NUMERO : 354

DATA : 24/09/2012

A P P U N T I

STUDENTE : Rinaldi

MATERIA : Analisi II + esercizi
Prof. Lancelotti

ANALISI 2

I

SERGIO LANCELOTTI

BREVI RICHIAMI DI TOPOLOGIA DI IR

PREMESSA FONDAMENTALE

Se A, B sono 2 insiemi $f: A \to B$

A = dominio di f

f = funzione

B = codominio di f

$f: [0,1] \to \mathbb{R}$ dom $(f) = [0, 1]$

Sia $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$

n coordinate (stanno in)

$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n} = \{ (x_1, \dots x_n) : x_1, \dots x_n \in \mathbb{R} \}$

IR n volte

PRODOTTO CARTESIANO

(somma, prodotto, vett. nullo)

$\mathbb{R}^n$ è uno spazio vettoriale su IR di dimensione n.

a) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ $x = (x_1, \dots x_n)$, $y = (y_1, \dots y_n)$ $\Rightarrow x + y = (x_1, \ \ , x_n) + (y_1 \dots y_n)$
$= (x_1 + y_1, \dots, y_n + x_n)$

b) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $\lambda x = \lambda (x_1 \dots x_n) = (\lambda x_1, \dots \lambda x_n)$

$e_1 = (1, 0 0 \dots)$

$e_2 = (0, 1, 0 \dots)$

i componente i-esimo

$\vdots$

$e_n = (0 \dots 1)$

$(e_1, e_2 \dots e_n)$ = BASE CANONICA di $\mathbb{R}^n$

$\forall v = (v_0, \dots v_n) \in \mathbb{R}^n$ si ha che

$v = (v_1 \dots v_n) = (v_1 0 0 . 0) + (0 \ v_2 \dots 0) + (0 \dots v_n) = v_1 \cdot e_1 + v_2 \cdot e_2 \dots + v_n e_n$

PRODOTTO SCALARE

$\forall x = (x_1 \dots x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$

$x \cdot y = (x_1, \dots x_n) \cdot (y_1 \dots y_n) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$ = SCALARE

ES $n=1$ intervallo APERTO III

$B_r(x_0) = \{ x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r \} = (x_0 - r, x_0 + r)$

$\overline{B_r(x_0)} = \{ x \in \mathbb{R} : |x - x_0| \leq r \} = [x_0 - r, x_0 + r]$

intervallo chiuso

ES $n=2$

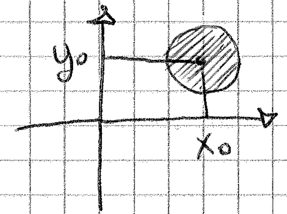
$\overline{B_r(x_0, y_0)} = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \| (x,y) - (x_0, y_0) \| \leq r \}$

$\| (x,y) - (x_0, y_0) \| = \| (x - x_0, y - y_0) \| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$

$\| (x,y) - (x_0, y_0) \| \leq r \iff \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \leq r$

$\iff (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r^2$

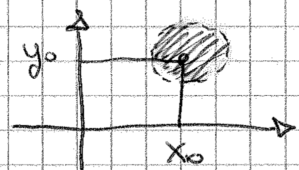
→ circonf. eq. $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$



$\overline{B_r(x_0\ y_0)}$

↓

CERCHIO PIENO CON BORDO DELLA CIRCONFERENZA



$B_r(x_0\ y_0)$

↓

PUNTI ALL'INTERNO DELLA CIRCONFERENZA

ES $n=3 \Rightarrow B_r(x_0\ y_0\ z_0) = \{ (x\ y\ z) \in \mathbb{R}^3 : (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 \leq r^2 \}$

SOLO PUNTI INTERNI SFERA SUPERF. SFERICA

eq. SFERA

$\overline{B_r(x_0 y_0 z_0)}$ → PUNTI DELLA SFERA INTERNI E BORDO

OSS

Se $n \geq 2$ non si introducono intorno destro e sinistro di $x_0 \in \mathbb{R}^n$ (non ha senso parlare di dsx o sx)

ma si introducono gli intorni di $\pm\infty$ o $+-\infty$

per esempio $n > \frac{1}{[\mu]}$ → parte intera ⇒ si ∃ $\frac{1}{n}$ ⇒ 0 è punto di accumulazione per Ω anche se $0 \notin \Omega$!

DEF (l'intorno ha punti fuori e dentro Ω)

Diciamo che x_0 è PUNTO DI FRONTIERA per Ω se $\forall \mu > 0$ si ha che $\Omega \cap B_\mu(x_0) \neq \emptyset$ (non è vuoto) e $\complement\Omega \cap B_\mu(x_0) \neq \emptyset$ (complementare di Ω),

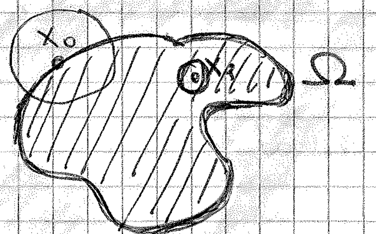
dove $\complement\Omega = \mathbb{R}^n - \Omega$ è il complementare di Ω

- Non è detto che x_0 appartenga a Ω.

DEF L'insieme dei punti di frontiera di Ω è detto FRONTIERA di Ω (o BORDO di Ω) e si denota con $Fr(\Omega)$ o $\partial\Omega$

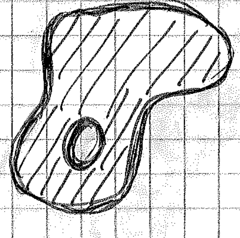
Si ha che $\partial\Omega = \partial\complement\Omega$

DEF Si chiama CHIUSURA di Ω l'insieme $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ → omega + il bordo



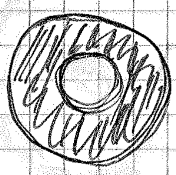
— = frontiera di Ω = $\complement\Omega$

$Fr(\Omega) = \partial\Omega$
$Fr(\complement\Omega) = \partial\complement\Omega$



ESISTONO CASI IN CUI I PUNTI DI FRONTIERA NON $\in \Omega$

ES



ES

$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x,y \in \mathbb{Q}\}$ → numeri razionali

$\complement\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \vee y \notin \mathbb{Q}\}$ coppie con almeno una coordinata non razionale

$\vee$ → o

Ω  (NEBBIA)

BORDO: $\partial\Omega = \mathbb{R}^2 \supseteq \Omega, \partial\Omega$ → i punti di Ω sono tutti del bordo

↳ bordo di Ω

→ il bordo non sempre separa Ω dal $\complement\Omega$ → complementare

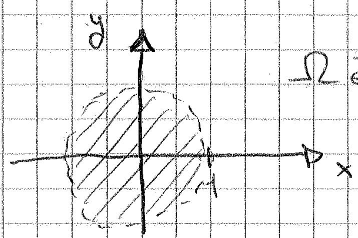
ES

1) $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$ $\quad \underset{\text{CHIUSO}}{A = \{1\}} \Rightarrow \underset{\text{chiuso}}{\Omega = f^{-1}(A)}$ (in $\mathbb{R}^2$)

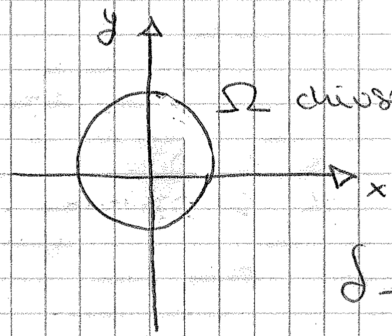
$f(x,y) = x^2+y^2$ continua

$A = (-\infty, 1) \longrightarrow \Omega = f^{-1}(A)$ è APERTO

$A \to$ APERTO



Ω è APERTO



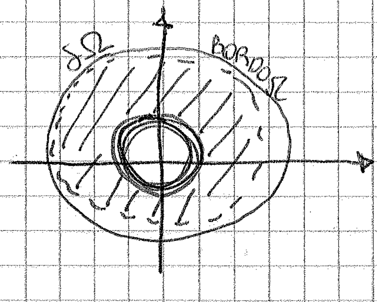
Ω chiuso

$\partial\Omega$

unito

$\complement A = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ è APERTO

2) $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2+y^2 < 4\}$



Ω non è chiuso xchè non contiene tutto il suo BORDO

Ω non è APERTO

Ω è CHIUSO $\iff \partial\Omega \subseteq \Omega$ $\to$ non contiene il BORDO $\Rightarrow$ non è chiuso

Ω è APERTO $\iff \Omega \cap \partial\Omega = \emptyset$ cioè $\partial\Omega \subseteq \complement\Omega$

il BORDO di Ω non deve intersecare Ω quindi deve appartenere tutto al suo complementare

non è ne APERTO ne chiuso!

PROP (2.3) Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ APERTO NON VUOTO, $x_0 \in \Omega$ e $f: \Omega \to \mathbb{R}^m$ UNA FUNZIONE.
ALLORA VALGONO i seguenti fatti:

(a) f differenziabile in $x_0 \Rightarrow f$ continua in x_0;

(b) f differenziabile in $x_0 \Rightarrow \forall v \in \mathbb{R}^n$

$$\exists \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = df(x_0)(v)$$ → DIFF. di f in x_0 CALCOLATO nel VETTORE v

(DERIV. f rispetto v in x_0)

In particolare $\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i} = df(x_0)(e_i)$ → DIFFERENZIALE di f in x_0 CALCOLATO NEL VET. e_i → xché?

→ DERIVATA PARZIALE

Quindi se $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, cioè

$v = v_1 e_1 + \dots + v_n e_n$, ALLORA

ALLORA IL DIFF. di f in x_0 CALCOLATO in v

$$df(x_0)(v) = df(x_0)(v_1 e_1 + \dots v_n e_n) =$$ → $df(x_0)$ è lineare quindi sfrutto le proprietà

$$= v_1 \, df(x_0)(e_1) + \dots + v_n \, df(x_0)(e_n) =$$

$$= \underset{\in \mathbb{R}^n}{v_1} \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)}_{\in \mathbb{R}^m} + \dots + \underset{\in \mathbb{R}^n}{v_n} \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)}_{\in \mathbb{R}^m}$$

se f FOSSE DIFFERENZIABILE IL SUO DIFF. SAREBBE COSÌ

Se $m = 1$, cioè se $f: \Omega \to \mathbb{R}$, ALLORA

$$df(x_0)(v) = \nabla f(x_0) \cdot v$$

→ SCALARE → somma di prodotti di numeri reali

→ GRADIENTE

?? ?

(c) Se f ammette tutte le derivate parziali ($\frac{\partial f}{\partial x_i}$) in tutti i punti di Ω e queste funzioni sono continue in x_0, allora f è DIFFERENZIABILE in x_0

OSS se $f: \Omega \to \mathbb{R}^m$ è differenziabile in x_0, allora $df(x_0): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è lineare (e continua)

SI ASSOCIA ↕ ALL AP. LIN

UNA MATRICE JACOBIANA di f in x_0 $\quad J_f(x_0) \in \mathbb{R}^{m,n}$ RIG/colon

$\forall v = (v_1, \dots v_n) \in \mathbb{R}^n$ SI HA CHE

→ DIFF. di f in x_0 APPLICATO A v

$$df(x_0)(v) = J_f(x_0)(v) \in \mathbb{R}^{m,1} = \boxed{\mathbb{R}^m}$$

($m \times n$ $\quad m \times 1$
MATRICE JAC in x_0 APPLICATO in v

OSS Se $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo aperto, $x_0 \in I$ e $f: I \to \mathbb{R}$ è derivabile in x_0, allora f è differenziabile in x_0 con $\forall x \in \mathbb{R}$: $df(x_0)(x) = f'(x_0)x$.

Quindi $df(x_0)(1) = f'(x_0)$.

← e viceversa

{ in UNA VARIABILE DERIVABILITÀ e DIFFERENZIABILITÀ SONO EQUIVAL.

in $\mathbb{R}$ non ha significato geometrico ??

in $\mathbb{R}^2$ $\mathbb{R}^3$?

DIFFERENZIALE DELLA FUNZIONE COMPOSTA

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m \xrightarrow{g} \mathbb{R}^k$$

x_0, $f(x_0)$

$n, m, k \in \mathbb{N}$, ≥ 1

$g \circ f$

[SUPPONGO CHE f è differenziabile in x_0 e g lo è in $f(x_0)$

$\forall x \in \mathbb{R}^n$

CALCOLATO in x

$$\boxed{d(g\circ f)(x_0)(x) = dg(f(x_0))\,(df(x_0)(x))}$$

dif di $g \circ f$ in x_0 APP. A x ⇒ differenziale di g in $f(x_0)$ applicato al diff di f in x_0 applicato a x

$$J_{g\circ f}(x_0) = J_g(f(x_0))\; J_f(x_0)$$

$k \times n$ $\quad$ $k \times m$ $\quad$ $m \times n$

MAT. JACOB. di $g \circ f$ in x_0 = MAT. JAC. di g in $f(x_0)$ × MAT. JAC di f in x_0

DERIVATA PARZIALE DELLA FUNZIONE COMPOSTA

$x_1 \dots x_n$ $\quad$ $y_1 \dots y_m$

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m \xrightarrow{g} \mathbb{R}^k$$

x_0 $\quad$ $f(x_0)$ $\quad$ $g \circ f$

componenti in $\mathbb{R}^m$

componenti in $\mathbb{R}^n$

f differenziabile in x_0 $\quad$ g diff. in $f(x_0)$ } IPOTESI

pag 8

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = df(x_0)(e_i)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_i}(g\circ f)(x_0) = d(g\circ f)(x_0)(e_i)$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x_i}(g\circ f)(x_0)} = d(g\circ f)(x_0)(e_i) =$$

$d(g\circ f)(x_0)(e_i) = dg(f(x_0))(df(x_0)(e_i))$

→ pag 11

$$= dg(f(x_0))\,\boxed{(df(x_0)(e_i))} = \boxed{dg(f(x_0))\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)\right)}$$

OSS

Se $k = 1$ cioè $\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ ALLORA SI HA:

$$?\; dg(y_0) \overset{(1)}{=} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_j}(y_0)\, dy_j \qquad \left[\; dy_j(e_h) = \begin{cases} 1 & \text{se } j = h \\ 0 & \text{se } j \neq h \end{cases}\right.$$

x one? $\quad$ $y_0 = f(x_0)$?

DE y con j

DEF Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto non vuoto e $f: \Omega \to \mathbb{R}^m$

Diciamo che f è di classe C^0 su Ω se f è continua in Ω.

Diciamo che f è di classe C^1 su Ω se $\forall i = 1, \dots n$

$\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \quad \forall x \in \Omega$ e $\frac{\partial f}{\partial x_i}: \Omega \to \mathbb{R}^m$ è continua

→ AMMETTE TUTTE LE DERIVATE PARZIALI → e sono tutte funzioni continue

Diciamo che f è di classe C^2 in Ω se $\exists$ tutte le derivate parziali seconde di f $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ $(\forall i, j = 1, \dots n)$ in Ω e sono continue in Ω

Se $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ diciamo che f è di classe C^k in Ω se esistano tutte le derivate parziali k-esime di f, $\underbrace{\frac{\partial^k f}{\partial x_i \dots \partial y_j}}_{k \text{ VARIABILI che possono essere anche } =}$ in Ω e sono continue in Ω

Diciamo che f è di classe C^∞ su Ω se f è di classe C^k, $\forall k \in \mathbb{N}$.

OSS

$$C^\infty(\Omega) \subseteq C^k(\Omega) \subseteq C^2(\Omega) \subseteq C^1(\Omega) \subseteq C^0(\Omega)$$

se una f è di classe C^n lo è anche di qualsiasi classe $\leq n$

LEMMA di SCHWARZ

(2.8) Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto non vuoto e $f: \Omega \to \mathbb{R}^m$ di classe C^2 in Ω

Allora $\forall i \; i = 1 \dots n \quad \forall x \in \Omega \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j x_i}(x)$

→ LE DERIVATE PARZIALI SECONDE MISTE SONO UGUALI

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial}{\partial (x_i)} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)(x)$$

(2.9) TEOREMA WEIERSTRASS

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ compatto non vuoto e $f: \Omega \to \mathbb{R}$ continua

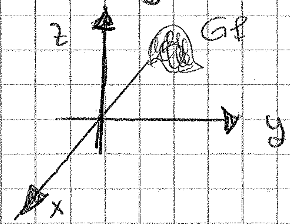
Allora f ammette massimo e minimo in Ω.

15

OSS 1) Se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^k$ è misurabile, con $1 \leq k < n$ allora $m_n(\Omega) = 0$, (LA MISURA DEL VOLUME DI UN CERCHIO È 0 ($h=0$))

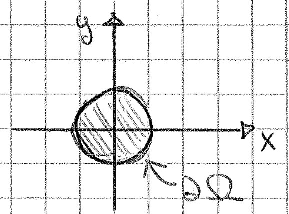
2) Se $\Omega = Im(\gamma)$, con γ curva parametrica, allora $m_n(\Omega) = 0$ $\forall n \geq 2$; (è una CURVA: quindi non posso misurarne l'area)

3) Se $\Omega = G_f$ (GRAFICO DI f), con $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, allora $m_3(\Omega) = 0$;



(IL VOLUME DI UN GRAFICO È ZERO)

4) Se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ è un APERTO LIMITATO, ALLORA $m(\partial\Omega) = 0$



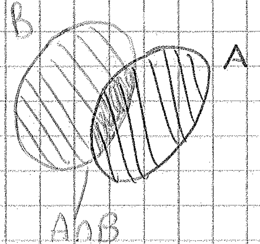
$n=2$

$\Omega = B_g(0,0)$

BORDO DI Ω

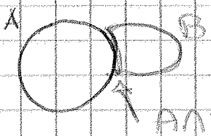
(la linea ha area $= \emptyset$)

5) Se $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ sono misurabili, allora $m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$



In particolare se $m(A \cap B) = 0$, allora

$m(A \cup B) = m(A) + m(B)$



$A \cap B$ è la linea che ha misura $\emptyset$ anche se $A \cap B$ non è vuoto esso ha area $\emptyset$

6)

In particolare se $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è un APERTO LIMITATO non vuoto, ALLORA

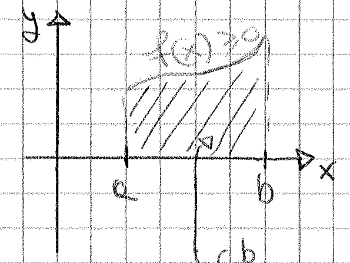
$$m(\bar{A}) = m(A) + \underbrace{m(\partial A)}_{=\emptyset} = m(A)$$

$\bar{A} = A \cup \partial A$

A aperto $\Leftrightarrow A \cap \partial A = \emptyset$ (PER LA PROPRIETÀ N°4)

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 17 di 304

GEOMETRICAMENTE



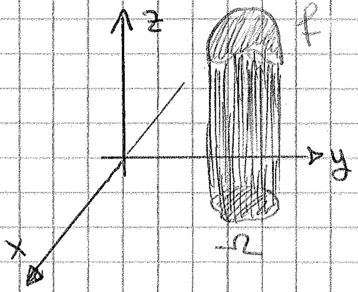
$\int_a^b f(x)\,dx$

Se $n \geq 2$, $f \geq 0$

$\int_\Omega f$ è il volume in $\mathbb{R}^{n+1}$ del trapezoide di f.

$$T_f = \left\{ (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega,\ 0 \leq x_{n+1} \leq f(x) \right\}$$

ES $n=2$



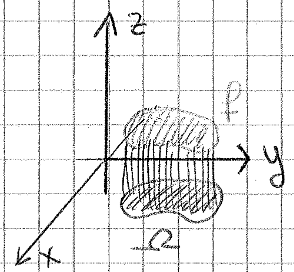
$\int_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = m_3(T_f)$

↳ volume di T_f

OSS Se $f(x) = 1$ $\forall x \in \Omega$, allora $\int_\Omega f = m_n(\Omega)$.

misura adimensionale di Ω

In fatti se $n=2$



area di Ω

$= \underline{m_3(T_f)} = m_2(\Omega) \cdot 1 = \underline{m_2(\Omega)}$

↳ xché siamo parlando di grandezze adimensionali

$= \int_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_\Omega 1\,dx\,dy$

PROP (1.6) Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ misurabile, $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ continue e limitate e $\lambda \in \mathbb{R}$. Allora si ha che:

1) $\int_\Omega (f+g) = \int_\Omega f + \int_\Omega g$; (somma integrali)

2) $\int_\Omega \lambda f = \lambda \int_\Omega f$; (integrale e costante)

3) $f \leq g$ su $\Omega \Rightarrow \int_\Omega f \leq \int_\Omega g$

4) $\left| \int_\Omega f \right| \leq \int_\Omega |f|$

NB. l'integrale del prodotto non è il prodotto integrali!!

In particolare,

Ω APERTO limitato non vuoto

$$\int_{\Omega} f(x)\,dx = \int_{\Omega} f(x)\,dx + \underbrace{\int_{\partial\Omega} f(x)\,dx}_{=0} = \int_{\Omega} f(x)\,dx$$

$$\bar{\Omega} = \Omega + \partial\Omega, \quad \Omega \cap \partial\Omega = \emptyset$$

$$m(\Omega \cap \partial\Omega) = 0$$

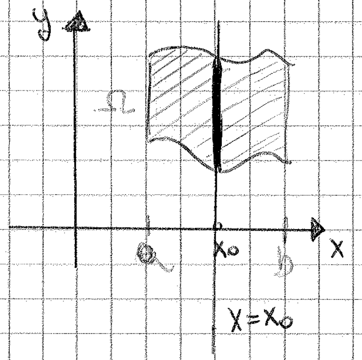
CALCOLO DEGLI INTEGRALI DOPPI

Def. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$

Diciamo che Ω è y-semplice (o VERTICALMENTE convesso) se è del tipo

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \overset{\text{NUMERI}}{a \le x \le b}, \ \overset{\text{FUNZIONI}}{\alpha(x) \le y \le \beta(x)}\}$$

dove $\alpha, \beta : [a,b] \to \mathbb{R}$ sono funzioni continue

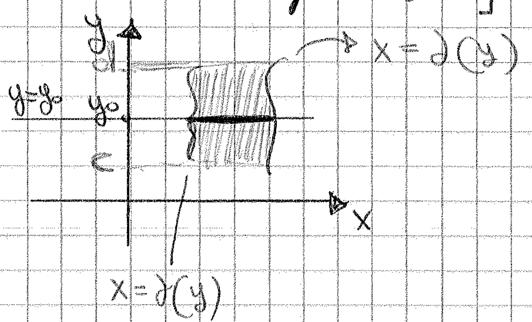


Def. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$

Diciamo che Ω è x-semplice (o ORIZZONTALMENTE convesso) se è del tipo

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \overset{\text{NUMERI}}{c \le y \le d}, \ \overset{\text{FUNZIONI}}{\gamma(y) \le x \le \delta(y)}\}$$

dove $\gamma, \delta : [c,d] \to \mathbb{R}$ sono continue



$$\int_\Omega (x+y)\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left[\int_y^{\sqrt{1-y^2}} (x+y)\,dx \right] dy =$$

$$= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left[\frac{1}{2}x^2 + yx \right]_y^{\sqrt{1-y^2}} dy =$$

$$= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left[\frac{1}{2}(1-y^2) + y\left(\sqrt{1-y^2}\right) - \frac{1}{2}y^2 - y^2 \right] dy =$$

$$= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{1}{2} - 2y^2 + y\sqrt{1-y^2} \right) dy = \left[\frac{1}{2}y - \frac{2}{3}y^3 - \frac{1}{3}(1-y^2)^{3/2} \right]_0^{\sqrt{2}/2} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{2}{3}\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{3}\frac{\sqrt{2}}{4} - 0 + 0 + \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{\sqrt{2}}{12} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

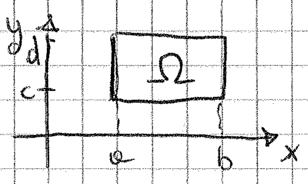
*(1.11)

OSS Suppongo che Ω è un rettangolo $\Rightarrow \Omega = [a,b] \times [c,d]$

$f: \Omega \to \mathbb{R}$ sia $f(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$ con $f_1: [a,b] \to \mathbb{R}$ e $f_2: [c,d] \to \mathbb{R}$ continue

DIMOSTRARE!

Allora
$$\int_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \left(\int_a^b f_1(x)\,dx \right) \left(\int_c^d f_2(y)\,dy \right)$$

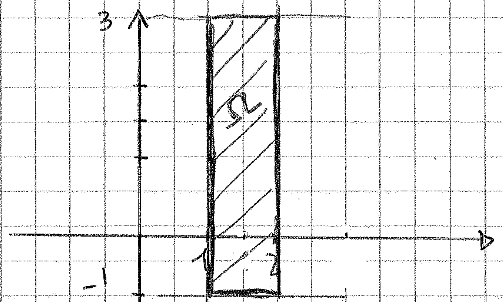


è un caso particolare!!

NORMALMENTE NON BASTA FARE IL PRODOTTO SPEZZANDO L'INTEGRALE

(2) Calcolare $\int_{\Omega} (x^2 - xe^y)\, dx\, dy$

$\Omega = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x \le 2 \quad , \quad -1 \le y \le 3 \}$



sia x-semplice che y-semplice

funzione x

$\int_{\Omega} (x^2 - xe^y)\, dx\, dy = \int_{\Omega} x^2 \cdot 1 \, dx\, dy - \int_{\Omega} x\, e^y \, dx\, dy =$

funzione di y

$=$ in questo caso particolare vale $= \left(\int_1^2 x^2 dx\right)\left(\int_{-1}^3 1\, dy\right) - \left(\int_1^2 x\, dx\right)\left(\int_{-1}^3 e^y dy\right) =$

$= \left[\frac{1}{3} x^3\right]_1^2 \cdot \left[y\right]_{-1}^3 - \left[\frac{1}{2} x^2\right]_1^2 \cdot \left[e^y\right]_{-1}^3 =$

$= \frac{1}{3}(8-1)(3+1) - \frac{1}{2}(4-1)(e^3 - e^{-1}) =$

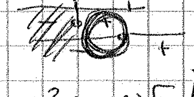
$= \frac{28}{3} - \frac{3}{2}(e^3 - e^{-1})$

(3) Calcolare $\int_{\Omega} xy\, dx\, dy$, dove $\Omega = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad x^2 \le y \le \sqrt{x} \}$

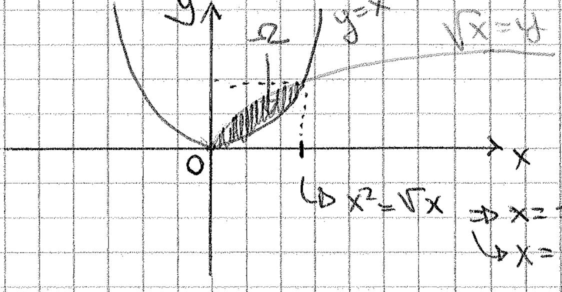
sembra y-semplice ma dove varia la x?

algebricamente $x^2 \le \sqrt{x} \Rightarrow x^4 \le x \rightarrow x^4 - x \le 0$

$x(x^3 - 1) \le 0$



con il disegno



$\Omega = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1 \quad e \quad x^2 \le y \le \sqrt{x} \}$

y-semplice!

