



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO : 356

DATA : 24/09/2012

# A P P U N T I

STUDENTE : Cabrera

MATERIA : Aeroelasticità, esercizi+ temi

Prof. Chiocchia

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

# Politecnico di Torino

## I Facoltà di Ingegneria

### Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale



## Aeroelasticità

### Relazione sulle esercitazioni

*Professore:*  
Gianfranco CHIOCCHIA

Anno Accademico 2011/2012

# List of Figures

1	Sezione rettangolare compatta . . . . .	1
2	Freccia nel punto di applicazione del carico per diverse mesh . . . . .	2
3	Freccia nel punto di applicazione del carico per diversi valori di allungamento . . . . .	3
4	Sezione a parete sottile . . . . .	4
5	Spostamenti trasversali sui punti $A, B$ e $C$ . . . . .	6
6	Spostamenti trasversali ai punti $A$ e $C$ . . . . .	8
7	Deflessione della trave con il modello Eulero Bernoulli . . . . .	9
8	Deflessione e Torsione della trave con il modello EDTN $N = 4$ . . . . .	9
9	Rectangular thin-walled cross-section . . . . .	10
10	1st bending mode of oscillation, EBBT model . . . . .	11
11	2nd bending mode of oscillation, EBBT model . . . . .	11
12	4th bending mode, EBBT model . . . . .	12
13	8th axial mode, EBBT model . . . . .	13
14	4th bending modes, TBT model . . . . .	13
15	8th axial mode, TBT model . . . . .	14
16	4th bending mode, $N = 2$ model . . . . .	15
17	7th torsional mode, $N = 2$ model . . . . .	15
18	9th axial mode, $N = 2$ model . . . . .	15
19	8th bending - torsional mode, $N = 4, \theta = \pm 60^\circ$ . . . . .	18
20	5th bending - torsional mode, $N = 4, \theta = \pm 60^\circ$ . . . . .	18
21	8th bending - torsional mode, $N = 4, \theta = \pm 30^\circ$ . . . . .	19
22	5th bending - torsional mode, $N = 4, \theta = 30^\circ$ and $\Lambda = -20^\circ$ . . . . .	20
23	4th axial - bending mode, $N = 4, \theta = 30^\circ$ and $\Lambda = -10^\circ$ . . . . .	21
24	5th torsional mode, $N = 4, \theta = 30^\circ$ and $\Lambda = -5^\circ$ . . . . .	22
25	Three cells cross-section, NACA 2415 airfoil profile . . . . .	24
26	Displacement of point $B$ for different aerodynamic meshes . . . . .	25
27	Lift force generated for different aerodynamic meshes . . . . .	26
28	Transverse displacement of point $B$ , SSA $V_\infty = 25$ m/s . . . . .	27
29	Transverse displacement of point $B$ , SAA $V_\infty = 25$ m/s . . . . .	27
30	Transverse displacement of point $B$ , SSA $V_\infty = 50$ m/s . . . . .	28
31	Transverse displacement of point $B$ , SAA $V_\infty = 50$ m/s . . . . .	28
32	Transverse displacement of point $B$ , SSA $V_\infty = 75$ m/s . . . . .	29
33	Transverse displacement of point $B$ , SAA $V_\infty = 75$ m/s . . . . .	29
34	Transverse displacement of point $B$ , SSA $V_\infty = 100$ m/s . . . . .	30
35	Transverse displacement of point $B$ , SAA $V_\infty = 100$ m/s . . . . .	30
36	Transverse displacement of point $B$ , SSA $V_\infty = 125$ m/s . . . . .	31
37	Transverse displacement of point $B$ , SAA $V_\infty = 125$ m/s . . . . .	31
38	Rotation of the free-tip cross-section, SSA $N = 3$ . . . . .	32
39	Rotation of the free-tip cross-section, SAA $N = 3$ . . . . .	32
40	Rotation of the free-tip cross-section, SSA $N = 4$ . . . . .	33
41	Rotation of the free-tip cross-section, SAA $N = 4$ . . . . .	33
42	Transverse displacement of point $B$ , $N = 4$ . . . . .	34

# Esercitazione I

## Esercitazione 1a

Si consideri una trave a sezione quadrata ( Fig.1) avente le seguenti caratteristiche geometriche:  $h = b = 0.2$  [m]. La lunghezza della trave,  $L$ , è un parametro dell'analisi. La trave ha un estremo incastrato ed è caricata mediante un carico concentrato posto nel centro dell'estremo libero ( $x = b/2, y = L, z = 0$ ). Tale carico,  $F_z = -50$  [N], è diretto lungo  $z$ . La trave è isotropa con  $E = 75$  GPa  $\nu = 0.33$ .

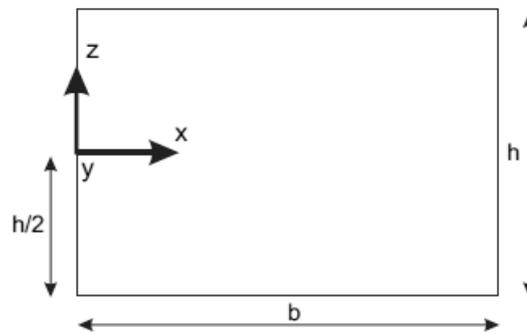


Figure 1: Sezione rettangolare compatta

### Analisi da effettuare

1. Verifica dei dati di input: porre  $L = 20$  m, utilizzare il modello EBBT con 10 elementi B4 e confrontare la freccia dell'estremo libero con la formula analitica fornita dal modello di Eulero Bernoulli:  $u_z = \frac{FL^3}{3EI}$ , dove  $I$  è il momento di inerzia della sezione.

Per il calcolo analitico della freccia calcoliamo prima il momento d'inerzia della sezione compatta in esame:

$$I = \frac{1}{12}bh^3 = 0,000133333 \text{ m}^4$$

Table 1: Freccia calcolata con la formula analitica e il modello EBBT con 10 elementi B4		
Freccia in $(b/2, L, 0)$	Eulero Bernoulli formula analitica	Modello EBBT, 10 Elementi B4
$w$ [m]	$-1.3333333 \cdot 10^{-2}$	$-1.3333337 \cdot 10^{-2}$

Si osserva che i due risultati sono così simili che possono essere considerati equivalenti.

Table 3: Freccia nel punto di applicazione del carico per diversi valori di allungamento

Modello	$L/h = 100$	$L/h = 10$	$L/h = 2$
EBBT	$-1.33333371 \cdot 10^{-2}$	$-1.33334237 \cdot 10^{-5}$	$-1.06684481 \cdot 10^{-7}$
TBT	$-1.33342212 \cdot 10^{-2}$	$-1.34220015 \cdot 10^{-5}$	$-1.24400072 \cdot 10^{-7}$
$N = 1$	$-1.33342212 \cdot 10^{-2}$	$-1.34220015 \cdot 10^{-5}$	$-1.24400072 \cdot 10^{-7}$
$N = 2$	$-1.32377749 \cdot 10^{-2}$	$-1.32625760 \cdot 10^{-5}$	$-1.22056184 \cdot 10^{-7}$
$N = 3$	$-1.32383040 \cdot 10^{-2}$	$-1.32836824 \cdot 10^{-5}$	$-1.24592837 \cdot 10^{-7}$
$N = 4$	$-1.32383071 \cdot 10^{-2}$	$-1.32908793 \cdot 10^{-5}$	$-1.28598123 \cdot 10^{-7}$
Formula Analitica	$-1.33333333 \cdot 10^{-2}$	$-1.33333 \cdot 10^{-5}$	$-1.06667 \cdot 10^{-7}$

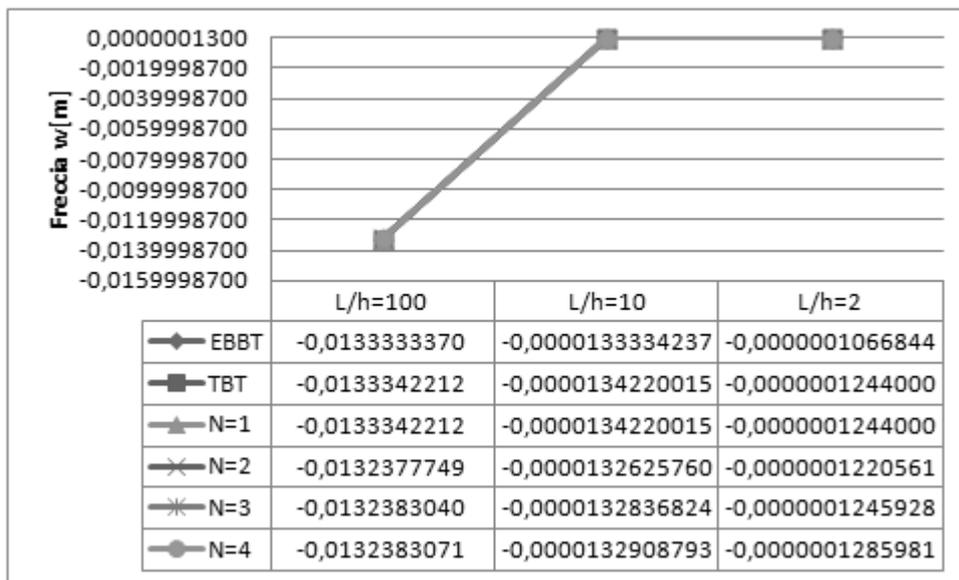


Figure 3: Freccia nel punto di applicazione del carico per diversi valori di allungamento

Siccome il modello di Eulero Bernoulli non tiene conto del posizionamento della forza (poiché è un modello unidimensionale), il valore di freccia ottenuto sarebbe lo stesso in qualsiasi dei punti  $A$ ,  $B$  e  $C$  per i due casi di posizionamento delle forze richiesto.

Siccome il carico viene applicato in mezzeria e la sezione è rigida, non esiste la torsione e le frecce vengono le stesse nei tre punti analizzati per i metodi EBBT e TBT. Invece, si noti che all'aumentare dell'ordine della teoria utilizzata il modello riesce ad apprezzare sempre meglio la deformazione della sezione (il punto  $B$  ha deflessione sempre maggiore rispetto agli altri 2 punti). Anche la flessione aumenta all'aumentare del grado  $N$  per i modelli EDTN; nei modelli  $N=2,3,4$  questo comportamento è però "mascherato" dalla sovrapposizione della deformazione della sezione, catturata in modo sbagliato a causa di problemi numerici, assenti invece per i modelli di ordine superiore.

3. Studio dell'accoppiamento flesso-torsionale: considerare il caso 2 e valutare gli spostamenti trasversali ai punti  $A$  e  $C$  utilizzando i modelli EBBT, TBT,  $N = 1$ ,  $N = 2$ ,  $N = 3$ ,  $N = 4$ . Discutere l'effetto dei vari modelli sugli spostamenti ottenuti.

Table 7: Spostamenti trasversali ai punti  $A$  e  $C$

Modello	punto A	punto C
EBBT	$-5.98937899 \cdot 10^{-4}$	$-5.98937899 \cdot 10^{-4}$
TBT	$-5.99344261 \cdot 10^{-4}$	$-5.99344261 \cdot 10^{-4}$
$N = 1$	$-5.98795115 \cdot 10^{-4}$	$-6.00849314 \cdot 10^{-4}$
$N = 2$	$-5.88705794 \cdot 10^{-4}$	$-6.11826389 \cdot 10^{-4}$
$N = 3$	$-5.93978636 \cdot 10^{-4}$	$-6.17626623 \cdot 10^{-4}$
$N = 4$	$-5.93190261 \cdot 10^{-4}$	$-6.18522701 \cdot 10^{-4}$
$N = 5$	-5.96826087	-6.24532561
$N = 6$	-5.96514554	-6.24924297
$N = 7$	-5.91441679	-6.34846370
$N = 8$	-5.90504747	-6.35808998

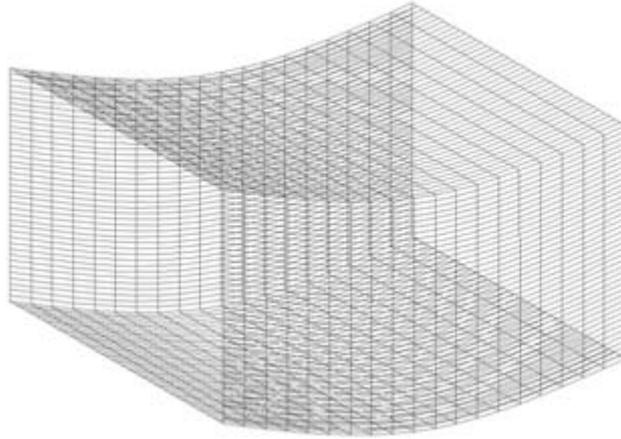


Figure 7: Deflessione della trave con il modello Eulero Bernoulli

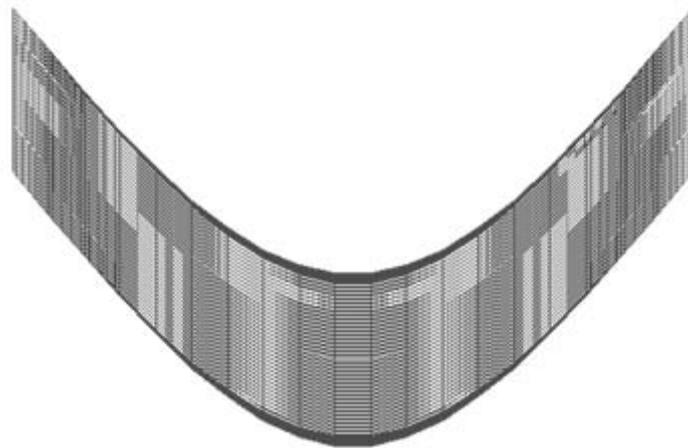


Figure 8: Deflessione e Torsione della trave con il modello EDTN  $N = 4$

## Conclusioni

Sui risultati di quest'esercitazione possiamo concludere che i modelli del secondo ordine hanno il vantaggio di vedere la deformazione della sezione, utile nelle travi a parete sottile. Invece nelle travi piene è praticamente inutile, visto che si deformano poco.

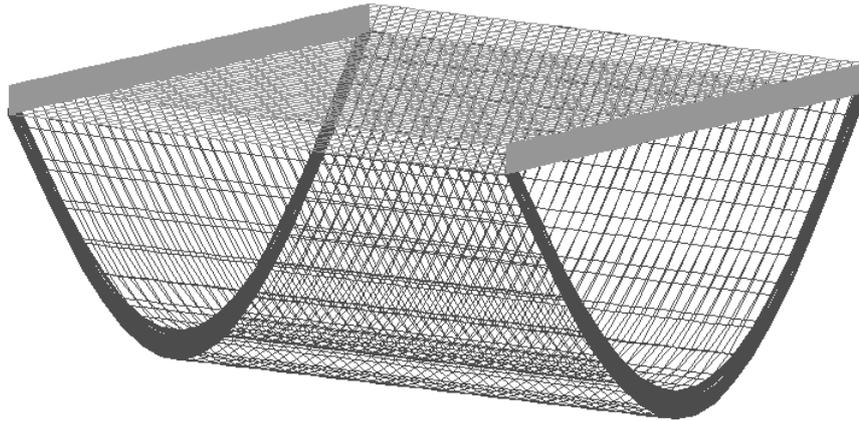


Figure 10: 1st bending mode of oscillation, EBBT model

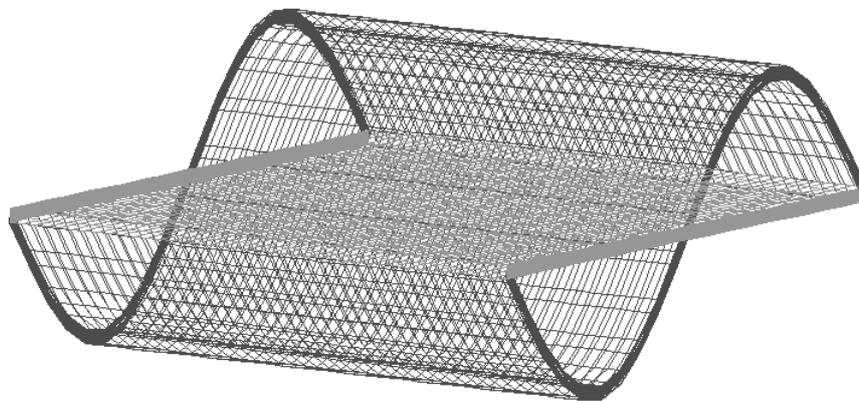


Figure 11: 2nd bending mode of oscillation, EBBT model

2. Mesh convergence study: compute the first and the second bending fundamental frequencies by means of EBBT and  $N = 4$ , for different mesh (5, 10, 20 B4 elements). Set opportunely one of the adopted mesh for the following points.

