=Pt_0 \implies \underline{v_B=\sqrt{v_0^2+\frac{2Pt_0}{m}}}$$

ESERCIZIO 12

Un punto materiale soggetto all'azione di una forza $\vec{F}=3y^2\vec{u}_x+2x^2y\vec{u}_y$ si muove sul piano xy lungo la traiettoria chiusa ADCBA riportata in figura. La forza è conservativa? Calcolare il lavoro compiuto dalla forza per descrivere il circuito.



$$\vec{F}=3y^2\vec{u}_x+2x^2y\vec{u}_y \qquad F_x=3y^2 \qquad F_y=2x^2y$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial y}=6y \qquad \frac{\partial F_y}{\partial x}=4xy \qquad \frac{\partial F_x}{\partial y}\neq\frac{\partial F_y}{\partial x} \implies \underline{\vec{F}\text{ non è conservativa}}$$

$$W_{ADCBA}=\underset{x=0}{\int_A^D}+\underset{y=3}{\int_D^C}+\underset{x=2}{\int_C^B}+\underset{y=0}{\int_B^A}$$

$$\vec{F}\cdot d\vec{r}=(3y^2\vec{u}_x+2x^2y\vec{u}_y)\cdot(dx\,\vec{u}_x+dy\,\vec{u}_y)=3y^2dx+2x^2y\,dy$$

$$\int_A^D(3y^2dx+2x^2y\,dy)_{x=0,\,dx=0}=0$$

$$\int_D^C(3y^2dx+2x^2y\,dy)_{y=3,\,dy=0}=\int_0^2 27\,dx=54\text{ J}$$

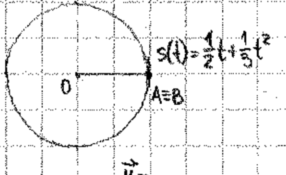
$$\int_C^B(3y^2dx+2x^2y\,dy)_{x=2,\,dx=0}=\int_3^0 8y\,dy=4\left[y^2\right]_3^0=-36\text{ J}$$

$$\int_B^A(3y^2dx+2x^2y\,dy)_{y=0,\,dy=0}=0$$

$$W_{ADCBA}=54-36=\underline{18\text{ J}}$$

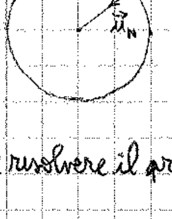
ESERCIZIO 13

Un punto materiale di massa m si muove di moto circolare con legge oraria $s(t)=\frac{1}{2}t+\frac{1}{3}t^2$ dove s è espresso in metri. All'istante t^* l'accelerazione del punto in modulo vale a^*. Calcolare il raggio R della circonferenza e il lavoro della forza agente in un giro completo a partire dall'istante $t=0$.



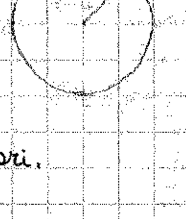
$$v=\frac{ds}{dt}=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}t$$

$$\frac{dv}{dt}=\frac{2}{3}$$



Coordinate intrinseche

$$\vec{a}=\frac{dv}{dt}\vec{u}_T+\frac{v^2}{R}\vec{u}_N$$



Coordinate polari

$$\vec{a}=\frac{dv}{dt}\vec{u}_\theta-\frac{v^2}{R}\vec{u}_r$$

Per risolvere il problema conviene usare coordinate polari.

Il teorema di conservazione dell'energia è un altro modo di enunciare la legge di Newton $\vec{F}=m\vec{a}$. 07-04-11

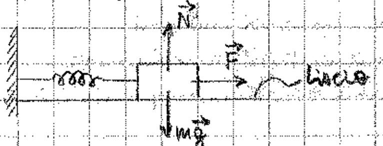
$E_K(A)+E_P(A)=E_K(B)+E_P(B)=E$

$\frac{1}{2}mv^2+E_P(x)=E \implies \boxed{\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+E_P(x)=E}$ (1) Equazione differenziale del I ordine non lineare.

Principio di Newton: $F=ma \implies \boxed{F(x)=m\frac{d^2x}{dt^2}}$ (2) Equazione differenziale del II ordine lineare.

La (1) è vantaggiosa perché è del primo ordine, è svantaggiosa perché non è lineare. La (2) è vantaggiosa perché è lineare, è svantaggiosa perché è del secondo ordine. Se lo scopo è determinare $x(t)$ note le forze, è indifferente utilizzare (1) o (2) (ammesso che le forze siano conservative). Il grosso vantaggio di (1) è che in essa compaiono solo le forze che fanno lavoro, invece la legge di Newton dà tutto. La (1) in genere da sola non permette di risolvere completamente un problema ingegneristico.

<u>Esempio:</u> Un corpo di massa m collegato ad una molla è appoggiato su un piano orizzontale liscio. Al tempo iniziale la molla è in posizione di riposo. Sul corpo agisce una forza costante F come in figura. Se per $t=0$, $x(0)=0$ e $v(0)=0$, determinare come la velocità dipende dalla posizione $v=v(x)$.



1) Risolviamo il problema applicando il teorema dell'energia cinetica.

$$A=\begin{cases} t=0 \\ x(0)=0 \\ v(0)=0 \end{cases} \qquad B=\begin{cases} t \\ x \\ v(x) \end{cases}$$

$f=F-Kx$ Forza risultante

$E_K(A)=\frac{1}{2}mv^2(A)=0 \qquad E_K(B)=\frac{1}{2}mv^2(x)$

$W_{A\to B}=\int_A^B f\,dx=\int_0^x (F-Kx)dx=Fx-\frac{1}{2}Kx^2$

$\frac{1}{2}mv^2(x)-0=Fx-\frac{1}{2}Kx^2 \implies v^2(x)=\frac{2}{m}x\left(F-\frac{1}{2}Kx\right) \implies \underline{v(x)=\sqrt{\frac{2}{m}x\left(F-\frac{1}{2}Kx\right)}}$

2) Risolviamo il problema integrando l'equazione differenziale del movimento.

$f=ma \implies F-Kx=ma \implies m\frac{d^2x}{dt^2}=K\left(\frac{F}{K}-x\right)$

Poniamo $X=\frac{F}{K}-x \implies \frac{dX}{dt}=-\frac{dx}{dt} \implies \frac{d^2X}{dt^2}=-\frac{d^2x}{dt^2}$

$-\frac{d^2X}{dt^2}=\frac{K}{m}X \implies \frac{d^2X}{dt^2}+\frac{K}{m}X=0$ Equazione dell'oscillatore armonico, con $\omega_0^2=\frac{K}{m}$

$X(t)=A\,sen(\omega_0t+\varphi) \implies \frac{F}{K}-x=A\,sen(\omega_0t+\varphi) \implies x=\frac{F}{K}-A\,sen(\omega_0t+\varphi)$

Ricavando A e φ tramite le condizioni iniziali si risolve il problema.

3) Risolviamo il problema applicando la legge di Newton.

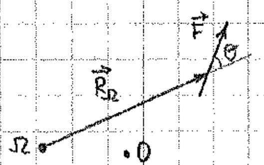
$f=F-Kx \implies a=\frac{f}{m}=\frac{F-Kx}{m}$

L'accelerazione dipende dalla posizione: $a=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=v\frac{dv}{dt}$

$v\frac{dv}{dx}=\frac{F-Kx}{m} \implies \int_0^v v\,dv=\int_0^x \frac{F-Kx}{m}dx \implies \frac{1}{2}v^2=\frac{F}{m}x-\frac{1}{2}\frac{K}{m}x^2 \implies$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 71 di 258

Momento di una forza e momento angolare



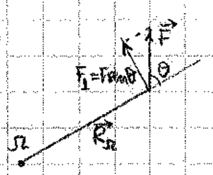
Siano O l'origine del sistema di riferimento, $\vec F$ la forza e Ω un punto qualunque, detto polo, fermo o in moto. Chiamiamo momento di $\vec F$ rispetto al polo Ω la quantità

$\boxed{\vec M_\Omega = \vec R_\Omega \wedge \vec F}$ il cui orientamento è dato dalla regola della mano destra.

Il modulo del momento di $\vec F$ vale $\boxed{M_\Omega = R_\Omega F \operatorname{sen}\theta}$.

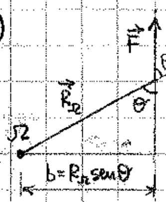
Interpretazioni:

1)



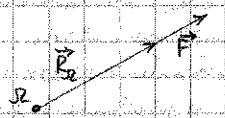
Il momento di una forza rispetto ad un polo è uguale in modulo a R_Ω per la componente della forza ortogonale a R_Ω.

2)

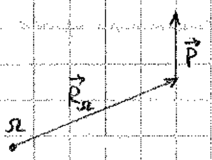


Il momento di una forza rispetto ad un polo è uguale in modulo alla forza per il braccio b, dove il braccio è la distanza del polo dalla retta d'azione della forza.

Dunque, $M=0$ se $b=0$ oppure $F_\perp=0$.