$\hookrightarrow x^2 = \sqrt{x} \Rightarrow x = 1$

$\hookrightarrow x = 0$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{3}{16}x^4 + x^3 + \frac{9}{2}x^2\right]_{-2}^{6} = \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{16}6^4 + 216 + \frac{9}{\cancel{2}}\cdot\cancel{36}^{18} + \frac{3}{\cancel{16}}\cdot\cancel{16} + 8 - 18\right) =$$

25

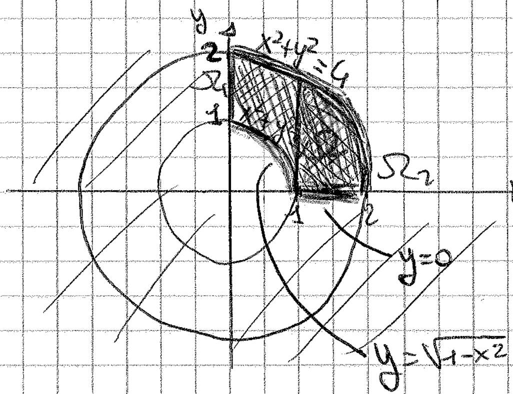
$$= \frac{1}{2}\left(-243 + 216 + 162 - 7\right) = \frac{128}{2} = 64$$

$$|x|^3 \neq x^3 \qquad \int_{-2}^{6} x|x|^3 dx = \int_{-2}^{0} x(-x)^3 dx + \int_{0}^{6} x(x)^3 dx =$$

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases} \qquad = \int_{-2}^{0} -x^4 dx + \int_0^6 x^4 dx =$$

$$= -\int_{-2}^{0} x^4 dx + \int_0^6 x^4 dx$$

5 Calcolare $\int_\Omega \frac{xy}{x^2+y^2}dxdy \qquad \Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad 1 \leq x^2+y^2 \leq 4,\ x \geq 0,\ y \geq 0\right\}$



DAL DISEGNO DEDUCIAMO CHE È SIA X-SEMPLICE CHE Y-SEMPLICE

$0 \leq x \leq 2 \qquad 0 \leq y \leq 2$

$\leq y \leq \sqrt{4-x^2}$

$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ dove $\Omega_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leq x \leq 1,\ \sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\right\}$

$\Omega_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad 1 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\right\}$

Si ha che $m(\Omega_1 \cap \Omega_2) = \emptyset \Rightarrow \int_\Omega \frac{xy}{x^2+y^2}dxdy = \int_{\Omega_1}\frac{xy}{x^2+y^2}dxdy + \int_{\Omega_2}\frac{xy}{x^2+y^2}dxdy$

$$\int_{\Omega_1}\frac{xy}{x^2+y^2}dx\,dy = \int_0^1\left[\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\frac{xy}{x^2+y^2}dy\right]dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2}x\left[\log(x^2+y^2)\right]_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x\left(\log 4 - \underbrace{\log 1}_{=\emptyset}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\log 4\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}\log 4\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{4}\log 4$$

LEZIONE 17/10/2011 * (1.13)

TEOREMA (del cambiamento di variabile negli integrali doppi)

Siano $\Omega, \Omega' \subseteq \mathbb{R}^2$ APERTI e LIMITATI non vuoti, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ CONTINUA e FINITA e $\underset{(FI)}{\Phi} : \Omega' \to \Omega$ una funzione tale che

1) Φ è biettiva $\Rightarrow (\Phi(\Omega') = \Omega)$

2) Φ è di classe C^1 su Ω' con

$\det J_\Phi(u,v) \neq 0 \quad \forall (u,v) \in \Omega'$ ALLORA:

$$\boxed{\int_{\Omega} f(x,y)\, dx\, dy = \int_{\Omega'} f(\Phi(u,v)) \underbrace{\left|\det J_\Phi(u,v)\right|}_{\text{VALORE ASSOLUTO DEL DETERMINANTE}} dv\, du}$$

DOM. INTEGRAZIONE

FORMULA DEL CAMBIAMENTO di VARIABILE NEGLI INTEGRALI DOPPI

(L'ANALOGA DELLA DERIVATA in $n=2$ È IL DIFFERENZIALE)

- Se $\boxed{n=1}$

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\, dt$$

$\int$ ← FUNZIONE SUPERIORE, ← FUNZIONE minore

$x = \varphi(t) \qquad dx = d\,\varphi(t) = \varphi'(t)\, dt$

$x = a \Rightarrow t = \alpha$ tale che $\varphi(\alpha) = a$
$x = b \Rightarrow t = \beta$ tale che $\varphi(\beta) = b$

- ($n=2$ in due variabili andiamo quindi a cercare un insieme in cui è + FACILE INTEGRARE LA NOSTRA FUNZIONE (nella MAGGIOR PARTE DEI CASI))

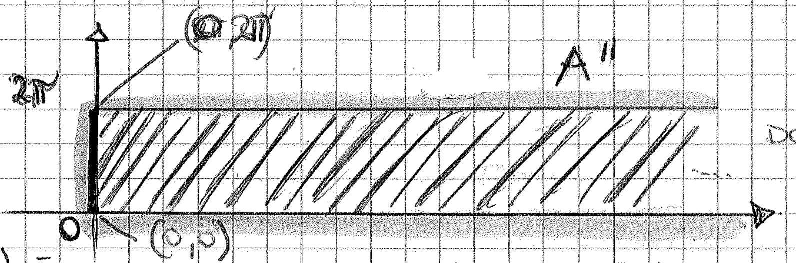
POICHÉ gli insiemi di misura nulla non contano negli integrali anche se le ipotesi non sono vere su un insieme di MISURA NULLA, il TEO non cambia

OSS se Φ non è BIETTIVA sul sottinsieme $A' \subseteq \Omega'$ con $\underset{\text{MISURA DI } A'}{m(A')} = 0$, oppure se $\det J_\Phi = 0$ su $A' \subseteq \Omega'$ con $m(A') = 0$ ALLORA (A PARTE UN'INSIEME CON MISURA NULLA) LA FORMULA PRECEDENTE CONTINUA A VALERE!!

QSTO CAMBIAMENTO NON SODDISFA PIENAMENTE LE IPOTESI

Φ non è iniettiva anche se è suriettiva se $\rho = 0$ e quindi non è biettiva! L'ORIGINE DEGLI ASSI (anche il punto (0,2π)) si ottiene per $\rho = 0$ e qualsiasi θ. QSTO NON CAMBIA NIENTE XCHE':

$0 \leq \theta \leq \pi$ il dominio è



A' è un segmento nel piano ⇒ è insieme di misura nulla

$m(A') = \emptyset$ $\qquad A' = \{0\} \times [0, 2\pi] \Rightarrow m(A') = 0$

POSSO QUINDI USARE IL TEO. NON CAMBIA NIENTE!!

Poichè la funzione seno e coseno sono periodiche tra 0 e 2π per $\theta = 0$ e $\theta = 2\pi$ ottengo gli stessi valori!! $\cos 0 = \cos 2\pi$

Dovrei escludere 0 o 0 o 2π x far sì che sia iniettiva seno=seno (non è iniettiva) non ha senso escludere 0 e 2π xchè escluderei un insieme di misura nulla

$A'' = [0, +\infty) \times \{2\pi\} \Rightarrow m(A'') = \emptyset$ (semiretta)

che ha lunghezza ∞ ma misura di area (m_2) nulla

⇒ LA FORMULA CONTINUA A VALERE!! non cambia integrale

PER ESSERE APERTO DOVREI TOGLIERE GLI ESTREMI DEGLI INSIEMI LA CUI m_2 È SEMPRE NULLA CON O SENZA ESSI

2) COORDINATE ELLITTICHE (le co. pol. ne sono un caso particolare)

→ si insiemi di forme ellittiche $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right)$

a e b sono semiassi positivi

Siano $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ $\quad a, b > 0$ e

$\Phi : [0, +\infty) \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$

$\Phi(\rho, \theta) = (x_0 + a\rho\cos\theta, y_0 + b\rho\,\text{sen}\,\theta)$

$$J_\Phi(\rho, \theta) = \begin{array}{cc} \frac{d}{d\rho} & \frac{d}{d\theta} \\ \left(\begin{matrix} a\cos\theta \\ b\,\text{sen}\,\theta \end{matrix}\right. & \left.\begin{matrix} -a\rho\,\text{sen}\,\theta \\ b\rho\cos\theta \end{matrix}\right) \end{array}$$

$$\left|\det J_\Phi(\rho, \theta)\right| = \left|ab\rho\cos^2\theta + ab\rho\,\text{sen}^2\theta\right| = \left|ab\rho\right| = ab\rho$$

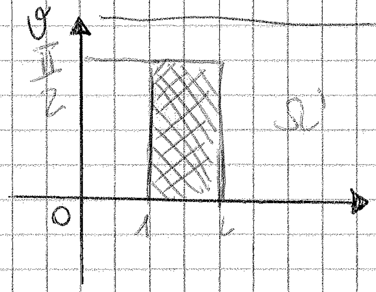
$|\ |>0$

$$\boxed{\left|\det J_\Phi(\rho, \theta)\right| = ab\rho}$$ coord. ellittiche

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

per $x_0 = y_0 = \emptyset$ no iniettiva

se $\rho = 0$ Φ non è biettiva! però il dominio è = a prima ecc...



$\vartheta \to$ la corona stava nel 1 quadrante

$\downarrow$

$0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}$

$\rho \to$ DISTANZA PUNTI dall'origine compresa tra 1 e 2

Allora $\displaystyle\int_\Omega \frac{xy}{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_{\Omega'} \rho \cos\vartheta \,\text{sen}\,\vartheta \,d\rho\, d\vartheta =$

$= \left(\displaystyle\int_1^2 \rho\, d\rho\right) \cdot \left(\int_0^{\pi/2} \cos\vartheta\,\text{sen}\,\vartheta\, d\vartheta\right) =$

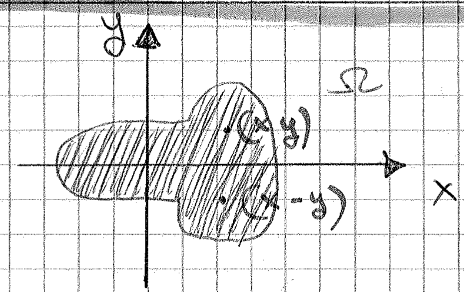
$= \left[\frac{1}{2}\rho^2\right]_1^2 \cdot \left[\frac{1}{2}\,\text{sen}^2\vartheta\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}(4-1)\,\frac{1}{2}(1-0) = \frac{3}{4}$

(4) CALCOLO IL VALORE INTEGRALE

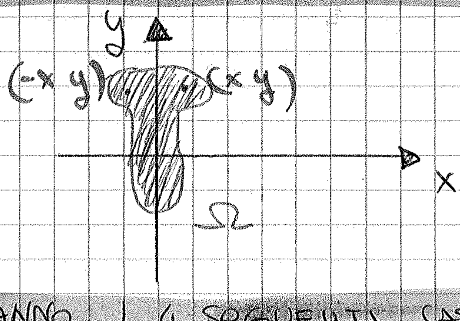
OSS (sulle SIMMETRIE)

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$

Ω è simmetrico rispetto all'asse x se $\forall (x,y) \in \Omega$ anche $(x,-y) \in \Omega$



Ω è simmetrico rispetto all'asse y se $\forall (x,y) \in \Omega$ anche $(-x,y) \in \Omega$



SI HANNO I 4 SEGUENTI CASI DI SIMMETRIA

1) Ω è simmetrico rispetto all'asse x e $\forall (x,y) \in \Omega$ si ha $f(x,-y) = f(x,y)$
(PARI RISPETTO A y)

Allora $\displaystyle\int_\Omega f(x\,y)\,dx\,dy = 2\int_{\Omega'} f(x\,y)\,dx\,dy$, dove $\Omega' = \{(x,y) \in \Omega : y \ge 0\}$ (oppure $y \le 0$)

INTEGRALI TRIPLI

• INTEGRAZIONE PER FILI PARALLELI AD UN ASSE

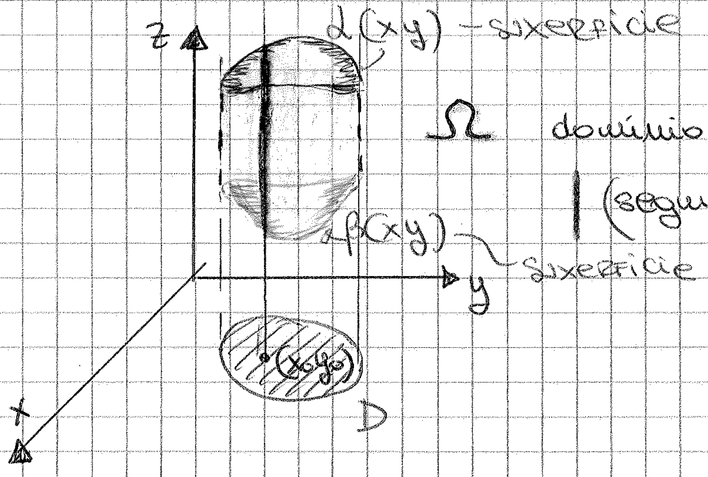
1) ASSE Z — SUL APPUNTI CAP. 2 pag 29-30 ASSE x, ASSE y !!

Siano $\Omega = \{ (xyz) \in \mathbb{R}^3 : (xy) \in D,\ \alpha(xy) \leq z \leq \beta(xy) \}$

dove $D \subseteq \mathbb{R}^2$ è COMPATTO (CHIUSO e LIMITATO) e $\alpha, \beta : D \to \mathbb{R}$ sono continue, e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ continua.

Allora $$\int_\Omega f(xyz)\,dx\,dy\,dz = \int_D \Big[\underbrace{\int_{\alpha(xy)}^{\beta(xy)} f(xyz)\,dz}_{F(xy)} \Big]\,dx\,dy$$

FORMULA di INTEGRAZIONE x FILI // ASSE Z



Ω dominio di integrazione di f

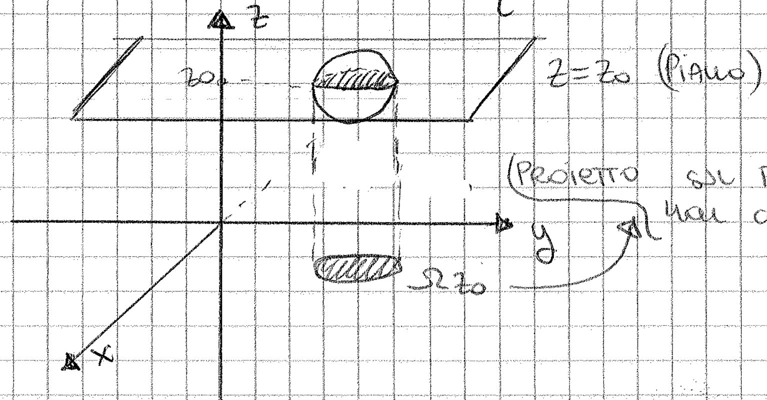
| (segmento contenuto in Ω che è // asse z !!)

• INTEGRAZIONE PER STRATI PARALLELI A UN ASSE

1) PIANO XY → PAG 31 APPUNTI PIANO XZ e YZ !!

Def Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ e $z_0 \in \mathbb{R}$

Poniamo $\Omega_{z_0} = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y, z_0) \in \Omega \}$



(PROIETTO SUL PIANO xy DOVE LA 3 COORDINATA NON CONTA xy è PIANO ISOMORFO

$x^2+y^2 \le 1 \Leftrightarrow$ TAGLIO LA SFERA $z^2+x^2+y^2=1$ CON $z=0$ (PIANO)

$$\Omega = \{(x\,y\,z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{x^2+y^2 \le 1}, \ \overset{\alpha(x\,y)}{0} \le z \le \overset{\beta(x\,y)}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\} =$$

$$= \{(x\,y\,z) \in \mathbb{R}^3 : (x\,y) \in D, \ 0 \le z \le \sqrt{1-x^2-y^2}\} =$$

dove $D = \{(x\,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 1\}$

Integro per fili // asse z $\longrightarrow \int_D \left[\int_{\alpha(x\,y)}^{\beta(x\,y)} f(x\,y\,z)\,dz\right] dx\,dy$

$$\int_\Omega (x^2+y^2)z \, dx\,dy\,dz = \int_D \left[\left(\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} (x^2+y^2)z \, dz\right)\right] dx\,dy =$$

$$= \int_D (x^2+y^2)\left[\frac{1}{2} z^2\right]_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dx\,dy =$$

$$= \int_D (x^2+y^2)(1-x^2-y^2)\,\frac{1}{2}\, dx\,dy = \rightarrow \text{INT. DOPPIO}$$

$\rightarrow$ CON COOR. POLARI

$$= \frac{1}{2}\int_{D'} \rho^2(1-\rho^2)\,\rho\, d\rho\, d\vartheta = \text{SOST. } (2)$$

INTRO (1): $\Phi : \begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\,\text{sen}\,\vartheta \end{cases}$ $\quad \rho \ge 0 \quad \vartheta \in [0, 2\pi]$

$|\det J_\Phi(\rho\,\vartheta)| = \rho$

$$= \frac{1}{2}\int_{D'} (\rho^3-\rho^5)\,d\rho\,d\vartheta =$$

Dominio (3)

$\rightarrow$ D' dove disegno

$D' = \{(\rho,\vartheta) \in \mathbb{R}^2 : \begin{cases} 0 \le \rho \le 1 \\ 0 \le \vartheta \le 2\pi \end{cases}\}$

$$(*) = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 (\rho^3-\rho^5)\,d\rho\right)\left(\int_0^{2\pi} d\vartheta\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}\rho^4 - \frac{1}{6}\rho^6\right]_0^1 2\pi =$$

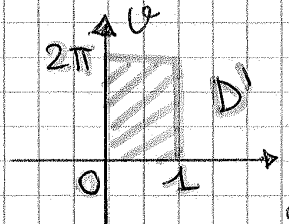
$$= \pi\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right) = \frac{\pi}{12}$$

(4) CALCOLO INTEGRALE

CON ALGEBRA:

$(x\,y) \in D \Leftrightarrow x^2+y^2 \le 1$

$\Leftrightarrow 1\cdot\rho^2 \le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le \rho \le 1 \\ \forall \vartheta \ [0, 2\pi] \end{cases}$



USO FORMULA RIDOTTA (*)

*(1,22)

TEO (del cambiamento di variabile negli integrali tripli)

Siano $\Omega, \Omega' \subseteq \mathbb{R}^3$ aperti limitati non vuoti, $f: \Omega \to \mathbb{R}$ continua e limitata e $\Phi: \Omega' \to \Omega$ una funzione tale che:

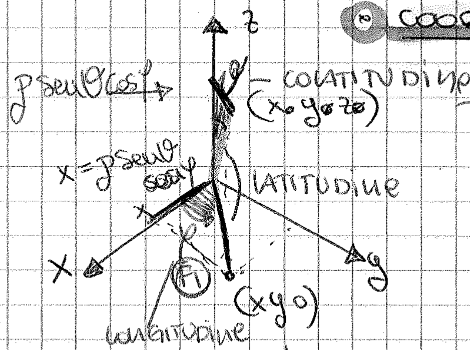
1) Φ è biettiva
2) Φ è di classe C^1 in Ω' con $\det J_\Phi(u,v,w) \neq 0$, per ogni $(u,v,w) \in \Omega'$

Allora
$$\int_\Omega f(x\,y\,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{\Omega'} f(\Phi(u,v,w))\,|\det J_\Phi(u,v,w)|\,du\,dv\,dw$$

come in $\mathbb{R}^2$ valgono le stesse considerazioni!

- CAMBIAMENTI DI COORDINATE NOTEVOLI NELLO SPAZIO → APPUNTI p 36-43

COORDINATE POLARI NELLO SPAZIO dette anche SFERICHE



ρ = distanza punto $O(000) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

(COMPLEMENTARE DELLA LATITUDINE)

↳ PROIEZIONE ρ SU PIANO xy

$$\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen}\theta\cos\varphi \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \\ z = \rho\cos\theta \end{cases}$$

Se $(x_0\,y_0\,z_0) \in \mathbb{R}^3$ $\quad \Phi: \underset{\rho}{[0;+\infty)} \times \underset{\vartheta}{[0,\pi]} \times \underset{\varphi}{[0,2\pi]}$

$$\Phi(\rho\,\vartheta\,\varphi) = (x_0 + \rho\operatorname{sen}\vartheta\cos\varphi\,,\ y_0 + \rho\operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}\varphi\,,\ z_0 + \rho\cos\vartheta)$$

$$J_\Phi(\rho\,\vartheta\,\varphi) = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\vartheta\cos\varphi & \rho\cos\vartheta\cos\varphi & -\rho\operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}\varphi & \rho\cos\vartheta\operatorname{sen}\varphi & \rho\operatorname{sen}\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta & -\rho\operatorname{sen}\vartheta & 0 \end{pmatrix}$$

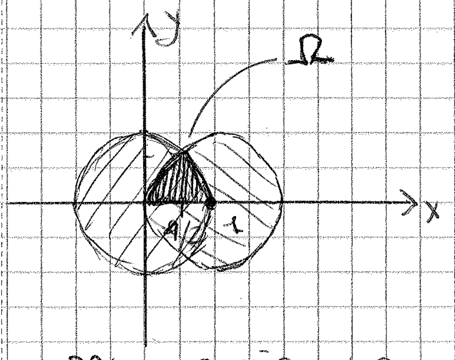
$$|\det J_\Phi(\rho\,\vartheta\,\varphi)| = |\cos\vartheta(\rho^2\cos\vartheta\operatorname{sen}\vartheta\cos^2\varphi + \rho^2\cos\vartheta\operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}^2\varphi) +$$
$$+ \rho\operatorname{sen}\vartheta(\rho\operatorname{sen}^2\vartheta\cos^2\varphi + \rho\operatorname{sen}^2\vartheta\operatorname{sen}^2\varphi)| =$$

LEZIONE 20/10/2011 (ESERCITAZIONE)

1 calcolare $\int_\Omega xy\,dx\,dy$, dove $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{array}{l} x^2+y^2 \le 1 \\ x^2+y^2 \le 2x \\ y \ge 0 \end{array}\right\}$

PARCONF

f è continua



$x^2 - 2x + y^2 \le 0$

sommo +1

$(x^2 - 2x + 1) + y^2 \le 1$ } COMPLETO IL QUADRATO

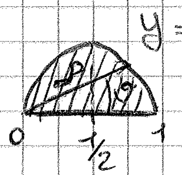
$(x-1)^2 + y^2 \le 1$

$C(1,0) \quad r = 1$ } DENTRO QSTA SECONDA CIRCONF.

DAL GRAFICO VEDO CHE L'INSIEME È y-SEMPLICE

$y = \beta(x)$ (SI PUÒ VEDERE ANCHE COME x-SEMPLICE)

unione di 2 archi di circonferenza



CERCO DI SFRUTTARE IL TEOREMA DEL CAMBIO DI VARIABILE

Coordinate polari nell'origine (0,0)

$\Phi : \begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\,\text{sen}\,\vartheta \end{cases} \qquad \rho \ge 0 \qquad 0 \le \vartheta \le 2\pi$

$|\det J_\Phi(\rho,\vartheta)| = \rho$] INTRO 1

SOSTITUZIONE 2

$$\int_\Omega xy\,dx\,dy = \int_{\Omega'} \rho^2\cos\vartheta\,\text{sen}\,\vartheta\ \rho\ d\rho\,d\vartheta = \int_{\Omega'} \rho^3\cos\vartheta\,\text{sen}\,\vartheta\,d\rho\,d\vartheta$$

dove $\Omega' \in \mathbb{R}^2$ t.c. $\Phi(\Omega') = \Omega$] CALCOLO DOMINIO 3

$$(x,y) \in \Omega \iff \begin{cases} x^2+y^2 \le 1 \\ x^2+y^2 \le 2x \\ y \ge 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \rho^2 \le 1 \\ \rho^2 \le 2\rho\cos\vartheta \\ \rho\,\text{sen}\,\vartheta \ge 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 0 \le \rho \le 1 \\ 0 \le \rho \le 2\cos\vartheta \\ \text{sen}\,\vartheta \ge 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 0 \le \rho \le 1 \\ 0 \le \rho \le 2\cos\vartheta \\ 0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

? 2 RELAZIONI !!