Table 9: First and second bending fundamental frequencies by means of EBBT and EDTN  $N = 4$

Model	$f_1$ [Hz]	$f_2$ [Hz]
Analytical formula	3.818679791591918	15.274719166367671
EBBT $n = 5$	3.81815049	15.2686136
EBBT $n = 10$	3.81814708	15.2677821
EBBT $n = 20$	3.81814722	15.2677687
EDTN $n = 5$	3.80953798	15.1302813
EDTN $n = 10$	3.80953428	15.1294038
EDTN $n = 20$	3.80953423	15.1293893

From table 9 we can conclude that the results do not dispair much as we densify the mesh, and they tend to converge, in the case of the EDTN, to values slightly different from the ones obtained

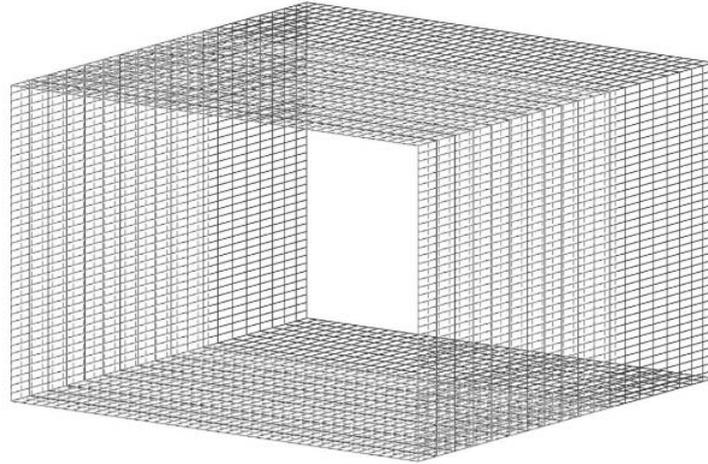


Figure 13: 8th axial mode, EBBT model

## TBT

Table 11: TBT model, frequencies and type of oscillation

Mode	Frequency [Hz]	Type of oscillation
1	3.81708277	Bending - X
2	15.2507880	Bending - X
3	25.3329128	Bending - Z
4	34.2488706	Bending - X
5	60.7255346	Bending - X
6	94.5633404	Bending - X
7	96.6868130	Bending - Z
8	131.760959	Axial
9	135.615853	Bending - X
10	183.710997	Bending - X

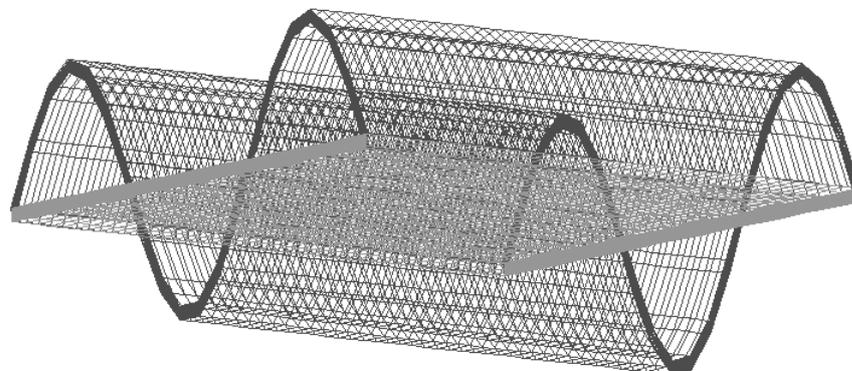


Figure 14: 4th bending modes, TBT model

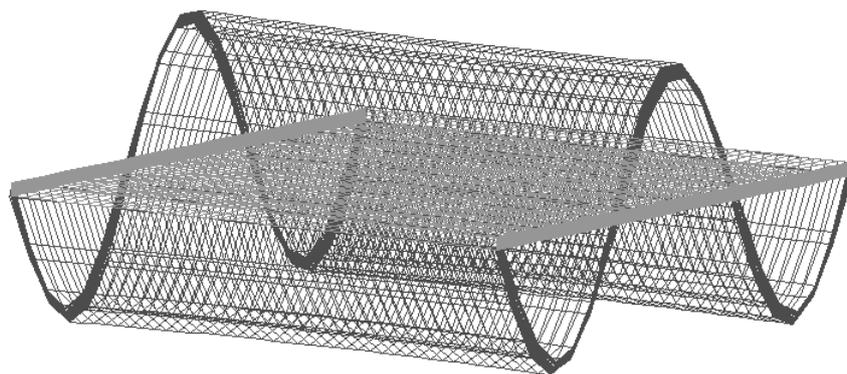


Figure 16: 4th bending mode,  $N = 2$  model

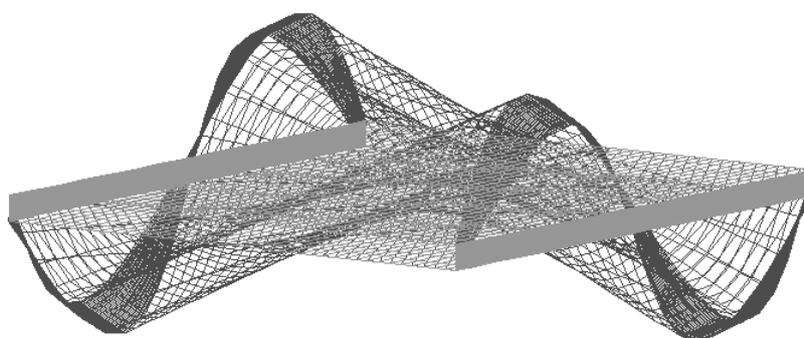


Figure 17: 7th torsional mode,  $N = 2$  model

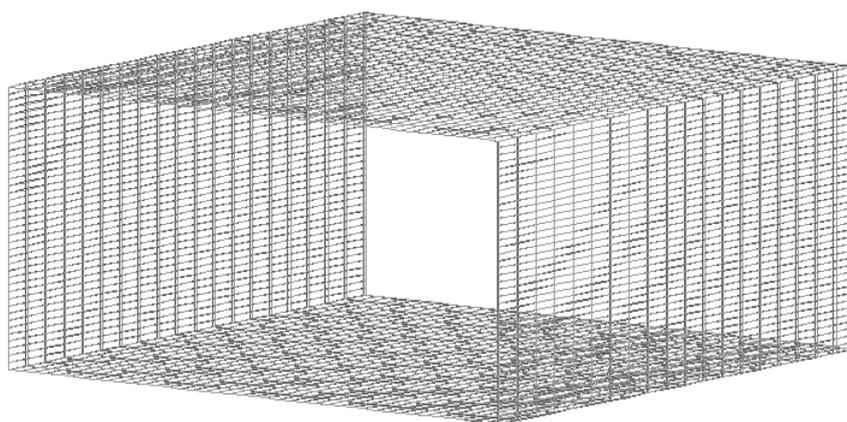


Figure 18: 9th axial mode,  $N = 2$  model

## Esercitazione 2b

- Let us consider the structure previously analyzed. An orthotropic material is now introduced, with the following characteristics:  $E_{33} = 20.5$  GPa,  $E_{22} = E_{11} = 10$  GPa,  $\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.25$ ,  $G_{12} = G_{13} = G_{23} = 5$  GPa,  $\rho = 1600$  Kg/m<sup>3</sup>. The effect of the fiber orientation angle  $\theta$  on the first 10 natural modes of the beam has to be evaluated for  $\theta = -90^\circ, -60^\circ, -30^\circ, 0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ .

The oscillation modes are calculated using the EDTN model with  $N = 4$ , still with a 20 B4 element mesh. As expected, there is a bending-torsional coupling for angles other than  $0^\circ$  and  $90^\circ$ . Besides, it can be noted that the sign of  $\theta$  does not affect the results, being the material orthotropic and a single layered section.

$$\theta = 0^\circ$$

Table 15:  $\theta = 0^\circ$ , frequencies and type of oscillation

Mode	Frequency [Hz]	Type of oscillation
1	2.58155868	Bending - X
2	10.1874165	Bending - X
3	17.0299727	Bending - Z
4	22.4237969	Bending - X
5	24.9141401	Torsional
6	38.7061809	Bending - X
7	49.4371094	Axial
8	50.1686437	Torsional
9	58.3492584	Bending - X
10	63.3752789	Bending - Z

$$\theta = \pm 90^\circ$$

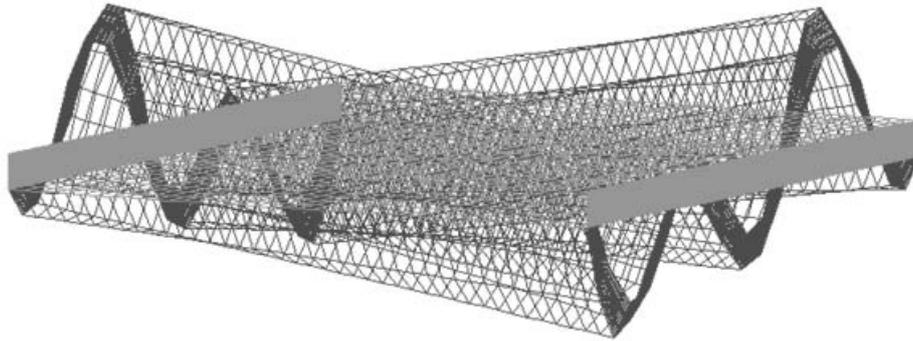
Table 16:  $\theta = \pm 90^\circ$ , frequencies and type of oscillation

Mode	Frequency [Hz]	Type of oscillation
1	1.80717664	Bending - X
2	7.17981562	Bending - X
3	12.0309450	Bending - Z
4	15.9753488	Bending - X
5	24.8668421	Torsional
6	27.9695566	Bending - X
7	39.0506031	Axial
8	42.8752558	Bending - X
9	46.0617484	Bending - Z
10	49.7969944	Torsional

$$\theta = \pm 30^\circ$$

Table 18:  $\theta = \pm 30^\circ$ , frequencies and type of oscillation

Mode	Frequency [Hz]	Type of oscillation
1	2.26887532	Bending - X
2	8.75800791	Bending - Torsional - X
3	14.6960392	Bending - Z
4	19.4905941	Bending - Torsional - X
5	26.6339164	Bending - Torsional - Z
6	34.1738823	Bending - Torsional - X
7	45.5273430	Axial
8	50.6117502	Bending - Torsional - X
9	54.9116447	Bending - Torsional - Z
10	55.8309255	Bending - Z

Figure 21: 8th bending - torsional mode,  $N = 4, \theta = \pm 30^\circ$ 

## Esercitazione 2c

- A sweep angle  $\Lambda$  is now introduced on the structure previously analyzed. Set the fiber orientation angle  $\theta = 30^\circ$  and the model  $N = 4$ . Analyze the first 5 natural modes by evaluating the bending-torsional coupling for  $\Lambda = -20, -15, -10, -5, 0, +5, +10, +15, +20$ .

In this case, the sign of the sweep angle does affect the results. And in any case of  $\Lambda \neq 0$ , bending-torsional couplings should occur besides those due to the fiber orientation of the orhotrop material. Next, the frequencies and the type of oscillation obtained for each of the sweep angles considered is displayed in tables, along with some figures with the most representing modes.

$$\Lambda = -10^\circ$$

Table 21:  $\Lambda = -10^\circ$ , frequencies and type of oscillation

Mode	Frequency [Hz]	Type of oscillation
1	2.28891957	Bending - X
2	7.16340555	Bending - X
3	9.05929342	Bending - Z
4	14.7580652	Axial - Bending
5	20.0391412	Bending - X

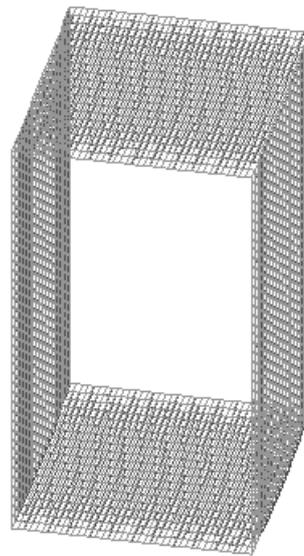


Figure 23: 4th axial - bending mode,  $N = 4$ ,  $\theta = 30^\circ$  and  $\Lambda = -10^\circ$

$$\Lambda = -5^\circ$$

Table 22:  $\Lambda = -5^\circ$ , frequencies and type of oscillation

Mode	Frequency [Hz]	Type of oscillation
1	2.29168105	Bending - X
2	9.00151335	Bending - Torsional - X
3	14.8496588	Bending - Z
4	19.9572656	Bending - Torsional - X
5	26.3653393	Torsional

$$\Lambda = 10^\circ$$

Table 25:  $\Lambda = 10^\circ$ , frequencies and type of oscillation

Mode	Frequency [Hz]	Type of oscillation
1	2.15134434	Bending - X
2	7.85877878	Axial
3	7.90791035	Bending - Torsional - X
4	13.0543523	Bending - Z
5	17.6708270	Bending - Torsional - X

$$\Lambda = 15^\circ$$

Table 26:  $\Lambda = 15^\circ$ , frequencies and type of oscillation

Mode	Frequency [Hz]	Type of oscillation
1	1.23245842	Axial
2	2.06249222	Bending - X
3	7.27689154	Bending - Torsional - X
4	11.5718303	Bending - Z
5	16.4648844	Bending - Torsional - X

$$\Lambda = 20^\circ$$

Table 27:  $\Lambda = 20^\circ$ , frequencies and type of oscillation

Mode	Frequency [Hz]	Type of oscillation
1	0.336421869	Axial
2	1.95803685	Bending - X
3	6.64724664	Bending - Torsional - X
4	10.2513894	Bending - Z
5	15.1460753	Bending - Torsional - X

### Esercitazione 3a

The following free-stream velocities have to be considered:  $V_\infty = 25, 50, 75, 100, 125$  [m/s]. Material 1 has to be adopted. A reference value is provided to check inputs (the transverse displacement of point  $B$  for  $V_\infty = 50$  [m/s], SSA, aerodynamic mesh  $4 \times 40$ ):  $u_{zB} = 8.040$  [mm].

#### Assessments

1. Aerodynamic mesh convergence study: for SSA and  $N = 4$ , set  $V_\infty = 50$  [m/s] and compute the transverse displacement  $u_z$  of point  $B$  by means of different aerodynamic mesh  $N_{AP_z} \times N_{AP_y}$ :  $2 \times 20, 3 \times 30, 4 \times 40, 5 \times 50, 6 \times 60$ . Compare  $u_{zB}$  as well as the Lift Force generated by each mesh.