$\vec M_\Omega = \vec R_\Omega \wedge \vec F \equiv 0$



Quando una particella si muove possiamo definire il vettore quantità di moto: $\vec p = m\vec v$.
Chiamiamo momento angolare $\vec L_\Omega$ rispetto al polo Ω la quantità

$\boxed{\vec L_\Omega = \vec R_\Omega \wedge \vec p}$ con proprietà analoghe a quelle del momento di una forza.

Dimensioni e unità di misura:

- $[M] = [R_\Omega][F] = L\cdot M\frac{L}{T^2} = M\frac{L^2}{T^2}$

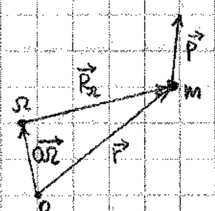
  Nel S.I.: $[M_\Omega] = Nm$ newton·metro

  (N.B. $Nm = J$, ma non si scrive perché si sottolinea il fatto che M_Ω è un vettore)

- $[L] = [R_\Omega][p] = L\cdot M\frac{L}{T} = M\frac{L^2}{T}$

  Nel S.I.: $[L] = m\cdot Kg\frac{m}{s} = Kg\frac{m^2}{s}$

Teorema del momento angolare



Sia O l'origine di un sistema di riferimento inerziale e sia Ω un polo in moto.
Ci proponiamo di determinare con che rapidità varia il momento angolare rispetto a Ω.

$$\vec L_\Omega = \vec R_\Omega \wedge \vec p$$

$$\frac{d\vec L_\Omega}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec R_\Omega \wedge \vec p) = \frac{d\vec R_\Omega}{dt}\wedge \vec p + \vec R_\Omega \wedge \left(\frac{d\vec p}{dt}\right)$$

Poiché $\vec F = \frac{d\vec p}{dt}$ $\Longrightarrow$ $\frac{d\vec L_\Omega}{dt} = \frac{d\vec R_\Omega}{dt}\wedge \vec p + \vec R_\Omega \wedge \vec F = \frac{d\vec R_\Omega}{dt}\wedge\vec p + \vec M_\Omega$

$\vec r$ identifica la posizione della particella, $\vec{O\Omega}$ identifica al passare del tempo la posizione del polo Ω.

$$\vec r = \vec{O\Omega} + \vec R_\Omega \Longrightarrow \vec R_\Omega = \vec r - \vec{O\Omega}$$

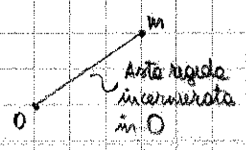
$$\frac{d\vec R_\Omega}{dt} = \frac{d\vec r}{dt} - \frac{d\vec{O\Omega}}{dt} = \vec v - \vec v_\Omega \Longrightarrow$$

$$\frac{d\vec L_\Omega}{dt} = (\vec v - \vec v_\Omega)\wedge \vec p + \vec M_\Omega = \vec v \wedge \vec p - \vec v_\Omega \wedge \vec p + \vec M_\Omega$$

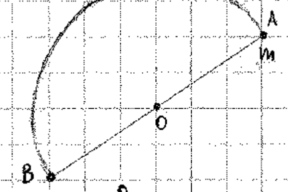
$F_\perp R = M_o \implies$

$dW = M_o d\vartheta \implies \boxed{W_{A\to B} = \int_{\vartheta_A}^{\vartheta_B} M_o d\vartheta}$

Esempio:



L'asta incontra un attrito solo sul perno O. Supponendo che il momento delle forze d'attrito M_a rispetto ad O sia costante, sapendo che l'asta si ferma dopo mezzo giro e conoscendo le condizioni iniziali: per $t=0$, $\omega(0)=\omega_o$, determinare il momento delle forze d'attrito M_a.



Applichiamo il teorema dell'energia cinetica:

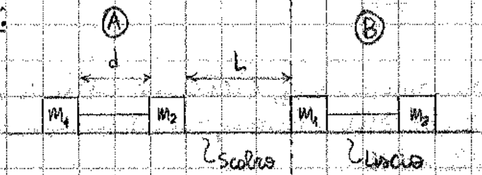
$E_k(B) - E_k(A) = W_{A\to B}$

$E_k(B) = 0 \qquad E_k(A) = \frac{1}{2} m v^2(A) = \frac{1}{2} m(\omega_o R)^2 = \frac{1}{2} m R^2 \omega_o^2$

$W_{A\to B} = \int_{\vartheta_A}^{\vartheta_B} -M_a d\vartheta = -M_A(\vartheta_B - \vartheta_A) = -M_a \pi$

$0 - \frac{1}{2} m R^2 \omega_o^2 = -M_a \pi \implies \underline{M_a = \frac{mR^2\omega_o^2}{2\pi}}$

Esercizio:

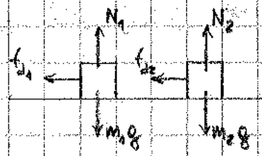


Due corpi di masse m_1 e m_2 sono legati tra loro da un'asta lunga d, di massa trascurabile. Il sistema viene messo in moto lungo l'asse x all'istante $t=0$ tramite la applicazione di una forza F_o durante un tempo τ infinitesimo. I corpi scivolano lungo un piano orizzontale con coefficienti di attrito μ_{d_1} e μ_{d_2}. Dopo aver percorso una distanza L, il corpo 2 entra in una zona in cui l'attrito è nullo. Determinare F_o tale che il sistema abbia velocità nulla quando anche il corpo 1 arriva nella zona con attrito nullo.

$\vec{p}_f - \vec{p}_i = \vec{J} \implies p(0^+) - p(0^-) = \int_0^\tau F_o dt = F_o \tau \implies (m_1+m_2)v_o = F_o\tau \implies v_o = \frac{F_o \tau}{m_1+m_2}$

$E_k(A) = \frac{1}{2}(m_1+m_2)v_o^2 \qquad E_k(B) = 0$

$E_k(B) - E_k(A) = -\frac{1}{2}(m_1+m_2)v_o^2$



$f_{d_1} = \mu_{d_1} N_1 = \mu_{d_1} m_1 g$

$f_{d_2} = \mu_{d_2} N_2 = \mu_{d_2} m_2 g$

$W_1 = -f_{d_1}(L+d) = -\mu_{d_1} m_1 g (L+d)$

$W_2 = -f_{d_2} L = -\mu_{d_2} m_2 g L$

$W_{A\to B} = W_1 + W_2 = -g\left[\mu_{d_1} m_1 (L+d) + \mu_{d_2} m_2 L\right]$

$-\frac{1}{2}(m_1+m_2)v_o^2 = -g\left[\mu_{d_1} m_1 (L+d) + \mu_{d_2} m_2 L\right]$

$v_o = \sqrt{2g \frac{\left[\mu_{d_1} m_1 (L+d) + \mu_{d_2} m_2 L\right]}{m_1+m_2}}$

$\underline{F_o = \frac{m_1+m_2}{\tau} v_o = \frac{1}{\tau}\sqrt{2g(m_1+m_2)\left[\mu_{d_1} m_1 (L+d) + \mu_{d_2} m_2 L\right]}}$

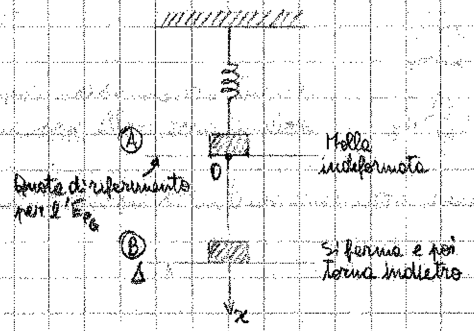
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 75 di 258

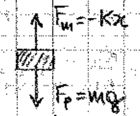
Applichiamo le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} 0 = -\frac{\mu_d mg}{K} + A \operatorname{sen}\varphi \\ v_0 = A\omega_0 \cos\varphi \end{cases}$$

Ricavando A e φ si risolve il problema.

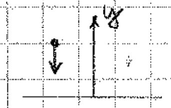
Esercizio: Un corpo di massa m viene appeso ad una molla. Determinare quanto vale la massima deformazione Δ della molla.