$\vartheta = 0 \Rightarrow \cos\vartheta = 1$

$\vartheta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{sen}\,\vartheta = 0$

A) $\int_{\Omega_1'} \rho^3 \cos\vartheta \operatorname{sen}\vartheta \, d\rho \, d\vartheta = \left(\int_0^1 \rho^3 d\rho \right) \left(\int_0^{\pi/3} \cos\vartheta \operatorname{sen}\vartheta \, d\vartheta \right) =$

$= \left[\frac{1}{4} \rho^4 \right]_0^1 \cdot \left[\frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 \vartheta \right]_0^{\pi/3} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{32}$

B) $\int_{\Omega_2'} \rho^3 \cos\vartheta \operatorname{sen}\vartheta \, d\rho \, d\vartheta = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \left[\int_0^{2\cos\vartheta} \rho^3 \cos\vartheta \operatorname{sen}\vartheta \, d\rho \right] d\vartheta =$

$= \int_{\pi/3}^{\pi/2} \cos\vartheta \operatorname{sen}\vartheta \left[\frac{1}{4} \rho^4 \right]_0^{2\cos\vartheta} d\vartheta =$

$= \frac{1}{4} \int_{\pi/3}^{\pi/2} 16 \cos^5\vartheta \operatorname{sen}\vartheta \, d\vartheta = 4 \left[-\frac{1}{6} \cos^6\vartheta \right]_{\pi/3}^{\pi/2} =$

$= -\frac{\cancel{2}}{3} \left(0 - \frac{1}{\cancel{64}\ 32} \right) = \frac{1}{96}$

$\Rightarrow \int_{\Omega} xy \, dx \, dy = \int_{\Omega'} \rho^3 \cos\vartheta \operatorname{sen}\vartheta \, d\rho \, d\vartheta = \frac{5}{48}$

2) $\int_{\Omega} (4 + 4x - 3x^2 - 4y^2) \, dx \, dy =$

$\Omega = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2\sqrt{x^2+y^2} \leq x+2 \right\}$

$2\sqrt{x^2+y^2} \leq x+2 \quad \Rightarrow \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ 4x^2+4y^2 \leq (x+2)^2 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ 4x^2 + 4y^2 \leq x^2 + 4 + 4x \end{cases} \Rightarrow$ (*) $\boxed{3x^2 + \quad - 4x + 4y^2 \leq 4}$ $-4 \leq 0$

METODO COMP. QUADRATI

$\left(\sqrt{3}x - \frac{2}{\sqrt{3}} \right)^2 - \frac{4}{3} + 4y^2 \leq 4 \quad \Rightarrow$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 43 di 304

$$= \int_{\Omega'} \left(\frac{16}{3} - \frac{16}{3} \rho^2 \cos^2\vartheta - \frac{16}{3} \rho^2 \operatorname{sen}^2\vartheta \right) \frac{8}{9} \sqrt{3}\, \rho \, d\rho \, d\vartheta =$$

$$= \frac{128}{27} \sqrt{3} \int_{\Omega'} (1 - \rho^2)\, \rho \, d\rho \, d\vartheta = \frac{128}{27} \sqrt{3} \int_{\Omega'} (\rho - \rho^3)\, d\rho \, d\vartheta \quad ⊛$$

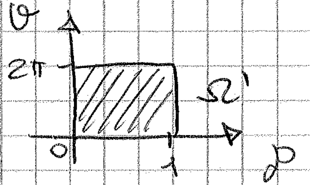
dove $\Omega' \in \mathbb{R}^2$ è t.c. $\Phi(\Omega') = \Omega$

$$(x,y) \in \Omega \iff \frac{(x - 2/3)^2}{\frac{16}{9}} + \frac{y^2}{\frac{4}{3}} \leq 1$$

$$\iff \frac{\frac{16}{3} \rho^2 \cos^2\vartheta}{\frac{16}{9}} + \frac{\frac{4}{3} \rho^2 \operatorname{sen}^2\vartheta}{\frac{4}{3}} \leq 1$$

$$\iff \rho^2 \cos^2\vartheta + \rho^2 \operatorname{sen}^2\vartheta \leq 1 \iff \rho^2 \leq 1$$

$$\implies \Omega' = \left\{ (\rho, \vartheta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \rho \leq 1 \, , \, 0 \leq \vartheta \leq 2\pi \right\}$$



Quindi otteniamo

$$⊛ = \frac{128}{27} \sqrt{3} \left(\int_0^1 (\rho - \rho^3)\, d\rho \right) \left(\int_0^{2\pi} d\vartheta \right) =$$

$$= \frac{128}{27} \sqrt{3} \left[\frac{1}{2} \rho^2 - \frac{1}{4} \rho^4 \right]_0^1 2\pi =$$

$$= \frac{128}{27} \sqrt{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) 2\pi = \frac{128}{27} \sqrt{3} \frac{\pi}{2} = \frac{64}{27} \sqrt{3}\, \pi$$

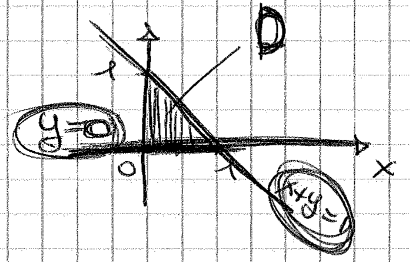
$\Rightarrow \Omega = \{(x\,y\,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D,\ 0 \le z \le 1-x-y\}$

dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$

Quindi integrando per fili // asse z si ha

$m(\Omega) = \int_\Omega 1\,dx\,dy\,dz = \int_D \left[\int_0^{1-x-y} 1\,dz\right] dx\,dy =$

$= \int_D (1-x-y)\,dx\,dy =$



y-semplice

$= \int_0^1 \left[(1-x)y - \frac{1}{2}y^2\right]_0^{1-x} dx =$

$= \int_0^1 \left[(1-x)^2 - \frac{1}{2}(1-x)^2\right] dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x)^2\,dx =$

$= \frac{1}{2}\int_0^1 (x-1)^2\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_0^1 = \frac{1}{6}(0+1) = \frac{1}{6}$

3 $\int_\Omega z\,dx\,dy\,dz$

$\Omega = \{(x\,y\,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le 2,\ \sqrt{x^2+y^2} \le z\}$

$z^2 \le 2-x^2-y^2$

$0 \le z \le \sqrt{2-x^2-y^2}$

$\sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{2-x^2-y^2}$

$\Downarrow$

$\sqrt{x^2+y^2} \le \sqrt{2-x^2-y^2}$

$x^2+y^2 \le 2-x^2-y^2$

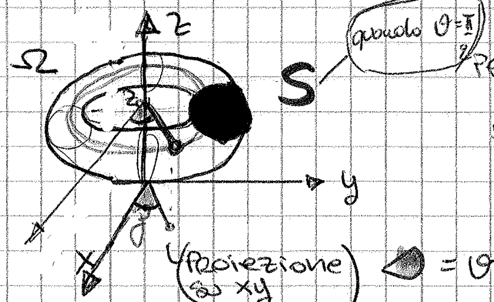
$2(x^2+y^2) \le 2 \Rightarrow x^2+y^2 \le 1$

LEZIONE 24/10/2011

VOLUME DI UN SOLIDO DI ROTAZIONE

Siano $S \subseteq \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$ un insieme misurabile e $\Omega \in \mathbb{R}^3$ ottenuto dalla rotazione completa di S attorno all'asse z

Calcolare il volume di Ω



PER COMODITÀ PRENDO $z \geq 0$

HO OTTENUTO UN TORO

(PROIEZIONE SU xy) $= \vartheta$ $\qquad (x\,y\,z) \to (\rho\,\vartheta\,z)$

$$m(\Omega) = \int_\Omega 1 \, dx\,dy\,dz$$

TUTTI I PUNTI HANNO UGUALE z

POICHÉ POSSO SFRUTTARE LA SIMMETRIA DI Ω
Scrivo Ω con coordinate cilindriche con asse // asse z

$$\Phi \begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho \operatorname{sen}\vartheta \\ z = z \end{cases} \qquad \rho \geq 0 \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi \quad z \in \mathbb{R}$$

$$|\det J_\Phi(\rho\,\vartheta\,z)| = \rho$$

come fanno ad avere $= \rho$?

$$m(\Omega) = \int_\Omega 1 \, dx\,dy\,dz = \int_{\Omega'} 1 \cdot \rho \, d\rho\, d\vartheta\, dz = (*)$$

($\rho\, z$ fanno solo cerchi f)

dove $\Omega' = \{(\rho\,\vartheta\,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \ (\rho, z) \in S\}$

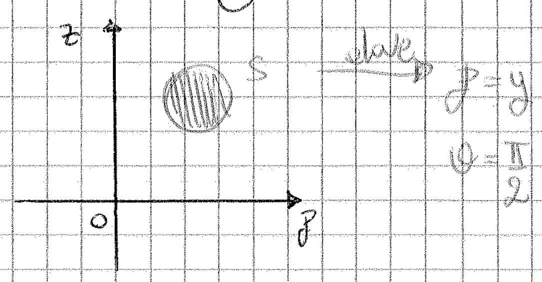
$(\rho\,\vartheta)$ = distanza del punto del toro dall'origine e angolo che fanno

integro per fili // asse ϑ

$$(*) = \int_S \left[\int_0^{2\pi} \rho\, d\vartheta\right] d\rho\, dz = 2\pi \int_S \rho\, d\rho\, dz = \qquad (\text{cost.})$$

$$\rho = y$$

$$= 2\pi \int_S y\, dy\, dz$$



$dy\,dz$ piano yz sta la circonf.

Conclusione $\boxed{m(\Omega) = 2\pi \int_S y\, dy\, dz}$

RUOT. ATT ASSE z

$y \geq 0$ x forza se $y \leq 0$ $\int$ sarebbe negativo ma un vol. è sempre positivo se $y \leq 0$ CAMBIERÒ il segno all'integrale

se RUOTO ATT. ASSE y OTTENGO $\boxed{m(\Omega) = 2\pi \int_S z\, dy\, dz}$ RUOT. ATT ASSE y

INTEGRALI CURVILINEI

• BREVI RICHIAMI SU CURVE PARAMETRICHE

Sia $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$

Def Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo (qualsiasi)
Una curva parametrica in $\mathbb{R}^n$ è una funzione continua $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$

L'immagine di γ è detta sostegno di γ

(→ non passo + volte su stesso punto)

Diciamo che γ è semplice se dati $t_1, t_2 \in I$ con $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ si ha che $t_1 = t_2$ oppure t_1 e t_2 sono gli estremi di I, se I contiene i due estremi.
(int. chiuso)

Esempio

(con le eq. par. descrivo una linea con una + f di una variabile)

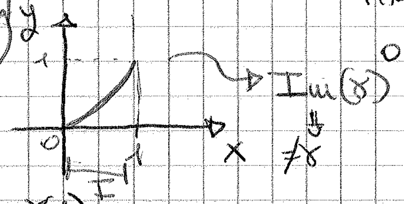
$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \qquad \gamma(t) = (t, t^2)$

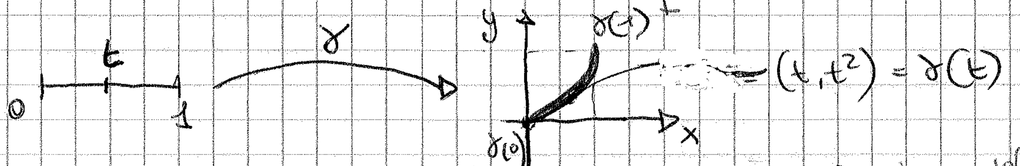
$(x,y) = \gamma(t) = (t, t^2) \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = x \\ \boxed{y = x^2} \end{cases}$ — sostegno di γ

└ eq. cartesiana parabola dove però $0 \leq t = x \leq 1$

(t descrive l'intervallo in cui avviene il tragitto
$\gamma(t)$ descrive il verso di percorrenza muovendosi sul sostegno)

ECCO CHE HO ANALIZZATO UN ARCO DI PARABOLA





se la curva non è semplice ho delle intersezioni della linea

Es. $\eta(\tau_0) = (\tau_0^2, \tau_0^4) \qquad 0 \leq \tau \leq 1$

CHI È L'IMMAGINE?

$(x,y) = \eta(\tau_0) \Rightarrow \begin{cases} x = \tau_0^2 \\ y = \tau_0^4 = x^2 \end{cases} \Rightarrow \eta$ (ETA) HA: $Im(\gamma) = Im(\eta)$

[anche se η e γ sono $\neq$ hanno la stessa immagine (sostegno) e la percorre in modo che η INDUCE SULLA CURVA lo STESSO VERSO di PERCORRENZA di γ

(data una linea ci sono solo 2 versi x percorrerla.)

DEF Sia $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una curva parametrica.

Diciamo che γ è regolare a tratti se:

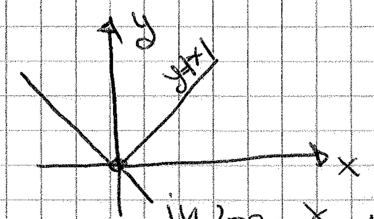
1) γ è derivabile in $[a,b]$ con derivata continua, tranne che in un numero finito di punti

2) $\gamma'(t) \neq \emptyset$ in ogni t in cui γ è derivabile, tranne in un numero finito di punti

3) nei punti in cui γ non è derivabile esistono le derivate laterali di γ

ES

$y = |x|$



$\gamma(t) = (t, |t|)$ non è REGOLARE

in zero γ non è DERIVABILE

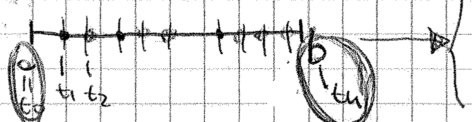
↳ (x_0) LA CURVA È REGOLARE A TRATTI

le curve in cui ho degli spigoli non sono mai interamente REGOLARI xchè non sono derivabili in quei punti) derivate laterali

$\nexists \gamma'$ però $\exists\, D^+\gamma$ o $D^-\gamma$

γ' non è continua

$\gamma' = 0$



suddivido $[a-b]$ in tanti piccoli intervalli con estremi i punti "STRANI"

Equivalentemente γ è REG. A TRATTI se $\exists\, a = t_0 < t_1 < t_2 \dots < t_n = b$ di numero finito

Tali che (suddividendo la curva in piccoli intervalli in essi è REG)

$\gamma\big|_{[t_{k-1}, t_k]}$ è REGOLARE $\forall\, k = 1, \dots, m$

DEF Siano $I, J \subseteq \mathbb{R}$ intervalli e $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ e $\eta : J \to \mathbb{R}^n$ due curve parametriche diciamo che γ e η sono equivalenti

se $\exists$ la funzione $\alpha : J \to I$ biettiva, di classe C^1

in J con $\alpha'(\tau) > 0$ POSITIVA OPPURE < 0 $\forall \tau \in J$ tale che

$\eta = \gamma \circ \alpha$ (cioè $\eta(\tau) = \gamma(\alpha(\tau))$)

(curve eq. DESCRIVONO LA STESSA cosa INDUCENDO lo STESSO verso di PERCORRENZA)

INTEGRALI CURVILINEI

Def Siano $\Omega \in \mathbb{R}^n$ un aperto non vuoto $f: \Omega \to \mathbb{R}$ continua e $\gamma : [a,b] \to \Omega$ una curva parametrica semplice e regolare.
L'integrale curvilineo (di PRIMA SPECIE) di f lungo γ è il numero reale.

$$\int_\gamma f \, ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\| \, dt$$

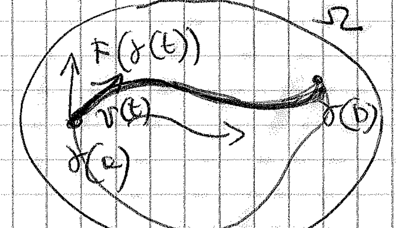
Se $f = 1 \Rightarrow \overbrace{\int_\gamma 1 \, ds}^{\in \mathbb{R}} = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt = l_\gamma$ = LUNGHEZZA CURVA γ
(cioè del sostegno di γ)

Def Siano $\Omega \in \mathbb{R}^n$ un aperto non vuoto $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale continuo e $\gamma : [a,b] \to \Omega$ una curva parametrica semplice e regolare. L'integrale curvilineo (di SECONDA specie) (o INTEGRALE di linea) di F lungo γ è il numero reale:

è il LAVORO COMPIUTO da F nel trasportare una grandezza fisica da $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$

$$\boxed{\int_\gamma F \underset{\text{SCALARE}}{\cdot} dP = \int_a^b \underbrace{F(\gamma(t))}_{\in \mathbb{R}^n} \underset{\text{SCALARE}}{\cdot} \underbrace{\gamma'(t)}_{\in \mathbb{R}^n} \, dt}$$

$\in \mathbb{R}$
(è lo scalare di due vettori in $\mathbb{R}^n$)



$$v(t) = \underbrace{\left[F(\gamma(t)) \underset{\text{SCALARE}}{\cdot} \gamma'(t) \right]}_{\text{NUMERO}} \cdot \underbrace{\gamma'(t)}_{\text{VETTORE TG A } \gamma}$$

Se $\|\gamma'(t)\| = 1 \Rightarrow$ se vett. tg ha modulo 1

$\Rightarrow \|v(t)\| = \| [F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)] \, \gamma'(t) \| =$

$= |F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)| \, |\underbrace{\gamma'(t)}_{1}| =$

$= |F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)|$

il modulo di $|v(t)|$ scende poi al modulo (VAL ASS) dello SCALARE

DIM

1) PER ES.

2) $\int_\eta F\cdot dP = \int_c^d F(\eta(\tau))\cdot\eta'(\tau)\,d\tau =$ $\quad \eta=\gamma\circ\alpha \Rightarrow \eta'=\gamma'(\alpha)\cdot\alpha'$

$= \int_c^d F(\gamma(\alpha(\tau)))\cdot\gamma'(\alpha(\tau))\,\alpha'(\tau)\,d\tau =$ $\quad \begin{cases} t=\alpha(\tau)\\ dt=\alpha'(\tau)\,d\tau\end{cases}$

$= \int_b^a F(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt =$ $\quad \alpha'(\tau)<0 \Rightarrow \alpha \searrow$ su $[c,d]$

$\alpha[c,d]=[a,b]$

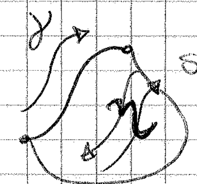
$\Downarrow$

$t=c \to \alpha(c)=b$

$t=d \to \alpha(d)=a$

$= -\int_a^b F(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt = -\int_\gamma F\cdot dP.$

c.v.d



se scelgo $\neq$ linea l'integrale può cambiare!!

DEF (di integrale di linea lungo una f regolare a tratti)

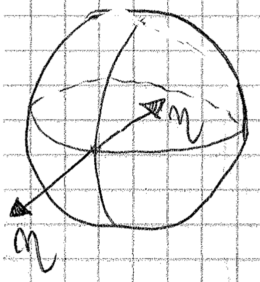
Siano $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ un aperto non vuoto, $F:\Omega\to\mathbb{R}^n$ un campo vettoriale continuo e $\gamma:[a,b]\to\Omega$ una curva parametrica semplice e regolare a tratti. Conformemente alla definizione di curva regolare a tratti, siano $a=t_0<t_1<t_2 \dots <t_n=b$ t.che $\eta[t_{k-1},t_k]$ è regolare $\forall\, k=1\dots m$.

L'integrale di linea di F lungo γ è il numero reale

$$\int_\gamma F\cdot dP = \int_a^{t_1} F(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt + \int_{t_1}^{t_2} F(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt + \int_{t_{n-1}}^{t_n} F(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} F(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt$$

σ induce su Σ un verso di ATTRAVERSAMENTO (che coincide con il verso del versore n)
└ versore normale



n è l'opposto di n
uscente → alla sup. ← entrante

DEF Siano $A, B \in \mathbb{R}^2$ aperti connessi x archi, $\sigma : A \to \mathbb{R}^3$ e $\tau : B \to \mathbb{R}^2$ due superfici semplici e regolari

(se sono la stessa cosa con un cambio di parametri f)

Diciamo che σ e τ sono EQUIVALENTI se $\exists$ $\alpha : B \to A$ biettiva di classe C^1 con $\det J_\alpha(x,y) > 0 \quad \forall (x,y) \in B$ tale che $\tau = \sigma \circ \alpha$ cioè

$$\forall (x,y) \in B \qquad \tau(x,y) = \sigma(\alpha(x,y))$$

PROP Nelle ipotesi precedenti se σ e τ sono equivalenti, allora hanno lo stesso sostegno e inducono su esso lo stesso verso di ATTRAVERSAMENTO.

PROP Siano σ τ e α come nella DEF. di sup. equiv trovare che x il segno di $\det J_\alpha(x,y) < 0 \quad \forall (x,y) \in B$

ALLORA σ e τ hanno stesso sostegno ma inducono su di esso versi di ATTRAVERSAMENTO opposti!

$A = (\overset{u}{0, \pi}) \times (\overset{v}{0, 2\pi})$ $\quad \underline{\rho > 0 \text{ fissato}}$, $\sigma : A \to \mathbb{R}^3$

$$\sigma(u,v) = (\rho \operatorname{sen} u \cos v, \ \rho \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \ \rho \cos u)$$

$$J\sigma(u,v) = \begin{pmatrix} \rho \cos u \cos v & -\rho \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v \\ \rho \cos u \operatorname{sen} v & \rho \operatorname{sen} u \cos v \\ -\rho \operatorname{sen} u & 0 \end{pmatrix}$$

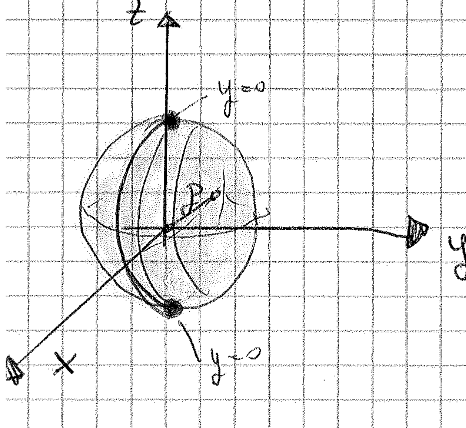
HA RANGO 2

$\hookrightarrow$ σ REGOLARE

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) = \sigma(u,v), \ (u,v) \in A\}$$

$$(x\ y\ z) = (\rho \operatorname{sen} u \cos v, \ \rho \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \ \rho \cos u)$$

$$\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen} u \cos v \\ y = \rho \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v \\ z = \rho \cos u \end{cases} \qquad \begin{matrix} 0 < u < \pi \\ 0 < v < 2\pi \end{matrix}$$



$u = 0, \pi \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \pm\rho \end{cases} \to$ • •

$0 < u < \pi \Rightarrow \operatorname{sen} u > 0$ sempre $\Downarrow$ $x > 0$

$v = 0, 2\pi \Rightarrow \begin{cases} x = \rho \operatorname{sen} u \\ y = 0 \\ z = \rho \cos u \end{cases}$

$\begin{cases} x^2 + z^2 = \rho^2 \\ y = 0 \\ x > 0 \end{cases}$ $\to$ semicirconf di piano $y = 0$

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2\} \setminus$$

$$\setminus \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 = \rho^2, \ x \geq 0, \ y = 0\}$$

con = ingloba anche i • •

Ezione 10/11/2011

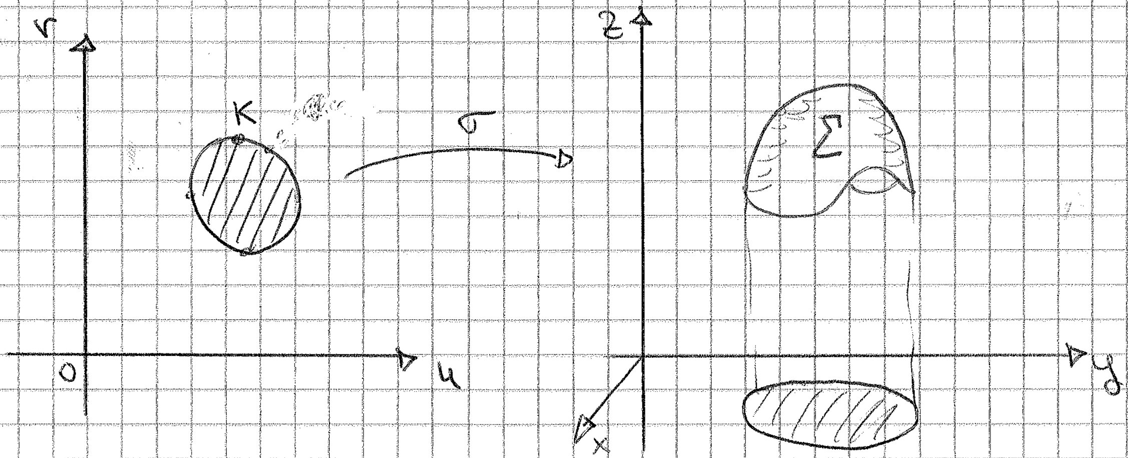
INTEGRALI di SUPERFICIE

Def Siano $K \subseteq \mathbb{R}^2$ un compatto tale che ∂K è il sostegno di una curva parametrica chiusa, semplice e regolare a tratti, $\sigma: K \to \mathbb{R}^3$ una calotta regolare, $\Sigma = \sigma(K)$ il sostegno di σ e $f: \Sigma \to \mathbb{R}$ una funzione continua.