Table 28: Displacement of point  $B$  and lift force generated by each mesh

Mesh	$u_{zB}$ [m]	Lift Force [N]
$2 \times 20$	0.008170012	1968
$3 \times 40$	0.008085289	1960
$4 \times 40$	0.008041105	1956
$5 \times 50$	0.008014070	1953
$6 \times 60$	0.007995750	1951

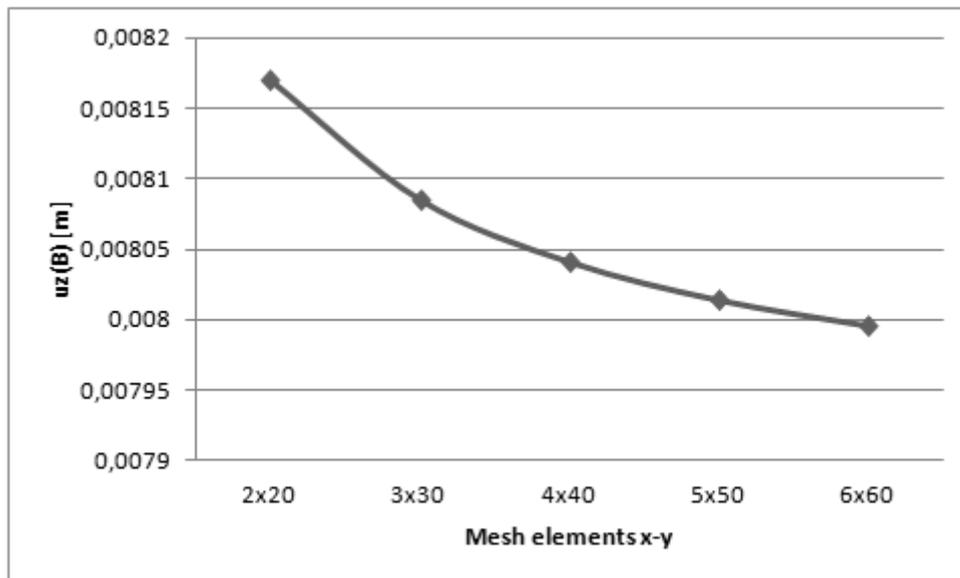


Figure 26: Displacement of point  $B$  for different aerodynamic meshes

### Displacement of point *B*

$V_{\infty} = 25 \text{ m/s}$

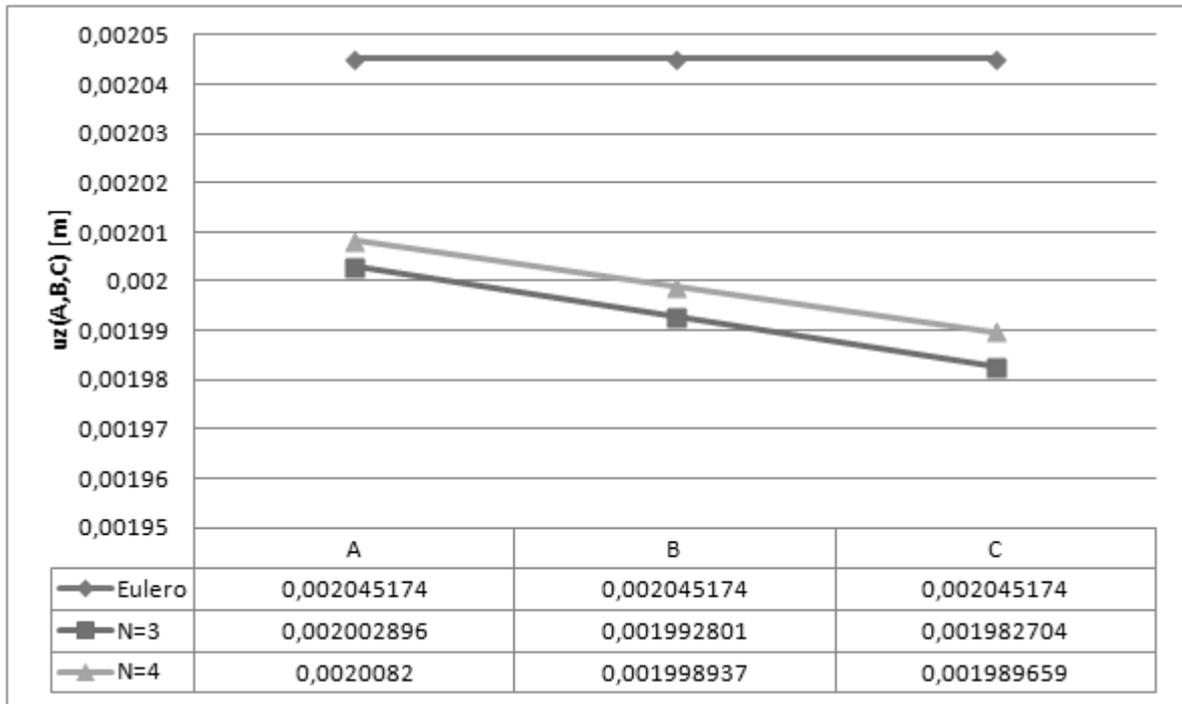


Figure 28: Transverse displacement of point *B*, SSA  $V_{\infty} = 25 \text{ m/s}$

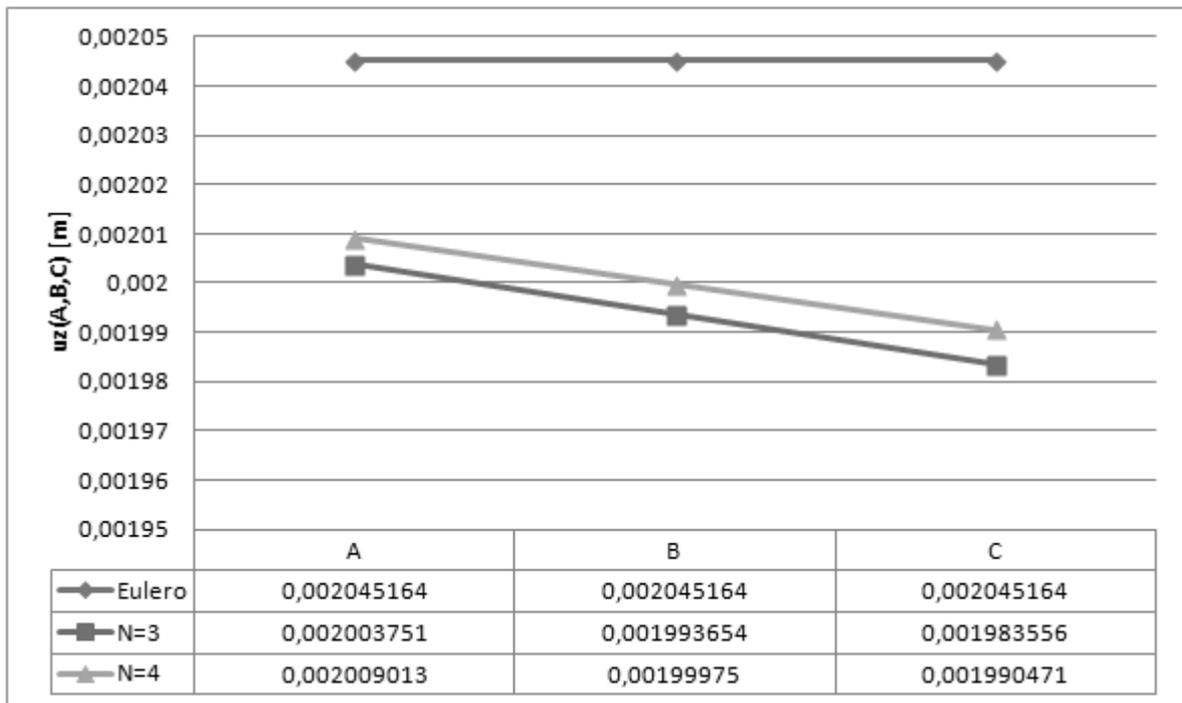


Figure 29: Transverse displacement of point *B*, SAA  $V_{\infty} = 25 \text{ m/s}$

$V_\infty = 75 \text{ m/s}$

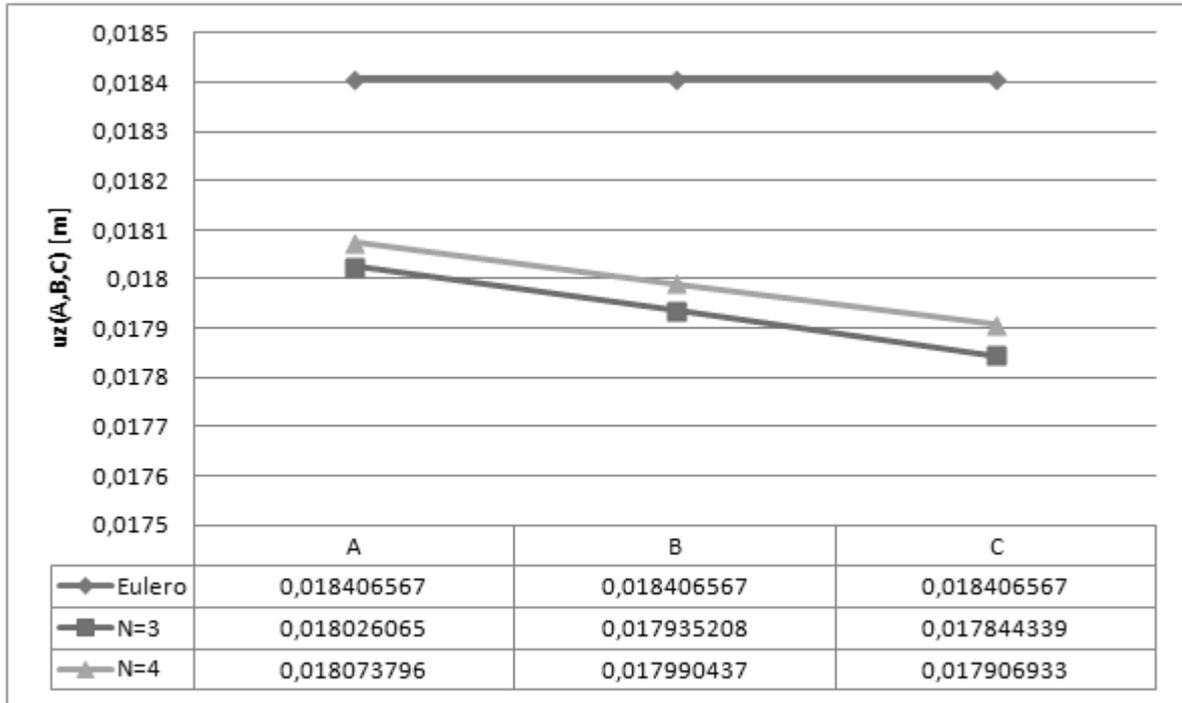


Figure 32: Transverse displacement of point *B*, SSA  $V_\infty = 75 \text{ m/s}$

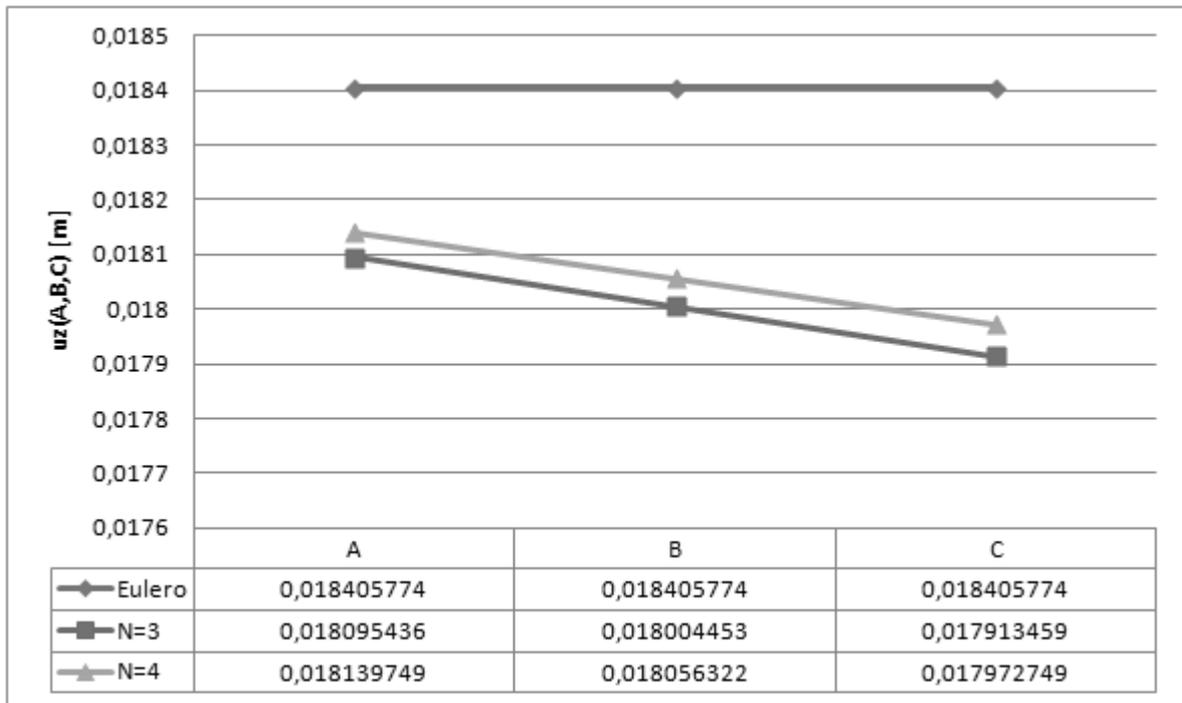


Figure 33: Transverse displacement of point *B*, SAA  $V_\infty = 75 \text{ m/s}$

$$V_{\infty} = 125 \text{ m/s}$$

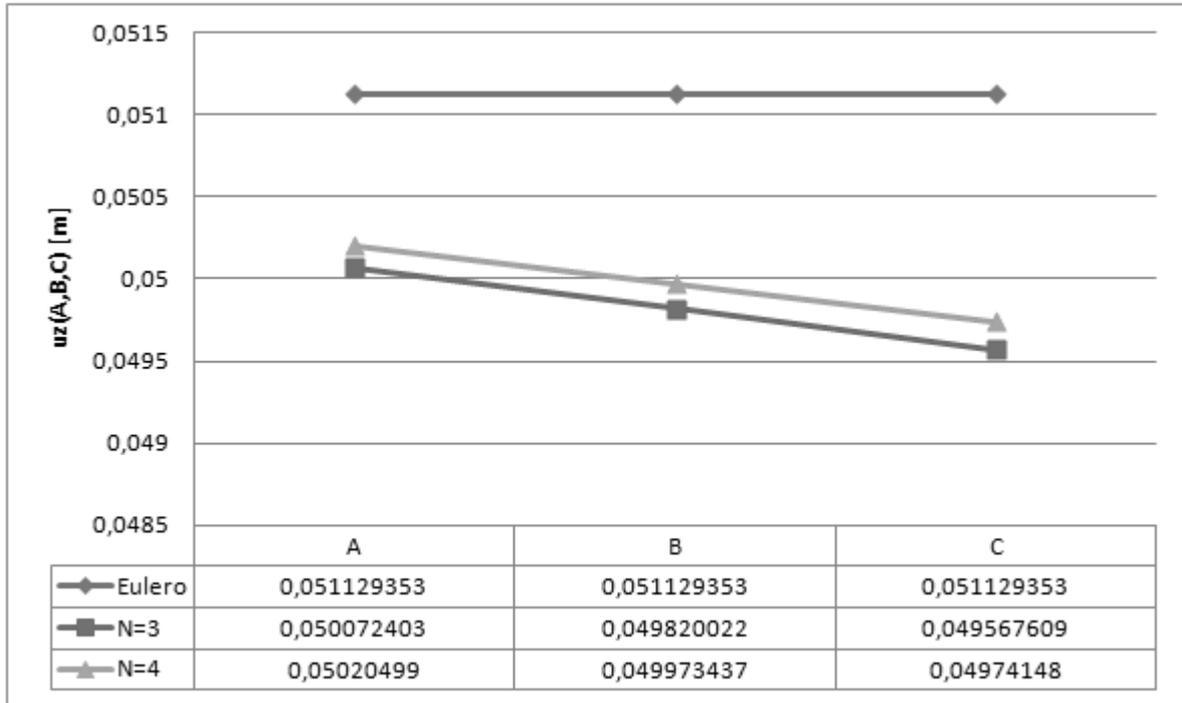


Figure 36: Transverse displacement of point *B*, SSA  $V_{\infty} = 125 \text{ m/s}$