$E_{p_m} = \frac{1}{2}Kx^2$ energia potenziale della molla

$F_m = -\frac{dE_p}{dx} = -Kx$



$E_{p_G} = mgy$

$F_p = -\frac{dE_{p_G}}{dy} = -mg$

Con il nostro sistema di riferimento: $E_{p_G} = -mgx$ energia potenziale gravitazionale

$E(A) = E_k(A) + E_p(A) = E_k(A) + E_{p_m}(A) + E_{p_G}(A) = E_{p_m}(A) + E_{p_G}(A)$

$E(B) = E_{p_m}(B) + E_{p_G}(B)$

$E_{p_m}(A) = 0 \qquad E_{p_G}(A) = 0 \qquad E_{p_m}(B) = \frac{1}{2}K\Delta^2 \qquad E_{p_G}(B) = -mg\Delta$

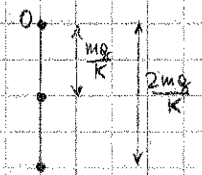
$E(A) = 0 \qquad E(B) = \frac{1}{2}K\Delta^2 - mg\Delta$

$$\Delta\left(\frac{1}{2}K\Delta - mg\right) = 0 \quad \begin{cases} \Delta = 0 \\ \Delta = \frac{2mg}{K} \end{cases}$$

la forza netta è $f = F_p + F_m = mg - Kx$

$f = 0 \Longrightarrow mg = Kx \Longrightarrow x = \frac{mg}{K} = \frac{\Delta}{2}$

Il movimento è di questo tipo:

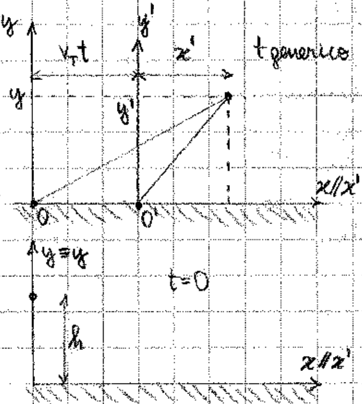


Il corpo oscilla attorno alla posizione intermedia perchè c'è una trasformazione di E_{p_m} in E_{p_G} e viceversa.

$$\underbrace{\frac{d^2x}{dt^2}\vec{u}_x+\frac{d^2y}{dt^2}\vec{u}_y+\frac{d^2z}{dt^2}\vec{u}_z}_{\text{Accelerazione assoluta } \vec{a}}=\underbrace{\frac{d^2x_{O'}}{dt^2}\vec{u}_x+\frac{d^2y_{O'}}{dt^2}\vec{u}_y+\frac{d^2z_{O'}}{dt^2}\vec{u}_z}_{\text{Accelerazione dell'origine della terna mobile } \vec{a}_{O'}}+\underbrace{\frac{d^2x'}{dt^2}\vec{u}_{x'}+\frac{d^2y'}{dt^2}\vec{u}_{y'}+\frac{d^2z'}{dt^2}\vec{u}_{z'}}_{\text{Accelerazione relativa } \vec{a}'}$$

$\boxed{\vec{a}=\vec{a}_{O'}+\vec{a}'}$ Teorema di composizione delle accelerazioni

Esempio: Il sistema O' è solidale ad un treno che si muove di moto rettilineo uniforme con velocità v_T. All'istante $t=0$ un passeggero lascia cadere un'arancia da un'altezza h. Descrivere il moto di caduta visto da O e da O', calcolando in particolare il tempo di caduta t_c e dove cade l'arancia.



$$\begin{cases} x = v_T t + x' \\ y = y' \end{cases}$$

$\vec{a}_{O'}=0$ poichè il treno si muove di MRU

$\vec{a}=\vec{a}'=\vec{g}=-g\vec{u}_y=-g\vec{u}_{y'}$

Consideriamo prima cosa vede l'osservatore O':

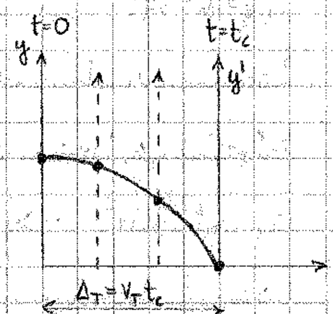
$$\vec{a}'=-g\vec{u}_{y'} \implies \frac{d^2x'}{dt^2}\vec{u}_{x'}+\frac{d^2y'}{dt^2}\vec{u}_{y'}=-g\vec{u}_{y'}$$

$$\begin{cases}\dfrac{d^2x'}{dt^2}=0 \implies \dfrac{dx'}{dt}=\text{cost}=0 \implies x'=\text{cost}=0 \\[2mm] \dfrac{d^2y'}{dt^2}=-g \implies \dfrac{dy'}{dt}=-gt \implies y'=h-\frac{1}{2}gt^2\end{cases} \implies \begin{cases} x'=0 \\ y'=h-\frac{1}{2}gt^2\end{cases}$$

l'arancia tocca terra dopo un tempo t_c tale che $y(t_c)=0 \implies t_c=\sqrt{\frac{2h}{g}}$

Durante questo tempo il treno si è spostato

di una quantità $\Delta_T = v_T t_c$



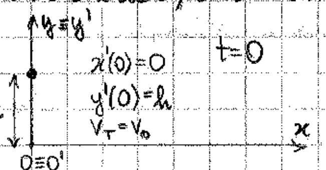
Consideriamo ora cosa vede l'osservatore O:

$$\begin{cases} x = v_T t \\ y = h-\frac{1}{2}gt^2\end{cases}$$

$t=\frac{x}{v_T} \implies y=h-\frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_T^2}$ Per l'osservatore fisso O la traiettoria dell'arancia è una parabola

$y=0 \implies h-\frac{1}{2}g\frac{x_c^2}{v_T^2}=0 \implies x_c^2=\frac{2h}{g}v_T^2 \implies x_c=t_c v_T$ posizione in cui cade l'arancia.

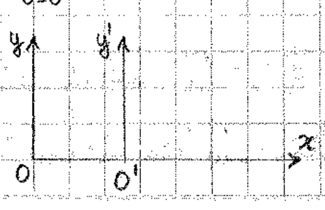
Esempio: Il sistema O' è solidale ad un treno che si muove di moto rettilineo uniforme con velocità v_0. All'istante $t=0$ il treno inizia a decelerare con un'accelerazione $\vec{a}_{O'}=-A\vec{u}_x$ e, nello stesso istante, un passeggero lascia cadere un'arancia da un'altezza h. Descrivere il moto di caduta visto da O e da O', calcolando in particolare il tempo di caduta t_c e dove cade l'arancia.



$\vec{a}_{O'}=-A\vec{u}_x$

$\vec{a}=-A\vec{u}_x+\vec{a}'=\vec{g}$

$\vec{a}'=\vec{a}+A\vec{u}_x \implies \vec{a}'=\vec{g}+A\vec{u}_x=-g\vec{u}_y+A\vec{u}_x$



Consideriamo prima cosa vede l'osservatore O':

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 79 di 258

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{u}_{x'}}{dt} = \vec{u}_{y'} \dfrac{d\theta}{dt} & \text{la derivata del versore } \vec{u}_{x'} \text{ è parallela al versore } \vec{u}_{y'}. \\ \dfrac{d\vec{u}_{y'}}{dt} = -\vec{u}_{x'} \dfrac{d\theta}{dt} & \text{la derivata del versore } \vec{u}_{y'} \text{ è parallela al versore } \vec{u}_{x'}. \end{cases}$$

Introducendo il vettore velocità angolare $\vec{\omega} = \frac{d\theta}{dt}\vec{u}_{z'}$ e ricordando dalla geometria il prodotto esterno dei versori ortonormali di una terna destrorsa $\vec{u}_x \wedge \vec{u}_y = \vec{u}_z$, $\vec{u}_z \wedge \vec{u}_x = \vec{u}_y$, $\vec{u}_y \wedge \vec{u}_z = \vec{u}_x$ si ha

$$\begin{cases} \vec{\omega} \wedge \vec{u}_{x'} = \left(\dfrac{d\theta}{dt}\vec{u}_{z'}\right) \wedge \vec{u}_{x'} = \dfrac{d\theta}{dt}\left(\vec{u}_{z'} \wedge \vec{u}_{x'}\right) = \dfrac{d\theta}{dt}\vec{u}_{y'} \\ \vec{\omega} \wedge \vec{u}_{y'} = \left(\dfrac{d\theta}{dt}\vec{u}_{z'}\right) \wedge \vec{u}_{y'} = \dfrac{d\theta}{dt}\left(\vec{u}_{z'} \wedge \vec{u}_{y'}\right) = -\dfrac{d\theta}{dt}\vec{u}_{x'} \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{u}_{x'}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{u}_{x'} \\ \dfrac{d\vec{u}_{y'}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{u}_{y'} \end{cases} \quad \underline{\text{Formule di Poisson}}$$

Determiniamo le espressioni che legano velocità e accelerazione nei due diversi sistemi.