Si chiama INTEGRALE (di) SUPERFICIE (o SUPERFICIALE) di f su σ (o su Σ) il numero reale

$$\boxed{\int_\sigma f = \iint_K f(\sigma(u,v)) \, \|\overset{\text{norma}}{N(u,v)}\| \, du \, dv}$$

dove $\boxed{\overset{\text{vettore normale alla superficie}}{N(u,v) = \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u,v)}}$. In particolare se $f = 1$ su Σ allora $\int_\sigma 1 = A\Sigma$ area di Σ della superficie



NOTAZIONE $\int_\sigma f$, $\int_\Sigma f$, $\int_\sigma f \, d\sigma$, $\int_\Sigma f \, d\sigma$

OSS

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in K, \ z = g(x,y)\} = G_{g|K}$$

$g: A \to \mathbb{R}$

$A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto

g di classe C^1 (ci devono essere deriv. parziali continue)

$K \subseteq A$ è compatto tale che ∂K è il sostegno di una curva parametrica chiusa semplice e regolare a tratti

$$J(x,y) = (x, y, g(x,y)) = \left(x, y, \tfrac{1}{2}(x^2+y^2)\right)$$

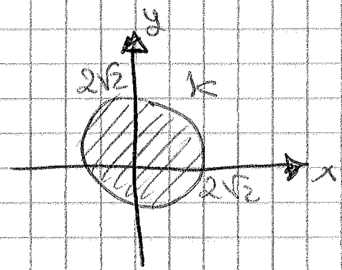
$$N(x,y) = (-x, -y, 1)$$

$$\|N(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2+1} =$$

$$\Rightarrow A_\Sigma = \int_K \|N(x,y)\|\,dx\,dy = \int_K \sqrt{x^2+y^2+1}\,dx\,dy =$$

▷ POLARI

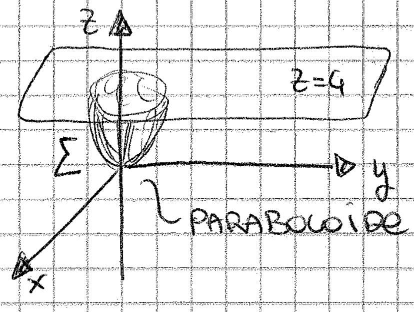
$$= \int_{K'} \sqrt{\rho^2+1}\;\rho\,d\rho\,d\theta = ⊛$$



dal GRAFICO RICAVO $K' = [0, 2\sqrt{2}] \times [0, 2\pi]$

$$⊛ = \left[\int_0^{2\sqrt{2}} \rho(\rho^2+1)^{1/2}\right]\left[\int_0^{2\pi} d\theta\right] =$$

$$= 2\pi\left[\frac{1}{3}(\rho^2+1)^{3/2}\right]_0^{2\sqrt{2}} = \frac{2}{3}\pi(27-1) = \frac{52}{3}\pi$$



ES Calcolare l'area di $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2+y^2},\ x^2+y^2 \le 1\}$

XCASA Sol $\sqrt{2}\,\pi$ OK!

TEO (Indipendenza dell'integrale di superficie dalla parametrizzazione)

Siano $\sigma : K \to \mathbb{R}^3$ e $\tau : K' \to \mathbb{R}^3$ due calotte regolari equivalenti, (quali hanno = sostegno)

$\Sigma = \sigma(K) = \tau(K')$ il loro comune sostegno

e $f : \Sigma \to \mathbb{R}$ una funzione continua ALLORA $\int_\sigma f = \int_\tau f$

OSS σ e τ equivalenti $\Rightarrow \sigma(K) = \tau(K')$ e σ e τ inducono lo stesso verso di attraversamento sse comune sostegno.

OSS Se $\exists\, \alpha : B \to A$ di classe C^1, con $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$ APERTI tale che $K \subseteq A$ $K' \subseteq B$, tale che $\alpha_{|K} : K' \to K$ è BIETTIVA, $\forall (x,y) \in K'$ $\det J\alpha(x,y) < 0$ e $\tau = \sigma \circ \alpha$ ($\alpha_{|K}$ ristretto a K')

ALLORA $\int_\sigma f = \int_\tau f$ $\to$ (cioè inducono versi di attraversamento opposti)

(In tali ipotesi $\sigma(K) = \tau(K')$, però inducono verso di attraversamento opposti se sostegno comune)

FLUSSO di UN CAMPO ATTRAVERSO UNA SUPERFICIE

Def Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ aperto non vuoto, $F : \Omega \to \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale continuo, $K \subseteq \mathbb{R}^2$ un compatto tale che ∂K è il sostegno di una CURVA PARAMETRICA chiusa, semplice e regolare a tratti $\sigma : K \to \Omega$ una calotta REGOLARE e $\Sigma = \sigma(K)$ è il sostegno di σ

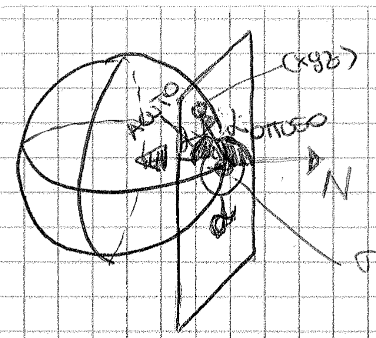
Si chiama <u>flusso del campo F attraverso σ</u> (σ Σ) il numero reale

$$\int_\sigma \overbrace{F \cdot n}^{\text{scalare}} = \iint_K \overbrace{F(\sigma(u,v))}^{\text{calcolato}} \overbrace{\cdot}^{\text{scalare}} \overbrace{N(u,v)}^{\text{normale in } u,v}\, du\, dv$$

dove $N(u,v) = \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u,v)$ e $n = \frac{N}{\|N\|}$

NOTAZIONI $\int_\Sigma F \cdot n$, $\int_\sigma F \cdot n\, d\sigma$, $\int_\Sigma F \cdot n\, d\sigma$ $\quad (\Sigma = \sigma(K))$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 67 di 304



Prendo un punto qualsiasi $(x\,y\,z) = \vec{P}$

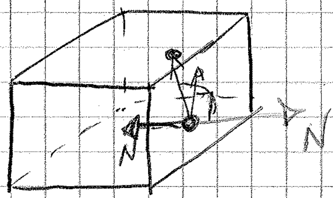
$\vec{P} \cdot \vec{N} = |P|\,|N| \cdot \cos\alpha$ → ≥ 0 (se $\alpha \leq \frac{\pi}{2}$) ACUTO → (se $\frac{\pi}{2} \leq \alpha$) < 0 OTTUSO

$\forall (x,y,z) \in D$ si calcola $\left[(x,y,z) - \sigma(u_0 v_0)\right] \cdot N(u_0 v_0)$

$\leq 0 \Rightarrow$ N USCENTE

$\geq 0 \Rightarrow$ N ENTRANTE

$(x,y,z) \in \partial D$



in qsto primo caso ⇑ lo scalare viene
SPOSTANDOMI di poco dal interno
RISOLVO il problema

$\sigma(u_0, v_0)$

($\alpha = \frac{\pi}{2}$ ⇒ SCALARE $\vec{P} \cdot \vec{N} = 0$ ⇒ non capisco se è ent. o uscente!)

③ ANALITICO

xché se no rischierei di fare un "salto"

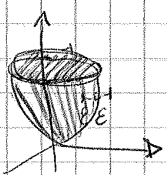
$\forall \varepsilon > 0$ "piccolo" si calcola $\sigma(u_0 v_0) + \varepsilon N(u_0 v_0)$

Se $\in D \Rightarrow N(u_0\ v_0)$ è entrante

Se $\in D \Rightarrow N(u_0\ v_0)$ è uscente

ESEMPIO

$$D = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 1 \right\}$$

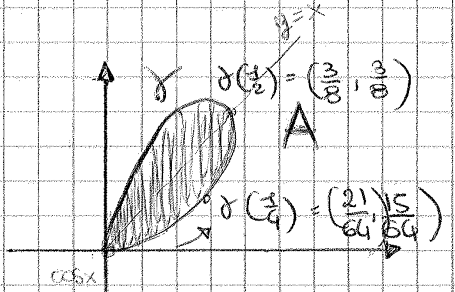


$\partial D =$  + 

ES Calcolare l'area dell'insieme A racchiuso all'interno del sostegno della curva parametrica $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ definita da
$$\gamma(t) = (t^3 - 3t^2 + 2t,\ t - t^3)$$

il problema è che non riesco a scrivere le coo. cartesiane di γ

$$(x,y) = \gamma(t) \Rightarrow \begin{cases} x = t^3 - 3t^2 + 2t \\ y = t - t^3 \end{cases} \Rightarrow \text{non riesco } y = f(x),\ x = g(y)$$



$\gamma(0) = (0,0)$

$\gamma(1) = (0,0)$

con un programma disegno γ

$\frac{\partial f_2}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = -1 \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} = 1 \Rightarrow$ COROLLARIO!!

$$F(x,y) = (-y, 0)$$

USO GREEN NEL VERSO OPPOSTO

Corollario del T. di Green $\quad m(A) = \oint_{\partial A} F \cdot dP = \oint_{\gamma} F \cdot dP =$

$$= \int_0^1 F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt$$

POSSO CALCOLARLO + FACILMENTE

$$\gamma'(t) = (3t^2 - 6t + 2,\ 1 - 3t^2)$$

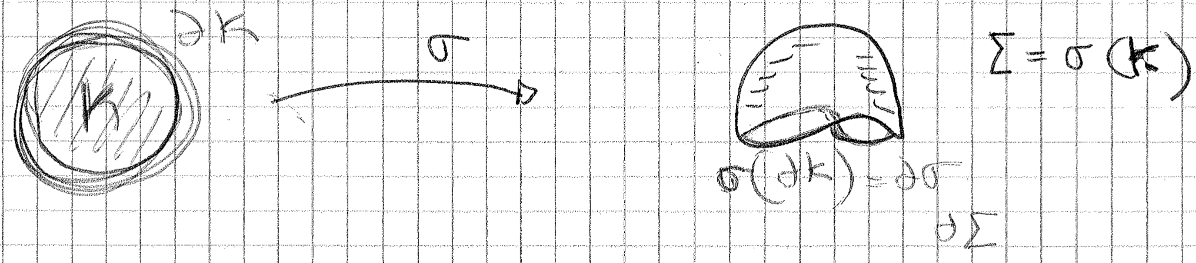
$$F(\gamma(t)) = F(t^3 - 3t^2 + 2t,\ t - t^3) = (t^3 - t,\ 0)$$

$$F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = (t^3 - t,\ 0) \cdot (3t^2 - 6t + 2,\ 1 - 3t^2) =$$
$$= 3t^5 - 6t^4 + 2t^3 - 3t^3 + 6t^2 - 2t =$$
$$= 3t^5 - 6t^4 - t^3 + 6t^2 - 2t$$

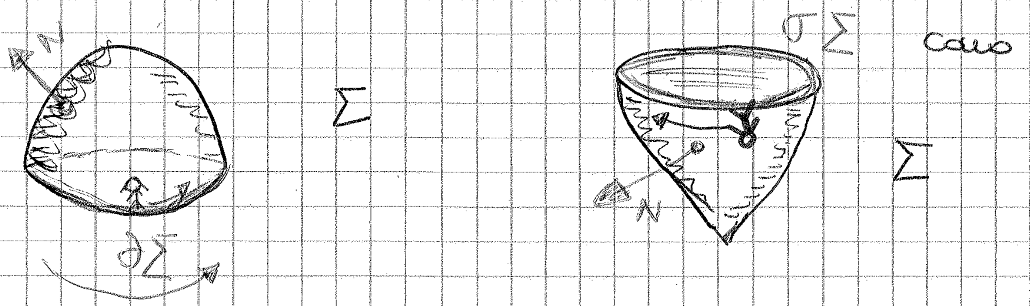
$$m(A) = \int_0^1 (3t^5 - 6t^4 - t^3 + 6t^2 - 2t)\, dt = \left[\frac{1}{2}t^6 - \frac{6}{5}t^5 - \frac{1}{4}t^4 + 2t^3 - t^2\right]_0^1 =$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{6}{5} - \frac{1}{4} + 2 - 1 = \frac{1}{20}$$

AREA dell'insieme che non riuscivo a calcolare prima suo sostegno $N(u,v) = \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u,v)$

Si chiama bordo di σ (a volte detto impropriamente bordo di Σ) la restrizione di σ a ∂K, cioè $\sigma(\partial K)$. Si denota con $\partial\sigma$ (o con $\partial\Sigma$)



Diciamo che $\partial\sigma$ è orientato positivamente se è orientato in senso antiorario rispetto a un osservatore posto come N. Equivalentemente, $\partial\sigma$ è orient. positivamente se percorrendo idealmente $\partial\sigma$ appoggiati alla faccia di Σ da cui esce N si vedono i punti di Σ alla propria sinistra.



TEOREMA (di Stokes (o del rotore)) Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un aperto non vuoto, $F: \Omega \to \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe C^1, $F=(f_1, f_2, f_3)$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto limitato connesso per archi tale che ∂A è l'unione di un numero finito di sostegni a 2 a 2 disgiunti di curve parametriche chiuse semplici e regolari a tratti, $K = \overline{A}$ e $\sigma: K \to \Omega$ una calotta regolare. Supponiamo che $\partial\sigma$ sia orientato positivamente. Allora l'integrale di linea di F lungo $\partial\sigma$ è

$$\boxed{\oint_{\partial\sigma} F \cdot dP = \int_\sigma \text{ROT } F \cdot n \, d\sigma,}$$

circuitazione di F sul bordo $\partial\sigma$ = flusso del rotore di F attraverso σ

dove $\text{rot } F: \Omega \to \mathbb{R}^3$ è il rotore di F, cioè il campo è definito da $\forall (x,y,z) \in \Omega$

$$\text{rot}F(x,y,z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1(xyz) & f_2(xyz) & f_3(xyz) \end{vmatrix} =$$

diff. simbolico

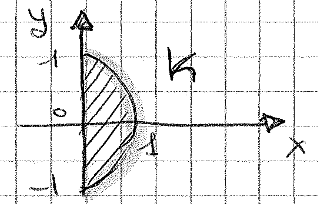
$x \to$ uso $\frac{\partial}{\partial x}$ $\quad y \to$ uso $\frac{\partial}{\partial y}$ $\quad z \to$ uso $\frac{\partial}{\partial y}$

$$= \boxed{\left(\frac{\partial f_3}{\partial y}(x,y,z) - \frac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,z), \frac{\partial f_1}{\partial z}(xyz) - \frac{\partial f_3}{\partial x}(xyz), \frac{\partial f_2}{\partial x}(xyz) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(xyz) \right)}$$

3 2 1 3 2 1

REGOLA MNEMONICA!

$K = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1 \quad x \ge 0 \}$



$\sigma : K \to \mathbb{R}^3, \quad \sigma(x,y) = (x, y, g(x,y)) = (x, y, \sqrt{1-x^2-y^2})$

Si ha che

definizione di int. di flusso

$$\oint_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_\Sigma \text{rot } F \cdot n \, d\sigma = \int_K \text{ROT } F(\sigma(x,y)) \circ N(x,y) \, dx\,dy$$

$$N_1(x,y) = \frac{\partial\sigma}{\partial x}(x,y) \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial y}(x,y) = \left(\underset{-\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}}{\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}}, \underset{-\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}}{\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}}, 1 \right)$$

POICHÉ SO CHE QUANDO $\Sigma = G_g$ esiste formula breve

calcoliamo $N_1(x,y)$ in un punto su F

$N(0\,0) = (0\,0\,1)$

$\sigma(0\,0) = (0\,0\,1)$ è uscente DALLA SFERA come lo VOLEVO

$$N(x\,y) = N_1(x\,y) = (0, 0, 1)$$

$$= \int_K \overset{\text{ROT F }(\sigma(x,y))}{(1, 0, 0)} \circ \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, 1 \right) dx\,dy =$$

$$= \int_K \frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \, dx\,dy \underset{\text{POLARI}}{=} \int_{K'} \frac{\rho^2 \cos\vartheta}{\sqrt{1-\rho^2}} \, d\rho \, d\vartheta =$$

su questa semi circonf. la funz. non è definita togliendo ∂K non ho + questo problema

$K' = [0, 1] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$

$$= \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} \cos\vartheta \, d\vartheta \right) \circ \left(- \int_0^1 \frac{1-\rho^2-1}{\sqrt{1-\rho^2}} d\rho \right) = \left[\text{sen } \vartheta \right]_{-\pi/2}^{\frac{\pi}{2}} \circ \left[- \int_0^1 \sqrt{1-\rho^2} \, d\rho + \right.$$

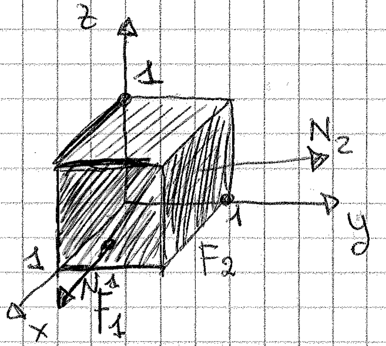
uscente del campo F dal bordo di D è

$$\int_{\partial D} F \cdot n = \iiint_D \operatorname{div} F(x\,y\,z)\, dx\, dy\, dz$$

dove $\operatorname{div} F : \Omega \to \mathbb{R}$ è la DIVERGENZA di F, definita da

$$\forall (x\,y\,z) \in \Omega \;:\; \operatorname{div} F(x\,y\,z) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x\,y\,z) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x\,y\,z) + \frac{\partial f_3}{\partial z}(x\,y\,z)$$

ES) Calcolare il flusso uscente di $F(x\,y\,z) = (x^2, y^2, z^2)$ dal bordo del cubo $D = [0,1]^3$ cioè $D = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$



D è pieno!

$\partial D = F_1 \cup F_2 \cup \dots F_6$

F_i = faccia i-esima

$$\int_{\partial D} F \cdot n\, d\sigma = \int_{F_1} F \cdot n\, dF_1 + \int_{F_2} F \cdot n\, dF_2 + \dots \int_{F_6} F \cdot n\, dF_6$$

APPLICANDO GAUS NON CALCOLO 6 INT. DI SUP.

$$\int_{\partial D} F \cdot n\, d\sigma = \int_D \operatorname{div} F(x\,y\,z)\, dx\, dy\, dz = 2\int_D (x+y+z)\, dx\, dy\, dz$$

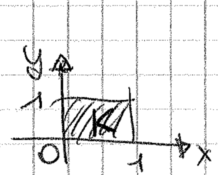
$$\operatorname{div} F(x\,y\,z) = 2x + 2y + 2z = 2(x+y+z)$$

FILI // ASSE z

$$= 2\int_K \left[\int_0^1 (x+y+z)\, dz \right] dx\, dy = 2\int_K \left[(x+y)z + \frac{1}{2}z^2\right]_0^1 dx\, dy =$$

$$= 2\int_K \left(x+y+\frac{1}{2}\right) dx\, dy$$

$K = [0,1] \times [0,1]$



TEORIA QUIZ

CAMPI VETTORIALI CONSERVATIVI

$n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$

Def Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto non vuoto e $F: \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale. Diciamo che **F è conservativo** se $\exists$ una $f: \Omega \to \mathbb{R}$ differenziabile tale che $\forall x \in \Omega$: $\nabla f(x) = F(x)$

gradiente f piccolo in x = F(x)

In tal caso **f è detto un potenziale** di F in Ω

Se $F = (f_1 \; ... \; f_n)$ allora $\boxed{\nabla f(x) = F(x)}$ $\forall x \in \Omega \iff$

componenti di F

gradiente

$$\iff \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} \; ... \; \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right) = (f_1(x), f_2(x), \; ... \; f_n(x))$$

$$\iff \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = f_1(x) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) = f_2(x) \\ \; ... \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) = f_n(x) \end{cases}$$

- Se f è un potenziale di F, allora anche $f+c$, $\forall c \in \mathbb{R}$, è un potenziale di F.
  Infatti, $\nabla (f+c)(x) = \nabla f(x) + \underbrace{\nabla c(x)}_{=0} = \nabla f(x) = F(x)$

- Per $n=1$ se $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo, allora un potenziale f di F su Ω è proprio una primitiva di f su Ω

ES $F(x,y) = (2xy + y^2, \; x^2 + 2xy)$

è conservativo infatti la funzione $f(x,y) = x^2y + y^2x$ è un potenziale di F.

Verifico che è vero:

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right) = (2xy + y^2, \; 2xy + x^2) = F(x,y)$$

~~SCRIVERE ALL'ESAME~~

Sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ la funzione definita $\forall x = (x_1 \dots x_m) \in \Omega$

$$f(x) = \Phi(\|x\|) = (\underbrace{\Phi \circ \| \, \|}_{\text{composta}})(x) = \Phi\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots x_n^2}\right)$$

Φ del modulo del vettore x

Sia $i = 1, \dots m$

la funzione f ammette tutte le deriv. parziali in Ω con:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \Phi'(\|x\|) \cdot \frac{\partial \| \, \|}{\partial x_i}(x) = \|x\| \, \varphi(\|x\|) \, \frac{2 x_i}{2\sqrt{x_1^2 + \dots x_n^2}} =$$

deriv. parziale di f rispetto alla variabile x_i

deriv. ris. x_i

$$x = (x_1 \dots x_n)$$
$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots x_n^2}$$

$$= \cancel{\|x\|} \, \varphi(\|x\|) \frac{x_i}{\cancel{\|x\|}} = \varphi(\|x\|) \, x_i$$

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(x)\right) = \left(\varphi(\|x\|) x_1, \dots, \varphi(\|x\|) x_n\right)$$

$$= \varphi(\|x\|)(x_1 \dots x_n) = \varphi(\|x\|) x = F(x) \Rightarrow F \text{ è CONSERVATIVO!}$$

PROP (PROPRIETÀ dei POTENZIALI)

Siano $\Omega \in \mathbb{R}^n$ un aperto connesso per ARCHI, $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale conservativo e $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ due potenziali di F in Ω.

Allora $\exists \; c \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) - g(x) = c \quad \forall x \in \mathbb{R}$

DIM f, g sono potenziali di F su $\Omega \Rightarrow f$ e g sono differenziabili in Ω con $\forall x \in \Omega$: $\underbrace{\nabla f(x) = \nabla g(x) = F(x)}_{\text{def. di potenziale di } F(x)}$

$\Rightarrow f - g$ è differenziabile in Ω con $\forall x \in \Omega$

$\nabla (f - g)(x) = \nabla f(x) - \nabla g(x) = 0 \Rightarrow f - g$ è COSTANTE in Ω.

poiché Ω è connesso x archi

In particolare risulta $\varphi(a) = \varphi(b)$.

$$(f-g)(x) = (f-g)(\gamma(a)) = \varphi(a) = \varphi(b) = (f-g)(\gamma(b)) =$$

$$= (f-g)(y) \Rightarrow (f-g)(x) = (f-g)(y) \quad \text{c.v.d.}$$

$f(x) - g(x) = c$

OSS Se Ω non è connesso x ARCHI non vale ↑

$$F(x\,y) = \left(\frac{y}{1+x^2y^2} , \frac{x}{1+x^2y^2} \right)$$

$f(x,y) = \text{ARCTG}\,(x\,y) \Rightarrow \nabla f(x,y) = F(x\,y) \Rightarrow$ è POTENZIALE

$g(x,y) = -\text{ARCTG}\left(\frac{1}{x\,y} \right)$ } è un altro POTENZIALE

$$\nabla g(x,y) = \left(- \frac{-\frac{1}{x^2y}}{1+\frac{1}{x^2y^2}} ; - \frac{-\frac{1}{y^2x}}{1+\frac{1}{x^2y^2}} \right) = F(x,y)$$

f e g sono due potenziali di F su insieme $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y),\ xy=0\}$ (ASSI x e y)

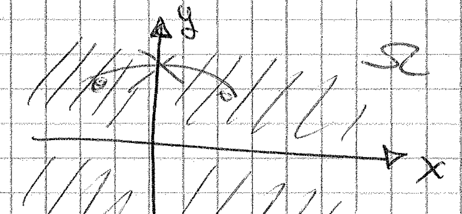
Ω non è connesso x ARCHI

⇓

non VALE la PROPRIETÀ dei POTENZIALI

⇒ non diff. di una COSTANTE

⇓



$$f(x,y) - g(x,y) = \text{ARCTG}\,(xy) + \text{ARCTG}\left(\frac{1}{xy}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & xy > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & xy < 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{ARCTG}\ t - \text{ARCTG}\ \frac{1}{t} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & t>0 \\ -\frac{\pi}{2} & t<0 \end{cases}}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 85 di 304

OSS. **PARAMETRIZZ. SEGMENTO**

In generale $A(x_A, y_A, z_A)$ $B(x_B, y_B, z_B)$ una PARAMETRIZZAZIONE di AB da A verso B, è $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^3$)

$$\gamma(t) = \left(x_A + t(x_B - x_A),\ y_A + t(y_B - y_A),\ z_A + t(z_B - z_A)\right)$$

$t < 0$ A, $0 \le t \le 1$ B, $t > 1$

$$(x,y) = \gamma(t) \Rightarrow \begin{cases} x = x_A + t(x_B - x_A) \\ y = y_A + t(y_B - y_A) \end{cases} \quad 0 \le t \le 1$$

se $x_A \neq x_B$ e $y_A \neq y_B$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = \dfrac{x - x_A}{x_B - x_A} \\ y = y_A + \dfrac{x - x_A}{x_B - x_A}(y_B - y_A) \end{cases} \Rightarrow \boxed{\frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{x - x_A}{x_B - x_A}}$$

eq. RETTA PASSANTE x due punti se $t \in \mathbb{R}$

se $t \in [\,]$ = EQ. SEGMENTO

$$\int_{\gamma_1} F \cdot dP = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} F(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t)\, dt = \circledast$$

$$\gamma_1'(t) = (-2\,\text{sen}\,t,\ 2\cos t)$$

$$F(\gamma_1(t)) = F(2\cos t,\ 2\,\text{sen}\,t) = (4\cos t\,\text{sen}\,t,\ 4)$$

$$F(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t) = (4\cos t\,\text{sen}\,t,\ 4)(-2\,\text{sen}\,t,\ 2\cos t) =$$

$$= -8\cos t\,\text{sen}^2 t + 8\cos t$$

$$= \circledast \int_{-\pi/2}^{\pi/2} -8\cos t\,\text{sen}^2 t + 8\cos t = \left[-\frac{8}{3}\text{sen}^3 t + 8\,\text{sen}\,t\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} =$$

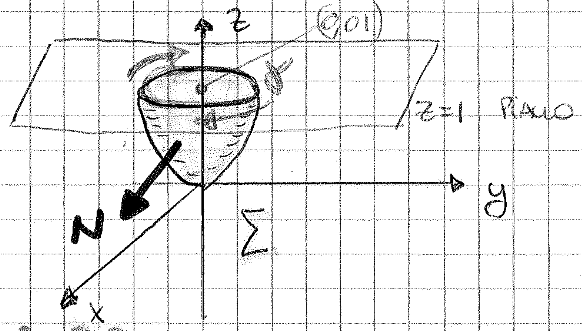
$$A' = \left\{ (\rho, \vartheta) \in \mathbb{R}^2 : \; 0 \le \rho \le 2 \quad -\frac{\pi}{2} \le \vartheta \le \frac{\pi}{2} \right\} = [0, 2] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$$