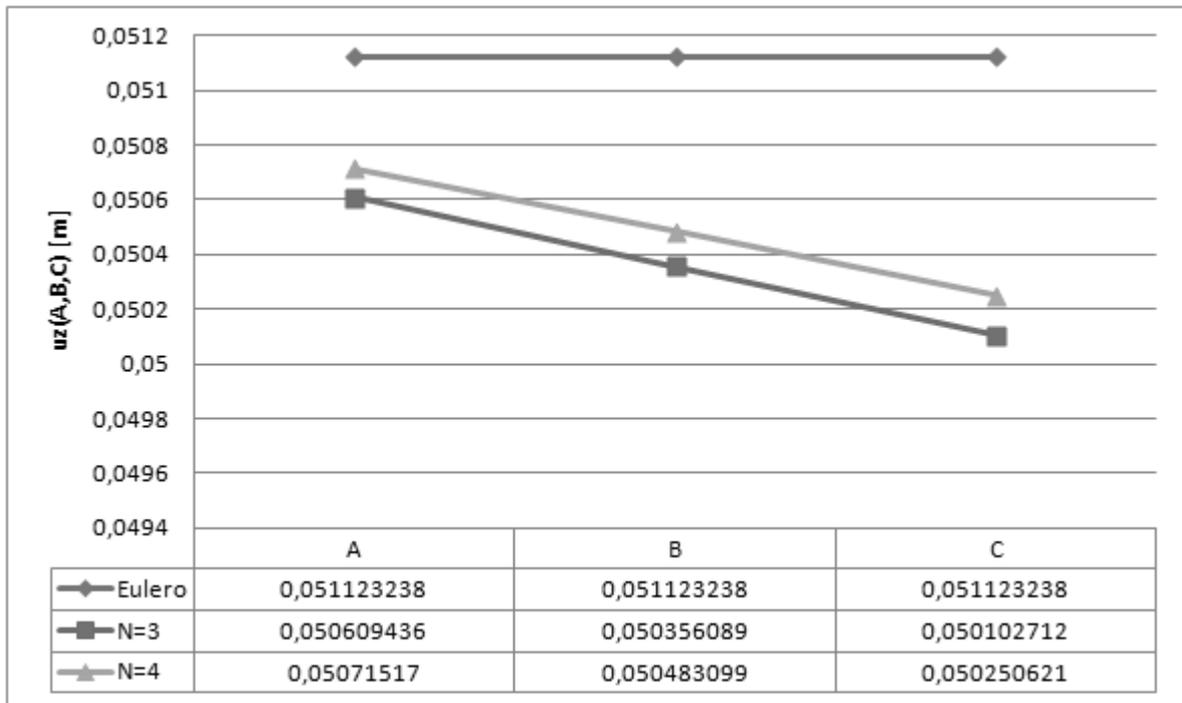


Figure 37: Transverse displacement of point *B*, SAA  $V_{\infty} = 125 \text{ m/s}$

$N = 4$

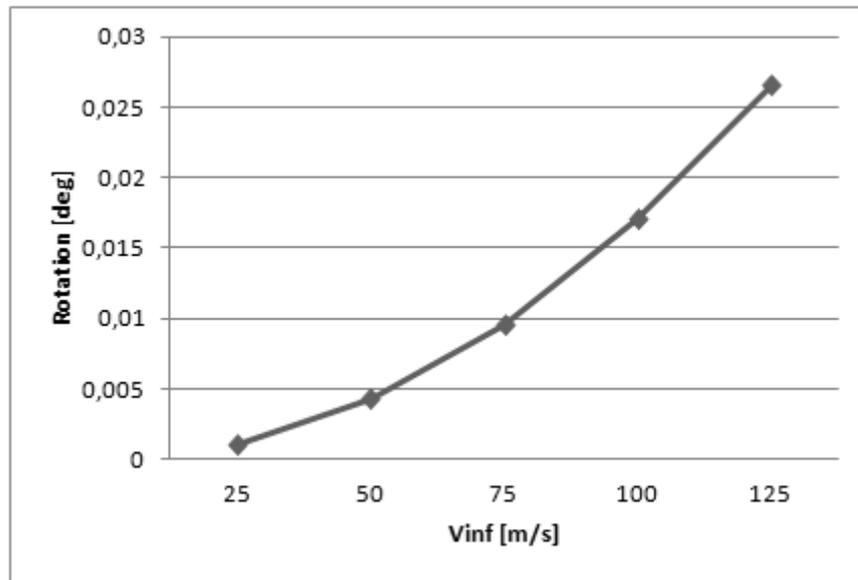


Figure 40: Rotation of the free-tip cross-section, SSA  $N = 4$

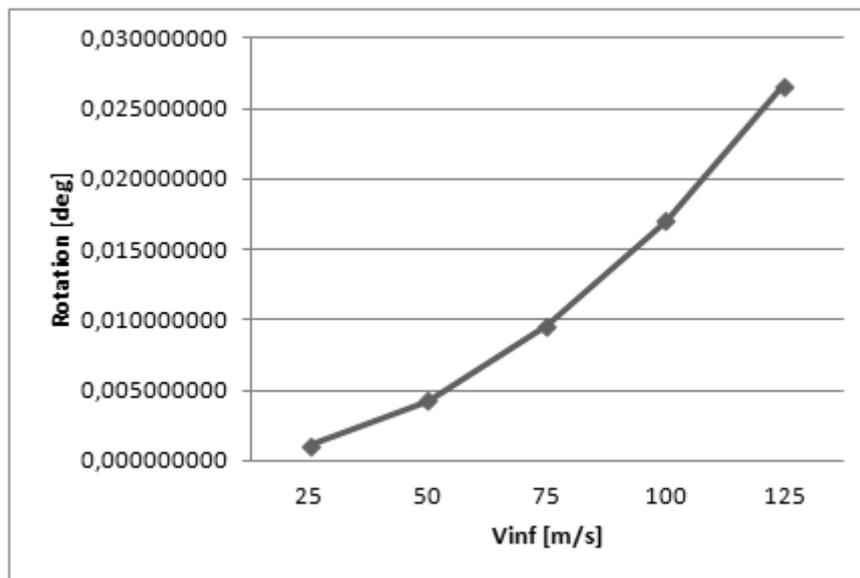


Figure 41: Rotation of the free-tip cross-section, SAA  $N = 4$

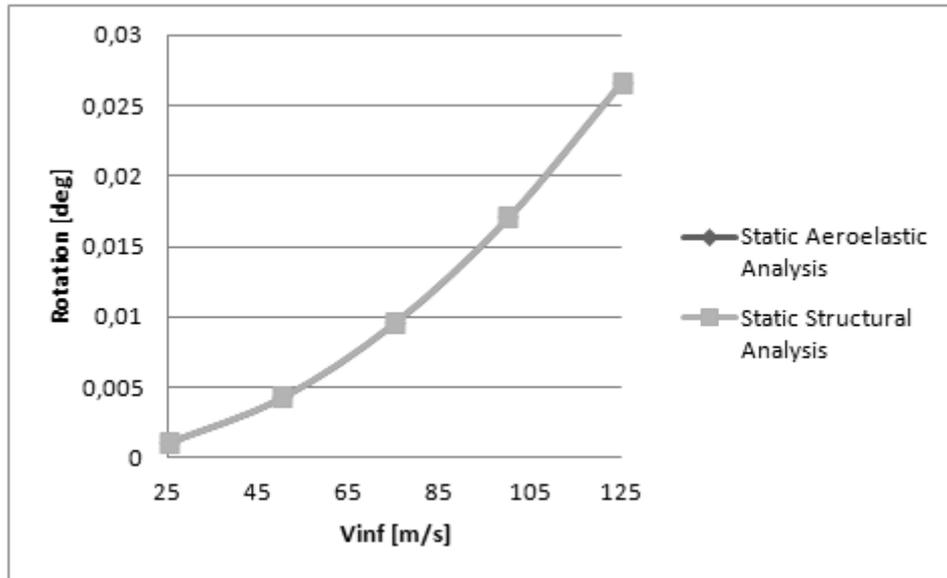


Figure 43: Rotation of the free-tip cross-section,  $N = 4$

Again in this case, we observe that there are small differences between the values obtained with the different models. That is because we are dealing with small displacements and so they are not much appreciable. This is shown in the following figure, with the % variation obtained for the different models used.

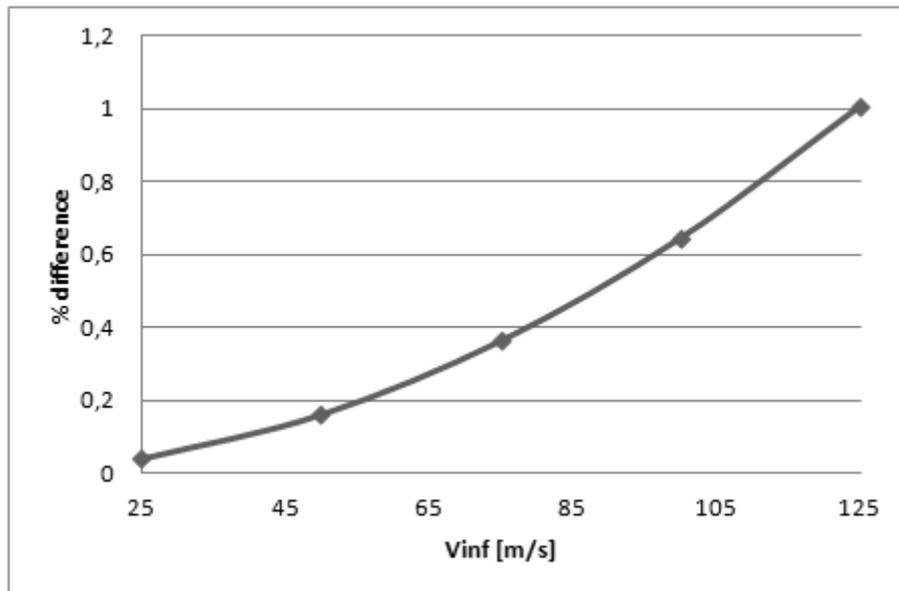


Figure 44: % difference between SSA - SAA

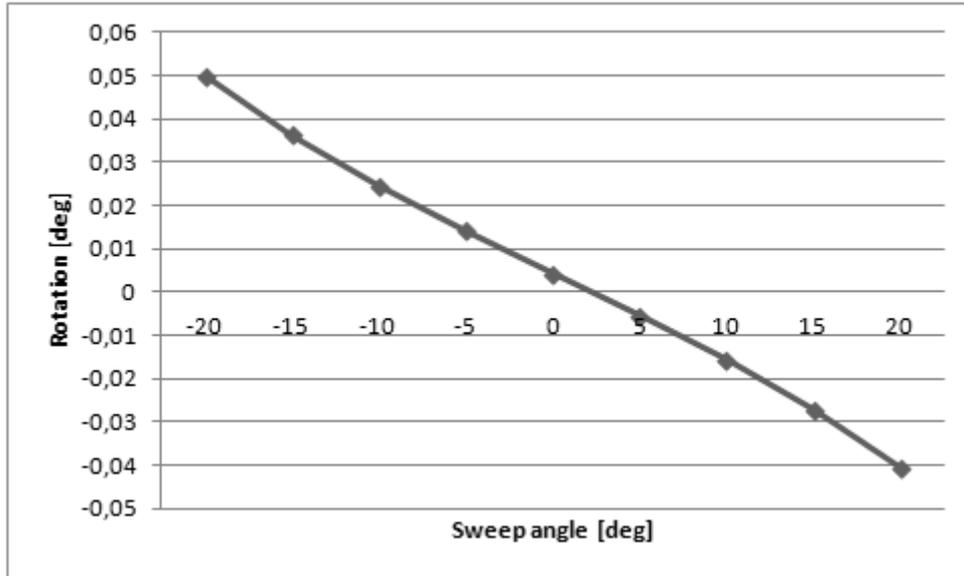


Figure 46: Rotation of the free-tip cross-section for different sweep angles

The fact that there is a non null rotation in the case of  $\Lambda = 0^\circ$  is due to different position of the focus with respect to the shear center  $X_F \neq X_{CT}$ . For the same reason, the results obtained for the positive and negative sweep angles are not symmetric.

### Esercitazione 3c

- Material 2 has to be adopted and  $N = 4$ . Set an appropriate aerodynamic mesh and  $V_\infty = 50$  [m/s]. For SAA, the effect of the fiber orientation angle on point  $B$  transverse displacement and cross-section rotation has to be investigated for  $\theta = -60^\circ, -30^\circ, 0^\circ, +30^\circ, +60^\circ$  ( $\Lambda = 0^\circ$ ).

In this case, we notice that the results obtained for positive and negative fiber orientation angle are different, due to the fact that the studied airfoil is not symmetric. This affects the rotation as well, which becomes negative for positive fiber orientation angles, which in turn gives an stabilizing effect. The more the fiber is parallel to the wind direction, the less the bending and torsional stiffness (the displacements of point  $B$  and rotation of the free-tip cross-section increase).

Table 32: Transverse displacement of point  $B$  and rotation of the free-tip cross-section for different fiber orientation angles

$\theta$ [°]	$u_{zB}$ [m]	Rotation [°]
-60	0.057756027	0.098181303
-30	0.042085762	0.147936958
0	0.030082358	0.024400668
30	0.039005631	-0.095305513
60	0.055160284	-0.051045096

# Esercitazione IV

Let us consider a flat plate modeled as a cantilever beam having the cross-section shown in Fig. 49. Length of the beam,  $L = 10$  [m]; chord,  $b = 1$  [m]; height,  $h = 0.1$  [m]. An orthotropic material is adopted:  $E_{33} = 20.5$  GPa,  $E_{22} = E_{11} = 10$  GPa,  $\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.25$ ,  $G_{12} = G_{13} = G_{23} = 5$  GPa,  $\rho = 1600$  Kg/m<sup>3</sup>.

The free stream velocity which causes divergence phenomena,  $V_D$ , has to be computed (SOL: 143). The air density is  $\rho_\infty = 1.225$  [kg/m<sup>3</sup>]. A 10 B4 mesh and a  $10 \times 50$  aerodynamic mesh should be used for all the assessments. The aerodynamic symmetry condition has to be imposed. A reference value is provided ( $\Lambda = -20^\circ$ ,  $\theta = -30^\circ$ ,  $N = 4$ ,  $V_D = 61.96$  [m/s]).