$$\begin{cases} \vec{v} = \dfrac{dx}{dt}\vec{u}_x + \dfrac{dy}{dt}\vec{u}_y \\ \vec{a} = \dfrac{d^2x}{dt^2}\vec{u}_x + \dfrac{d^2y}{dt^2}\vec{u}_y \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{v}' = \dfrac{dx'}{dt}\vec{u}_{x'} + \dfrac{dy'}{dt}\vec{u}_{y'} \\ \vec{a}' = \dfrac{d^2x'}{dt^2}\vec{u}_{x'} + \dfrac{d^2y'}{dt^2}\vec{u}_{y'} \end{cases}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x'\vec{u}_{x'} + y'\vec{u}_{y'}\right) = \frac{dx'}{dt}\vec{u}_{x'} + x'\frac{d\vec{u}_{x'}}{dt} + \frac{dy'}{dt}\vec{u}_{y'} + y'\frac{d\vec{u}_{y'}}{dt} = \left(\frac{dx'}{dt}\vec{u}_{x'} + \frac{dy'}{dt}\vec{u}_{y'}\right) + x'\left(\vec{\omega} \wedge \vec{u}_{x'}\right) + y'\left(\vec{\omega} \wedge \vec{u}_{y'}\right) =$$

$$= \left(\frac{dx'}{dt}\vec{u}_{x'} + \frac{dy'}{dt}\vec{u}_{y'}\right) + \vec{\omega} \wedge \left(x'\vec{u}_{x'}\right) + \vec{\omega} \wedge \left(y'\vec{u}_{y'}\right) = \underbrace{\left(\frac{dx'}{dt}\vec{u}_{x'} + \frac{dy'}{dt}\vec{u}_{y'}\right)}_{\vec{v}'} + \underbrace{\vec{\omega} \wedge \left(x'\vec{u}_{x'} + y'\vec{u}_{y'}\right)}_{\vec{\omega} \wedge \vec{r}} \Longrightarrow$$

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \wedge \vec{r}} \quad \underline{\text{Teorema di composizione delle velocità}}$$

Per calcolare l'accelerazione, ipotizziamo $\omega = \frac{d\theta}{dt} = \text{cost}$, cioè $\vec{\omega} = \frac{d\theta}{dt}\vec{u}_z = \text{cost}$ e quindi $\frac{d\omega}{dt} = 0$:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left\{\frac{dx'}{dt}\vec{u}_{x'} + \frac{dy'}{dt}\vec{u}_{y'} + \vec{\omega} \wedge \left(x'\vec{u}_{x'} + y'\vec{u}_{y'}\right)\right\} =$$

$$= \frac{d^2x'}{dt^2}\vec{u}_{x'} + \frac{dx'}{dt}\frac{d\vec{u}_{x'}}{dt} + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{u}_{y'} + \frac{dy'}{dt}\frac{d\vec{u}_{y'}}{dt} + \vec{\omega} \wedge \left\{\frac{dx'}{dt}\vec{u}_{x'} + x'\frac{d\vec{u}_{x'}}{dt} + \frac{dy'}{dt}\vec{u}_{y'} + y'\frac{d\vec{u}_{y'}}{dt}\right\} =$$

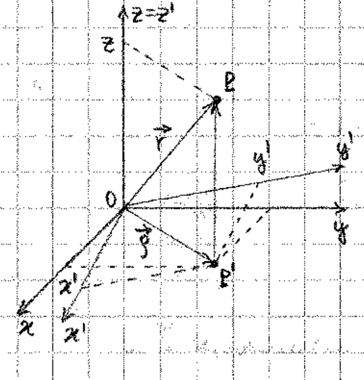
$$= \frac{d^2x'}{dt^2}\vec{u}_{x'} + \frac{dx'}{dt}\left(\vec{\omega} \wedge \vec{u}_{x'}\right) + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{u}_{y'} + \frac{dy'}{dt}\left(\vec{\omega} \wedge \vec{u}_{y'}\right) + \vec{\omega} \wedge \left\{\frac{dx'}{dt}\vec{u}_{x'} + x'\left(\vec{\omega} \wedge \vec{u}_{x'}\right) + \frac{dy'}{dt}\vec{u}_{y'} + y'\left(\vec{\omega} \wedge \vec{u}_{y'}\right)\right\} =$$

$$\left(\frac{d^2x'}{dt^2}\vec{u}_{x'} + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{u}_{y'}\right) + \vec{\omega} \wedge \left(\frac{dx'}{dt}\vec{u}_{x'} + \frac{dy'}{dt}\vec{u}_{y'}\right) + \vec{\omega} \wedge \left(\frac{dx'}{dt}\vec{u}_{x'} + \frac{dy'}{dt}\vec{u}_{y'}\right) + \vec{\omega} \wedge \left\{\vec{\omega} \wedge \left(x'\vec{u}_{x'} + y'\vec{u}_{y'}\right)\right\} \Longrightarrow$$

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}' + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}' + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \vec{r}\right)} \quad \underline{\text{Teorema di composizione delle accelerazioni}}$$

dove $\vec{a}$ è l'accelerazione assoluta, $\vec{a}'$ è l'accelerazione relativa, $2\vec{\omega} \wedge \vec{v}'$ è l'<u>accelerazione complementare</u> o <u>di Coriolis</u> e $\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r})$ è l'<u>accelerazione centripeta</u>.

Il moto rispetto alla Terra



Il teorema di composizione delle accelerazioni vale anche nel caso della Terra. Vediamo come si può scrivere l'accelerazione centripeta:

$\vec{r} = \vec{\rho} + z\vec{u}_{z'}$

$\vec{\omega} \wedge \vec{r} = \omega\vec{u}_{z'} \wedge \left(\vec{\rho} + z\vec{u}_{z'}\right) = \omega\left(\vec{u}_{z'} \wedge \vec{\rho}\right) + \omega z\underbrace{\left(\vec{u}_{z'} \wedge \vec{u}_{z'}\right)}_{=0} = \omega\left(\vec{u}_{z'} \wedge \vec{\rho}\right)$

$\vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \vec{r}\right) = \left(\omega\vec{u}_{z'}\right) \wedge \left(\omega\vec{u}_{z'} \wedge \vec{\rho}\right) = -\omega^2\vec{\rho}$

L'accelerazione centripeta dipende solo dalla distanza del punto dall'asse di rotazione.

Arriviamo ad un'espressione simile usando il teorema di composizione delle accelerazioni, vedendo come l'accelerazione di Coriolis determini una deviazione nella caduta dei gravi.

$$\vec{a}' = \vec{g}_0 - \vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\vec{r}) - 2\vec{\omega}\wedge\vec{v}'$$

Ponendoci all'equatore: $\vec{g}_0 - \vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\vec{r}) = \vec{g} = -g\vec{u}_{x'}$ diretta verso il centro della Terra

$$\vec{a}' = \vec{g} - 2\vec{\omega}\wedge\vec{v}'$$

$$\vec{\omega}\wedge\vec{v}' = (\omega\vec{u}_z)\wedge\left(\frac{dx'}{dt}\vec{u}_{x'} + \frac{dy'}{dt}\vec{u}_{y'}\right) = \omega\frac{dx'}{dt}\vec{u}_{y'} - \omega\frac{dy'}{dt}\vec{u}_{x'}$$

$$\frac{d^2x'}{dt^2}\vec{u}_{x'} + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{u}_{y'} = -g\vec{u}_{x'} - 2\omega\frac{dx'}{dt}\vec{u}_{y'} + 2\omega\frac{dy'}{dt}\vec{u}_{x'}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x'}{dt^2} = -g + 2\omega\dfrac{dy'}{dt} \\ \dfrac{d^2y'}{dt^2} = -2\omega\dfrac{dx'}{dt} \end{cases}$$

Trascurabile rispetto a g per corpi che si muovono con $v' << 230\ \frac{m}{s}$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x'}{dt^2} = -g \\ \dfrac{d^2y'}{dt^2} = -2\omega\dfrac{dx'}{dt} \end{cases}$$

Supponiamo che il corpo venga abbandonato da fermo:

$$\begin{cases} \dfrac{dx'}{dt} = -gt \implies x' = -\dfrac{1}{2}gt^2 + \underbrace{cost}_{=R+h} \\ \dfrac{d^2y'}{dt^2} = -2\omega(-gt) \implies \dfrac{d^2y'}{dt^2} = 2\omega gt \implies \dfrac{dy'}{dt} = \omega gt^2 + \underbrace{cost}_{=0} \implies y' = \dfrac{1}{3}\omega gt^3 + \underbrace{cost}_{=0} \end{cases}$$

Il tempo di caduta t_c è tale che $x'(t_c) = R \longrightarrow x'(t_c) = (R+h) - \frac{1}{2}gt_c^2 = R \implies t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

Il corpo avanza di una quantità $y'(t_c) = \boxed{\Delta = \frac{1}{3}\omega g\left(\frac{2h}{g}\right)^{3/2}}$

Se $h = 100m$, $\omega = 7{,}5\cdot10^{-5}\ \frac{rad}{s}$, $g \simeq 9{,}8\ \frac{m}{s^2}$ $\implies \Delta \simeq 1\ cm$.

Sistemi di riferimento inerziali

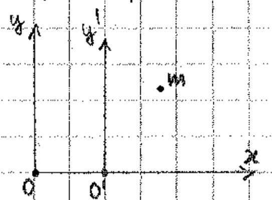
In un sistema di riferimento inerziale un punto non soggetto a forze lanciato con velocità arbitraria in qualunque direzione si muove con moto rettilineo uniforme o, se è in quiete, resta in quiete.
Consideriamo un sistema di riferimento che si muove di moto traslatorio rettilineo uniforme rispetto ad un certo sistema inerziale:

$$\vec{a} = \vec{a}_{O'} + \vec{a}'$$

Poiché si ha traslazione uniforme: $\vec{a}_{O'} = 0 \implies \vec{a} = \vec{a}'$

Scrivendo la legge di Newton: $\vec{F} = m\vec{a}$ e $\vec{F} = m\vec{a}'$

Dunque, se un sistema di riferimento è inerziale, tutti i sistemi in movimento di moto rettilineo uniforme rispetto a questo sono inerziali.