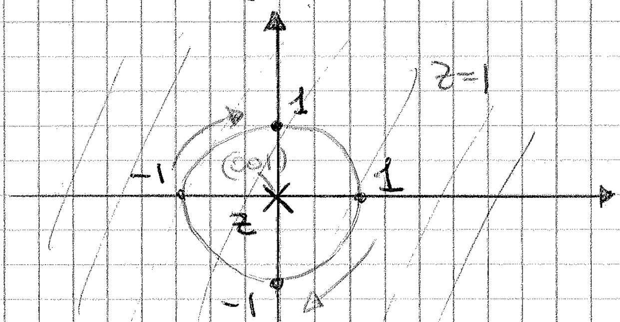
$$* = \left(\int_0^2 \rho^2 \, d\rho \right) \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} \cos\vartheta \, d\vartheta \right) = \left[\frac{1}{3} \rho^3 \right]_0^2 \left[\operatorname{sen} \vartheta \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} =$$

$$= \frac{8}{3} (1+1) = \frac{16}{3}$$

Es

Calcolare int. di linea del campo $F(x\,y\,z) = (y, -x, z^2)$ lungo la curva γ che descrive il bordo di $\Sigma = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad z = x^2 + y^2, \; x^2 + y^2 \le 1 \right\}$ inducendo su di esso un orientamento positivo rispetto al vettore normale uscente dal paraboloide $z = x^2 + y^2$





1 modo

$$\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\int_\gamma F \cdot dP =$$

$$\gamma(t) = (\cos t, -\operatorname{sen} t, 1)$$

$$= \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

$$\left. \begin{array}{l} \gamma'(t) = (-\operatorname{sen} t, -\cos t, 0) \\ F(\gamma(t)) = (-\operatorname{sen} t, -\cos t, 1) \end{array} \right\} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = \operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$$

$$= \int_K (0\ 0\ -2) \cdot (2x\ ,2y\ ,-1)\ dx\ dy = \int_K 2\, dx dy = 2 \int_K dx dy =$$

$$= 2\, m(K) = 2\pi$$

INTEGRALI di SUPERFICIE

ES calcolo $\displaystyle\int_\Sigma \frac{z}{\sqrt{4+x^2+y^2}}\, d\sigma$, $\quad \Sigma = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = \lg(x^2+y^2),\ 1 \le x^2+y^2 \le e^2 \right\}$

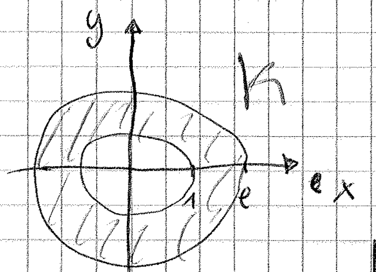
$$\int_\Sigma f(x\,y\,z)\, d\sigma = \int_K f(\sigma(u,v))\, \| N(u,v) \|\, du\, dv$$

$$\Sigma = \sigma(u,v) \quad \sigma : K \to \mathbb{R}^3$$

$$N(u,v) = \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u,v)$$

$$\Sigma = \mathcal{G}_g \qquad g(x,y) = \log(x^2+y^2) \qquad g : K \to \mathbb{R}$$

$$K = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad 1 \le x^2+y^2 \le e^2 \right\}$$



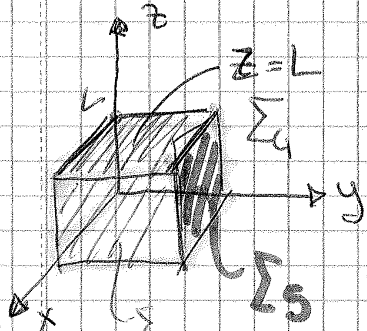
$$N(x,y) = \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x,y) \wedge \frac{d\sigma}{dy}(x,y) = \left(\frac{-2x}{x^2+y^2},\ \frac{-2y}{x^2+y^2},\ 1 \right)$$

$$\| N(x\,y) \| = \sqrt{\frac{4x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{4y^2}{(x^2+y^2)^2} + 1} =$$

$$= \sqrt{\frac{4}{x^2+y^2} + 1} = \sqrt{\frac{4+x^2+y^2}{x^2+y^2}}$$

$$= \int_\Sigma \frac{z}{\sqrt{4+x^2+y^2}}\, d\sigma = \int_K \frac{\lg(x^2+y^2)}{\cancel{\sqrt{4+x^2+y^2}}} \cdot \frac{\cancel{\sqrt{4+x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy =$$

$$= \int_K \frac{\log(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy$$ (INT. doppio) uso le coord. polari



D

$\Sigma_5 \quad y=L \quad 0\le x\le L \quad 0\le z\le L$

$\Sigma_6 \quad x=L \quad 0\le y\le L \quad 0\le z\le L$

$$\Sigma_4 = \left\{ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \ z=L \ , \ 0\le x\le L \ , \ 0\le y\le L \right\}$$

$$\Sigma_4 = G_g \qquad g: K\to\mathbb{R} \qquad g(x,y)=L$$

$$K=\left\{ (x,y)\in\mathbb{R}^2 : \ 0\le x\le L \quad 0\le y\le L \right\}$$

$$\Sigma_4 = \sigma(K) \qquad \sigma: K\to\mathbb{R}^3 \ \text{è} \ \sigma(x,y)=(x,y,g(x,y))=(x,y,L)$$

$$N(x,y)=(0,0,1) \Rightarrow \|N(x,y)\| = 1$$

$$\Rightarrow \int_{\Sigma_4} xyz\, d\sigma = \int_K Lxy\, dx\, dy = L\int_0^L x\, dx \cdot \int_0^L y\, dy =$$

$$= L\ \frac{1}{2}x^2\Big|_0^L \ \frac{1}{2}y^2\Big|_0^L = L\ \frac{1}{2}L^2\cdot\frac{1}{2}L^2 = \frac{1}{4}L^5$$

$$\int_{\Sigma_5} xyz\, d\sigma = \frac{1}{4}L^5$$

$$\int_{\Sigma_6} xyz\, d\sigma = \frac{1}{4}L^5$$

$$\boxed{\int_{\Sigma} xyz\, d\sigma = \frac{3}{4}L^5}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 93 di 304

ora mi serve il vett. normale esterno

$$N(u,v) = \frac{\partial \sigma_2}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \sigma_2}{\partial v}(u,v) =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ -3\operatorname{sen} v & 3\cos v & 0 \end{vmatrix} = (-3\cos v,\ 3\operatorname{sen} v,\ 0)$$

$$N = \left(0, \frac{\pi}{2}\right) = (0\ \ -3\ \ 0)$$

$\sigma_2(0,3,0)$ N_2 è entrante!

$$N_2 = (u,v) = -N(u,v) = (3\cos v,\ 3\operatorname{sen} v,\ 0)$$

$$\int_{\Sigma_2} F\cdot n\, d\sigma = \int_K F(\sigma_2(u,v))\cdot N_2(u,v)\,du\,dv = ⊛$$

$$F(\sigma_2(u,v)) = (3\cos v\ \ 3\operatorname{sen} v\ \ u) = (3\cos v,\ 0,\ u^2)$$

$$F(\sigma_2(u,v))\cdot N_2(u,v) = 9\cos^2 v$$

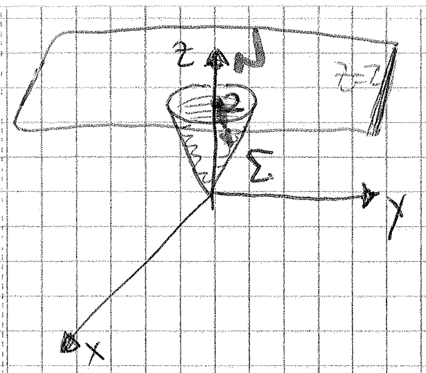
$$⊛ = \int_K 9\cos^2 v\,du\,dv = 9\left(\int_0^{2\pi}\cos^2 v\,dv\right)\left(\int_{-1}^{1} du\right) =$$

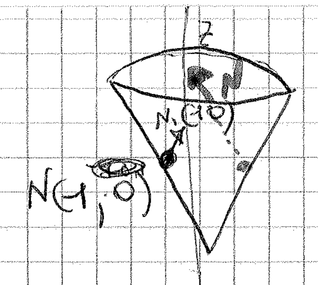
$$= 9\cdot\cancel{2}\cdot\left[\frac{1}{\cancel{2}}(v + \operatorname{sen} v\cos v)\right]_0^{2\pi} = 9\cdot 2\pi = 18\pi$$

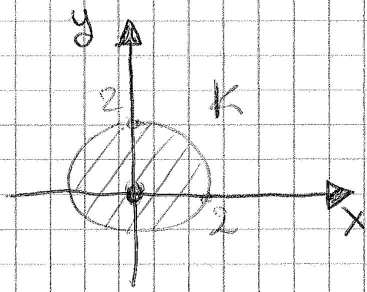
Conclusione

$$\int_{\partial D} F\cdot n = \overbrace{\int_{\Sigma_1} F\cdot n\,d\sigma + \int_{\Sigma_3} F\cdot n\,d\sigma}^{0} + \int_{\Sigma_2} F\cdot n = 18\pi$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 95 di 304







$\Sigma = \mathcal{G}_g \quad g(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \qquad g: K \to \mathbb{R}$

$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 4\} \qquad \Sigma = \sigma(K) \qquad \sigma: K \to \mathbb{R}^3$

$$\sigma(x,y) = (x, y, g(x,y)) = \left(x, y, \sqrt{x^2+y^2}\right)$$

$$N_1(x,y) = \frac{\partial\sigma}{\partial x}(x,y) \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial y}(x,y) = \left(\frac{-2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1\right)$$

caso particolare che σ ha $z = g(x,y)$

3° COMP. 1 $\Rightarrow$ N PUNTA VERSO ALTO $\Rightarrow$ È QUELLO GIUSTO!!

$N_1(x,y)$ è ENTRANTE $\Rightarrow N(x,y) = \left(\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1\right)$

$$N_1(1,0) = (-1, 0, 1)$$

PER DEFINIZIONE

$$\int_\Sigma F \cdot n = \int_K F(\sigma(x,y)) \cdot N(x,y)\, dx\, dy = \blacksquare$$

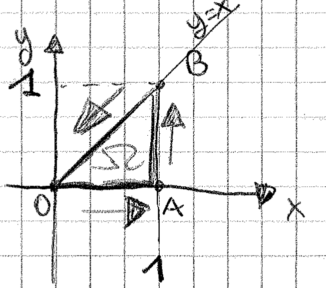
$$F(\sigma(x,y)) = F\left(x, y, \sqrt{x^2+y^2}\right) = \left(x^2, y^2, \sqrt{x^2+y^2}\right)$$

$$F(\sigma(x,y)) \cdot N(x,y) = \left(-\frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y^3}{\sqrt{x^2+y^2}} + \sqrt{x^2+y^2}\right)$$

Simm Risp. x $\to 0$ $\qquad$ 0 (Simm Disp Risp y)

$$\blacksquare = \int_K \left(-\frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + \sqrt{x^2+y^2}\right) dx\, dy =$$

(4) Calcolare la circuitazione del campo $F(x,y) = (x^2y, xy^3)$ lungo il perimetro del triangolo Ω di vertici $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(1,1)$ percorso in senso antiorario



$$\int_{\partial\Omega} F \cdot dP \overset{\text{GREEN}}{=} \int_{\Omega} (y^3 - x^2)\, dx\, dy =$$

$$\Omega = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1 \quad 0 \le y \le x \}$$

$$\overset{y\text{-semplice}}{=} \int_0^1 \left[\int_0^x (y^3 - x^2)\, dy \right] dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{4} y^4 - x^2 y \right]_0^x dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{4} x^4 - x^3 \right) dx = \left[\frac{1}{20} x^5 - \frac{1}{4} x^4 \right]_0^1 = -\frac{1}{5}$$

LEZIONE 21/11/2011 (int. di linea su campo conservativo)

DIM. TEO (lezione 16/11/2011) (solo la 1° PARTE)

PER IPOTESI (di curva regolare a tratti) $\exists\ a = t_0 < t_2 \dots < t_m = b$ tale che γ è derivabile con derivata continua non nulla in ogni intervallo (t_{k-1}, t_k) $\forall k = 1, \dots m$ e esistono le derivate laterali di γ in t_k, $\forall k = 0 \dots, m$.

Per definizione

$$\int_\gamma F \cdot dP = \sum_{k=1}^{m} \int_{t_{k-1}}^{t_k} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt$$

Sia $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ definita da $\varphi(t) = f(\gamma(t)) = (f \circ \gamma)(t)$

φ è continua, φ è differenziabile (o derivabile) in ogni $t \neq t_k$, $\forall k = 1 \dots m$ con φ' continua (xché F continua e f potenziale di $F \Rightarrow f$ è di classe C^1) $(\nabla f(x) = F(x))$

$$\boxed{[a\ b] \xrightarrow{\gamma} \Omega \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \quad \varphi = f \circ \gamma}$$

e $\forall t \neq t_k$

$$\varphi'(t) = \underbrace{\nabla f(\gamma(t))}_{F(\gamma(t))} \cdot \gamma'(t) = F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$$

TEOREMA (di equivalenza x i campi conservativi) (continui)

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto connesso per archi e $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale continuo. Allora sono fatti equivalenti:

i) F è conservativo

ii) (∀ogni) se $\gamma_1 : [a, b] \to \Omega$ e $\gamma_2 : [c, d] \to \Omega$ sono due curve parametriche semplici e regolari a tratti tali che $\gamma_1(a) = \gamma_2(c)$ e $\gamma_1(b) = \gamma_2(d)$, allora

$$\int_{\gamma_1} F \cdot dP = \int_{\gamma_2} F \cdot dP ;$$

(∀ogni)

iii) se $\gamma : [a, b] \to \Omega$ è una curva parametrica chiusa semplice e regolare a tratti allora

$$\int_{\gamma} F \cdot dP = 0$$

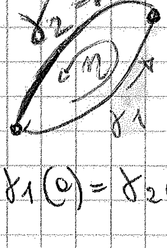
OSS Qsto teorema ci permette di individuare dei campi che sicuramente non sono CONSERVATIVI!!

DIM $i \Rightarrow iii$ $\quad iii \Rightarrow ii$ $\quad ii \Rightarrow i$

$i \Rightarrow iii$) Già provato nella dim del teorema precedente

$iii \Rightarrow ii$)

$\gamma_1(b) = \gamma_2(d)$



$\gamma_1(a) = \gamma_2(c)$

PER IPOTESI iii) $\int_{\eta} F \cdot dP = 0$

$$\eta : [a, b+d-c] \to \Omega$$

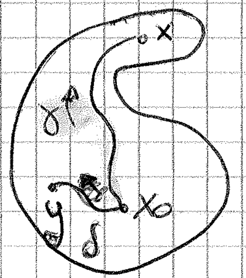
$$\eta(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & a \le t \le b \\ \gamma_2(b+d-t) & b < t \le b + d - c \end{cases}$$

TEMPO X SALIRE

verifico che η è continua in b

$\eta(b) = \gamma_1(b) \qquad \lim_{t \to b^+} \eta(t) = \lim_{t \to b^+} \gamma_2(b+d-b) = \gamma_2(d) = \gamma_1(b)$

$\int f(x) = \int_\gamma F \cdot dP$ dove $\gamma : [a, b] \to \Omega$ è una curva parametrica semplice e regolare a tratti tale che $\gamma(a) = x_0$ e $\gamma(b) = x$



(Ω è conn. x archi la curva $\exists$ sempre)

Perciò la curva non dipende dal percorso $\Rightarrow$

f non dipende da γ, cioè è ben definita

Quindi $f : \Omega \to \mathbb{R}$

Dimostriamo che f è un potenziale di F su Ω cioè che

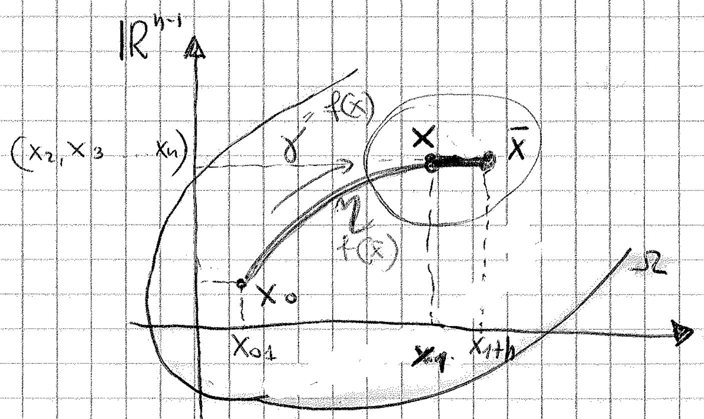
f è diff in Ω e $\forall j = 1 \dots n$ $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = f_j(x)}$ $\forall x \in \Omega$

Per semplicità consideriamo $j = 1$.

$\frac{\partial f}{\partial x_1} = f_1(x)$ cioè se $x = (x_1, \dots x_n)$

$\Downarrow$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h, x_2, \dots x_n) - f(x_1, x_2 \dots x_n)}{h} = f_1(x_1, \dots x_n)$$



$x_0 = (x_{0,1}, x_{02} \dots x_{0n})$

$x = (x_1, \dots x_n)$

se $h > 0$

$\bar{x} = (x_1 + h, x_2 \dots x_n)$

$\exists r > 0 : B(x, r) \subseteq \Omega$

$h > 0 \qquad 0 < h < r$

$\frac{f(\bar{x}) - f(x)}{h} =$ x def

$= \frac{1}{h} \left(\int_\eta F \cdot dP - \int_\gamma F \cdot dP \right) =$ dove $\eta : [a, b+h] \to \Omega$ è

$=$

$$\eta(t) = \begin{cases} \gamma_x(t) & a \le t \le b \\ (x_1 + t - b, x_2 \dots x_n) & b < t \le b + h \end{cases}$$

η continua, è semplice e regolare a tratti

$\Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x) = f_1(x)$

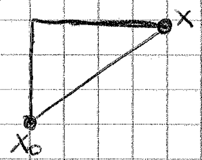
Analogamente $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x) = f_j(x) \quad \forall j = 2 \dots n$

$\Rightarrow f$ è diff. in Ω con $\nabla f(x) = (f_1(x) \dots f_n(x)) = F(x)$

$\Rightarrow f$ è un potenziale $\Rightarrow F$ è conservativo! c.v.d

vedi appunti cap 5

OSS — pag 121 cap 5



2 percorsi + facili

CONSIDERIAMO SOLO CAMP. VETTORIALI CONSERVATIVI di classe C1

TEO (Considerazione necessaria per i campi conservativi di classe C^1)

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto non vuoto e $F: \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale di classe C^1, con $F = (f_1 \dots f_n)$

Se F è conservativo, allora $\forall i, j = 1, \dots n$ e $\forall x \in \Omega$ si ha che $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)$

DIM Se F è conservativo allora $\exists f: \Omega \to \mathbb{R}$ differenziabile tale che $\nabla f(x) = F(x)$, cioè $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x) = f_i(x) \quad \forall i = 1, \dots n \ \forall x \in \Omega$

F di classe $C^1 \Rightarrow f_i$ sono di classe $C^1 \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ sono di classe C^1

$\Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ è differenziabile e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x)$ sono continue $\Rightarrow f$ è di classe C^2

Per il lemma di Schwarz $\forall i, j = 1 \dots n \quad \forall x \in \Omega$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j x_i}(x)$$

ES $F(x\,y) = (y, x)$ vale C.N?

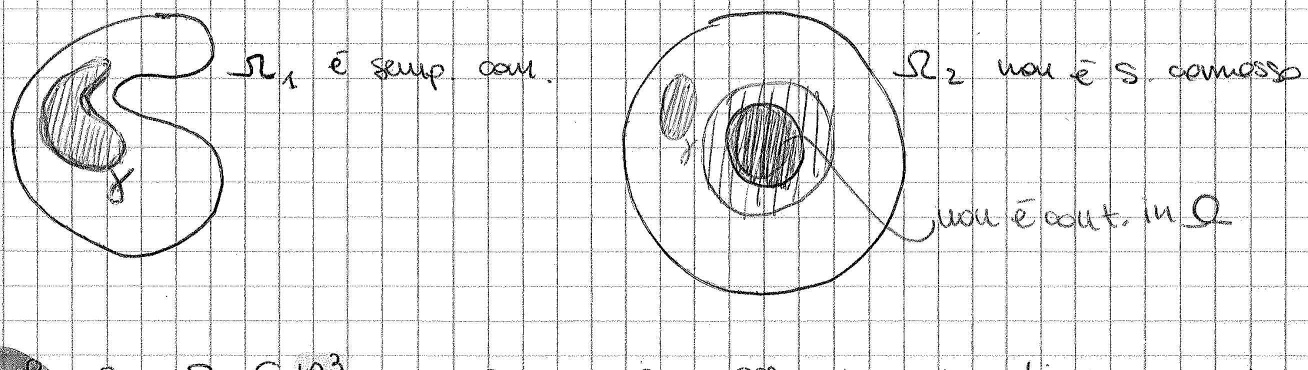
$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = (1) \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x}(x\,y) = 1$$

VALE CN! F non so se è conservativo! → o trovo potenz. / → o prox teor.

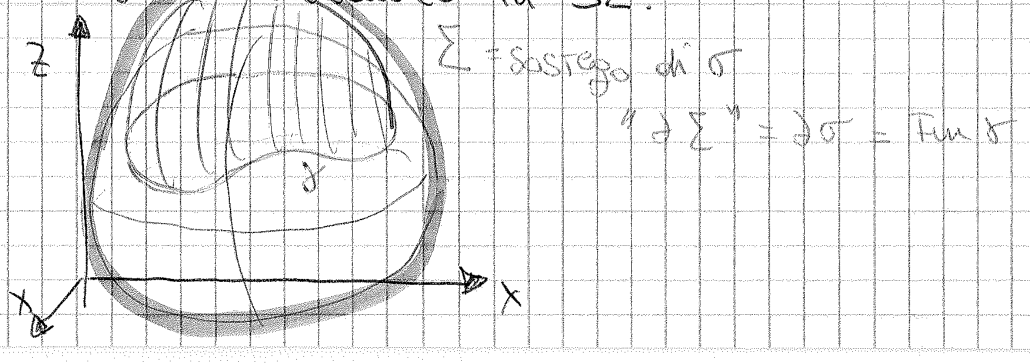
se cerco il pot. in qsto caso è facile:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x\,y) = y \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x\,y) = x \end{cases} \Rightarrow f(x\,y) = x\,y \quad \text{(è conservativo)}$$

Def Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto connesso per archi diciamo che Ω <u>è semplicemente connesso</u> se $\forall$ curva parametrica chiusa γ avente sostegno in Ω la parte di piano racchiusa nel sostegno di γ è contenuto in Ω



Def Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un aperto connesso x archi diciamo che Ω è semplicemente connesso se $\forall$ curva parametrica chiusa γ avente sostegno in Ω $\exists$ una calotta regolare σ t.c. $\partial\sigma$ è il sostegno di γ e il sostegno di σ è contenuto in Ω.