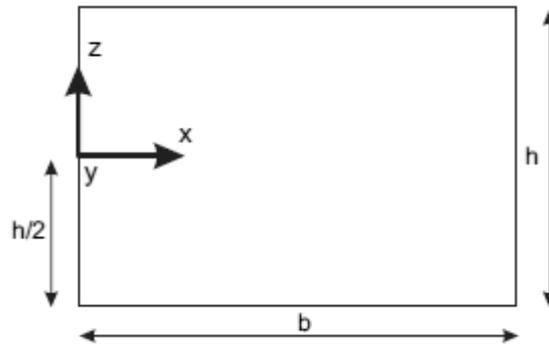


Figure 49: Rectangular cross-section

## Esercitazione 4a: Effect of the 1D structural model

- The effect of the expansion order has to be evaluated for  $\Lambda = 0^\circ$  and  $\theta = 0^\circ$ . This means the  $V_D$  has to be evaluated for EBBT, TBT,  $N = 1$ ,  $N = 2$ ,  $N = 3$ ,  $N = 4$ .

Since EBBT and TBT do not take torsional effects into account,  $V_D$  can be considered as infinite for both cases.

Table 33: Divergence velocity for different models with  $\Lambda = 0^\circ$  and  $\theta = 0^\circ$

Model	$V_D$
EBBT	$\infty$
TBT	$\infty$
$N = 1$	1171.718528808
$N = 2$	238.211566600
$N = 3$	237.787545154
$N = 4$	235.171831128

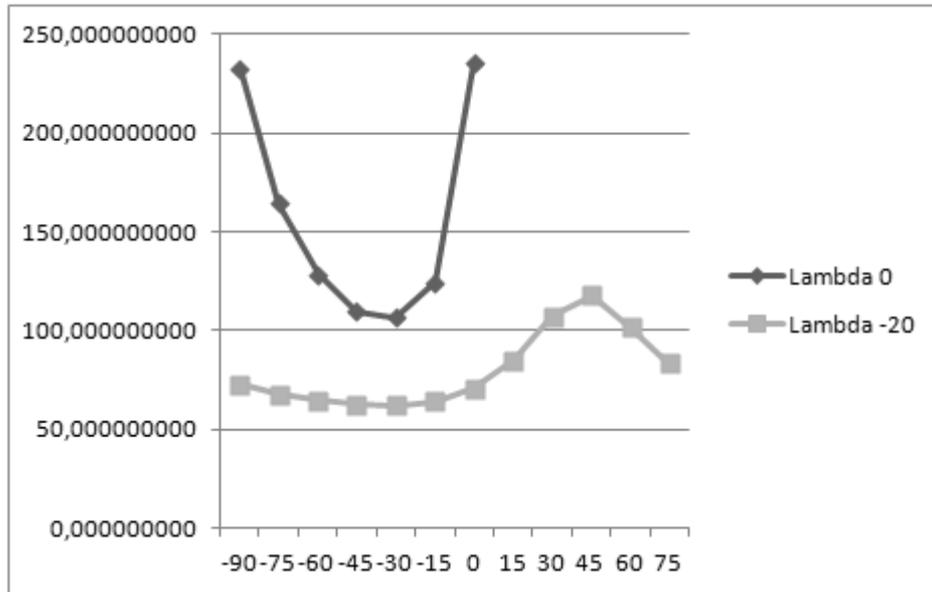


Figure 50: Divergence velocity for different fiber orientation angles with  $\Lambda = 0^\circ$  and  $\Lambda = -20^\circ$

### Esercitazione 4c: Effect of the aspect ratio

- $N = 4$  has to be set as structural model. The following sweep and fiber orientation angles have to be considered:  $\Lambda = -20^\circ$ ,  $\theta = -30^\circ$ . Consider the following lengths of the beam:  $L = 5, 7.5, 10, 12.5, 15, 17.5, 20$  [m]. Plot  $V_D$  vs.  $L/b$ .

Table 35: Divergence velocity for different lengths of the beam and  $\Lambda = -20^\circ$ ,  $\theta = -30^\circ$

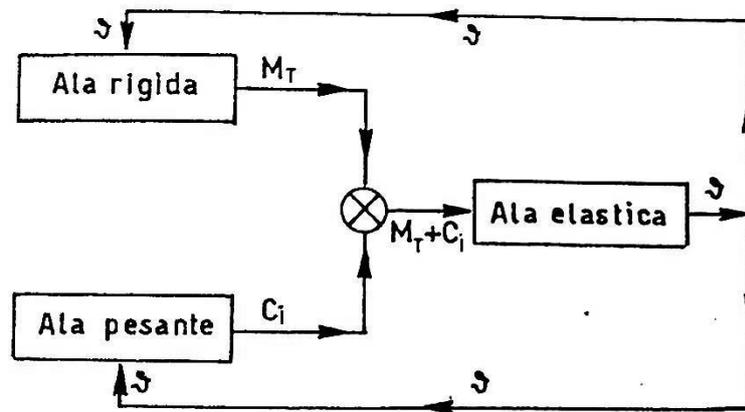
$L$ [m]	$V_D$ [m/s]
5	195.77300000
7.5	99.75813898
10	61.96476023
12.5	42.73148528
15	31.44217909
17.5	24.18909470
20	19.22713553

It can be noticed in the following figure how the divergence velocity decreases as the length of the beam is increased.

# AEROELASTICITÀ (PRINCIPI)

(Capitoli 1-5)

2) Diagramma funzionale di un fenomeno aeroelastico dinamico: problema di stabilità. (PAG. 5-6)



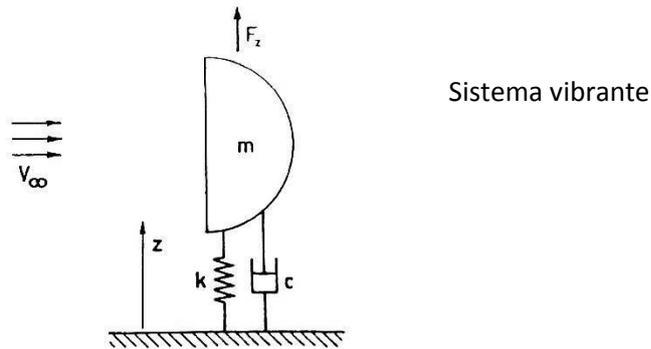
Il problema di stabilità consiste nell'annullare il termine noto ( $\alpha(t) = 0$ ), presente nel problema di risposta: studio, così, un problema omogeneo, agli autovalori. Quello che sto cercando è un'oscillazione torsionale ad ampiezza costante ( $\vartheta(t)$  che si autosostiene). Risolvendo il problema agli autovalori (ovvero ne cerco le soluzioni non banali), trovo una  $V_F$  e una  $\omega_F$  (parametri critici) che definiscono la condizione di *flutter*.  $V_F$  è il parametro chiave:

- $V > V_F \rightarrow$  colasso sistema
- $V < V_F \rightarrow \vartheta$  rientra e si smorza

Con  $V = V_F$  ho la  $\vartheta(t)$  che cercavo.

#### 4) Il Galloping: equazioni. (PAG. 24-29)

Fenomeno di oscillazione autoeccitata, instabilità dinamica generata da una dissimetria nella sezione del corpo, per cui l'energia si trasmette dalla corrente fluida alla struttura.



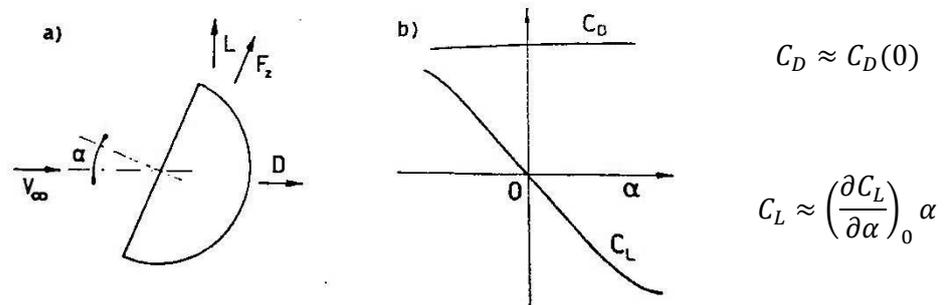
**Partenza:**

$$-m\ddot{z} - c_z\dot{z} - k_{zx}x - k_{zz}z + F_z(t) = 0$$

dato che studio solo il moto lungo z c'è che  $k_{zx} = 0$

$$-m\ddot{z} - c_z\dot{z} - k_{zz}z + F_z(t) = 0$$

**Analisi:** la forza  $F_z$  è definita come:



La particolare forma per il corpo fa sì che il  $C_L$  non cresce con l'incidenza (come nei profili alari), ma diminuisce.

con  $\alpha \equiv \alpha_{kin} = \frac{-\dot{z}}{V_\infty}$  (piccolo)  $\rightarrow$  permette andamenti linearizzati di  $C_D$  e  $C_L$

$$F_z(t) = L \cos \alpha_{kin} + D \sin \alpha_{kin} \approx \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 l \left[ \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \alpha_{kin} + (C_D)_0 \alpha_{kin} \right] = -\frac{1}{2} \rho V_\infty l \dot{z} \left( \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} + C_D \right)_0$$

**Arrivo:**

Sostituendo ora  $F_z(t)$  in:

$$-m\ddot{z} - c_z\dot{z} - k_{zz}z + F_z(t) = 0$$

$$\boxed{m\ddot{z} + c_{tot}\dot{z} + k_{zz}z = 0}$$

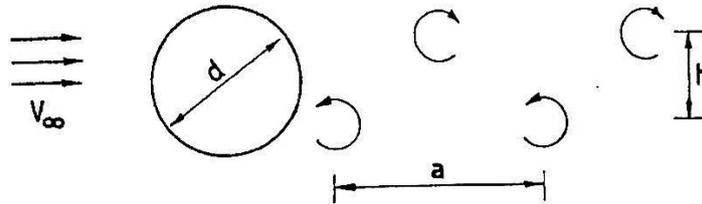
## 5) Vibrazioni indotte da vortex shedding. (PAG. 18-24)

Il *vortex shedding* nasce come risonanza aeroelastica e evolve poi in fenomeno d'instabilità.

Supponiamo di avere un cilindro di diametro  $d$  con supporti perfettamente rigidi e non soggetto a movimento prodotto dalle forze scambiate col fluido.

### Reynolds

- $Re < 40 \rightarrow$  flusso stazionario
- $Re > 40 \rightarrow$  flusso instazionario
- $Re > 50 \rightarrow$  vortici controrotanti che si distaccano
- $Re > 150 \rightarrow$  flusso organizzato di scia nascosto da disturbi turbolenti
- $(50 < Re < 150) \rightarrow$  si genera la **scia di von Karman**: struttura di vortici



Essa struttura di vortici è stabile per un rapporto  $a/h = 3.56$ . I vortici hanno  $V < V_\infty$ .

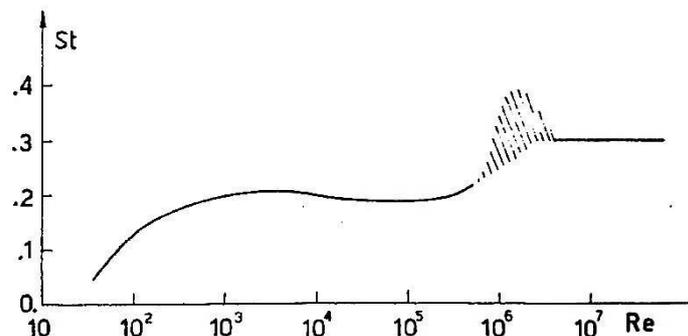
Numero o frequenza di Strouhal

$$S_T = \frac{df_s}{V_\infty} \approx 0.2$$

Con  $f_s$  = frequenza di distacco dei vortici del cilindro

Permette predire la frequenza di distacco nota la configurazione del flusso.

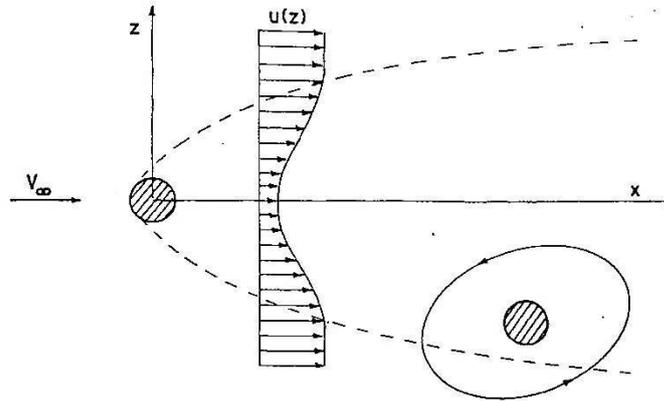
Formula NON applicabile per valori di  $Re \sim 10^6$ , ove il flusso è *stocastico* e l'energia distribuita su molte frequenze:



## 6) Galloping di scia: descrizione e differenze rispetto al galloping classico. (PAG. 29-31)

È un fenomeno di instabilità dinamica.

- **Galloping di scia:** generato da una dissimetria del campo di moto fluidodinamico.
- **Galloping classico:** generato da una dissimetria nella sezione del corpo.



La **relazione elastica** del corpo e la sua **inerzia** forniscono gli altri elementi necessari allo sviluppo dell'instabilità. Quando si manifesta viene anche coinvolto il grado di libertà lungo  $x$  e lo studio richiede l'uso del sistema completo di equazioni:

$$-m\ddot{x} - c_x\dot{x} - k_{xx}x - k_{xz}z + F_x(t) = 0$$

$$-m\ddot{z} - c_z\dot{z} - k_{zx}x - k_{zz}z + F_z(t) = 0$$

Le oscillazioni prendono una traiettoria ellittica percorsa nel piano  $(x,z)$  dal baricentro del corpo a valle.

Nella fase di amplificazione dell'oscillazione, questa traiettoria segue una spirale. Le non linearità strutturali e aerodinamiche portano l'ampiezza di oscillazione a stabilizzarsi sui valori di ciclo limite (il corpo percorre infine un'ellisse).

Il *galloping* di scia è un fenomeno dannoso per le linee elettriche perché sollecita in modo pesante i conduttori. Soluzioni:

- Agire sulla rigidità dei conduttori vincolandoli con distanziali che innalzano le frequenze proprie di oscillazione.
- Applicare una moderata torsione all'intero fascio di cavi per distruggere la coerenza della scia che investe il conduttore a valle.