Consideriamo ora un sistema O' che si muove di moto accelerato: $\vec{a} = \vec{a}_{O'} + \vec{a}'$

La legge di Newton impone $\vec{F} = m\vec{a} = m(\vec{a}_{O'} + \vec{a}') = m\vec{a}_{O'} + m\vec{a}'$

Per l'osservatore solidale a O': $\boxed{\vec{F} - m\vec{a}_{O'} = m\vec{a}'}$

Oltre alle forze vere, ci sono forze dovute al fatto che il sistema che stiamo considerando non è

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 83 di 258

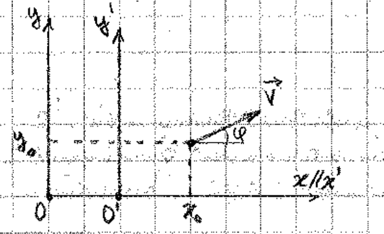
ESERCITAZIONE

12-04-11

Traslazione pura: $\begin{cases} \vec v = \vec v_{0'} + \vec v\,' \\ \vec a = \vec a_{0'} + \vec a\,' \end{cases}$ Rotazione pura: $\begin{cases} \vec v = \vec v\,' + \vec\omega \wedge \vec r \\ \vec a = \vec a\,' + \vec\omega \wedge (\vec\omega \wedge \vec r) + 2\vec\omega \wedge \vec v\,' \end{cases}$

ESERCIZIO 1

Un punto P si muove di moto rettilineo nel piano xy con velocità uniforme v di componenti v_x e v_y partendo all'istante $t=0$ dalla posizione di coordinate $(x_0;y_0)$. Determinare il moto visto dal sistema O' in movimento con una velocità $v_{0'}$ parallela all'asse x.

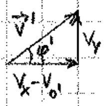


$\vec v = v_x \vec u_x + v_y \vec u_y$

$tg\varphi = \frac{v_y}{v_x}$ $\qquad |\vec v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ $\qquad \vec v_{0'} = v_{0'}\vec u_x$

Per l'osservatore O':

$\vec v = \vec v_{0'} + \vec v\,' \implies \vec v\,' = \vec v - \vec v_{0'} = v_x \vec u_x + v_y \vec u_y - v_{0'}\vec u_x \implies \vec v\,' = (v_x - v_{0'})\vec u_x + v_y \vec u_y$



$tg\varphi' = \frac{v_y}{v_x - v_{0'}}$

$|\vec v\,'| = \sqrt{(v_x - v_0)^2 + v_y^2} = \sqrt{v_x^2 + v_0^2 - 2v_0 v_x + v_y^2} = \sqrt{v^2 - 2v_0 v_x + v_0^2}$

Determiniamo le traiettorie che vedono i due osservatori:

O) $\vec v = cost = v_x \vec u_x + v_y \vec u_y$

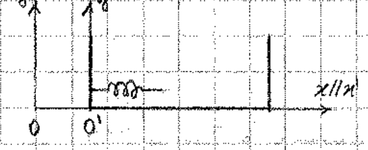
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v_x \\ \frac{dy}{dt} = v_y \end{cases} \implies \begin{cases} \int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t v_x dt \\ \int_{y_0}^{y} dy = \int_0^t v_y dt \end{cases} \implies \begin{cases} x - x_0 = v_x t \implies t = \frac{x - x_0}{v_x} \\ y - y_0 = v_y t \implies y - y_0 = \frac{v_y}{v_x}(x - x_0) \end{cases}$$ Traiettoria rettilinea

O') $\vec v\,' = v_x \vec u_x + v_y \vec u_y - v_{0'}\vec u_x$

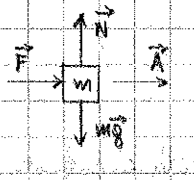
$$\begin{cases} \frac{dx'}{dt} = v_x - v_{0'} \\ \frac{dy'}{dt} = v_y \end{cases} \implies \begin{cases} \int_{x'(0)}^{x'} dx' = \int_0^t (v_x - v_{0'})dt \\ \int_{y'(0)}^{y'} dy' = \int_0^t v_y dt \end{cases} \implies \begin{cases} x' - x'(0) = (v_x - v_{0'})t \implies t = \frac{x' - x'(0)}{v_x - v_{0'}} \\ y' - y'(0) = v_y t \implies y' - y'(0) = \frac{v_y}{v_x - v_{0'}}(x' - x'(0)) \end{cases}$$ Traiettoria rettilinea

ESERCIZIO 2

Un sistema di riferimento O' solidale ad un vagone ferroviario si muove con accelerazione costante $\vec a_{0'} = \vec A = A\vec u_x$. Sul vagone, liscio, è appoggiato un corpo di massa m che, a causa del moto, comprime una molla di una quantità Δ (vedi figura). Descrivere il moto nei due sistemi O e O' e determinare Δ.

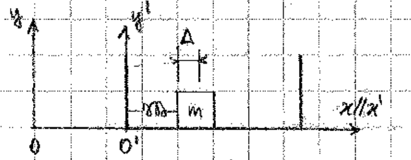


O)



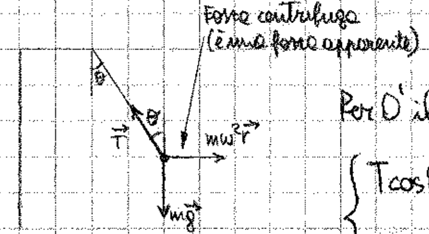
Il corpo si muove di moto accelerato

$\vec F + \vec N + m\vec g = m\vec A$



$K\Delta \vec u_x + N\vec u_y - mg\vec u_y = mA\vec u_x$

$$\begin{array}{l} x) \\ y) \end{array} \begin{cases} K\Delta = mA \longrightarrow \underline{\underline{\Delta = \frac{m}{K}A}} \\ N = mg \end{cases}$$



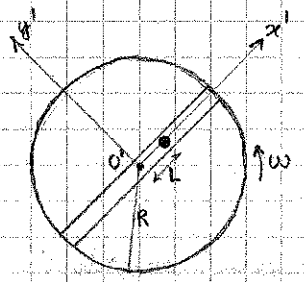
$$\vec{T}+m\vec{g}+m\omega^2\vec{r}=0$$

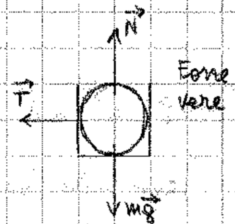
Per O' il problema è un problema di statica.

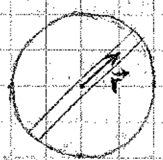
$$\begin{cases} T\cos\theta-mg=0 \\ -T\operatorname{sen}\theta+m\omega^2 r=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} T\cos\theta=mg \\ T\operatorname{sen}\theta=m\omega^2 r \end{cases}$$

ESERCIZIO 4

Si consideri un disco orizzontale di raggio R che ruota con velocità angolare costante ω attorno ad un asse verticale passante per il suo centro. Lungo un diametro del disco è realizzata una scanalatura dove può scorrere senza attrito una pallina di massa m. Al tempo t=0 la pallina è tenuta in quiete rispetto al disco, ad una distanza L dal suo centro. Calcolare quale forza deve esercitare la guida sulla pallina.