$F=(f_1, f_2) \Rightarrow \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)$

Se γ induce un verso antiorario su $\partial A \Rightarrow \oint_\gamma F \cdot dP = \oint_{\partial A} F \cdot dP =$ (GREEN)

$$= \int_A \underbrace{\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)}_{=0} \, dx\,dy = 0$$

Se γ induce un verso orario su $\partial A \Rightarrow \oint_\gamma F \cdot dP = \oint_{\partial A} F \cdot dP = -\int \underbrace{\dots}_{=0} dx\,dy$

Per il teo di equivalenza $\Rightarrow F$ è CONSERVATIVA

$n=3$ Sia $\gamma : [a,b] \to \Omega$ ...... Dim che $\int_\gamma F \cdot dP = 0$

Ω semplice connesso $\Rightarrow \exists\, \sigma : K \to \Omega$ tale che $\partial\sigma$ parametrizza $Im(\gamma)$. $F=(f_1, f_2, f_3) \Rightarrow ROT\, F = 0$

Se γ induce un orientamento positivo su $\partial\sigma$, allora x teorema di Stokes $\oint_\gamma F \cdot dP = \oint_{\partial\sigma} F \cdot dP = \int_\sigma \underbrace{ROT\, F}_{=0} \cdot n \, d\sigma = 0$

Se γ induce un orientamento negativo su $\partial\sigma$ allora, sempre x Stokes $\oint_\gamma F \cdot dP = \oint_{\partial\sigma} F \cdot dP = -\int_\sigma \underbrace{ROT\, F}_{=0} \cdot n \, d\sigma = 0$

Per il teo di equivalenza $\Rightarrow F$ è conservativo
(poiché γ è una qualsiasi linea chiusa)

$\Sigma = G_g \qquad g(x,y) = x^2 - y^2 \qquad g : K \to \mathbb{R}$

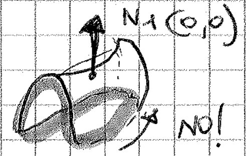
$K = \{ (x\ y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \leq 1 \}$

$\Sigma = \sigma(K) \qquad \sigma(x\ y) = (x, y, x^2 - y^2)$

$N_1(x,y) = \frac{d\sigma}{dx}(x,y) \wedge \frac{d\sigma}{dy}(x,y) = (-2x, 2y, 1)$

↳ ci serve il suo opposto

$N_1(0,0) = (0,0,1)$



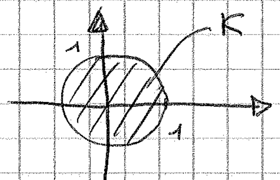
$N(x\ y) = -N_1(x\ y) = (2x, -2y, -1)$ ok!!

$$\oint_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_\Sigma \operatorname{rot} F \cdot n \, d\sigma = \int_K \operatorname{rot} F(\sigma(x,y)) \cdot N(x\ y) \, dx\, dy = \circledast$$

$$\operatorname{rot} F(\sigma(x\ y)) = \operatorname{rot} F(x, y, x^2 - y^2) =$$
$$= (-x, 0, x^2 - y^2 - x)$$

$$\operatorname{rot} F(\sigma(x y)) \cdot N(x y) = (-x, 0, x^2 - y^2 - x) \cdot (2x, -2y, -1) =$$
$$= (-3x^2 + y^2 + x)$$

$$\circledast = \int_K (-3x^2 + y^2 + x)\, dx\, dy^{=0} =$$



$$= \int_K (-3x^2 + y^2)\, dx\, dy \overset{\text{pari}}{=} \int_{K'} (-3\rho^2 \cos^2\vartheta + \rho^2 \operatorname{sen}^2\vartheta)\, d\rho\, d\vartheta =$$

$K' = [0,1] \times [0, 2\pi]$

$$= \left(\int_0^1 \rho^3 \, d\rho \right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} (-3\cos^2\vartheta + \operatorname{sen}^2\vartheta)\, d\vartheta \right) =$$

$$= \left[\frac{1}{4}\rho^4 \right]_0^1 \left[-\frac{3}{2}(\vartheta + \operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta) + \frac{1}{2}(\vartheta - \operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta) \right]_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{1}{4}(-3\pi + \pi) = -\frac{\pi}{2}$$

$$F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = (\operatorname{sen} t, 0, \cos^2 t)(-\operatorname{sen} t \cos t \; 0) = -\operatorname{sen}^2 t$$

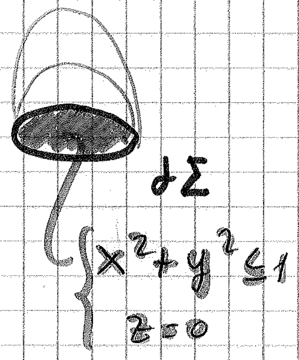
$$(*) = -\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 t \, dt = -\left[\frac{1}{2}\left(t - \operatorname{sen} t \cos t\right)\right]_0^{2\pi} = -\pi$$

EX x CASA $\Sigma = G_g : g(x,y) = \sqrt{\frac{1}{2}(1-x^2-y^2)}$

OSS Es di prima dove $\Sigma \to S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=1 \quad z \geq 0\}$

$$?\int_S \operatorname{rot} F \cdot n \, d\sigma \underset{\text{STOKES}}{=} \oint_{\partial S} F \cdot dP = \oint_{\partial \Sigma} F \cdot dP = -\pi$$

$$\partial S = \partial \Sigma$$



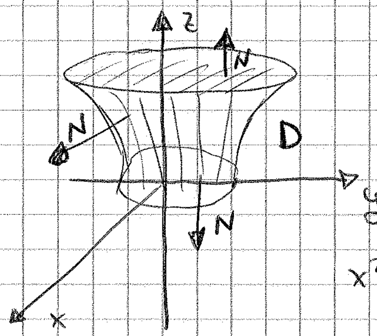
sup. + FACILE

$$\int_S \operatorname{rot} F \cdot n \, d\sigma = \int_\Sigma \operatorname{rot} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\text{CERCHIO}} \operatorname{rot} F \cdot n \, d\sigma = \int_{x^2+y^2 \leq 1} \operatorname{rot} F(\sigma(x,y)) \cdot N(x,y) \, dx\,dy$$

$$= \int_{x^2+y^2 \leq 1} \operatorname{rot} F(x,y,0) \cdot N(x,y) \, dx\,dy = \int_{x^2+y^2 \leq 1} (0,-2x,-1) \cdot (0,0,1) \, dx\,dy$$

$$= -\int_{x^2+y^2 \leq 1} 1 \, dx\,dy = \text{AREA CERCHIO} = -\pi R^2 = -\pi$$

53) Calcolare il flusso uscente dal campo $F(x\,y\,z) = (x^3\; y^3\; z)$ dal bordo di $D = \{(x\,y\,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2-z^2 \le 4 \quad 0 \le z \le \sqrt{5}\}$



USO GAUSS

$$\int_{\partial D} F \cdot n \, d\sigma = \int_D \operatorname{div} F(x y z)\, dx\,dy\,dz =$$

$$= \int_D (3x^2+3y^2+1)\, dx\,dy\,dz =$$

$x^2+y^2 \le 4+z^2$

$$= \int_0^{\sqrt{5}} \left[\iint_{D_z} (3x^2+3y^2+1) \right] dz =$$

STRATI // piano xy

Sol $\left[\dfrac{343}{6}\sqrt{5}\pi\right]$

$D_z = \{(x\,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 4+z^2\} \quad \forall\; 0 \le z \le \sqrt{5}$

LEZIONE 28/11/2011

OSS F CONSERVATIVO C^1 $\Rightarrow \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j} = \dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}$

OSS $\Omega = \text{dom}(F)$ è semplicemente connesso

(C.N.) $\Rightarrow F\ C^1$ tale che $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j} = \dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}$

$\Rightarrow$ F è CONSERVATIVO

OSS

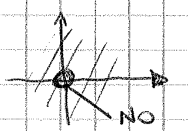
Se vale C.N non è semplicemente connesso, allora non si può dire nulla sulla conservatività di F

Esempio

$$F(x,y) = \left(\frac{-2y}{x^2+y^2},\ \frac{2x}{x^2+y^2}\right)$$

$$G(x\ y) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2},\ \frac{2y}{x^2+y^2}\right)$$

$\Omega = \text{dom}(F) = \text{dom}(G) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$



Ω = non è semp. connesso!

$F = (f_1, f_2) \Rightarrow \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(x\ y) = -2\ \dfrac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = -2\ \dfrac{x^2-y^2}{(x^2-y^2)^2}$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x\ y) = 2\ \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = 2\ \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

I DUE CAMPI VETTORIALE VERIFICANO LA C.N PERO SU Ω NON S. CON.

F verifica la C.N. ~~...~~ $\Rightarrow$ MA NON Ω SEM. CON $\Rightarrow$ NON POSSO DIRE NIENTE

$G(x\ y) = \dfrac{(2x,\ 2y)}{x^2+y^2} = \dfrac{2}{\|(x,y)\|^2}(x\ y) \Rightarrow$ G è RADIALE!

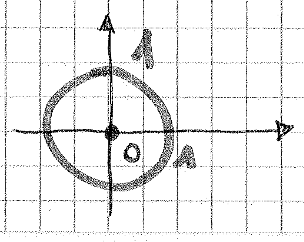
G è $C^1 \Rightarrow$ G è CONSERVATIVO $\Rightarrow$ VERIFICA C.N.

$\hookrightarrow$ PERCHÉ è RADIALE

$$\left(g(x\ y) = \log\ (x^2+y^2)\right)$$

X FAR VEDERE CHE F NON è CONS. FACCIO UN INTEGRALE LUNGO LINEA CHIUSA

$\Rightarrow \gamma : [0,\ 2\pi] \to \Omega \qquad \gamma(t) = (\cos t,\ \text{sen}\ t)$



$$\int_\gamma F \cdot dP = \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\ dt = (*)$$

In tal caso si dice che (a_n) diverge positivamente (negativamente) o che (a_n) è divergente positivamente (negativamente)

Se $\nexists \lim_n a_n$ diciamo che (a_n) è indeterminata (o oscillante)

Vale:

1) Teo. di unicità del limite
2) " di limitatezza locale
3) " della permanenza del segno
4) " del confronto
5) Algebra dei limiti (somma, prodotto, quoziente, composizione)

6) " sui limiti delle successioni monotone

Si introducono in modo analogo

- le forme indeterminate $[\infty \cdot \infty]$ $\left[\frac{0}{0}\right]$ $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ $[0 \cdot \infty]$ $[1^{\infty}]$ $[0^0]$ $[\infty^0]$

- $a_n \sim b_n$ (equivalente), $n \to +\infty \iff \boxed{\lim_n \frac{a_n}{b_n} = 1}$;

- $a_n = o(b_n)$ (o piccolo), $n \to +\infty \iff \boxed{\lim_n \frac{a_n}{b_n} = 0}$;

- i limiti notevoli

1) $\boxed{\lim_n \sqrt[n]{a^p} = 1}$ $\forall a > 0$ $\forall p \in \mathbb{R}$

2) $\boxed{\lim_n \sqrt[n]{n^p} = 1}$ $\forall p \in \mathbb{R}$

3) $\boxed{\lim_n \sqrt[n]{n!} = +\infty}$

4) $\boxed{\lim_n \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a}$ $\forall a \in \mathbb{R}$

5) $\boxed{\lim_n \left(\frac{\log^p n}{n^k}\right) = 0}$ $\forall p \in \mathbb{R}$ $\forall k > 0$

DEF Sia (a_n) una successione reale. Si chiama **serie di a_n**, la scrittura formale $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ o $\sum a_n$

a_n è detto **termine generale della serie**

n è l'**indice della serie** (posso chiamarlo come voglio)

Poniamo

$$S_0 = a_0$$

$$S_1 = a_0 + a_1 = S_0 + a_1$$

$$S_2 = a_0 + a_1 + a_2 = S_1 + a_2$$

$$S_3 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = S_2 + a_3$$

$\vdots$

$$S_n = a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1} + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = S_{n-1} + a_n$$

S_n è detta **somma parziale n-esima della serie di a_n**

$\forall n \geq 1 : \; S_n = S_{n-1} + a_n$

successione   sottosuccessione di S_n

Calcolo $\lim_n S_n$ (**carattere di una serie**)

- Diciamo che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ **converge** (o è convergente) se $\lim_n S_n = S \in \mathbb{R}$ e in tal caso S è detto somma della serie di a_n e si pone

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \boxed{\lim_n S_n} = S.$$

← posso scriverlo solo se la serie converge!! (non posso se div. scrivere $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$)

- Diciamo che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ **diverge positivamente** (**negativamente**) oppure che è divergente positivamente (negativamente) se $\lim_n S_n = +\infty$ $(-\infty)$

- Diciamo che $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è **indeterminata (o oscillante)** se $\nexists \lim_n S_n$

- Diciamo che $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è **assolutamente convergente** se converge $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$.

$a = -1 \Rightarrow S_n = \frac{1}{2} - \frac{(-1)^{n+1}}{2} = \begin{cases} 1 & n \text{ PARI} \\ 0 & n \text{ DISPARI} \end{cases}$

$\Downarrow$

$\nexists$ limite

intuitivamente $a < -1$ $\begin{cases} +\infty & n \text{ PARI} \\ -\infty & n \text{ dispari} \end{cases}$ $\nrightarrow$ $\nexists \lim S_n \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ è indeterminata

2) SERIE ARMONICA GENERALIZZATA:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^p} \quad p \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} \underline{\text{converge}} \text{ se } p > 1 \\ \underline{\text{diverge positivamente}} \text{ se } p \leq 1 \end{cases}$$

lo DIMOSTREREMO IN SEGUITO

↳ CRITERIO MC. LAURIN

memo: $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx : \begin{cases} \text{converge} & p > 1 \\ \text{diverge} & p \leq 1 \end{cases}$

3) SERIE TELESCOPICHE:

$$\sum_{m=0}^{\infty} (a_m - a_{m+1})$$

la somma della serie è sempre la somma di un numero finito di termini e il suo comportamento dipende da quello di $\lim_n (a_0 - a_{n-1})$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (a_k - a_{k+1}) = (a_0 - \cancel{a_1}) + (\cancel{a_1} - \cancel{a_2}) + (\cancel{a_2} - \cancel{a_3}) + \dots (a_n - a_{n+1})$$

$$= (a_0 - a_{n+1})$$

$$\Rightarrow \lim_n S_n = \lim_n (a_0 - a_{n+1})$$

SERIE TELESCOPICA PARTICOLARE:

(nel caso di prima $p=1$)

$$\sum_{m=0}^{\infty} (a_0 - a_{m+p}) \quad p \in \mathbb{N} \quad p \geq 1$$

Anche in questo caso la somma si scrive come somma di un numero finito ma costante di termini

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (a_k - a_{m+p}) \overset{n \geq p}{=} (a_0 - a_p) + (a_1 - a_{p+1}) + \dots (a_n + a_{p+n}) =$$

DIM

$\sum a_n \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$

$\sum b_n$ ottenuta modificando un numero finito di termini alla serie $\sum a_n \qquad \sigma_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$

Sia $n = p-1$ l'ultimo indice degli elementi a_n che sono stati modificati $\Rightarrow \forall n \geq p \quad b_n = a_n$ (da p in poi i termini non sono cambiati)

Sia $\boxed{n > p}$ e $\sigma_n = \boxed{\sum_{k=0}^{n} b_k} = \underbrace{\sum_{k=0}^{p} b_k}_{\sigma_p} + \sum_{k=p+1}^{n} \underbrace{b_k}_{= a_k} = \sigma_p + \sum_{k=p+1}^{n} a_k = ⊛$

somma parziale p-esima

con termini modificati

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k}_{S_n} = \underbrace{\sum_{k=0}^{p} a_k}_{S_p} + \sum_{k=p+1}^{n} a_k \Rightarrow \sum_{k=p+1}^{n} a_k = S_n - S_p$$

$\Downarrow$

$\sigma_n =$

$⊛ = \sigma_p + \underbrace{\boxed{S_n - S_p}}_{\sum_{k=p+1}^{n} a_k}$

$$\boxed{\sigma_n = \sigma_p + S_n - S_p \qquad \forall n > p}$$

due valori costanti $\in \mathbb{R}$ in quanto somme di finiti termini

- Se $\sum a_n$ converge $\Rightarrow \lim_n S_n = S \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \lim_n \sigma_n = \lim_n (\sigma_p + S_n - S_p) = \sigma_p + S - S_p \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \sum b_n$ converge!

- Se $\sum a_n$ diverge posi. (neg) $\Rightarrow \lim_n S_n = +\infty$ ($-\infty$)

sono costanti quindi tendono a se stessi x al limite

$\Rightarrow \lim_n \sigma_n = \lim_n (\sigma_p + S_n - S_p) = +\infty$ ($-\infty$)

$\Rightarrow \sum b_n$ conv. pos (neg)

- Se $\sum a_n$ è indeterminato $\Rightarrow \nexists \lim_n S_n$

$\Rightarrow \lim_n \sigma_n = \lim_n (\sigma_p + S_n - S_p) \; \nexists$ infatti

se per assurdo $\exists \lim_n \sigma_n = \sigma \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \Rightarrow$

DIM (EX)

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$$

$$\tau_n = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) \overset{\text{PROD. AS COMM}}{=} S_n + \sigma_n$$

$$\Rightarrow \lim_n \tau_n$$

(EX) completare qsta tabella

$\sum a_n$	$\sum b_n$	$\sum (a_n + b_n)$	$\sum (\lambda a_n)$
CONV.	INDET	INDET.	CONV.
IND	IND	NSPDR (ZERO?)	NSPDR (0)
DIV +	IND	DIV. +	DIV + o - dip. da λ
DIV -	IND	DIV -	"
DIV +	DIV -	DIV NSPDR	"

NSPDRN

TEO (condizione necessaria) ma non sufficiente!

Se $\sum a_n$ converge, allora $\lim_n a_n = 0$

$\Rightarrow$ successione a too tende a 0 o è un infinitesimo

DIM

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_n \Rightarrow S_n = S_{n+1}\ a_n$$

S_{n+1} è sottosuccessione di S_n

Se $\sum a_n$ converge allora $\lim_n S_n = S \in \mathbb{R}$

(S_{n-1}) è una sottosuccessione di S_n $(\varphi(n) = n-1)$

$$\Rightarrow \lim_n S_{n-1} = S \Rightarrow a_n = S_n - S_{n-1} \Rightarrow \lim_n a_n = \lim_n (S_n - S$$

LEZIONE 1/12/2011 (ESERCITAZIONE)

CAMPI VETT. CONSE. e POTENZIALI

RICERCA dei POTENZIALI

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto non vuoto, $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale CONSERVATIVO. Chi è $f : \Omega \to \mathbb{R}$ un potenziale di F?

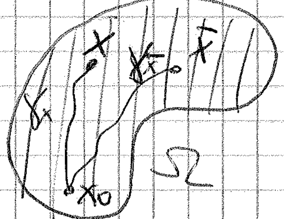
ESISTONO 2 modi x determinare f: 1 METODO

1) Se Ω è un aperto connesso per archi e F è continuo, fissato $x_0 \in \Omega$ si ha che $\forall x \in \Omega$

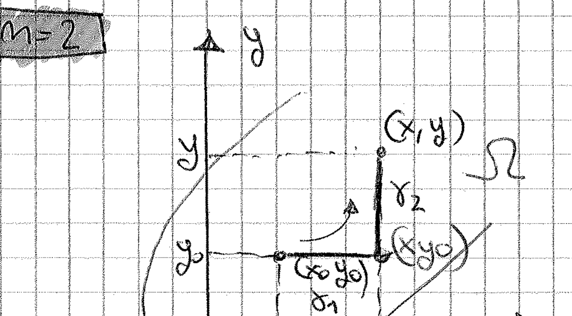
$$f(x) = \int_{\gamma_x} F \cdot dP \quad \text{dove } \gamma_x : [a_x, b_x] \to \Omega \text{ è una curva}$$

parametrica semplice e regolare a tratti tale che

$$\gamma_x(a_x) = x_0 \quad \text{e} \quad \gamma_x(b_x) = x$$



$n = 2$



LUNG. TOT. CURVA = SOMMA 2 SEGMENTI

$im(\gamma) = im(\gamma_1) \cup im(\gamma_2)$

- PARAMETRIZZO SEGMENTO —

$\gamma_1 : [0, 1] \to \Omega$

$\gamma_1(t) = (x_0 + t(x - x_0),\ y_0)$

- PARAM. SEGMENTO ||

$\gamma_2 : [0, 1] \to \Omega$

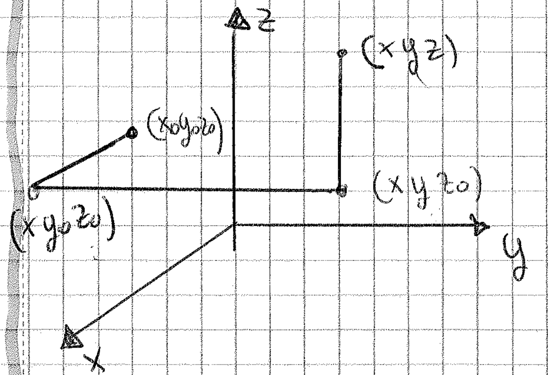
$\gamma_2(t) = (x,\ y_0 + t(y - y_0))$

SCELGO I DUE TRATTI + SEMPLICI X DESCRIVERE UNA CURVA CHE COLLEGA $(x_0\ y_0)$ A $(x\ y)$

$$f(x,y) = \int_{\gamma_{(x,y)}} F \cdot dP = \int_{\gamma_1} F \cdot dP + \int_{\gamma_2} F \cdot dP = \int_0^1 F(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t)\, dt \; +$$

$$+ \int_0^1 F(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t)\, dt =$$

$n=3$ $\quad (x_0\ y_0\ z_0) \xrightarrow{\gamma} (x\ y\ z)$



$$\boxed{f(x\ y\ z) = \int_{x_0}^{x} f_1(s, y_0, z_0)\, ds + \int_{y_0}^{y} f_2(x, s, z_0)\, ds + \int_{z_0}^{z} f_3(x, y, s)\, ds}$$

OSS il segmento - curve che unisce due punti deve stare tutto in Ω!

ES Sia $F(x,y) = (3x^2 + y\ ,\ 2y + x)$

Dire se F è conserv. e se lo è determin. un poten. f di F

$F \in C^1$ $\quad F = (f_1\ f_2)$ $\quad$ dom $F = \mathbb{R}^2 \Rightarrow$ è semp. connesso (V)

$f_1(x, y) = 3x^2 + y \qquad f_2(x\ y) = 2y + x$

$\Rightarrow \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(x\ y) = 1 = \dfrac{\partial f_2}{\partial x}(x, y)$ (V)

$\rightarrow$ **F è CONSERVATIVO!!**

CERCO UN POTENZIALE!

UN POTENZIALE f è $(x_0\ y_0) = (0, 0)$ (x SEMPLICITÀ LO SCELGO!)

$$f(x\ y) = \int_0^x f_1(s, 0)\, ds + \int_0^y f_2(x, s)\, ds =$$

$$= \int_0^x 3s^2\, ds + \int_0^y (2s + x)\, ds =$$

$$= \left[s^3\right]_0^x + \left[s^2 + xs\right]_0^y = x^3 + y^2 + xy$$

$\Downarrow$ VERIFICO!

$$\nabla f(x y) = \left(3x^2 + x\ ,\ 2y + x\right) = F(x\ y)$$

OK!

ES $F(x,y) = (3x^2 + y, \quad 2y + x)$

f è un potenziale di F se

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x\,y) = f_1(x\,y) = 3x^2 + y & (*) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f_2(x,y) = 2y + x & (**) \end{cases}$$

(*) $f(x,y) = \int 3x^2 + y \; dx = x^3 + xy + k(y)$

dove $k(y)$ è una funz. solo di y

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x\,y) = x + k'(y) \overset{(**)}{=} 2y + x$$

$$k(y) = \int 2y\,dy = y^2 + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$f(x\,y) = x^3 + xy + y^2 + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

Verifico (fatto prima)

ES $F(x\,y\,z) = (y+z \,,\; x+z \,,\; x+y)$

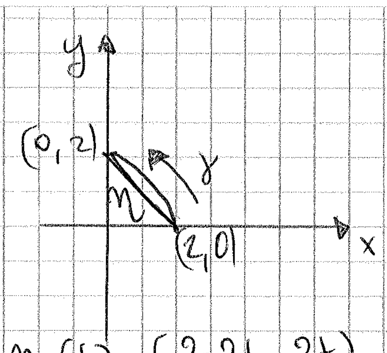
F è cons? se si calcolo pot. di F? (f)?

$F \in C^1$, dom$(F) = \mathbb{R}^3$ ⇒ sempl. connesso (V) ⇒ F è conserv.!

$$\text{rot } F(x\,y\,z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y+z & x+z & x+y \end{vmatrix} = (1-1,\; 1-1,\; 1-1) = (0\;0\;0) \quad (V)$$

Sia f un potenziale di F. Allora $\nabla f(x\,y\,z) = F(x\,y\,z) = (y+z, x+z, x+y)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x\,y\,z) = y + z & (1) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x\,y\,z) = x + z & (2) \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(x\,y\,z) = x + y & (3) \end{cases}$$



Se F è conservativo allora detto f un potenziale si ha che

$$\int_\gamma F \cdot dP = f\left(\gamma\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right) - f(\gamma(0)) =$$

$$= f(0,2) - f(2,0)$$

$\eta(t) = (2-2t,\ 2t)$
$0 \leq t \leq 1$

NB. $\cosh s = \dfrac{e^s + e^{-s}}{2}$

$\operatorname{senh} s = \dfrac{e^s - e^{-s}}{2}$

$F \in C^1$

$dom(F) = \mathbb{R}^2 \rightarrow$ sem. connesso OK

$F(f_1, f_2) \Rightarrow \begin{cases} f_1(x,y) = 2\cosh(2x+y) \\ f_2(x\,y) = \cosh(2x+y) \end{cases}$

F è conserv.

$\dfrac{\partial f_1}{\partial y}(x\,y) = 2\operatorname{senh}(2x+y)$
$\|$
$\dfrac{\partial f_2}{\partial x}(x\,y) = 2\operatorname{senh}(2x+y)$ $\Rightarrow$ OK

Sia f un potenziale di F allora:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x\,y) = 2\cosh(2x+y) & (2) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x\,y) = \cosh(2x+y) & (1)\ (+\text{ facile}) \end{cases}$$

$$f(xy) = \int \frac{\partial f}{\partial y}(xy) = \int \cosh(2x+y)\,dy = \operatorname{senh}(2x+y) + K(x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(xy) = 2\cosh(2x+y) + K'(x) = 2\cosh(2x+y)$$

$\Rightarrow K'(x) = 0 \Rightarrow K(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f(xy) = \operatorname{senh}(2x+y) + c$, $c \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ VERIFICO!! $F(xy) = (2\cosh(2x+y), \cosh(2x+y))$

$\int_\gamma F \cdot dP = f(0,2) - f(2,0) = \operatorname{senh}(2) - \operatorname{senh}(4)$ $\|$ $\int_\eta F \cdot dP$ come verifico

prendo f con $c=0$

LEZIONE 05/12/2011

CRITERI di CONVERGENZE PER LE SERIE A TERMINI POSITIVI

$\sum a_n \qquad a_n \geq 0$ TERMINI TUTTI POSITIVI

TEO Sia (a_n) una successione tale che $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
Allora la serie $\sum a_n$ converge o diverge positivamente a seconda che la successione delle somme parziali della serie sia limitata o illimitata.

non ci sono ALTRE POSSIBILITÀ

DIM $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$

$S_{n+1} = S_n + \underbrace{a_{n+1}}_{\geq 0 \text{ x IPOTESI}} \geq S_n + 0 = S_n \quad \forall n \geq 0$

$\Downarrow S_{n+1} \geq S_n$

Quindi (S_n) è crescente $\Rightarrow \exists \lim_n S_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} S_n = \begin{cases} ① \\ ② \end{cases}$

$= \begin{cases} S \in \mathbb{R} & \text{se } (S_n) \text{ è limitata} \Rightarrow \sum a_n \text{ converge} \\ +\infty & \text{se } (S_n) \text{ è illimitata} \Rightarrow \sum a_n \text{ diverge positi.} \end{cases}$

c.v.d ■

OSS TEO + CN $\Rightarrow \sum a_n$ diverge positivamente

$\left.\begin{array}{l} a_n \geq 0 \\ \lim_n a_n \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \sum a_n$ diverge positivamente

$\lim_n a_n \neq 0$ ⟶ SIGNIFICA CHE $\begin{cases} \bullet \lim_n a_n = \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\},\ \ell \neq 0 \\ \bullet \text{ che } \lim_n a_n \nexists \end{cases}$

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

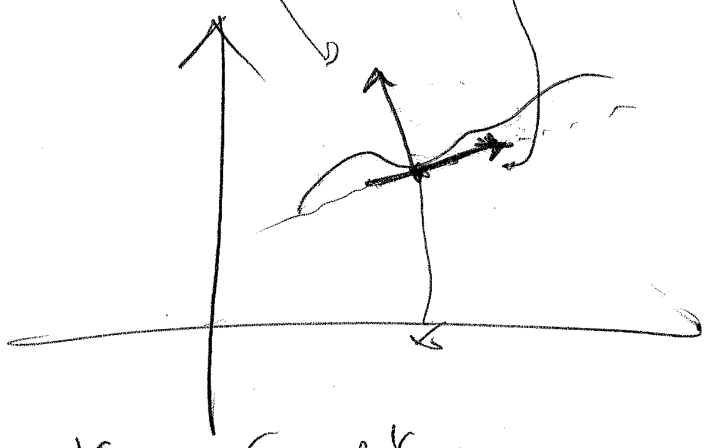
$$f'(x_0)(x - x_0) - 1(y - f(x_0)) = 0$$

$$(f'(x_0), -1) \perp \text{retta tangente}$$

$$(f'(x_0), -1) \perp (1, f'(x_0))$$

vettore tangente

$$\gamma(x) = (x, f(x))$$



$$\gamma'(x_0) = (x_0, f'(x_0))$$

Per il criterio del confronto $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge e

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ converge e } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \underbrace{\frac{1}{1^2}}_{n=1} =$$

$$= \left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right) + 1 \leq 1 + 1 = 2$$

converge a 1

con Fourier $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

ES

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (SERIE ARMONICA) (ii)

(è DIVERGENTE)

≥ 0

$\to 0$ se $n \to +\infty$ CN ok! $\to$ CONV. ? $\to$ DIV. POS.