$\vartheta$  = torsione nel piano del vento  $V_\infty$

$\hat{\vartheta}$  = torsione rispetto all'asse elastico

Accanto all'effetto del carico distribuito  $p_f$  c'è anche quello dal momento torcente distribuito  $m_t$  che, essendo di origine aerodinamica, agisce nel piano del vento. Il suo vettore, infatti, può essere scomposto in una componente  $\hat{m}_t$  di torsione e in una  $\hat{m}_f$  di flessione rispetto all'asse elastico:

$$\hat{m}_t(\hat{y}) = m_t(\hat{y}) \cos \phi \qquad \hat{m}_f(\hat{y}) = -m_t(\hat{y}) \sin \phi$$

Con riferimento all'asse elastico obliquo  $\hat{y}$ , le eq. differenziali dell'ala a freccia (con  $m_f(\hat{y}) \neq 0$ ):

- Flessione:

$$\frac{d^2}{d\hat{y}^2} \left( EJ \frac{d^2 h}{d\hat{y}^2} \right) = p_f(\hat{y}) - \frac{d\hat{m}_f}{d\hat{y}} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2}{d\hat{y}^2} \left( EJ \frac{d^2 h}{d\hat{y}^2} \right) = p_f(\hat{y}) + \frac{dm_t}{d\hat{y}} \sin \phi$$

- Torsione:

$$\frac{d}{d\hat{y}} \left( GJ_t \frac{d\hat{\vartheta}}{d\hat{y}} \right) = -\hat{m}_t(\hat{y}) \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{d\hat{y}} \left( GJ_t \frac{d\hat{\vartheta}}{d\hat{y}} \right) = -m_t(\hat{y}) \cos \phi$$

Da queste equazioni si ottiene  $\hat{\vartheta}$  (rispetto all'asse elastico), ma interessa  $\vartheta$  (rispetto piano vento  $V_\infty$ ):

$$\boxed{\vartheta(\hat{y}) = \hat{\vartheta}(\hat{y}) \cos \phi - \frac{dh}{d\hat{y}} \sin \phi}$$

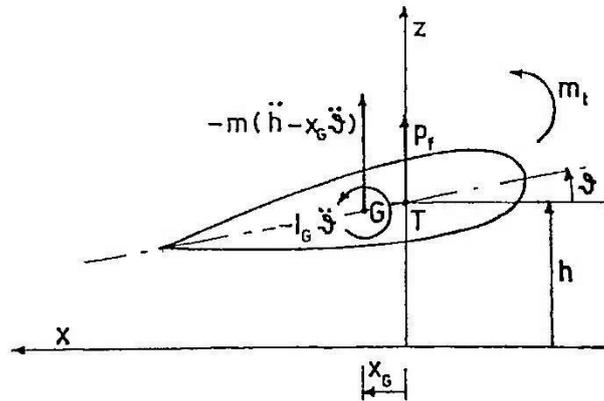
Il segno della freccia  $\phi$  non influisce sul coseno, mentre sul seno ho che:

- $\phi > 0 \rightarrow \sin \phi > 0 \rightarrow$  la  $\vartheta(\hat{y})$  viene diminuita grazie alla portanza:

Se  $L \uparrow \Rightarrow dh/dy \uparrow \Rightarrow \vartheta(\hat{y}) \downarrow$  (effetto stabilizzante): **stabilità statica**

- $\phi < 0 \rightarrow \sin \phi < 0 \rightarrow$  la  $\vartheta(\hat{y})$  viene esaltata dalla portanza: **instabilità statica**
- $\phi = 0 \rightarrow$  ala dritta

**9) Accoppiamento dinamico flessione – torsione in un ala diritta con assi baricentrico ed elastico distinti. (PAG. 65-66)**



**Fenomeno fisico:**

- Posto  $x_G \neq x_{C_T}$ , con  $x_G > 0$ , ovvero baricentro CG dietro a T
- Durante un'oscillazione verticale di flessione nasce una forza d'inerzia (applicata a CG)
- Questa forza ha momento rispetto a T
- Nasce una torsione dovuta alla flessione (ACCOPPIAMENTO FLESSO-TORSIONALE)

**Condizioni di validità per le semplificazioni (per AR non troppo elevati):**

- $b \gg s$  (semiapertura  $\gg$  spessore)
- $b \cdot \omega \ll 1$  (semiapertura  $\cdot$  freq del moto  $\ll 1$ )

Alle stesse conclusioni si arriva supponendo:

- Energia di taglio nulla ( $U_T = 0$ )
- inerzia a rotazione delle sezioni nulla ( $I_x \approx 0$ )

**Equazioni:**

Partiamo dal caso statico per l'ala diritta (ricordare  $m_f = 0$ ):

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dy^2} \left( EJ \frac{d^2 h}{dy^2} \right) = p_f(y) & \text{eq. della flessione} \\ \frac{d}{dy} \left( GJ_t \frac{d\vartheta}{dy} \right) = -m_t(y) & \text{eq. della torsione} \end{cases}$$

Applicando il principio di d'Alembert ed estendendo le suddette equazioni dal caso statico al caso in cui agiscono anche dei carichi inerziali si ottiene:

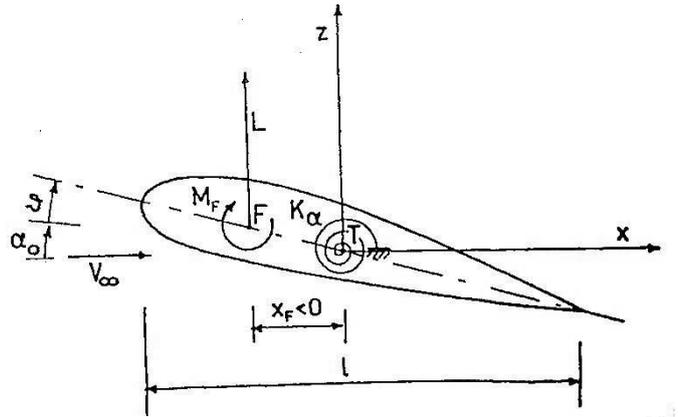
$$\begin{cases} \frac{d^2}{dy^2} \left( EJ \frac{d^2 h}{dy^2} \right) = p_f(y, t) - m(\ddot{h} - x_G \ddot{\vartheta}) & \text{eq. della flessione} \\ \frac{d}{dy} \left( GJ_t \frac{d\vartheta}{dy} \right) = -[m_t(y, t) - I_G \ddot{\vartheta} + m x_G (\ddot{h} - x_G \ddot{\vartheta})] & \text{eq. della torsione} \end{cases}$$

**10) Risposta aeroelastica statica di un profilo alare elasticamente supportato ad un'assegnata velocità. (PAG. 101-102)**

$$\alpha = \alpha_0 + \vartheta$$

$\alpha_0 \equiv$  incidenza geometrica

$\vartheta \equiv$  deformazione torsionale statica



**Equilibrio attorno a T:**

$$M_{T_e} = K_\alpha \vartheta \quad \text{coppia di reazione elastica}$$

$$M_{T_a} = M_F - Lx_F = \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 l (lC_{M_F} - x_F C_L) = p_\infty^0 l (lC_{M_F} - x_F C_L) \quad \text{momento aerodinamico}$$

Essendo  $x_F < 0$ , ci deve essere il segno (-) affinché  $L$  generi un momento cabrante (+).

Coppia aerodinamica = Coppia di reazione elastica

$$M_{T_a} = M_{T_e}$$

$$K_\alpha \vartheta = p_\infty^0 l (lC_{M_F} - x_F C_L)$$

Considerando che:  $C_L = C'_L \alpha = C'_L (\alpha_0 + \vartheta)$

$$K_\alpha \vartheta = p_\infty^0 l (lC_{M_F} - x_F C'_L \alpha_0 - x_F C'_L \vartheta)$$

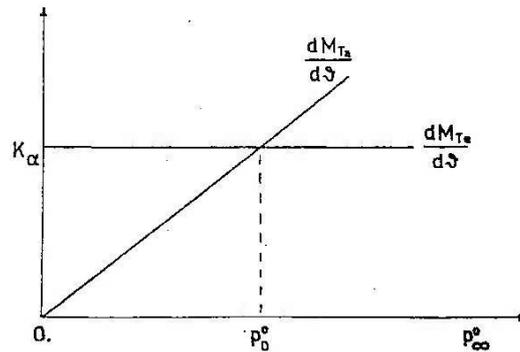
$$K_\alpha \vartheta + p_\infty^0 l x_F C'_L \vartheta = p_\infty^0 l (lC_{M_F} - x_F C'_L \alpha_0)$$

$$\vartheta (K_\alpha + p_\infty^0 l x_F C'_L) = p_\infty^0 l (lC_{M_F} - x_F C'_L \alpha_0)$$

E finalmente:

$$\boxed{\vartheta = \frac{p_\infty^0 l (lC_{M_F} - x_F C'_L \alpha_0)}{K_\alpha + p_\infty^0 l x_F C'_L}}$$

$\vartheta$  è l'angolo di torsione al quale un profilo alare si dispone quando è ad una certa velocità sotto l'effetto dei carichi aerodinamici torcenti ( $M_{T_a}$ ), contrastati dalla sua rigidità ( $K_\alpha$ ).



$$\frac{dM_{Te}}{d\vartheta} = K_\alpha \qquad \frac{dM_{Ta}}{d\vartheta} = -p_\infty^0 l x_F C'_L$$

Per  $p_\infty^0 = p_D^0$  si ottiene:

$$\frac{dM_{Te}}{d\vartheta} = \frac{dM_{Ta}}{d\vartheta}$$

Il che descrive un'equilibrio instabile:

- $V > V_D \Rightarrow dM_{Ta} > dM_{Te} \Rightarrow$  deformazione fino al cedimento della struttura.
- $V < V_D \Rightarrow dM_{Ta} < dM_{Te} \Rightarrow$  sistema si riporta sulla conf. di equilibrio statico  $\vartheta$ .

Stretta analogia con il **carico di punta euleriano**: anche con un momento flettente che dipende dalla deformazione raggiunta oltre che dal valore del carico premente.

$$C_{L'} = \frac{\partial C_L}{\partial \beta} \beta + C_{L'} \vartheta'$$

$$C_{L'} = \left( \frac{p_D^0}{p_\infty^0} - 1 \right)^{-1} \left( \frac{p_D^0}{p_\infty^0} \frac{\partial C_L}{\partial \beta} - \frac{l}{x_F} \frac{\partial C_{MF}}{\partial \beta} \right) \beta$$

La perdita di efficacia di alettone si ha quando  $C_{L'} = 0$  per  $p_\infty^0 = p_R^0$ :

$$\frac{p_D^0}{p_R^0} \frac{\partial C_L}{\partial \beta} = \frac{l}{x_F} \frac{\partial C_{MF}}{\partial \beta} \Rightarrow p_R^0 = p_D^0 \frac{x_F}{l} \frac{\partial C_L / \partial \beta}{\partial C_{MF} / \partial \beta}$$

*Velocità critica d'inversione d'effetto dei comandi:*

$$V_R = \sqrt{-\frac{2K_\alpha}{\rho_\infty C_L' l^2} \frac{\partial C_L / \partial \beta}{\partial C_{MF} / \partial \beta}}$$

- $V_\infty > V_R \Rightarrow$  inversione dell'effetto del comando
- $V_\infty < V_R \Rightarrow$  riduzione dell'effetto del comando

*Fattore di efficacia dell'alettone*

$$\eta_R = \frac{C_{L'}}{(C_{L'})_{\text{ala rigida}}}$$

**14) Carichi di manovra e loro inserimento nell'equazione integrale dell'equilibrio aeroelastico statico di un'ala a freccia. (PAG. 135 – 137)**

Le forze d'inerzia dovute alle manovre accelerate agiscono sulla linea dei baricentri (di solito al 50% della corda, contro il 35% dell'asse elastico,  $x_G > 0$ ).

Per l'ala a freccia la caratteristica è l'Impossibilità del disaccoppiamento tra flessione e torsione quando la seconda sia valutata, come si fa in aeroelasticità, nel piano delle incidenze aerodinamiche ( $V_\infty$ ).

Equazione integrale della torsione:

$$\vartheta(y) = \int_0^b c^{\vartheta z}(y, \eta) p_f(\eta) d\eta + \int_0^b c^{\vartheta \theta}(y, \eta) m_t(\eta) d\eta$$

Dove:

$$\begin{cases} p_f(y) = p_\infty^0 p(y) - N g m(y) \\ m_t = p_\infty^0 [-x_F(y) p(y) + l^2(y) C_{MF}(y)] + x_G(y) N g m(y) \end{cases}$$

$$\vartheta(y) = \int_0^b c^{\vartheta z}(y, \eta) [p_\infty^0 p - N g m] d\eta + \int_0^b c^{\vartheta \theta}(y, \eta) [p_\infty^0 [-x_F p + l^2 C_{MF}] + x_G N g m] d\eta$$

Separando anche il contributo della sola deformazione elastica l'equazione si riduce alla forma:

$$\vartheta(y) = p_\infty^0 \int_0^b [c^{\vartheta z}(y, \eta) - x_F(\eta) c^{\vartheta \theta}(y, \eta)] p^e(\eta) d\eta + f_\theta^*(y)$$

Dove  $f_\theta^*$  contiene contributi della geometria rigida.

La formulazione integrale evita problemi legati al passaggio della coordinata  $y$  alla  $\hat{y}$ .

Nessun teorema garantisce l'esistenza di una soluzione del problema agli autovalori: in particolare, per freccia positiva  $\phi > 0$ , potrei trovare autovalori non esistenti. Non esiste una velocità di divergenza in questi casi, per una manovra con un'ala a freccia.

**16) Divergenza torsionale in un'ala reale: applicazione del metodo di Rayleigh-Ritz. (PAG. 144-147)**

Calcolo approssimato della velocità fondamentale di divergenza  $V_D$  con il metodo energetico di Rayleigh-Ritz adatto al campo della deformazione statica di una struttura elastica:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^b GJ_t \left( \frac{d\vartheta}{dy} \right)^2 dy \quad \text{energia potenziale elastica}$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} p_\infty^0 \int_0^b p^e(y) x_F(y) \vartheta(y) dy \quad \text{lavoro sviluppato dalle forze aerodinamiche}$$

Uguagliando:

$$U = \mathcal{L} \quad \text{con} \quad \mathcal{L} = p_\infty^0 \mathcal{L}^*$$

Da cui si ottiene il quoziente di Rayleigh:

$$R(\vartheta) = p_\infty^0 = \frac{U}{\mathcal{L}^*}$$

Che è un funzionale della deformata scelta. Questo deve essere ammissibile (soddisfare C.C).

**Teoria delle strutture elastiche:** a parità di lavoro  $\mathcal{L}$  compiuto su un corpo, tra tutte le deformate ammissibili sarà reale quella che corrisponde alla minima energia potenziale elastica  $U$  in esso accumulata.

**Applicazione del metodo:** introdurre in  $R(\vartheta)$  varie deformate ammissibili e scegliere per  $p_D^0$  il valore più basso tra quelli trovati. Il procedimento non permette di trovare  $V_D$  superiore alla fondamentale

Per applicare tale metodo per la ricerca del minimo, parto dalle equazioni:

$$\vartheta(y) = \sum_{i=1}^n q_i \Theta_i(y) \quad p^e(y) = \sum_{i=1}^n q_i P_i^e(y)$$

Dove:

- $\Theta_i(y)$  sono funzioni di forma che soddisfano le C.C ( $\Theta_i(0) = \Theta_i'(b) = 0$ ).
- $q_i$  sono coordinate generalizzate.
- $P_i^e$  sono funzioni legate a  $\Theta_i(y)$  dall'operatore aerodinamico:  $P_i^e(y) = O_A[\Theta_i(y)]$ .

Adesso introducendo l'ottica di Ritz (serve a calcolare le  $V_D$  superiori, oltre a quella fondamentale),  $R(\vartheta)$  passa da funzionale a funzione delle  $n$  variabili  $q_i$ , rispetto alle quale può essere derivato per ottenere le  $n$  condizioni di minimo (una per ogni  $q_i$ ):

$$\frac{dR(\vartheta)}{dq_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dU}{dq_i} - \frac{U}{\mathcal{L}^*} \frac{d\mathcal{L}^*}{dq_i} = 0 \quad \xrightarrow{\frac{U}{\mathcal{L}^*} \approx p_D^0} \quad \frac{dU}{dq_i} - p_D^0 \frac{d\mathcal{L}^*}{dq_i} = 0 \quad i = 1 \dots n$$

### 17) Divergenza in ali a freccia. (PAG. 148-158)

In un'ala a freccia la divergenza è flesso-torsionale in quanto il piano della sollecitazione aerodinamica (lungo  $V_\infty$ ) non è normale all'asse elastico.