$\vec{r}=x'\vec{u}_{x'}$

Per l'osservatore O':

$$\vec{N}+m\vec{g}+\vec{T}=m\left\{\vec{a}'+\vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\vec{r})+2\vec{\omega}\wedge\vec{v}'\right\}$$

$$\vec{a}'=\frac{d^2x'}{dt^2}\vec{u}_{x'}$$

$$\vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\vec{r})=-\omega^2\vec{r}=-\omega^2x'\vec{u}_{x'}$$

$$2\vec{\omega}\wedge\vec{v}'=2(\omega\vec{u}_{z'})\wedge\left(\frac{dx'}{dt}\vec{u}_{x'}\right)=2\omega\frac{dx'}{dt}\vec{u}_{y'}$$

$$N\vec{u}_{z'}-mg\vec{u}_{z'}+\vec{T}=m\left\{\frac{d^2x'}{dt^2}\vec{u}_{x'}-\omega^2x'\vec{u}_{x'}+2\omega\frac{dx'}{dt}\vec{u}_{y'}\right\}$$

Ci aspettiamo che $\vec{T}$ sia diretta lungo $\vec{u}_{y'}$:

$$\begin{matrix} z') \\ y') \\ x') \end{matrix}\begin{cases} N-mg=0 \\ T=2m\omega\frac{dx'}{dt} \\ 0=m\left(\frac{d^2x'}{dt^2}-\omega^2x'\right) \end{cases}$$

$$\frac{d^2x'}{dt^2}-\omega^2x'=0 \Longrightarrow x'=ce^{\alpha t} \Longrightarrow (\alpha^2-\omega^2)ce^{\alpha t}=0 \Longrightarrow \alpha_1=\omega,\ \alpha_2=-\omega \Longrightarrow$$

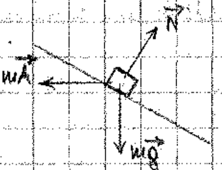
$$x'(t)=c_1e^{\alpha_1 t}+c_2e^{\alpha_2 t} \Longrightarrow x'(t)=c_1e^{\omega t}+c_2e^{-\omega t} \Longrightarrow \frac{dx'}{dt}=\omega(c_1e^{\omega t}-c_2e^{-\omega t})$$

Per trovare le costanti c_1 e c_2 uso le condizioni iniziali: $\begin{cases} \text{Per } t=0 \\ x(0)=L \\ \left(\frac{dx'}{dt}\right)_0=0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x'(0)=L=c_1+c_2 \\ \left(\frac{dx}{dt}\right)_0=0=c_1-c_2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c_1=c_2 \\ c_1=c_2=\frac{L}{2} \end{cases}$$

$\vec{a} = \vec{a}_{O'} + \vec{a}' \implies \vec{N} + m\vec{g} = m(\vec{a}_{O'} + \vec{a}') \implies \vec{N} + m\vec{g} - m\vec{a}_{O'} = m\vec{a}'$

Poniamo $\vec{a}_{O'} = \vec{A}$ = cost



$$\underbrace{\vec{N} + m\vec{g}}_{\text{Forze vere}} \underbrace{- m\vec{A}}_{\text{Forze apparenti}} = m\vec{a}'$$

Se m è fermo rispetto ad O', si ha $\vec{a}' = 0 \implies \vec{N} + m\vec{g} - m\vec{A} = 0$

$$\begin{cases} \parallel) & mg\,\text{sen}\theta - mA\cos\theta = 0 \\ \perp) & N - mg\cos\theta - mA\,\text{sen}\theta = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} g\,\text{sen}\theta = A\cos\theta \implies A = \underline{g\,\text{tg}\theta} \\ N = mg\cos\theta + mA\,\text{sen}\theta \end{cases}$$

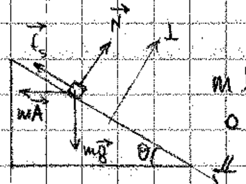
Se m non è fermo rispetto ad O', si ha $\vec{a}' \neq 0 \implies \vec{N} + m\vec{g} - m\vec{A} = m\vec{a}'$

$$\begin{cases} \parallel) & mg\,\text{sen}\theta - mA\cos\theta = ma' \\ \perp) & N - mg\cos\theta - mA\,\text{sen}\theta = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a' = g\,\text{sen}\theta - A\cos\theta \\ N = m(g\cos\theta + A\,\text{sen}\theta) \end{cases}$$

Dunque le situazioni che possono verificarsi sono:
- Se $A = g\,\text{tg}\theta \implies$ m è fermo
- Se $a' > 0 \implies A < g\,\text{tg}\theta \implies$ m scende
- Se $a' < 0 \implies A > g\,\text{tg}\theta \implies$ m sale

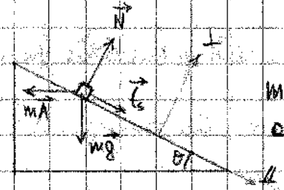
- Piano scabro. Dobbiamo distinguere due casi:

①



m ha tendenza a scendere

②



m ha tendenza a salire

① $\vec{N} + m\vec{g} - m\vec{A} + \vec{f}_s = 0$

$$\begin{cases} \perp) & N - mg\cos\theta - mA\,\text{sen}\theta = 0 \\ \parallel) & mg\,\text{sen}\theta - mA\cos\theta - f_s = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} N = m(g\cos\theta + A\,\text{sen}\theta) \\ f_s = m(g\,\text{sen}\theta - A\cos\theta) \end{cases}$$

$f_s \leq \mu_s N \implies \cancel{m}(g\,\text{sen}\theta - A\cos\theta) \leq \mu_s \cancel{m}(g\cos\theta + A\,\text{sen}\theta) \implies$

$g\,\text{sen}\theta - A\cos\theta \leq \mu_s g\cos\theta + \mu_s A\,\text{sen}\theta \implies g(\text{sen}\theta - \mu_s\cos\theta) \leq A(\cos\theta + \mu_s\,\text{sen}\theta)$

N.B: Se $A = 0 \implies g(\text{sen}\theta - \mu_s\cos\theta) \leq 0 \implies \text{tg}\theta \leq \mu_s$

Condizione affinché un corpo non scenda su un piano inclinato fermo.

$$A \geq \frac{g(\text{sen}\theta - \mu_s\cos\theta)}{\cos\theta + \mu_s\,\text{sen}\theta}$$

② $\vec{N} + m\vec{g} - m\vec{A} + \vec{f}_s = 0$

$$\begin{cases} \perp) & N - mg\cos\theta - mA\,\text{sen}\theta = 0 \\ \parallel) & mg\,\text{sen}\theta - mA\cos\theta + f_s = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} N = m(g\cos\theta + A\,\text{sen}\theta) \\ f_s = m(A\cos\theta - g\,\text{sen}\theta) \end{cases}$$

$f_s \leq \mu_s N \implies \cancel{m}(A\cos\theta - g\,\text{sen}\theta) \leq \mu_s \cancel{m}(g\cos\theta + A\,\text{sen}\theta) \implies$

$A\cos\theta - g\,\text{sen}\theta \leq \mu_s g\cos\theta + \mu_s A\,\text{sen}\theta \implies A(\cos\theta - \mu_s\,\text{sen}\theta) \leq g(\text{sen}\theta + \mu_s\cos\theta) \implies$

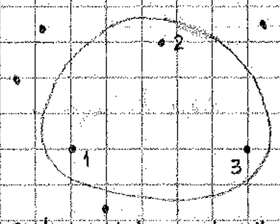
$$A \leq \frac{g(\text{sen}\theta + \mu_s\cos\theta)}{\cos\theta - \mu_s\,\text{sen}\theta}$$

15-04-11

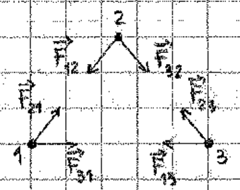
DINAMICA DEI SISTEMI DI PUNTI MATERIALI

Sistemi di punti. Forze interne e forze esterne.

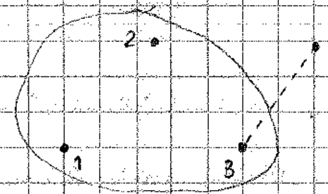
Un sistema è l'insieme di un certo numero di particelle che noi abbiamo arbitrariamente deciso facciano parte del sistema stesso.
Le forze interne $\vec{F}^{(I)}$ sono quelle che nascono dall'interazione tra le particelle del sistema, le forze esterne $\vec{F}^{(E)}$ sono quelle che nascono dall'interazione tra le particelle del sistema e il mondo esterno.



Sistema di tre particelle



Forze interne



Forze esterne

Per le forze interne, a pedice, il primo numero rappresenta la particella che esercita l'azione, il secondo la particella che la subisce.
Vale sempre il principio di azione e reazione: $\vec{F}_{12}+\vec{F}_{21}=0$, $\vec{F}_{32}+\vec{F}_{23}=0$, $\vec{F}_{13}+\vec{F}_{31}=0$.

Le particelle che formano il sistema interagiscono fra di loro e con il mondo esterno. La risultante delle forze interne che agiscono su ciascuna particella vale:

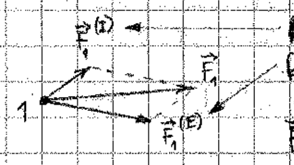
$$\vec{F}_1^{(I)}=\vec{F}_{21}+\vec{F}_{31}, \quad \vec{F}_2^{(I)}=\vec{F}_{12}+\vec{F}_{32}, \quad \vec{F}_3^{(I)}=\vec{F}_{13}+\vec{F}_{23}$$

e in generale si avrà $\vec{F}_i^{(I)}=\sum_{j=1}^{N}{}' \vec{F}_{ji}$ dove l'apice della sommatoria indica che in essa non compare il termine $i=j$, perchè una particella non esercita azioni su se stessa.
Qualunque sia il sistema, la risultante delle forze interne agenti sul sistema è nulla. Vediamolo nel caso del nostro sistema di tre particelle:

$$\vec{R}^{(I)}=\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i^{(I)}=\vec{F}_1^{(I)}+\vec{F}_2^{(I)}+\vec{F}_3^{(I)}=\vec{F}_{21}+\vec{F}_{31}+\vec{F}_{12}+\vec{F}_{32}+\vec{F}_{13}+\vec{F}_{23}=0$$

Per un qualsiasi sistema:

$$\vec{R}^{(I)}=\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i^{(I)}=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\vec{F}_{ji}=\frac{1}{2}\left\{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\vec{F}_{ji}+\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_{ij}\right\}=\frac{1}{2}\sum_{i,j}\left(\vec{F}_{ji}+\vec{F}_{ij}\right)=0$$



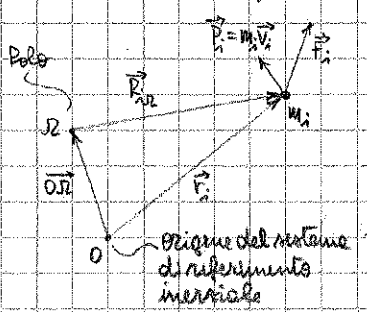
Risultante delle forze interne agenti sulla particella 1.
Risultante delle forze esterne agenti sulla particella 1.