Si ha che $\forall n \geq 1$

$$0 \leq \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$$

negli es. precedenti avevo visto che divergeva

se dimostro qsta disuguaglianza ho dimostrato che $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge

Infatti, si ha $\log\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \leq 0$ $\forall n \geq 1$

$\frac{1}{n} = x$

$f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \log(1+x) - x$

f è derivabile $\forall x \geq 0$

derivo

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{1 - 1 - x}{1+x} = -\frac{x}{1+x}$$

xché $x \geq 0$

$\leq 0 \to$ derivata è negativa

$\Rightarrow f$ è decrescente su $[0, +\infty)$

$\Rightarrow \forall x \geq 0$ $\quad f(x) \leq f(0)$ $\quad$ cioè $\log(1+x) - x \leq 0$

OSS. Mancano 2 casi:

1) $a_n, b_n \geq 0$
$a_n = o(b_n)$ $n \to +\infty$
$\sum b_n$ diverge
$\Rightarrow \sum a_n$?

2) $a_n, b_n \geq 0$
$a_n = o(b_n)$ $n \to +\infty$
$\sum a_n$ converge
$\Rightarrow \sum b_n$?

ES carattere serie?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - n + 1}$$

serie a termini positivi
lim $n \to +\infty$ $\Rightarrow$ CN ok $\Rightarrow$ non so nulla

- CONFRONTO

assomiglia alla serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

$$n^2 - n + 1 \leq n^2 \quad \forall n \geq 1$$

$$\frac{1}{n^2 - n + 1} \geq \frac{1}{n^2}$$

? non ho risolto nulla in questo caso

- CONFRONTO ASINTOTICO

$$\frac{1}{n^2 - n + 1} \sim \frac{1}{n^2} \quad n \to +\infty$$

$\sum \frac{1}{n^2}$ converge $\Rightarrow$ per teo conf as. 1 prop.
anche la serie $\sum \frac{1}{n^2-n+1}$ converge!

Oss

1) Se $\ell = 1$ non si può concludere nulla

ES $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2} \geq 0$

lim .... non lo faccio x ora

CON COF. ASINTOTICO DOVREI...

$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2} = e^{\log\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = e^{n^2 \log\left(1-\frac{1}{n}\right)} \sim ??$

BO! CAMBIO METODO!

- CRITERIO DELLA RADICE

$a_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2 = n n}$

$\lim_n \sqrt[n]{a_n} = \lim_n \sqrt[n]{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}} =$

$\lim \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

$= \lim_n \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \lim_n \left(1+\frac{-1}{n}\right)^n = e^{-1} = \frac{1}{e} < 1$

Per teo. della radice $\Rightarrow \sum a_n$ converge!

~~SI POTEVA FARE ANCHE SVILUPP. COME ASINTOTICO~~

$n^2 \log\left(1-\frac{1}{n}\right) \sim \left(-\frac{1}{n}\right) n^2 = -n \quad n \to +\infty$

$\sim n^2\left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}\right) = -n - \frac{1}{2}$

$n \to +\infty$

$\Rightarrow e^{n^2 \log\left(1-\frac{1}{n}\right)} \sim e^{-n-\frac{1}{2}} \quad n \to +\infty$

ES $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \geq 0$

- CRITERIO DELLA RADICE

$\lim_n \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e > 1$

Per cr. della Radice $\sum \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ diverge

OSSERVO CHE NON VALEVA LA CN! $\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} = \lim_n \left[\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{e}\right]^n = +\infty \neq 0$

$$\lim_{n} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1$$

PER CRITERIO del RAPPORTO $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ CONVERGE!

ES

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n!}}_{\substack{>0 \\ \text{vale la cn}}}$$

- CRITERIO del RAPPORTO

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{\cancel{n!}}{(n+1)\cancel{n!}} = \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n} \frac{1}{n+1} = 0 < 1 \Rightarrow \times \text{ CR. RAPP } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \text{ CONVERGE!}$$

Mclaurin $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$

TEO Sia (a_n) una successione tale che $a_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Se $\lim_{n} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$ ALLORA $\lim_{n} \sqrt[n]{a_n} = \ell$

OSS $\lim_{n} \frac{a_{n+1}}{a_n} \not\Leftarrow\!\!\Rightarrow \lim_{n} \sqrt[n]{a_n} = 1$

(se non funziona il TEO della RADICE $\Rightarrow$ (non funziona TEO del RAPPORTO XCHÈ SE FUNZIONA o il lim $\exists$ o vale 1))

$$\lim_{n} \sqrt[n]{a_n} = 1 \Rightarrow \lim_{n} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \to 1 \\ \to \nexists \end{cases}$$

IL TEOREMA del RAPPORTO È PIÙ FORTE DI QUELLO DELLA RADICE

CRITERI PER LE SERIE A TERMINI DI SEGNO VARIABILE

TEO della CONVERGENZA ASSOLUTA

Sia (a_n) una successione reale se la sua $\sum a_n$ converge assolutamente, allora $\sum a_n$ converge e si ha che

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right| \le \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|}_{\text{è una serie a termini positivi}}$$

QSTO TEO NEL CASO di SERIE A TERMINI POSITIVI VALE MA È STATO TRASCURATO XCHÈ BANALE IN QUEL CASO

DIM

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(|a_n| + a_n\right) \quad \text{serie a termini positivi}$$

$$|a_n| \le |a_n| \Leftrightarrow -|a_n| \le a_n \le |a_n|$$

se sommo $|a_n|$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{0 \le |a_n| + a_n \le 2|a_n|}$$

Se la serie di $\sum a_n$ conver. assolutamente allora $\sum |a_n|$ converge $\Rightarrow \sum 2|a_n|$ converge. Per il teo del cri. d. conf.

$\underline{\sum \left(|a_n| + a_n\right) \text{ converge}}$

Si ha che $a_n = \left(|a_n| + a_n\right) - |a_n|$.

$$\begin{cases} -|a_n| \to \text{conv.} \\ |a_n| + a_n \to \text{conv} \end{cases}$$

la somma di 2 serie che convergono converge

Per algebra delle serie $\sum a_n$ converge.

Sia $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ e $\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} |a_k|$

- Per la disuguaglianza triangolare del valore assoluto si ha che $|S_n| = \left|\sum_{k=0}^{n} a_k\right| \le \sum_{k=0}^{n} |a_k| = \sigma_n$

disuguaglianza triangolare del valore assoluto

$$|x+y| \le |x| + |y|$$

$$|S_n| \le \sigma_n$$

LEZIONE 12/12/2011

SERIE A TERMINI DI SEGNO ALTERNO

DEF Diciamo che una serie è A TERMINI di SEGNO ALTERNO se è della forma $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n$ con $b_n \geq 0$

↳ I TERMINI CAMBIANO SEGNO IN MODO ALTERNO

→ LO USO SE LA SERIE NON CONV. ASSOLUTAMENTE

TEO (CRITERIO di LEIBNIZ)

Sia (b_n) una successione tale che $b_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$. Supponiamo che

1) $\lim_n b_n = 0$

2) (b_n) sia decrescente ↘

⇒ Allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$ converge e posto $S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k b_k$ e $S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$ si ha che $\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq 1$

$$S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n} \qquad e \qquad |S_n - S| \leq b_{n+1}$$

S_{2n+1}: somma di indice DISPARI; S_{2n}: somma di indice PARI

$$S_n + b_{n+1} \leq S \leq S_n + b_{n+1}$$

(Serie armonica a termini di segno alterno)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n}\right)$$

↳ $b_n = \frac{1}{n} \geq 0 \quad \forall n$

È A TERMINI di SEGNO ALTERNO ⇒ È A TERMINI di SEGNO VARIABILE

mi chiedo se la serie CONV. ASSOLUTAMENTE?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{DIVERGE}$$

↳ non conv. ASSOLUTAMENTE ⇒ non conc. nulla!

POSSO APPLICARE LEIBNIZ?

1) $\lim_n b_n = 0$? $\lim_n \frac{1}{n} = 0$ SI!

2) (b_n) è decrescente? cioè $\forall n \geq 1 \quad b_{n+1} \leq b_n$?

HO 2 CRITERI: CONV. ASSO e LEIBNIZ.

CONV. ASSOLUTA:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \left(\frac{1}{n} - \frac{(-1)^n}{n^2} \right) \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{(-1)^n}{n^2} \right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n (b_n) \right|$$

SERIE A TERMINI POSITIVI
HO 5 CRITERI POSSIBILI!

COND. NECESSARIA

$$\lim_{n} \left(\frac{1}{n} - \frac{(-1)^n}{n^2} \right) = 0$$

SE ERA $\neq$ NON CONVERGEVA

$\rightarrow$ VERIFICATA $\rightarrow$ $=0$ NON POSSO DIRE NULLA
1° IP. LEIB. OK.
$\rightarrow$ NON HO CONCLUSO NULLA

PROVO CON CONF. ASINTOTICO

$$\frac{1}{n} - \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n} \quad n \to +\infty$$

$\frac{1}{n}$ $\rightarrow$ DIVERGE

$\frac{(-1)^n}{n^2}$: $o\left(\frac{1}{n}\right)$ $n \to +\infty$

$$\frac{(-1)^n}{n^2} : \left(\frac{1}{n}\right) = \frac{(-1)^n}{n^2} \cdot n = \frac{(-1)^n}{n}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$$

$(-1)^n$ limitata $\cdot$ $\frac{1}{n}$ TENDE A ZERO $=0$

$$\sum \frac{1}{n} \text{ diverge} \rightarrow \sum \left(\frac{1}{n} - \frac{(-1)^n}{n^2} \right) \text{ div.}$$

$$\Rightarrow \sum (-1)^n \left(\frac{1}{n} - \frac{(-1)^n}{n^2} \right)$$ NON CONV. ASSOLUTAMENTE

$\rightarrow$ NON POSSO DIRE ANCORA SE CONV. O NON CONV.

PROVO CON LEIBNIZ

$$b_n = \frac{1}{n} - \frac{(-1)^n}{n^2}$$

VERIFICO LE IPOTESI:

(1) $\rightarrow$ OK $\lim_{n} \left(\frac{1}{n} - \frac{(-1)^n}{n^2} \right) = 0$

(2) (b_n) è decrescente? cioè $b_{n+1} \leq b_n \quad \forall n \geq 1$?

PER L'AL. SERIE

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n}-\frac{1}{n^2}\right] \text{ CONVERGE A}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\boxed{-\log 2-\frac{\pi^2}{6}}$$

PRODOTTO DI SERIE

- X le serie non vale la proprietà commutativa!!

DEF Siano $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ due serie. Si chiama PRODOTTO DI CAUCHY delle serie di a_n e b_n la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ dove $c_n=\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

(x es. QUANDO FAI IL PRODOTTO DI 2 POLINOMI MOLTIPLICO MEMBRO A MEMBRO)

$$(a_0+a_1+a_2+\dots+a_n+\quad)(b_1+b_2+\dots b_n+\quad)=$$

$$=\underbrace{a_0b_0}_{c_0}+\underbrace{a_0b_1}_{c_1}+\underbrace{a_0b_2}_{c_2}+\dots+\underbrace{a_0b_n}_{c_n}+\dots$$

$$+a_1b_0+a_1b_1+a_1b_2+\dots+a_1b_n+\dots$$

$$+a_2b_0+a_2b_1+a_2b_2+\dots+a_2b_n+\dots$$

$$\vdots$$

$$+a_nb_0+a_nb_1+a_nb_2+\dots+a_nb_n\dots$$

$$\vdots$$

Poiché non vale la prop. commutativa

$\Downarrow$

TEO (di MERTENS)

Siano $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ due serie convergenti rispettivamente a A e B

Supponiamo che almeno una delle due converga assolutamente

Allora il prodotto di Cauchy delle seri di a_n e b_n converge a AB

cioè posto $\boxed{c_n=\sum_{k=0}^{n} a_k\cdot b_{n-k}}$ si ha che $\sum_{n=0}^{\infty} c_n=\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$

(se una serie è a termini positivi e converge $\Rightarrow$ conv. anche assolut.)

$\Rightarrow |c_n| \geq 1 \Rightarrow \lim_n c_n \neq 0 \Rightarrow$ non vale la C.N.

$\Rightarrow \sum c_n$ non converge!!

SERIE COMPLESSE

DEF Sia (z_n) una successione in $\mathbb{C}$ si chiamano serie di z_n la scrittura formale $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$. Posto $S_0 = z_0$

$\forall n \geq 1 \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} z_k$; diciamo che $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ converge se

$\lim_n S_n = S \in \mathbb{C}$ e in tal caso S è detta somma della serie di z_n e si può dire $\sum_{n=0}^{\infty} z_n = S$

Diciamo che $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ non converge se $\nexists \lim_n S_n$

Diciamo che $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ converge assolutamente se converge $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$

OSS Sappiamo che $\forall z \in \mathbb{C}$

1) $z = Re(z) + i Im(z)$ $\qquad \left.\begin{matrix} Re(z) \\ Im(z) \end{matrix}\right\} \in \mathbb{R}$

2) $|z| \leq |Re(z)| + |Im(z)|$;

3) $|Re(z)| \leq |z|$

$|Im(z)| \leq |z|$

Si ha che

(1) $\Rightarrow \sum z_n$ converge a $S \in \mathbb{C}$ se e solo se $\sum Re(z_n)$ e $\sum Im(z_n)$ convergono rispettivamente a $Re(S)$ e $Im(S)$

(2) + (3) + Algebra delle serie + crit. del conf.) $=$ $\rightarrow$ scomponiamo in 2 serie che so fare

$\sum z_n$ conv. ass se e solo se $\sum Re(z_n)$ e $\sum Im(z_n)$ convergono entrambe assolutamente

DEF Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ non vuoto, (f_n) una successione di funzioni $\boxed{\text{limitate}}$ da Ω in $\mathbb{R}$ e $f: \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione.

Diciamo che (f_n) converge uniformemente a f in Ω se

$$\lim_{n \to +\infty} \| f_n - f \|_\infty = 0 \quad , \text{dove} \quad \| f_n - f \|_\infty = \sup_{x \in \Omega} |f_n(x) - f(x)|$$

non dipende da x ◁— NORMA DEL SUP. / NORMA DELL'INFINITO

OSS $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ compatto non vuoto $g: \Omega \to \mathbb{R}$ continua $\Rightarrow$

$\Rightarrow |g|: \Omega \to \mathbb{R}$ continua $\Rightarrow$ TEOR. WEIERSTRASS $|g|$ ammette massimo su Ω. In tal caso $\underbrace{\|g\|_\infty}_{\text{norma infinito di } g} = \sup_{x \in \Omega} |g(x)| = \max_{x \in \Omega} |g(x)|$

una funzione continua su un intervallo chiuso e limitato se il sup esiste coincide con il max della f

OSS $\lim_n f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in \Omega$

$\Rightarrow \forall x \in \Omega \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \; n_0 = n_0(x, \varepsilon) \in \mathbb{N}$ tale che

n dipende da x e ε — se cambio x cambio n_0 — diff *

$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0$ si ha che $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

(se f_n tende a f uniformemente in Ω)

$f_n \to f$ uniformemente in $\Omega \overset{\text{cioè}}{\Rightarrow}$

dalla def di con. unif

$\hookrightarrow \lim_n \| f_n - f \|_\infty = 0 \overset{\text{cioè}}{\Rightarrow} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \; n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ — n_0 non dipende più da x !!

tale che $\forall n \in \mathbb{N}$ con $n \geq n_0$ si ha

$$\| f_n - f \|_\infty \leq \varepsilon \quad \text{cioè} \quad \sup_{x \in \Omega} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

$\Rightarrow$ x definizione di ESTREMO SUPERIORE $\Rightarrow \varepsilon$ è un maggiorante

$\Rightarrow \forall x \in \Omega \qquad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$

differenze tra le 2 def. *

Quindi $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \; n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n \in \mathbb{N}$ con — VALE PER TUTTI GLI x !!

$n \geq n_0 \quad \forall x \in \Omega$ si ha che $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$

*

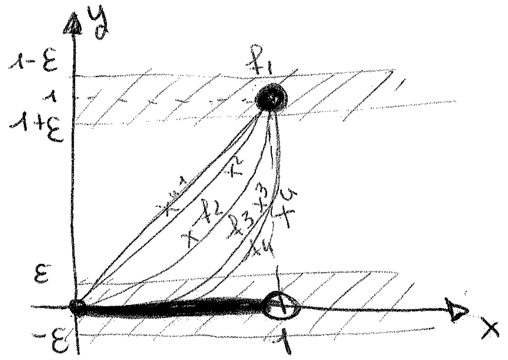
$\Rightarrow$ deduco che $-\varepsilon \leq f_n(x) - f(x) \leq \varepsilon \to f(x) - \varepsilon \leq f_n(x) \leq f(x) + \varepsilon$

$$\underbrace{\sup_{x\in\Omega} |f_n(x) - f(x)|}_{\|} = 1$$

$\Rightarrow \|f_n - f\|_\infty = 1$

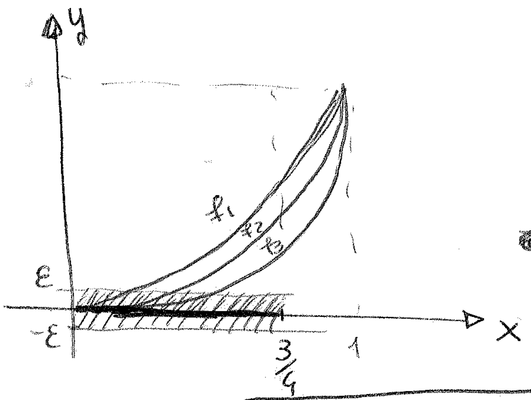
$\Rightarrow \lim_n \|f_n - f\|_\infty = \lim_n 1 = 1 \neq 0 \Rightarrow (f_n)$ non converge unif. a f

GRAFICAMENTE



$f(x)$ → non è vero che da un certo punto in poi le $f(x)$ sono tutte comprese tra $f(x)-\varepsilon$ e $f(x)+\varepsilon$

Se x es consideriamo $f_n(x) = x^n$ su $[0, \frac{3}{4}]$



$f(x) = 0 \ \forall x \in [0, \frac{3}{4}]$

in questo caso conv. uniformemente

PROP (legame fra convergenza uniforme e puntuale) $\boxed{\text{CONV UNIFORME} \Rightarrow \text{CONV. PUNTUALE}}$

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ non vuoto, (f_n) una successione di funzioni limitate da Ω in $\mathbb{R}$ e $f: \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione.
Se (f_n) converge uniformemente a f in Ω allora (f_n) converge puntualmente a f in Ω.

DIM Proviamo che $\lim_n |f_n(x) - f(x)| = 0 \quad \forall x \in \Omega$

uso il teo dei 2 carabinieri

Sia $x \in \Omega$ (x fissato)

Supponiamo che:

1) (f_n) converg. puntualmente su I a $f: I \to \mathbb{R}$;

2) (f_n') conv. uniformemente su ogni sottointervallo chiuso e limitato di I a g.

$\Rightarrow$ Allora f è di classe C^1 su I e $\forall x \in I$

$\boxed{f'(x) = g(x)}$, cioè

g è il limite della $f_n'(x)$

$$\boxed{D\Big(\underbrace{\lim_n f_n}_{f(x)}\Big) = \lim_n \,(Df_n)(x)} \quad \forall x \in I$$

derivata

$\Downarrow$

la derivata del limite è = al limite delle derivate

Lezione 15-12-2011 (ESERCITAZIONE)

SERIE NUMERICHE

SCHEMA

1. CATALOGARE TIPO DI SERIE
   - TER. POS (A)
   - TER. NEG. (B)
   - TER. SEG. VARI
     - ALTERNO (C)
     - NON ALTERNO (D)

2. CN la verifico se è facile

$\sum a_n$ conv $\Rightarrow$ $a_n \to 0$ $\to$ non posso dire nulla

$\boxed{a_n \not\to 0 \Rightarrow \sum a_n \text{ non converge}}$ $\to$ UTILE

(A) CRITERI:

1. CONFRONTO $\quad 0 < a_n < b_n$

$\sum b_n$ conv $\Rightarrow$ $\sum a_n$ conv

$\sum a_n$ div $\Rightarrow$ $\sum b_n$ div

ESEMPI

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$ (1) CHE SERIE È?

$a_n = \frac{n}{(n+1)!} \geq 0$

$\sum$ termini positivi $\Rightarrow$ CONV. O DIV. POSITIVAMENTE

(FATTORIALE) $\Rightarrow$ (PROVO CON RAPPORTO)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{n+1}{(n+2)!}}{\frac{n}{(n+1)!}} = \frac{n+1}{(n+2)!} \cdot \frac{(n+1)!}{n} = \frac{n+1}{(n+2)\cancel{(n+1)!}} \frac{\cancel{(n+1)!}}{n} = \frac{n+1}{n(n+2)}$$

$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_n \frac{n+1}{n(n+2)} = 0 < 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ converge!}$$

LA SERIE CONVERGE!!

(2) A COSA CONVERGE? LA PORTO A UNA SERIE TELESCOPICA

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1-1}{(n+1)!} = \sum_{n=1} \left[\frac{n+1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+1)!}\right] =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}\right]$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right] =$$

$$= 1 - \cancel{\frac{1}{2!}} + \cancel{\frac{1}{2!}} - \frac{4}{3!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \dots + \cancel{\frac{1}{n!}} - \frac{1}{(n+1)!} =$$

$$= 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

$$\lim_n S_n = \lim_n \left(1 - \frac{1}{(n+1)!}\right) = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} = 1$$

LA SERIE CONVERGE A 1!

$$S_n = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+3} \right) =$$

non è TELESCOPICA

4 termini $n > 3$

PROVO CON I PRIMI 4 E ULTIMI 4 TERMINI

$$= \frac{1}{3} \left(1 - \cancel{\frac{1}{4}} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \cancel{\frac{1}{4}} - \frac{1}{7} + \dots \right.$$

$$\left. \dots + \underbrace{\frac{1}{n-3} - \cancel{\frac{1}{n}}}_{n-3} \underbrace{- \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n+1}}_{n-2} \underbrace{+ \boxed{\frac{1}{n-1}} - \frac{1}{n+2}}_{n-1} \underbrace{+ \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+3}}_{n} \right) =$$

$$= \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right)$$

$$\lim_{n} S_n = \frac{11}{18}$$

3) Determinare x quali valori $x \in \mathbb{R}$ converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{2x+3} \right)^n$$

Serie geometrica di Mengoli

$$\frac{x}{2x+3}$$

Conver. se e solo se $\left| \frac{x}{2x+3} \right| < 1$

$$\begin{cases} \frac{x}{2x+3} < 1 \\ \frac{x}{2x+3} > -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{x}{2x+3} - 1 < 0 \\ \frac{x}{2x+3} + 1 > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{x - 2x - 3}{2x+3} < 0 \\ \frac{x + 2x + 3}{2x+3} > 0 \end{cases}$$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n^3+n^2-1}$

$a_n = \frac{2n-1}{n^3+n^2-1} > 0$

$\sum a_n$ conv. o div. pos

$\lim_n a_n = 0 \rightarrow$ VALE C.N

$a_n = \frac{2n-1}{n^3+n^2-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2\cancel{n}}{n^{\cancel{3}}} = \frac{2}{n^2}$

$\sum \frac{1}{n^2}$ conv $\underset{\text{Algebrico}}{\Rightarrow} \sum \frac{2}{n^2}$ conv.

X CRIT. CONF. AS. $\Rightarrow \sum a_n$ conv.

5) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{10^{15}}{2n-1}$

$a_n = \frac{10^{15}}{2n-1} > 0 \quad \forall n \geq 1 \Rightarrow \sum a_n$ con. o div. pos

$\lim_n a_n = 0 \rightarrow$ VALE C.N

$a_n = \frac{10^{15}}{2n-1} \sim \frac{10^{15}}{2n} = \frac{10^{15}}{2} \cdot \frac{1}{n} \quad n \to +\infty$

$\sum \frac{1}{n}$ div. $\overset{\text{Algeb.}}{\Rightarrow} \sum \frac{10^{15}}{2n}$ div C.C.A $\Rightarrow \sum a_n$ div.

$p=1 \Rightarrow \frac{1}{n} = o\left(\frac{1}{\log n}\right)$ $n \to +\infty$

↳ xchè $n^0 \frac{1}{\log n^1}$

$\Rightarrow \sum \frac{1}{n}$ div $\Rightarrow \sum \frac{1}{\log n}$ div

x criterio conf. asintotico

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log(n)+1)}$$

$a_n = \frac{1}{n(\log n+1)} > 0 \Rightarrow \sum a_n$ con. o div.