Considerando che le proprietà sono costanti lungo l'apertura ed utilizzando la teoria di striscia, per cui  $p^e(\hat{y}) = p^e(y) \cos \phi = lC_L \cos \phi = l\hat{C}'_L$ , le equazioni differenziali alla flessione e alla torsione del caso dell'ala si semplificano. Lavorando su di esse si arriva ad un'equazione di 3° ordine nell'unica incognita  $\vartheta(\hat{y})$ :

$$\frac{d^3\vartheta}{d\hat{y}^3} - p_\infty^0 x_F l \hat{C}'_L \cos^2 \phi \left( \frac{\sin^2 \phi}{EJ} + \frac{\cos^2 \phi}{GJ_t} \right) \frac{d\vartheta}{d\hat{y}} + \cos^2 \phi \sin \phi \frac{p_\infty^0 l \hat{C}'_L}{EJ} \vartheta(\hat{y}) = 0$$

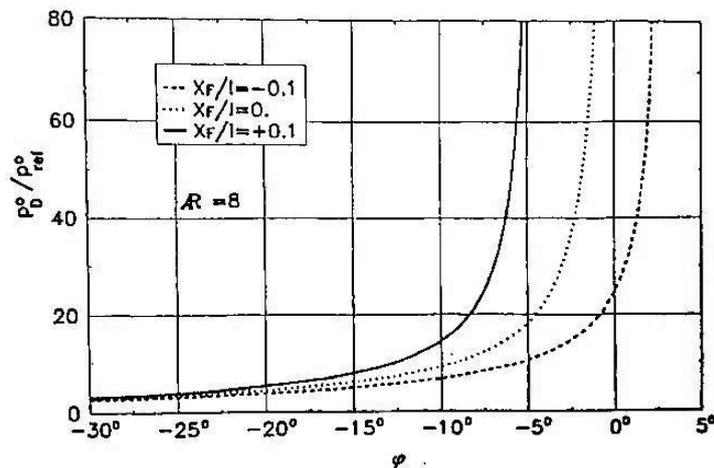
Che richiede 3 condizioni al contorno per essere risolta (riferite all'asse elastico), condizioni che poi si passano alla variabile  $\vartheta$  che è quella che interessa per la torsione.

L'equazione ammette soluzione analitica e quindi è in grado di evidenziare le caratteristiche qualitative del comportamento a divergenza di un'ala a freccia. In particolare, se in essa:

- $GJ_t \rightarrow \infty$ , ottengo un fenomeno di natura flessionale.
- $EJ \rightarrow \infty$ , la divergenza è solo torsionale e mi riconduco al caso di ala dritta, se ho anche freccia nulla  $\phi = 0$ .

Dopo un cambio di variabile e altri passaggi, ottengo che la freccia, la divergenza e la  $x_F$  sono legate tra loro:

- $\frac{x_F}{l} < 0$  vuol dire che l'asse focale è davanti a quello elastico (di regola nel **subsonico**). Solo per  $\phi > 0$  la  $V_D \rightarrow \infty$  rapidamente.
- $\frac{x_F}{l} > 0$ , tipica dei regimi **supersonici**. Ho problemi aeroelastici per frecce molto negative.
- $\frac{x_F}{l} = 0$ , il fenomeno è di natura puramente flessionale, perché l'asse focale coincide con l'asse elastico (dato che il primo è quello a cui indico la  $F_{aerodinamica}$ , allora  $\hat{\vartheta} = 0$ ).
  - Divergenza non possibile per frecce positive ( $\phi > 0$ ) perché altrimenti  $p_D^0 < 0$ .
  - Se  $\phi < 0 \rightarrow V_D \downarrow$ .



**19) Risposta statica di un'ala ad allungamento finito soggetta a carico simmetrico: problema di progetto/controllo. (PAG. 162-169)**

Ala diritta e allungata, con proprietà costanti, non svergolata (incidenza geometrica  $\alpha_g$  costante lungo l'apertura).

- Parto dall'equazione della torsione (differenziale):  $\frac{d^2\vartheta}{dy^2} + \lambda^2\vartheta = \mu$

ove  $\lambda = -\frac{p_\infty^0 l x_F C_L'}{GJ_t}$  e  $\mu \equiv$  termine noto costante  $= \frac{g\vartheta}{GJ_t}$

- Risolvo e trovo la deformata:  $\vartheta(y) = A \sin \lambda y + B \cos \lambda y + \frac{\mu}{\lambda^2}$
- Applico le condizioni al contorno  $\vartheta(0) = \vartheta'(b) = 0$  e trovo la forma generale della torsione:

$$\vartheta(y) = \frac{\mu}{\lambda^2} (1 - \cos \lambda y - \tan \lambda b \sin \lambda y)$$

**Problema di progetto/controllo:**

- Sono assegnate le condizioni di volo tramite  $N$
- Ricavo  $\alpha_c$  affinché l'ala produca nello stato deformato la portanza complessiva desiderata

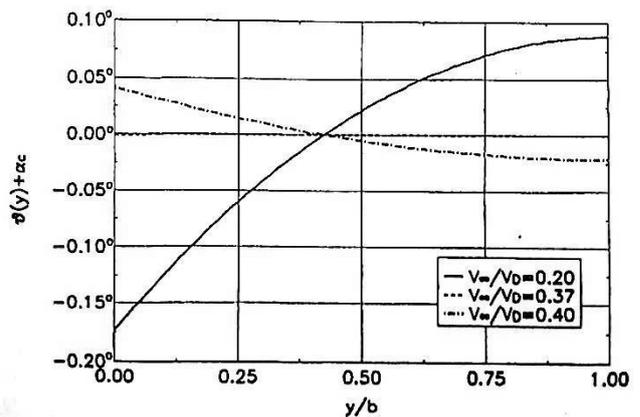
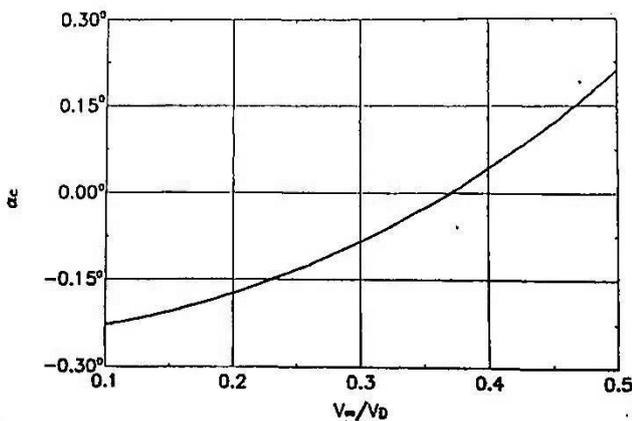
Per prevenire gli effetti della deformazione dell'ala (il cui mi genera l'indisiderato  $N/N_{rig} \neq 1$ ) posso disporla ad un'incidenza  $\alpha_c + \alpha_g$ , essendo  $\alpha_c$  un'angolo di calettamento di radice, in modo che la portanza dovuta ad esso e alla deformazione sia nulla:

$$2p_\infty^0 \int_0^b p^e(y) dy + 2p_\infty^0 b l C_L' \alpha_c = 0$$

Da cui semplificando  $2p_\infty^0$ , con:

$$p^e(y) = l C_L' \vartheta(y) = \text{carichi dipendenti dal moto del profilo}$$

$$l C_L' \int_0^b \vartheta(y) dy + b l C_L' \alpha_c = 0 \quad (N = N_{rig}) \Rightarrow \alpha_c$$



## 21) Divergenza flessionale in missili e fusoliere. (PAG. 178-180)

Considero la versione omogenea dell'equazione della flessione per *slender body*, che si ottiene dalla:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EJ \frac{d^2 h}{dx^2} \right) = L(x)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EJ \frac{d^2 h}{dx^2} \right) = \rho_\infty V_\infty^2 \frac{d}{dx} \left[ F(x) \left( \alpha_0 - \frac{dh}{dx} \right) \right]$$

Annulando il termine noto ( $\alpha_0 = 0$ ):

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EJ \frac{d^2 h}{dx^2} \right) + \rho_\infty V_\infty^2 \frac{d}{dx} \left[ F(x) \frac{dh}{dx} \right] = 0$$

Risolvendo questo problema agli autovalori ricavo la  $V_D$ .

Applichiamo *Galerkin* a questa formulazione differenziale (perché il metodo si adatta anche a loro).

$$h(x) = \sum_{i=1}^n q_i f_i(x)$$

Usando come funzioni di forma  $f_i(x)$  le deformate di ordine successivo di una trave omogenea libera, sostituisco questo  $h(x)$  nell'equazione del problema di stabilità e ho che:

$$\sum_{i=1}^n q_i [EJ f_i''(x)] + \rho_\infty V_\infty^2 \sum_{i=1}^n q_i [F(x) f_i'(x)] = \varepsilon(x)$$

Dove  $\varepsilon(x)$  = resto che sarà minimo se:

$$\int_0^l \varepsilon(x) f_j(x) dx = 0 \quad j = 1, \dots, n$$

Sostituendo i termini corrispondenti a  $\varepsilon(x)$  dall'equazione precedente e integrando per parti (con le condizione al contorno imposte sulle  $f_i(x)$  per  $x = 0, l$  si ottiene un sistema di  $n$  incognite:

$$([S] - p_\infty^0 [B]) \bar{q} = 0$$

[S] = matrice strutturale

[B] = matrice aerodinamica

$\bar{q}$  = spostamenti generalizzati (incognite)

Ho un problema agli autovalori che mi da  $n$  valori di  $p_\infty^0$ , il più basso è  $p_D^0 \rightarrow V_D$ .

# AERODINAMICA INSTAZIONARIA

**24) Equazione del potenziale per un moto compressibile non stazionario: condizioni per l'esistenza del potenziale e discussione del limite per compressibilità nulla. (PAG. 10-11)**

- Parto dall'equazione di continuità e la riscrivo:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\text{div}(\rho \vec{V})$$

- Combinandola con l'equazione della q.d.m scritta per  $\text{rot } \vec{V} = \vec{0}$
- Derivando l'equazione di Bernoulli generalizzata rispetto al tempo con  $F(t) = V_\infty^2/2$  e tenendo conto dell'ipotesi di flusso *barotropico*:  $p = p(\rho)$

$$\boxed{\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{\partial(V)^2}{\partial t} + \vec{V} \cdot \text{grad} \frac{V^2}{2} \right] = 0}$$

Restringo il problema al calcolo del *potenziale di velocità*  $\Phi$ .

Equazione **non lineare**: prodotti di  $\Phi$  per se stessa e le sue derivate e presenza della velocità del suono  $c$ , che dipende da  $V$ .

Se si fa tendere  $c \rightarrow \infty$ , l'equazione del potenziale assume la forma tipica del regime incompressibile ( $\nabla^2 \Phi = 0$ ). Inoltre, così facendo scompare la dipendenza dal tempo. Se il problema è instazionario, però, la dipendenza temporale rimane nelle condizioni al contorno.

Allora vedo il caso incompressibile instazionario come una successione di stati stazionari, poiché  $c \rightarrow \infty$ , il che vuol dire che il campo si adatta istantaneamente alle condizioni al contorno.

Se  $\nabla^2 \Phi = 0$  (incompressibile) tratto caso stazionario e instazionario allo stesso modo: le soluzioni del caso incompressibile stazionario si estendono a quello instazionario.

- Potenziali di sorgenti, vortici, dipoli ... possono essere sovrapposti per modellizzare campi di moto incompressibili grazie alle loro note espressioni analitiche, ma che variano nel tempo.

Ciò non vale, a meno di linearità, nel caso compressibile, e pure nel caso lineare stesso passo dall'equazione di Laplace  $\nabla^2 \Phi = 0$  a quella delle onde convettiva.

Infatti, l'equazione del potenziale per incompressibile e instazionario ha:

equazione di d'Alembert (primi due addendi) + termini non lineari

**26) Linearizzazione delle equazioni di un moto non stazionario e delle loro condizioni al contorno: assunzioni base. (PAG. 12)**

Consideriamo profili sottili, poco inarcati e a piccole incidenze. L'ipotesi delle piccole perturbazioni entra nelle equazioni tramite le seguenti assunzioni:

- a) Velocità complessiva  $\vec{V}$  è in ogni punto poco differente da quella indisturbata  $V_\infty \vec{i}$ .

Questo permette definire un potenziale del disturbo di velocità  $\phi$  come:

$$\phi = \Phi - V_\infty x$$

Il cui gradiente definisce il solo disturbo di velocità dei componenti  $(u, v, w)$ :

$$\begin{aligned} u &= \phi_x = V_x - V_\infty \\ v &= \phi_y = V_y \\ w &= \phi_z = V_z \end{aligned}$$

Ove, per quanto supposto  $u, v, w \ll V_\infty$ .

Anche l'operatore di derivazione Lagrangiana si semplifica grazie alla linearizzazione riducendosi a:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + V_\infty \frac{\partial}{\partial x}$$

- b) Variazioni della superficie del corpo rispetto al piano  $(x, y)$  di riferimento piccole ovunque:

$$\frac{dz^\pm}{dx} \approx \frac{dz^\pm}{dy} \ll 1$$

- c) Velocità del suono assunta ovunque pari a quella del campo indisturbato:

$$c = c_\infty$$

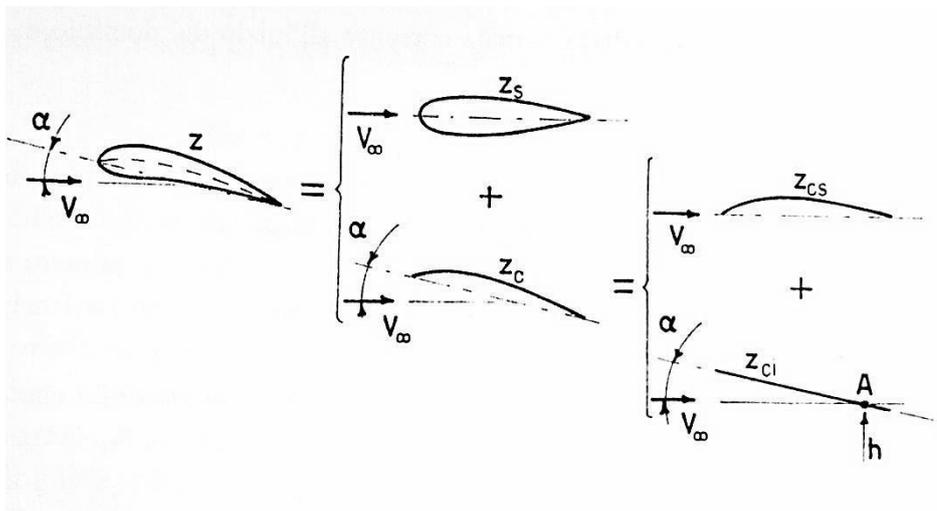
Quest'assunzione non è valida nelle vicinanze dei punti d'arresto, nei campi di moto transonici ( $M_\infty \approx 1$ ) e in quelli ipersonici ( $M_\infty \gg 1$ ).

Queste assunzioni permettono di linearizzare le equazioni del moto, trascurando in esse tutti quei termini che risultano prodotti di quantità piccole. Dato che la non linearità è la principale difficoltà nella soluzione delle equazioni, questa semplificazione è di capitale importanza.

**28) Scomposizione della forma di un profilo sottile e ruolo delle diverse componenti ai fini dell'analisi aeroelastica. (PAG. 14-15)**

Per lo studio del campo di moto nelle superfici portanti, l'uso delle equazioni linearizzate permette anche la scomposizione della geometria in modo di rendere il problema aerodinamico più semplice e poter studiare, separatamente, gli effetti delle due componenti geometriche e sovrapporli alla fine.