$\vec{F}_1=\vec{F}_1^{(I)}+\vec{F}_1^{(E)}$ Forza risultante agente su 1.

La risultante di tutte le forze che si esercitano sul sistema vale:

$$\vec{R}=\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i=\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F}_i^{(I)}+\vec{F}_i^{(E)}\right)=\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i^{(I)}+\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i^{(E)}=\underbrace{\vec{R}^{(I)}}_{=0}+\vec{R}^{(E)} \longrightarrow \boxed{\vec{R}=\vec{R}^{(E)}}$$

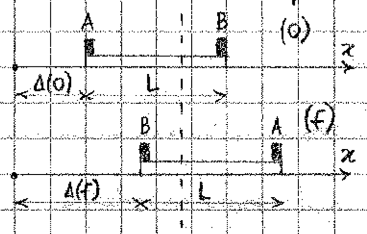
La risultante di tutte le forze che si esercitano su un sistema di punti è uguale alla risultante delle forze esterne.



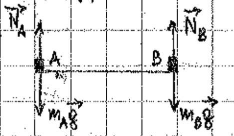
Abbiamo definito delle quantità di particella singola:

$$\begin{cases} \vec{p}_i=m_i\vec{v}_i & \text{quantità di moto della particella } i\text{-esima.} \\ \vec{L}_i=\vec{r}_i\wedge\vec{p}_i & \text{momento angolare della particella } i\text{-esima.} \\ E_{K_i}=\frac{1}{2}m_iv_i^2 & \text{energia cinetica della particella } i\text{-esima.} \end{cases}$$

<u>Esempio:</u> Due persone sono ferme su una barca a distanza L (supporre che la barca abbia massa trascurabile). Se le persone si scambiano di posto, di quanto si sposta la barca? (Supporre che non ci sia attrito tra la barca e l'acqua).



$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{R}^{(E)}$$



$x)\quad \frac{dP_x}{dt} = R_x^{(E)} = 0$ non ci sono forze lungo x $\Longrightarrow$

$P_x = cost = P_x(0) = 0 \Longrightarrow$

$v_{CM,x} = 0 \Longrightarrow x_{CM}$ non cambia: $x_{CM}(0) = x_{CM}(f)$

$$\begin{cases} x_A(0) = \Delta(0) \\ x_B(0) = \Delta(0) + L \end{cases} \qquad \begin{cases} x_A(f) = \Delta(f) + L \\ x_B(f) = \Delta(f) \end{cases}$$

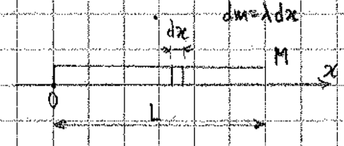
$$x_{CM}(0) = \frac{m_A x_A(0) + m_B x_B(0)}{m_A + m_B} = \frac{m_A \Delta(0) + m_B(\Delta(0) + L)}{m_A + m_B} = \Delta(0) + \frac{m_B}{m_A + m_B} L$$

$$x_{CM}(f) = \frac{m_A x_A(f) + m_B x_B(f)}{m_A + m_B} = \frac{m_A(\Delta(f) + L) + m_B \Delta(f)}{m_A + m_B} = \Delta(f) + \frac{m_A}{m_A + m_B} L$$

Poiché il centro di massa non si sposta $\Longrightarrow$

$$\Delta(0) + \frac{m_B}{m_A + m_B} L = \Delta(f) + \frac{m_A}{m_A + m_B} L \Longrightarrow \underline{\underline{\Delta(f) - \Delta(0) = \frac{m_B - m_A}{m_A + m_B} L}}$$

<u>Esempio:</u> Affrontiamo il problema del calcolo del centro di massa per un corpo esteso.
Si consideri un'asta omogenea di massa M e lunghezza L. Determinare la posizione del centro di massa.

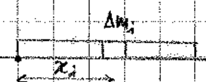


Poiché l'asta è omogenea, possiamo introdurre la <u>densità lineare di massa</u> $\lambda = \frac{M}{L} = cost$

Il problema è unidimensionale: $x_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i x_i$

Divido l'asta in tanti pezzettini di massa dm_i. Siamo al continuo, ma facciamo un'approssimazione al discreto

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N} x_i \Delta m_i = \frac{1}{M}\int_{corpo} x\, dm = \frac{1}{M}\int_0^L x \lambda dx =$$

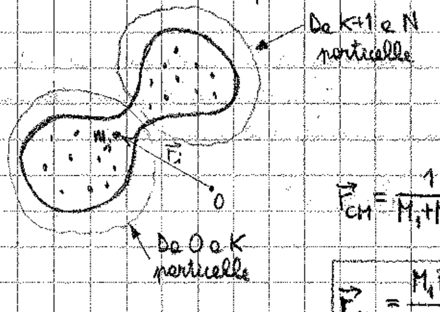


$$= \frac{1}{2M}\lambda \left[x^2\right]_0^L = \frac{1}{2M}\lambda L^2 = \frac{1}{2M}(\lambda L) L = \frac{1}{2M} M L = \underline{\underline{\frac{L}{2}}}$$

Dunque, se l'asta è omogenea, il centro di massa sta a metà dell'asta. In generale, si può dimostrare che tutte le volte in cui una figura ha un punto di simmetria, il centro di massa sta in quel punto.

<u>Proprietà</u>

Se un corpo si può immaginare diviso in due parti, il centro di massa può essere calcolato conoscendo i centri di massa delle sue parti.



$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i = \frac{1}{M}\left\{\sum_{i=1}^{K} m_i \vec{r}_i + \sum_{i=K+1}^{N} m_i \vec{r}_i\right\}$$

Poniamo $M_1 = \sum_{i=1}^{K} m_i$ e $M_2 = \sum_{i=K+1}^{N} m_i$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M_1 + M_2}\left\{\sum_{i=1}^{K} m_i \vec{r}_i + \sum_{i=K+1}^{N} m_i \vec{r}_i\right\} = \frac{1}{M_1 + M_2}\left\{M_1 \underbrace{\frac{1}{M_1}\sum_{i=1}^{K} m_i \vec{r}_i}_{\vec{r}_{CM,1}} + M_2 \underbrace{\frac{1}{M_2}\sum_{i=K+1}^{N} m_i \vec{r}_i}_{\vec{r}_{CM,2}}\right\} \Longrightarrow$$

$$\boxed{\vec{r}_{CM} = \frac{M_1 \vec{r}_{CM,1} + M_2 \vec{r}_{CM,2}}{M_1 + M_2}}$$

$$\vec r_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec r_i = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i(\vec r_{CM}+\vec r_i') = \frac{1}{M}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \vec r_{CM} + \sum_{i=1}^{N} m_i \vec r_i'\right) = \frac{1}{M}\left\{\left(\sum_{i=1}^{N} m_i\right)\vec r_{CM} + \sum_{i=1}^{N} m_i\vec r_i'\right\} =$$

$$= \frac{1}{M}\left(M\vec r_{CM} + \sum_{i=1}^{N} m_i \vec r_i'\right) = \vec r_{CM} + \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i\vec r_i' \Longrightarrow$$

$$0 = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec r_i' \Longrightarrow \sum_{i=1}^{N} m_i\vec r_i' = 0$$

Quando i sistemi traslano gli uni rispetto agli altri, le orientazioni relative non cambiano. Derivando l'ultima relazione rispetto al tempo si ottiene:

$\sum_{i=1}^{N} m_i \vec v_i' = 0$ La quantità di moto totale relativa al centro di massa è nulla.