$a_n \to 0 \to$ $\boxed{\text{VALE CN}}$

$a_n = \frac{1}{n(\log n+1)} = \frac{1}{n\log n + n} \sim \frac{1}{n\log n}$

infinito di grado maggiore

$\log n = o(n^p)$ $n \to +\infty$ $\forall p>0$

$\Downarrow$

$\boxed{\frac{1}{n^p} = o\left(\frac{1}{\log n}\right)}$ $n \to +\infty$ $\forall p>0$

$\frac{1}{n\, n^p} = \frac{1}{n}\, o\left(\frac{1}{\log n}\right)$ $n \to +\infty$ $\forall p>0$

$\underbrace{\frac{1}{n^{p+1}}}_{a_n} = o\left(\underbrace{\frac{1}{n\log n}}_{b_n}\right)$ $n \to +\infty$ $\forall p>0$

$\sum \frac{1}{n^{p+1}}$ $p+1>1$ conv. $\Rightarrow$ è STATO TUTTO INUTILE

x conf. asint. non posso dire nulla mi serviva che fosse divergente

$$\lim_n \sqrt[n]{a_n} = \lim_n \sqrt[n]{6^n\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n^3}} = \lim_n 6 \underbrace{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}_{\frac{1}{e}} = \frac{6}{e} > 1$$

$\Rightarrow \sum a_n$ diverge! x CRIT. RADICE ↳ infatti non volve la C.N

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^{2n}}$$

$a_n = \dfrac{(2n)!}{n^{2n}} > 0$ conv. o div

CRIT. RAPPORTO ⇐ ((2n)!)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)^{(2n+2)}} : \left(\frac{(2n)!}{n^{2n}}\right) = \frac{(2n+2)!}{(n+1)^{2n+2}} \cdot \frac{n^{2n}}{(2n)!} =$$

$$= \frac{\overset{2}{\cancel{(2n+2)}}(2n+1)\cancel{(2n)!}}{(n+1)^{2n}(n+1)^{\cancel{2}}} \cdot \frac{n^{2n}}{\cancel{(2n)!}} = \frac{4n+2}{n+1} \cdot \frac{n^{2n}}{(n+1)^{2n}} =$$

$$= \underbrace{\frac{4n+2}{n+1}}_{\to 4} \cdot \underbrace{\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}}}_{\frac{1}{e^2}}$$

limite notevole $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

PER → $n \to +\infty$ $\boxed{4\frac{1}{e^2}} < 1$ $\sum a_n$ conv. x CRITERIO del RAPPORTO [redacted] $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^n}{2^{n!}}$$

$a_n = \dfrac{(n!)^n}{2^{n!}} > 0 \Rightarrow \sum a_n$ conv o div.

la cn non è FACILE!

CRIT. RAPPORTO:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{[(n+1)!]^{(n+1)}}{2^{(n+1)!}} \cdot \frac{2^{n!}}{(n!)^n} = \frac{(n+1)^{(n+1)} \cdot \cancel{(n!)}^{(n+1)} \cdot 2^{n!}}{2^{(n+1)n!} \; \cancel{(n!)^n}} =$$

(above the struck term: $n!$)

$$= \frac{(n+1)^{n+1}\, n!}{2^{n \cdot n!}}$$ APPARE COMPLICATO $\Rightarrow$ PROVO CON LA RADICE

dividendo num. e den per n

$$\lim_n \sqrt[n]{a_n} = \lim_n \sqrt[n]{\frac{(n!)^n}{2^{n!}}} = \lim_n \frac{n!}{2^{\frac{n!}{n}}} = \lim_n \frac{n!}{2^{(n-1)!}}$$ DIFFICILE CONV.

$$\frac{n!}{n} = \frac{\cancel{n}(n-1)!}{\cancel{n}}$$

$\exists$ QSTA PROP: $b_n \geq 0$ e $\exists \lim_n \dfrac{b_{n+1}}{b_n} = \ell$ (OPPURE $\exists \lim_n \sqrt[n]{b_n} = \ell$)

se $\ell < 1 \Rightarrow \lim_n b_n = 0$

se $\ell > 1 \Rightarrow \lim_n b_n = +\infty$

$$b_n = \frac{n!}{2^{(n-1)!}} \qquad \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n+1)!}{2^{n!}} \cdot \frac{2^{(n-1)!}}{n!} = \frac{(n+1)}{2^{n! - (n-1)!}} = \frac{(n-1)}{2^{(n-1)!(n-1)}}$$

$n! = n(n-1)!$

14 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n}{n^{3/2}}$

$a_n = \dfrac{\overbrace{\operatorname{sen} n}^{\text{limitato}}}{n^{3/2}}$ $\Rightarrow$ TERM. SEGNO VARIABILE ma non ALTERNO!

$n^{3/2} \to 0$

↳ CRI. CONV. ASSOLUTA

Vale la CN xché $\lim_n$ limitato · $f \to 0$ $= 0$

<u>CONV. ASSOL?</u>

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\operatorname{sen} n}{n^{3/2}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\operatorname{sen} n|}{n^{3/2}} \geq 0 \quad \rightarrow \text{TER. POSITIVI}$$

$\boxed{\lim \operatorname{sen} n \ \nexists \Rightarrow \text{SCARTO CONF. ASIN.}}$

So che $|\operatorname{sen} n| \leq 1$ $\Rightarrow$ $\dfrac{|\operatorname{sen} n|}{n^{3/2}} \leq \dfrac{1}{n^{3/2}}$ CONFRONTO NORMALE

$$\sum \frac{1}{n^{3/2}} \text{ CONV} \xRightarrow{\text{CRI CONF.}} \sum \frac{|\operatorname{sen} n|}{n^{3/2}} \text{ CONV} \xRightarrow[\text{CON. ASSOLUTA}]{} \underline{\sum a_n \text{ CONVERGE}}$$

$\frac{3}{2} > 1$

18 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \log n}$ — b_n

$a_n = \dfrac{(-1)^n}{n - \log n}$ (è A TERMINI di segno variabile ALTERNO

Se è di segno costante è A TER. VAR. ALTERNATO

Poiché $n > \log n \Rightarrow n - \log n > 0$ sempre

<u>CONV. ASSO?</u>

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n \frac{1}{n - \log n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n - \log n} > 0 \text{ OVVIAMENTE}$$

→ NO VALE LA CN.

X CRIT. di LEIBNIZ $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\underbrace{n \cdot \log n}_{b_n}}}$ CONVERGE!!

---

16) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos(n\pi)}{2n^2 - 1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{2n^2-1}$

$\cos(n\pi)$ → n PARI = 1, n DISPARI = -1 $\Rightarrow \cos(n\pi) = (-1)^n$

$a_n = (-1)^n \underbrace{\frac{n}{2n^2-1}}_{b_n}$ È A TER. VARIA di segno alterno

$\boxed{\text{VALE LA C.N.}}$ $\lim_n a_n \to 0$

CONV. ASSO.?

$\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n \frac{n}{2^n-1}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n^2-1}$ diverge xchè è la serie ARMONICA

$\frac{n}{2n^2-1} \sim \frac{1}{2n^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n}$

$\left(\sum \frac{1}{n} \text{ div} \to \sum \frac{1}{2}\frac{1}{n} \text{ div} \right) \Rightarrow \sum a_n$ non conv. ASS.

↳ non posso dire se converge

PROVO CON LEIBNIZ

$b_n = \frac{n}{2n^2-1} > 0$

1) $\lim_n b_n = 0$ ok

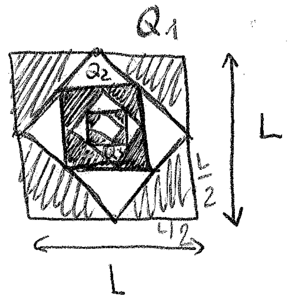
2) b_n è dec.? $\Rightarrow b_{n+1} \leq b_n \quad \forall n \geq 1$

SFRUTTO la f(x) ASS. $f(x) = \frac{x}{2x^2-1} \quad \forall x \in [1, +\infty)$

f(x) dec. $\Leftarrow f'(x) = \frac{2x^2-1-4x^2}{(2x^2-1)^2} = -\frac{2x^2+1}{(2x^2-1)^2} < 0$

||

bn è dec. ⇒ x LEIB $\sum (-1)^n b_n$ CONVERGE!



A_1 area di Q_1
A_2 area di Q_2
A_3 area di Q_3
⋮
A_n area Q_n
$Q = Q_1 \cup Q_2 \cup Q_n \ldots$

$$\boxed{A = \frac{2}{3} L^2}$$

A = area di Q

Calcolare l'area

$$A = A_1 + A_2 + A_3 \ldots + A_n = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \qquad A_n = ?$$

$$\left(\frac{L}{2}\right)^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 = (L')^2$$

$$L' = \sqrt{\frac{L^2}{4} + \frac{L^2}{4}} = \sqrt{\frac{\cancel{2} L^2}{\cancel{4} 2}} = \frac{L'}{\sqrt{2}}$$

$$A = L^2 - \frac{L}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} L^2 - L}{\sqrt{2}} = \frac{L(\sqrt{2} - L)}{\sqrt{2}}$$

cioè se $\lim_{n\to+\infty} \|S_n - f\|_\infty = 0$,

dove $\|S_n - f\|_\infty = \sup_{x\in\Omega} |S_n(x) - f(x)|$.

Diciamo che la serie $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)}$ converge totalmente / o normalmente in Ω se la serie $\boxed{\sum_{m=0}^{\infty} \|f_m\|_\infty}$ converge in $\mathbb{R}$,

↳ serie numerica a termini positivi che so gestire

dove $\boxed{\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in\Omega} |f_m(x)|}$

OSS Se f_n è costante $\forall n$, cioè non dipende da x, allora $\sum_{m=0}^{\infty} f_n$ è una serie numerica

In tal caso
conv. punt $\equiv$ (coincide) conv. uniformemente (i)
conv. ass. $\equiv$ conv. totalmente (ii)

verifico (i) e (ii)

(i) $\sum f_n$ conv. punt ($\forall x\in\mathbb{R}$) $\Leftrightarrow \lim_m S_n = f \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \lim_m |S_n - f| = 0$

x definizione di limite

$\Leftrightarrow \lim_m \|S_n - f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow$ conv. uniformemente $\sum f_n$

(ii) $\sum f_n$ con. asso $\Leftrightarrow \sum \underbrace{|f_n|}_{=\|f_n\|_\infty}$ converge $\Leftrightarrow \sum \|f_n\|_\infty$ converge

$\Leftrightarrow$ conv. totalmente $\sum f_n$

$\Rightarrow$ Ecco xché x le serie numeriche non introduciamo i concett. di con. unif. e conv. tot.

Quindi $\forall x \in \Omega$: DALLA CONV. ASSOLUTA VALE ANCHE $\left| \sum_{n=h}^{\infty} f_n(x) \right| \le \sum_{n=h}^{\infty} |f_n(x)|$

VALE ANCHE SE PARTO da un numero $\neq 0$ $\forall h \in \mathbb{N}$ $h \ge 0$

CONV. UNIFORME SIGNIFICA CHE:

$\lim_n \|S_n - f\|_\infty = 0$ dove $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ $\forall x \in \Omega$

Sia $x \in \Omega$:

CHI è?

$$|S_n(x) - f(x)| = \left| \sum_{k=0}^{n} f_k(x) - \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \right| =$$

$$= \left| -\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| \underset{(*)}{\le} \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \le$$

X LA CONV. ASSOLUTA

PER (*) è come se ho $h = n+1$

$$\le \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k\|_\infty$$

HO OTTENUTO CHE PER OGNI x in Ω $|S_n(x) - f(x)| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k\|_\infty$

è un maggiorante di

non dipende da x!!

VAL. ASS. MAGGI. di 0

$$0 \le \|S_n - f\|_\infty = \sup_{x \in \Omega} |S_n(x) - f(x)| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k\|_\infty$$

$\Downarrow$

0 cvd

devo dim. che tende a ZERO

DIMOSTRO CHE QUESTO TENDE A 0

se lo è $\|S_n - f\|_\infty \to 0$.

DIM (CHE le CODE TENDONO A 0) ANCHE $\|S_n x - f x\|_\infty \to 0$

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k\|_\infty = \lim_n \left(\sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_\infty - \sum_{k=0}^{n} \|f_k\|_\infty \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_\infty - \sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_\infty = 0$$

* $\to$ * quindi prende plo n quindi tende a se stesso

** PER $n \to \infty$

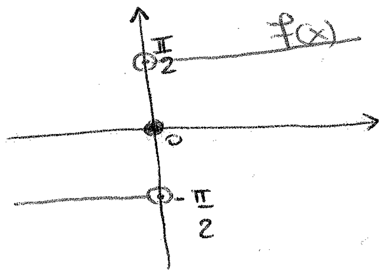
$\square$

$$\lim_{n} S_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \operatorname{arctg}(nx) = \begin{cases} 0 & x=0 \\ \frac{\pi}{2} & x>0 \\ -\frac{\pi}{2} & x<0 \end{cases}$$

Quindi:

La somma della serie è la funzione

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & \text{se } x<0 \\ 0 & \text{se } x=0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } x>0 \end{cases}$$



$$\left.\begin{array}{l} f(x) \text{ è discontinua} \\ f_n \text{ è continua} \end{array}\right\} \Rightarrow \sum f_n(x) \text{ non conv. unif!!}$$

(*)

CASO SPECIALE!!

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} |\underbrace{f_n(x)}_{>0}|}$$

OSS f_n dispari, $f_n(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$

f dispari, $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) & \cancel{\text{se } f_n(x) \geq 0} \ \text{ se } x \geq 0 \\ \sum_{n=1}^{\infty} [-f_n(x)] & \cancel{\text{se } f_n(x) < 0} \ \text{ se } x<0 \end{cases} = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \geq 0 \\ -\sum_{n=1}^{\infty} (f_n(x)) = -f(x) & \end{cases}$$

$$\Rightarrow = -\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \text{ se } x<0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{se } f(x) < 0 \end{cases} = |f(x)|$$

LA SERIE DEI VALORI ASSOLUTI → CONVERGE AL VALORE ASSOLUTO

⇒ CONV. ASS.

$$\sum f_n = f \not\Rightarrow \sum |f_n| = |f|$$

NO (SOPRA È UN CASO MOLTO FORTUNATO)

non è detto che se una serie di funz conv. a una f ie val ass. della serie conv. alla stessa f in val. ass.

TEO (di derivazione termine a termine)

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un <u>intervallo aperto</u> e (f_n) una successione di funzioni di <u>classe</u> C^1 su I.

Supponiamo che:

1) $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ conv. <u>punt.</u> a una funzione f su I;

2) $\sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x)$ conv. <u>uniformemente</u> a una funzione g su ogni sottointervallo chiuso e limitato di I.

serie delle derivate

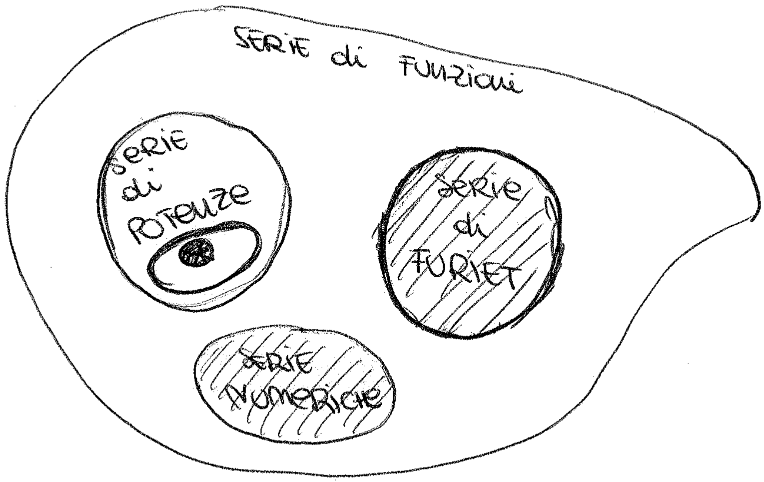
Allora f è di classe C^1 su I e $\forall x \in I$ si ha che

$$f'(x) = g(x) \quad \text{cioè} \quad D\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n\right)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (D f_n)(x) \quad \forall x \in I$$

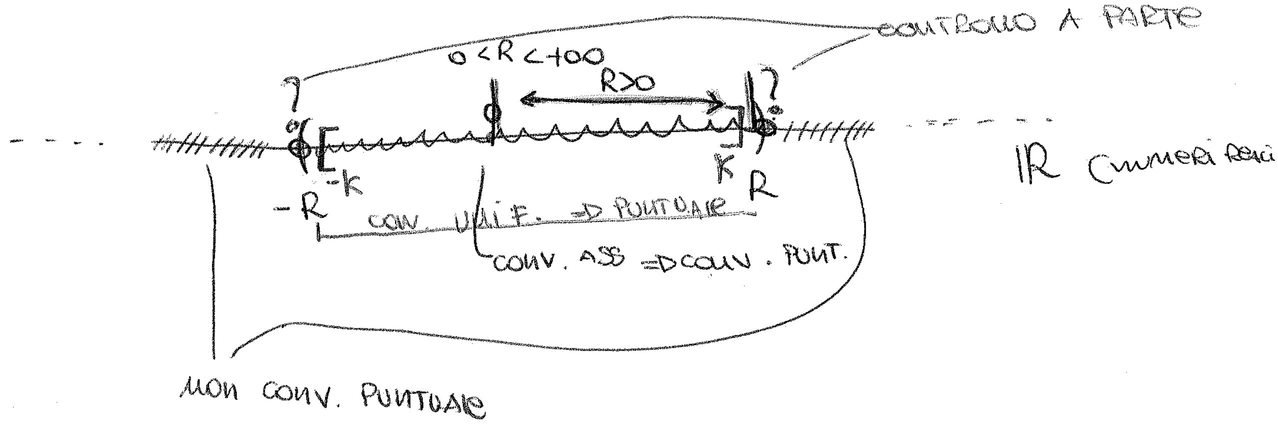
derivata

valeva già x serie a termini finiti
con 1 e 2 vale ancora

Quando vale si dice che la serie è <u>derivabile termine a termine</u>.



⊛ SERIE di TAYLOR e MC LAURIN



TEO (di Abel)

Siano $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ una serie di potenze e $R \in (0,+\infty)$ il suo raggio di convergenza. Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ conv. anche in $x=R$ (rispett. in $x=-R$), allora la serie di pot. converge uniformemente in $[-k, R]$ (rispett. in $[-R, k]$), $\forall\ 0<k<R$

In particolare se converge in $x = \pm R$ allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge uniformemente in $[-R, R]$. ⊛ — posso usarlo

ES

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ è una serie di potenze xché $= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right) x^n$ ed è centrata in zero! — a_n

la trattiamo come una serie di funzione

$x \in \mathbb{R}$ $\frac{x^n}{n}$ è di segno variabile (classificata)

↓

cri. conv. assoluta

studio la serie dei val. ass.

$\left|\frac{x^n}{n}\right| = \frac{|x|^n}{n}$ serie term. positivi

GEOMETRICA
$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \begin{cases} \text{conv. a } \frac{1}{1-a} & \text{se } |a|<1 \\ \text{div. pos} & \text{se } a \geq 1 \\ \text{è indet.} & \text{se } a \leq -1 \end{cases}$

$\frac{|x|^n}{n} \leq |x|^n$

$\sum |x|^n$ conv. se e solo $\boxed{\text{se } |x| < 1} \Rightarrow \sum \left|\frac{x^n}{n}\right|$ conv. in $(-1, 1)$

$\Rightarrow \boxed{\sum \frac{x^n}{n} \text{ conv. in } (-1, 1)}$

OSS Siano $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ una SERIE di POTENZE, $I \subseteq \mathbb{R}$ il suo insieme di CONVERGENZA PUNTUALE e $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \forall x \in I$, la somma della SERIE.

Allora f è continua in I.

DIM → su APPUNTI OSSERVARE x esame

TEOREMA (della RADICE o di HADAMARD) ($\neq$ CRITERIO RADICE!!)

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ una SERIE di POTENZE

Supponiamo che esista $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell \in [0, +\infty]$

Allora il RAGGIO di CONVERGENZA della SERIE $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ è

$$R = \begin{cases} +\infty & \text{se } \ell = 0 \quad (i) \\ \frac{1}{\ell} & \text{se } 0 < \ell < +\infty \quad (ii) \\ 0 & \text{se } \ell = +\infty \quad (iii) \end{cases}$$

[NON HO SCRITTO $R = \frac{1}{\ell}$ SEMPRE!!]

DIM $\sum a_n x^n$ converge in $x = 0$. Sia $x \neq 0$ (e vediamo se ogni $x \neq 0$ la serie converge)

ci occupiamo della CONV. ASS. $\sum |a_n x^n|$

APPLICO IL CRIT. della RADICE $\lim_n \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \lim_n \sqrt[n]{|a_n|}\,|x| =$

$\sqrt[n]{|a_n|} \to = \ell$ PER IPOTESI

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } \ell = 0 \quad (i) \\ \ell |x| & \text{se } 0 < \ell < +\infty \quad (ii) \\ +\infty & \text{se } \ell = +\infty \quad (iii) \end{cases}$$

(i)

$\ell = 0 \Rightarrow \lim_n \sqrt[n]{|a_n x^n|} = 0 < 1 \Rightarrow$ x CRIT. della RADICE $\sum |a_n x^n|$ CONV

$\Rightarrow$ PER CRIT. CONFR. $\sum a_n x^n$ conv. $\Rightarrow \{x \in \mathbb{R} : \sum a_n x^n \text{ conv}\} = \mathbb{R}$

$\Rightarrow R = \sup \mathbb{R} = +\infty$

è ASSURDO $\Rightarrow \{x \in \mathbb{R} : \sum a_n x^n$ converge$\} = \{0\} \Rightarrow R = \sup\{0\} = 0$ ∎

OSS se $\nexists \lim_n \sqrt[n]{|a_n|} \Rightarrow$ NSPDN $\Rightarrow$ CAMBIA METODO!!

LEZIONE 12/01/2012

ES. SUCCESSIONI di FUNZIONI

1. $f_n(x) = n x e^{-nx} \quad x \in [0,1]$

DETERMINARE IL LIMITE PUNTUALE di (f_n) e STABILIRE SE LA CONVERGENZA È UNIFORME

$$\lim_n f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \overbrace{n x}^{+\infty} \overbrace{e^{-\overbrace{nx}^{+\infty}}}^{\to 0} = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ 0 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$$\to \lim_{t\to+\infty} t\, e^{-t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t}{e^t} = 0 \qquad t = nx$$

(f_n) converge puntualmente a f su $[0,1]$ dove $f(x) = 0 \ \forall x \in [0,1]$

(f_n) converge uniformemente a f su $[0,1]$?

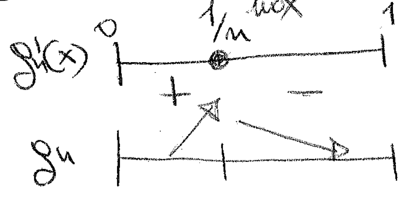
cioè $\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$? dove $\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)|$

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |n x e^{-nx} - 0| = \sup_{x\in[0,1]} |n x e^{-nx}| = \sup_{x\in[0,1]} (n x e^{-nx}) =$$

$$= \max_{x\in[0,1]} (\underbrace{n x e^{-nx}}_{g_n(x)})$$

$$g'_n(x) = n\left(e^{-nx} - n x e^{-nx}\right) = n e^{-nx}(1 - nx)$$

$\boxed{g'_n(x) = 0} \Rightarrow 1 - nx = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{n} \in [0,1]$



$\boxed{g'_n(x) > 0} \Rightarrow x < \frac{1}{n}$ PUNTO di MAX

$\max_{x\in[0,1]} g_n(x) = g_n\left(\frac{1}{n}\right)$

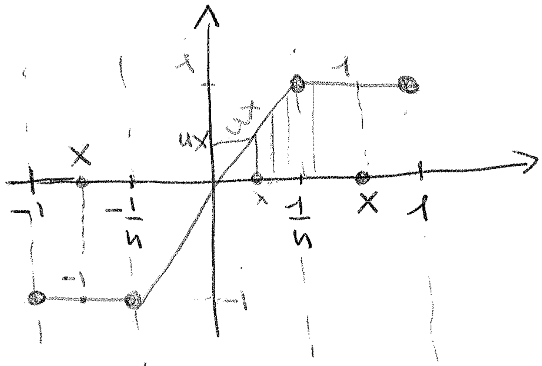
$$\max_{x \in [-1,1]} g_n(x) = g_n(0) = \frac{1}{n^2}$$

$$\Rightarrow \|f_n - f\|_\infty = \max_{x\in[-1,1]} \frac{\sqrt{1-x^2}}{n^2} = \max_{x\in[-1,1]} g_n(x) = g_n(0) = \frac{1}{n^2}$$

$$\lim_n \|f_n - f\|_\infty = \lim_n \frac{1}{n^2} = 0 \Rightarrow \text{conv. unif. su } [-1,1]$$

(5) $$f_n(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } -1 \le x \le -\frac{1}{n} \\ nx & \text{se } -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n} \\ 1 & \text{se } \frac{1}{n} \le x \le 1 \end{cases}$$

Det. il limite puntuale di (f_n) e stabilire se la conv. è uniforme



mi sembra che:

$$\lim_n f_n(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x<0 \\ 0 & \text{se } x=0 \\ 1 & \text{se } x>0 \end{cases}$$

- $x=0 \Rightarrow \lim_n f_n(x) = \lim_n f_n(0) = \lim_n 0 = 0 \Rightarrow f(0)=0$
- $x>0 \Rightarrow$ $$f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{se } -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n} \\ 1 & \text{se } \frac{1}{n} \le x \le 1 \end{cases}$$

FISSATO $0 < x \le 1$ $\quad f_n(x) = 1$ se $x \ge \frac{1}{n}$ cioè se $n \ge \frac{1}{x}$

per esempio $n \ge \left[\frac{1}{x}\right] + 1 \in \mathbb{N}$

$\left[\ \right]$ parte intera

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_n 1 = 1 = f(x)$$

- $x<0 \Rightarrow$ $$f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{se } -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n} \\ -1 & \text{se } -1 \le x < -\frac{1}{n} \end{cases}$$

FISSATO $-1 \le x < 0$ $\quad f_n(x) = -1$ se $x < -\frac{1}{n} \Rightarrow \frac{1}{n} < -x \Rightarrow n > -\frac{1}{x}$

Per esempio $n > \left[-\frac{1}{x}\right] + 1$ $\quad \lim_n f_n(x) = \lim_n (-1) = -1 = f(x)$