In prima approssimazione, la forma in sezione può essere descritta come una distribuzione di spessore simmetrica  $z = z_s(x, y)$  costante nel tempo, sovrapposta ad una distribuzione di linea d'asse  $z = z_c(x, y, t)$  non simmetrica né costante nel tempo che comprende l'incidenza geometrica.



Poiché delle 2 distribuzioni, quella di linea d'asse e incidenza ( $z_c$ ) è quella che conduce a un diagramma di pressioni non simmetrico, cioè una risultante verticale (portanza) che sollecita la struttura, è sufficiente in aeroelasticità studiare l'effetto di  $z_c(x, y, t)$ .

In pratica lo studio delle superfici portanti si basa sulla rotazione  $\alpha(y, t)$  intorno ad un punto  $A$  della corda e ad una traslazione  $h(y, t)$  lungo la direzione  $z$ . In un moto di questo tipo la forma intrinseca della linea d'asse non cambia nel tempo e il movimento pertiene esclusivamente alla corda che lo sopporta. Questo comporta un'ulteriore scomposizione, esprimendo l'ordinata istantanea  $z_c(x, y, t)$ , come la somma di quella di una linea d'asse  $z_{cs}(x, y)$ , costante nel tempo, e di quella di una lamina piana  $z_{ci}(x, y, t)$  la cui posizione istantanea coincide con quella della corda del profilo e la cui espressione è:

$$z_{ci}(x, y, t) = h(y, t) - (x - x_A)\alpha(y, t)$$

Ricordare che queste semplificazioni, che sono fatte grazie alla linearizzazione delle equazioni, non si possono estendere fino a campo transonico o ipersonico.

### 30) Concetto di integrazione lagrangiana nel tempo e nello spazio. (PAG. 17)

L'integrazione lagrangiana è l'inverso, appunto, della derivazione lagrangiana:

- **Nel tempo:**

Integro seguendo la particella nel suo moto: sommo i valori della funzione integranda  $\psi$ , prelevandoli agli istanti  $\tau$  precedenti a quello  $t$  nel quale calcolo il risultato, ma anche alle posizioni  $x - V_\infty(t - \tau)$  in cui la particella fluida si trovava in quegli stessi istanti  $\tau$ . Vuol dire scrivere, ad esempio, per il potenziale dell'accelerazione:

$$\phi(x, y, z, t) = \int_{-\infty}^t \psi[(x - V_\infty(t - \tau), y, z, \tau)] d\tau$$

Il fatto che l'integrale vada eseguita con riferimento a tempi e posizioni precedenti fa emergere l'influenza del passato sul presente tipica dei moti instazionari.

- **Nello spazio:**

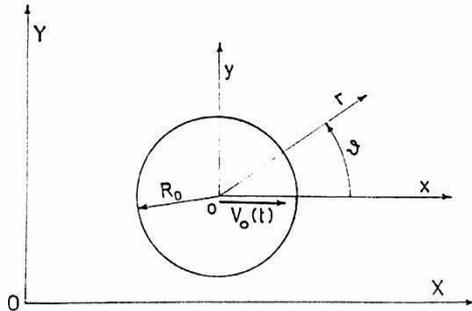
Si fa il cambio di variabile  $\xi = x - V_\infty(t - \tau)$  e si trasforma l'espressione precedente nella:

$$\phi(x, y, z, t) = \int_{-\infty}^x \psi\left(\xi, y, z, \left(t - \frac{x - \xi}{V_\infty}\right)\right) d\xi$$

Raccolgo i valori  $\psi$  nelle posizioni passate  $\xi$ , precedenti a quella  $x$  in cui  $\phi$  viene calcolato, ma facendo attenzione a prelevarne i valori agli istanti  $t - \frac{x - \xi}{V_\infty}$  in cui le particelle fluide si trovavano a passare per quelle posizioni.

**32) Forza agente su un cilindro che accelera in un fluido ideale non compressibile. (PAG. 22-24)**

Come prima trattazione scelgo un sistema di riferimento solidale al corpo  $(o, x, y)$  ma mobile rispetto al sistema fisso  $(O, X, Y)$  e anche introduco un sistema ausiliario del tipo polare sfruttando la forma del corpo a trattare  $(r, \theta)$  associato al sistema solidale al corpo.



$$\begin{aligned} V_x(X, Y, T) &= V_x(x, y, t) + V_0 \\ V_y(X, Y, T) &= V_y(x, y, t) \end{aligned}$$

Corrispondente a un potenziale:

$$\Phi^* = \Phi + V_0(t)x$$

**Cinematica**

Suponendo che la circolazione del flusso sia nulla ( $\nabla^2 \Phi = 0$ ) e applicando le condizioni al contorno:

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)_{r=R_0} = 0 \qquad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_{r \rightarrow \infty} = -V_0(t)$$

$$\Phi(r, \theta, t) = -V_0(t) \left( r + \frac{R_0^2}{r} \right) \cos \theta$$

**Dinamica**

Vedo che l'uso di questo sistema di riferimento non produce nessun cambio nel potenziale, ma si nelle pressioni. Allora per poter lavorare col sistema solidale al corpo ho bisogno di riscrivere l'equazione per il sistema di riferimento mobile, partendo dall'equazione di Bernoulli generalizzata, da cui applicandola al contorno del cilindro si ottiene:

$$\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \rho x \frac{dV_0}{dt} + \frac{1}{2} \rho V^2 + p = P^*(t)$$

essendo  $x = R_0 \cos \theta$

$$p(R_0, \theta, t) = \rho \frac{dV_0}{dt} R_0 \cos \theta - 2\rho V_0^2(t) \sin^2 \theta + P(t)$$

Adesso si può calcolare la risultante di forza agente sul cilindro proiettando le pressioni trovate lungo le direzioni  $x$  e  $y$  ed integrando sul contorno. Dovuto alla simmetria del corpo la componente lungo  $y$  (cioè la *portanza*) sarà nulla, mentre compare la risultante orizzontale  $F_x$ , come segue:

$$F_x(t) = \int_0^{2\pi} (p - p_\infty) R_0 \cos \theta d\theta = -\rho \pi R_0^2 \frac{dV_0}{dt}$$

Si noti che la resistenza agente su un cilindro fermo in una corrente che accelera è, a parità di accelerazione, la metà di quella che agisce sullo stesso cilindro che accelera in aria ferma (vedi domanda 33). Le forze orizzontali così ottenute vengono spesso dette *forze di massa apparenti* o *virtuali*.

$$F_X(T) = 2\rho\pi R_0^2 \frac{dV_\infty}{dT}$$

A causa della simmetria del campo di moto rispetto all'asse  $X$ :

$$F_Y(T) = - \int_0^{2\pi} (p - p_\infty) R_0 \sin \theta \, d\theta = 2\rho R_0^2 \frac{dV_\infty}{dT} + \int_0^{2\pi} \cos \theta \sin \theta \, d\theta = 0$$

Si ricorda soltanto che la forza  $F_X(T)$  che agisce sul cilindro non è necessariamente una resistenza; anzi dipenderà dal segno dell'accelerazione della corrente: resistenza per una accelerazione postiva ( $dV_\infty/dT > 0$ ) e aspirazione per una accelerazione negativa ( $dV_\infty/dT < 0$ ).

Per spiegare fisicamente la differenza di forza rispetto al caso di un cilindro che accelera in un flusso in quiete, basta considerare che nel caso in cui il fluido accelera contro il cilindro fermo deve necessariamente essere presente un gradiente orizzontale di pressione statica, senza il quale la velocità  $V_\infty$  della corrente uniforme non potrebbe variare nel tempo.

C'è allora un contributo della forza orizzontale dovuto alle diverse pressioni ambientali davanti e dietro del cilindro, che può essere espresso come:

$$F'_X(T) = \rho\pi R_0^2 \frac{dV_\infty}{dT}$$

**35) Le funzioni di Wagner e di Küssner: cosa rappresentano e a cosa servono. (PAG. 33-34)**

Si tratta il problema della lamina piana con piccola incidenza in moto instazionario.

Essendo  $L$  la portanza eseguita su una lamina piana in moto instazionario:  $L = F_a + F_c$ , essendo  $F_a$  una forza virtuale (come quella che si verifica su un cilindro) ed  $F_c$  che comprende il valore a regime di  $L$  e l'effetto dell'induzione dei vortici di scia sulla lamina.

Si definisce  $\tau$  come spazio percorso o tempo trascorso dall'inizio del moto, con  $x_0$  lunghezza della scia dopo la lamina:

$$\tau = \frac{x_0}{l} = \frac{V_0 t}{l}$$

La *funzione di Wagner*  $W(\tau)$  rappresenta il rapporto tra la portanza istantanea e la portanza a regime per una lamina piana ad un certo angolo d'incidenza.

$$\boxed{W(\tau) = \frac{L}{\rho V_0^2 l \pi \sin \alpha}} \Rightarrow \frac{\text{portanza istantanea}}{\text{valore a regime della portanza}}$$

Per il caso:

- $t = \tau = 0$ , la portanza  $L$  eseguita su una lamina ha un picco infinito.
- $\tau > 0$ , la funzione parte da 0.5 e tende al valore di regime (1) asintoticamente.
- $\tau \rightarrow \infty$  la funzione tende al valore di regime (1)

L'impulso iniziale di  $L$  ha una durata infinitesima. Questo fatto è legato all'incompressibilità del moto che fa sì che le onde di compressione prodottesi davanti alla lamina all'istante  $t = 0$  si allontanano da questa con velocità infinita. Invece, se si considerasse la compressibilità del fluido, l'impulso persistirebbe, ma la sua durata sarebbe finita (più lunga del caso precedente) e risultando tanto maggiore quanto più alto è il numero di Mach corrispondente alla  $V_0$ .

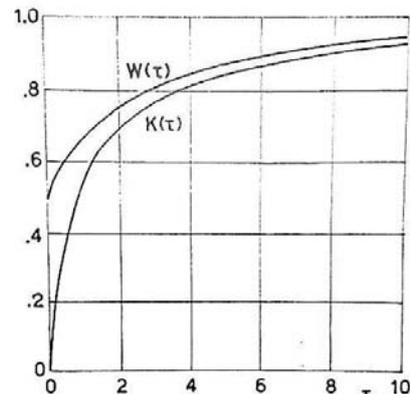
L'importanza del lavoro di Wagner avviene per lo studio della *raffica a gradino*, cioè dell'effetto che ha su una lamina piana in moto orizzontale senza incidenza l'incontro improvviso con una corrente verticale il cui fronte si manifesta come una discontinuità. Questo problema presenta analogie con quello di *Wagner*, soprattutto se si trascurava il tempo finito ( $l/V_0$ ) che impiega la lamina per attraversare il fronte di raffica. In realtà, questo non può essere trascurato. Appare allora la *funzione di Küssner*:

$$\boxed{K(\tau) = \frac{L}{\rho V_0^2 l \pi \sin(v_r/V_0)}}$$

Dove:

- $v_r$  = velocità ascendente di raffica
- $V_0$  = velocità della corrente indisturbata
- $\tau = t_{\text{adimensionale}}$  da quando la lamina ingressa nella raffica

Si noti in figura che  $K(\tau)$  ha un andamento più dolce da  $W(\tau)$  (non parte da 0.5\*valore di regime).



In questa espressione, detta *integrale di Duhamel*, la risposta a valore iniziale  $f(0)$ , può essere trascurata per numerose applicazioni: ad esempio in un moto sviluppato dalla quiete ed assunto come ingresso  $f(t)$  lo spostamento, questo è nullo.

Esistono diverse formulazione alternative alla precedente *integrale di Duhamel*, facendo si a un cambiamento di variabili o una integrazione per parti.

### **Risposta aerodinamica**

In riferimento a problemi di avvio e di raffica (vedi domanda 35), la risposta indiciale in termini di portanza dovuta ad un ingresso a gradino è fornita dalle *funzioni di Wagner e Küssner*.

La risposta indiciale (o *ammittenza specifica*) sarà allora:

- La **funzione di Wagner**, con  $V_0 \sin \alpha = 1$ , la portanza prodotta da una lamina piana in moto accelerato vario.
- La **funzione di Küssner**, con  $v_r = 1$ , la portanza prodotta da una lamina piana che entra in una raffica con profilo di velocità arbitrario.

La condizione irrinunciabile per l'applicabilità di questi metodi è la linearità del processo. In aerodinamica ciò significa piccole incidenze, profili sottili, raffiche deboli rispetto a  $V_0$ , flussi in regime incompressibile o compressibile lineare.

**38) Modellizzazione del campo di moto intorno ad un profilo sottile che compie moti non stazionari di piccola ampiezza entro una corrente uniforme incompressibile: legame tra il salto di coefficiente di pressione tra ventre e dorso e il valore locale della distribuzione di vorticità. (PAG. 46-48)**

Partendo da quello detto nella domanda 37 la velocità indotta di *downwash* può anche essere espressa come:

$$w_c(x, t) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^l \left[ \frac{\gamma(\xi, t) d\xi}{x - \xi} - \frac{1}{V_\infty} \int_\xi^{+\infty} \frac{\partial \gamma}{\partial t} \cdot \left( \xi, t - \frac{\xi' - \xi}{V_\infty} \right) \frac{d\xi'}{x - \xi'} \right] d\xi$$

Questa è un'equazione integrale in  $\gamma(x, t)$ , che per essere univocamente risolta necessita di una condizione di contorno analoga a quella di *Kutta* nel caso stazionario. Come in quel caso, si tratta di imporre  $\Delta p = 0$  a cavallo del bordo di fuga per evitare ricircoli del flusso intorno ad esso.

Di modo simile al caso stazionario, sostituendo però il valore istantaneo della distribuzione di vorticità aderente  $\gamma(x, t)$ , il salto del coefficiente di pressione in termini di differenza tra dorso e ventre può essere scritto come:

$$\Delta c_p = -\frac{2}{V_\infty} \frac{\partial}{\partial x} (\Delta \phi) - \frac{2}{V_\infty^2} \frac{\partial}{\partial t} (\Delta \phi)$$

in cui:

$$\frac{\partial}{\partial x} (\Delta \phi) = \Delta \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = \Delta u = -\gamma(x, t) - \varepsilon(x, t)$$

Perché tutta la vorticità sul profilo (aderente e libera) contribuisce al salto di velocità tangente. Alla fine abbiamo

$$\Delta c_p = \frac{2\gamma(x, t)}{V_\infty} + \frac{2}{V_\infty} \left[ \varepsilon(x, t) - \frac{1}{V_\infty} \frac{\partial}{\partial t} (\Delta \phi) \right]$$

Dove il termine in parentesi quadra è nullo. In conclusione:

$$\boxed{\Delta c_p = \frac{2\gamma(x, t)}{V_\infty}}$$

Oppure intermini di salto di pressione

$$\Delta p = \rho V_\infty \gamma(x, t)$$

Il fatto che la vorticità libera  $\varepsilon(x, t)$  non contribuisca al salto di pressione attraverso il profilo (e non ne generi uno attraverso alla scia) è evidente se si condiera che la velocità che compare nell'espressione precedente deve essere *relativa* all'elemento vorticoso investito dalla corrente. Questa velocità è  $V_\infty$  se il vortice ha posizione fissa. Invece, i vortici liberi sono trascinati verso valle dalla  $V_\infty$ , per cui la velocità relativa che li investe è nulla.

Dello stesso modo che nel caso stazionario la condizione che  $\Delta p = 0$  per  $x = l$  applicata alla equazione implica  $\gamma(l, t) = 0$ .