Proprietà

$$\vec L_\Omega = \sum_{i=1}^{N} \vec R_{i\Omega} \wedge (m_i\vec v_i)$$

Se $\Omega \equiv CM \Longrightarrow \vec R_{i\Omega} = \vec r_i' \Longrightarrow \boxed{\vec L_{CM} = \sum_{i=1}^{N} \vec r_i' \wedge (m_i \vec v_i)}$

Sostituendo il valore di $\vec v_i$ si ha:

$$\vec L_{CM} = \sum_{i=1}^{N} \vec r_i'\wedge\{m_i(\vec v_{CM}+\vec v_i')\} = \sum_{i=1}^{N}\{\vec r_i'\wedge(m_i\vec v_{CM}) + \vec r_i'\wedge(m_i\vec v_i')\} = \sum_{i=1}^{N} \vec r_i'\wedge(m_i\vec v_{CM}) + \sum_{i=1}^{N} \vec r_i'\wedge(m_i\vec v_i') =$$

$$= \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} m_i\vec r_i'\right)}_{=0}\wedge\vec v_{CM} + \sum_{i=1}^{N} \vec r_i'\wedge(m_i\vec v_i') \Longrightarrow \boxed{\vec L_{CM} = \sum_{i=1}^{N} \vec r_i'\wedge(m_i\vec v_i')}$$

Quindi, se $\Omega \equiv CM \Longrightarrow \boxed{\vec L_{CM} = \sum_{i=1}^{N} \vec r_i'\wedge(m_i\vec v_i) = \sum_{i=1}^{N} \vec r_i'\wedge(m_i\vec v_i')}$

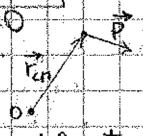
Teorema di König per il momento angolare

$$\vec L_o = \sum_{i=1}^{N} \vec r_i\wedge\vec p_i = \sum_{i=1}^{N} \vec r_i\wedge(m_i\vec v_i) = \sum_{i=1}^{N}(\vec r_{CM}+\vec r_i')\wedge\{m_i(\vec v_{CM}+\vec v_i')\} = \sum_{i=1}^{N}(\vec r_{CM}+\vec r_i')\wedge(m_i\vec v_{CM}+m_i\vec v_i') =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \vec r_{CM}\wedge(m_i\vec v_{CM}) + \sum_{i=1}^{N}\vec r_{CM}\wedge(m_i\vec v_i') + \sum_{i=1}^{N}\vec r_i'\wedge(m_i\vec v_{CM}) + \sum_{i=1}^{N}\vec r_i'\wedge(m_i\vec v_i') =$$

$$= \vec r_{CM}\wedge\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} m_i\right)}_{=M}\vec v_{CM} + \vec r_{CM}\wedge\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} m_i\vec v_i'\right)}_{=0} + \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} m_i\vec r_i'\right)}_{=0}\wedge\vec v_{CM} + \sum_{i=1}^{N}\vec r_i'\wedge(m_i\vec v_i') = \vec r_{CM}\wedge(M\vec v_{CM}) + \sum_{i=1}^{N} \vec r_i'\wedge(m_i\vec v_i') \Longrightarrow$$

$$\boxed{\vec L_o = \vec r_{CM}\wedge\vec P + \vec L'_{CM} = \vec L_{o,CM} + \vec L'_{CM}}$$



Il momento angolare del sistema rispetto all'origine del sistema di riferimento inerziale è dato dalla somma del momento angolare dovuto al moto del centro di massa con quello del sistema relativo al centro di massa.

Teorema di König per l'energia cinetica

$$E_k = \sum_{i=1}^{N} E_{i,k} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

$$v_i^2 = \vec v_i\cdot\vec v_i = (\vec v_{CM}+\vec v_i')\cdot(\vec v_{CM}+\vec v_i') = v_{CM}^2 + \vec v_{CM}\cdot\vec v_i' + \vec v_i'\cdot\vec v_{CM} + v_i'^2 = v_{CM}^2 + 2\vec v_{CM}\cdot\vec v_i' + v_i'^2 \Longrightarrow$$

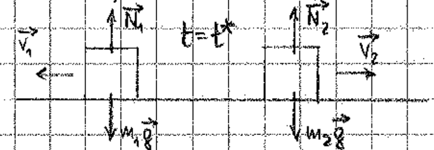
$$E_k = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2} m_i(v_{CM}^2 + 2\vec v_{CM}\cdot\vec v_i' + v_i'^2) = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{2} m_i v_{CM}^2 + m_i\vec v_{CM}\cdot\vec v_i' + \frac{1}{2} m_i v_i'^2\right) = \frac{1}{2}\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} m_i\right)}_{M} v_{CM}^2 + \vec v_{CM}\cdot\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} m_i\vec v_i'\right)}_{=0} + \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2} m_i v_i'^2 \Longrightarrow$$

$$\boxed{E_k = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + E_k'}$$

L'energia cinetica del sistema rispetto al sistema di riferimento inerziale è data dalla somma dell'energia cinetica dovuta al moto del centro di massa con quella del sistema relativo al centro di massa.

$\vec{F}^{(E)}$: $\left.\begin{array}{l}\vec{N}_1, \vec{N}_2 \\ m_1\vec{g}, m_2\vec{g}\end{array}\right\}$ $\perp$ all'asse x

$\vec{F}^{(I)}$: $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ tali che $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$ $\parallel$ all'asse x



Togliendo il filo, le due particelle cambiano la loro posizione relativa, quindi ci aspettiamo che le forze interne compiano lavoro.

$\vec{v}_1(0) = \vec{v}_2(0) = 0$

$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{R}^{(E)}$ I equazione cardinale dei sistemi. Proiettandola lungo l'asse x si ha:

$\frac{dp_x}{dt} = R_x^{(E)} = 0 \implies p_x = cost = m_1 v_1 + m_2 v_2$

$p_x(0) = m_1 v_1(0) + m_2 v_2(0) = 0 \qquad p_x(t) = m_1 v_1(t) + m_2 v_2(t) = 0 \quad \forall t$

In particolare: $\boxed{m_1 v_1(t^*) + m_2 v_2(t^*) = 0}$ (1) Condizione del centro di massa fermo

Dato che tutte le forze sono conservative si ha: $E = E_k + E_p = cost = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} K x^2$

$E(0) = \frac{1}{2} m_1 v_1^2(0) + \frac{1}{2} m_2 v_2^2(0) + \frac{1}{2} K\Delta^2 \qquad E(t^*) = \frac{1}{2} m_1 v_1^2(t^*) + \frac{1}{2} m_2 v_2^2(t^*)$

$E(0) = E(t^*) \implies \cancel{\frac{1}{2}} K\Delta^2 = \cancel{\frac{1}{2}} m_1 v_1^2(t^*) + \cancel{\frac{1}{2}} m_2 v_2^2(t^*) \implies \boxed{K\Delta^2 = m_1 v_1^2(t^*) + m_2 v_2^2(t^*)}$ (2)

Le equazioni (1) e (2) sono quelle che permettono di risolvere il problema.

Dalla (1) si ha: $m_2 v_2(t^*) = -m_1 v_1(t^*)$

Riscriviamo la (2): $\frac{[m_1 v_1(t^*)]^2}{m_1} + \frac{[m_2 v_2(t^*)]^2}{m_2} = K\Delta^2 \implies \frac{[m_1 v_1(t^*)]^2}{m_1} + \frac{[m_1 v_1(t^*)]^2}{m_2} = K\Delta^2 \implies$

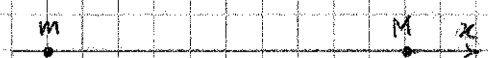
$\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) \cdot [m_1 v_1(t^*)]^2 = K\Delta^2$

Nota: $\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} = \frac{1}{\mu}$ con $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ detta <u>massa ridotta</u>.

$m_1 v_1(t^*) = \sqrt{\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} K\Delta^2} \implies \underline{\underline{v_1(t^*) = \frac{1}{m_1}\sqrt{\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} K\Delta^2}}}$

$\underline{\underline{v_2(t^*) = -\frac{1}{m_2}\sqrt{\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} K\Delta^2}}}$

<u>Esempio</u>: Due particelle di massa m e M sono inizialmente ferme a distanza infinita. Determinare la velocità relativa di avvicinamento in funzione della loro distanza reciproca.



$\vec{F} = -\gamma \frac{mM}{r^2} \vec{u}_r$ Forza centrale di attrazione fra le due particelle. $\vec{F}$ è una forza interna diretta lungo la congiungente le particelle.

Poichè non ci sono forze esterne si ha $\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{R}^{(E)} = 0$ e proiettando lungo l'asse x:

$\frac{dp_x}{dt} = 0 \implies mv + MV = cost = 0 \implies \boxed{mv + MV = 0}$ (1)

Determiniamo l'energia potenziale:

$d\vec{r} = dr\,\vec{u}_r + r\,d\theta\,\vec{u}_\theta$

$W_{P\to Q} = \int_P^Q \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_P^Q -\gamma \frac{mM}{r^2} \vec{u}_r \cdot (dr\,\vec{u}_r + r\,d\theta\,\vec{u}_\theta) = \int_P^Q -\gamma \frac{mM}{r^2} dr = \left[\gamma \frac{mM}{r}\right]_{r_P}^{r_Q} =$

$= \gamma \frac{mM}{r_Q} - \gamma \frac{mM}{r_P} \implies E_p = -\gamma \frac{mM}{r}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 97 di 258