NUMERO : 351

DATA : 24/09/2012

A P P U N T I

STUDENTE : Contadin

MATERIA : Fisica I

Prof. Ruggero

MECCANICA

CINEMATICA DEL PUNTO

MOTO RETTILINEO

- $v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ • $v_i = \frac{dx}{dt}$ (per $\Delta t \to 0$) • $dx = v(t)dt$
- $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)dt$
- $v_m = \frac{1}{t-t_0}\int_{t_0}^{t} v(t)dt$ (p. 10)

MOTO RETTILINEO UNIFORME (velocità costante)

- $x(t) = x_0 + v\int_{t_0}^{t} dt = x_0 + v(t-t_0)$
- $x(t) = x_0 + vt$ (se $t_0 = 0$)

leggi orarie

- velocità istantanea = velocità media
- spazio funzione lineare del tempo

ACCELERAZIONE NEL MOTO RETTILINEO

- $a_i = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$ • $a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$
- $dv = a(t)dt$
- $v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(t)dt$

MOTO RETTILINEO UNIF. ACCELERATO

- $v(t) = v_0 + a(t-t_0)$
- $v(t) = v_0 + at$ se $t_0 = 0$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} [v_0 + a(t-t_0)]dt = x_0 + \int_{t_0}^{t} v_0 dt + \int_{t_0}^{t} a(t-t_0)\,dt \Rightarrow$$

- $x(t) = x_0 + v_0(t-t_0) + \frac{1}{2}a(t-t_0)^2$
- $x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ se $t_0 = 0$

MOTO VERTICALE DI UN CORPO

- $v(t) = -gt$ $\quad$ $x(t) = h - \frac{1}{2}gt^2$ se $t = 0$

$t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ $\quad$ $v_c = \sqrt{2gh}$

corpo lasciato cadere

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 65

• accelerazione: $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(v\vec{u}_T) = \frac{dv}{dt}\vec{u}_T + v\frac{d\vec{u}_T}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_T + v\frac{d\phi}{dt}\vec{u}_N$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{1}{R}v \longrightarrow \vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_T + \frac{v^2}{R}\vec{u}_N = \vec{a}_T + \vec{a}_N$$

$$a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{v^4}{R^2}}$$

MOTO CIRCOLARE

- Uniforme

• velocità angolare: $\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{R}\frac{ds}{dt} = \frac{v}{R}$ $\qquad \omega = \frac{\theta}{t}$

• velocità trasversa: $v = r\frac{d\theta}{dt} \rightarrow v = R\omega$

$s(t) = s_0 + vt \qquad s = s_0$ con $t = 0$

$\theta(t) = \theta_0 + \omega t \qquad \theta = \theta_0$ con $t = 0$

$t^2 = \frac{2\pi}{\alpha}$

$a = a_N = \frac{v^2}{R} \rightarrow \omega^2 R$

$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi}{\omega}$

$x = R\cos\theta = R\cos(\omega t + \theta_0)$

$y = R\,\text{sen}\,\theta = R\,\text{sen}(\omega t + \theta_0)$

- Non uniforme

• $a_T = \frac{dv}{dt}$

• $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{1}{R}\frac{dv}{dt} = \frac{a_T}{R} \rightarrow$ accelerazione angolare

• $\omega(t) = \omega_0 + \int_{t_0}^{t} \alpha(t)\,dt$

• $\theta(t) = \theta_0 + \int_{t_0}^{t} \omega(t)\,dt$

- Uniformemente accelerato

• $\omega = \omega_0 + \alpha t$

• $\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$

con $t_0 = 0$

• $a_N = \omega^2 R = (\omega_0 + \alpha t)^2 R$

Nota la funzione $\alpha(\theta)$: $\int_{\theta_0}^{\theta} \alpha(\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}\omega^2 - \frac{1}{2}\omega_0^2$

DINAMICA DEL PUNTO

- Prima legge di Newton: principio di inerzia (p. 34)
- Seconda legge di Newton: $F = ma$
- Terza legge di Newton: $F_{A,B} = -F_{B,A}$ (principio di azione e reazione)

- Quantità di moto / impulso

- $p = m\vec{v}$
- con m costante $F = ma \Rightarrow F = \frac{dp}{dt}$
- teorema impulso: $J = \int_0^t F\,dt = \int_{p_0}^{p} dp = p - p_0 = \Delta p$

- con m costante: $J = m(v - v_0) = m\Delta v$
- con F costante: $\Delta v = v - v_0 = \frac{Ft}{m}$
- se F non costante: $F_m = \frac{\Delta p}{t}$
- se $F = 0 \to \Delta p = 0 \to p =$ costante (principio di inerzia)

- Risultante delle forze / equilibrio / reazioni vincolari

- $a = \frac{R}{m} = \Sigma_i \frac{F_i}{m} = \Sigma_i a_i$

- Azione dinamica forze

$\vec{F} = m\vec{a_T} + m\vec{a_N} = m\frac{dv}{dt}\vec{u_T} + m\frac{v^2}{R}\vec{u_N}$

- FORZA PESO

$F = N + P = ma \Rightarrow N + mg = ma$

$N = m(a - g)$

1) a discorde a g → accelera verso l'alto
$N = m[a\vec{u} - (-g\vec{u})] = m(a+g)\vec{u} \to N > mg$
sensazione di aumento peso

2) a concorde, ma minor modulo ⇒ diminuzione peso
$N = m[-a\vec{u} - (-g\vec{u})] = m(g - a) \Rightarrow N < mg$

3) $g = a \Rightarrow N = 0$ → no sensazione peso (caduta libera)

4) a concorde g, ma maggior modulo → distacco corpo

- FORZA DI ATTRITO RADENTE

- attrito statico: $F \leq \mu_s N$ → quiete
$F > \mu_s N$ → moto

equilibrio statico: $R + F + P = 0$

- R → componente verticale $N = mg$
→ comp. orizz.: $F_{as} = F$

- Soluzione: $x = A\,sen(\omega t + \phi)$
- $x_0 = A\,sen\phi$ $\quad 0 = \omega A \cos\phi \quad$ (c.i. $x = x_0$, $v = 0$ per $t = 0$)
  ↳ da queste ricavo A e ϕ
- Legge oraria: $x = x_0 \cos \omega t$
- velocità $= v = -\omega x_0\, sen\omega t$

(per ϕ compreso tra 0 e $2\pi \Rightarrow A = x_0,\ \phi = \frac{\pi}{2}$ e $A = -x_0,\ \phi = \frac{3}{2}\pi$)

- con $x = x_0$ e $v = v_0$ per $t = 0$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \qquad tg\,\phi = \omega\frac{x_0}{v_0}$$

FORZA DI ATTRITO VISCOSO

- $F = -bv$ $\quad$ vedi su slide, cap 3 p.21
  $b \to mk$
- Applicando la legge di Newton: $F_1 + F_2 = mg - mKv = ma = m\frac{dv}{dt}$
- Proiettando su x (orientato verso il basso) l'equaz. del moto: $\frac{dv}{dt} = g - Kv \Rightarrow \frac{dv}{g-Kv} = dt$

Integriamo e risolviamo nella velocità:

$$\int_0^v \frac{dv}{g-kv} = \int_0^t dt \Rightarrow -\frac{1}{k}\left[\ln(g-kv)\right]_0^v = t$$

$$\Rightarrow \ln\frac{g-kv}{g} = -kt \Rightarrow v(t) = \frac{g}{k}(1 - e^{-kt})$$

Forze centripete

Esempio 3.13 Curve sopraelevate p.57

$$tg\theta = \frac{v^2}{gr}$$

- velocità massima con cui un'auto può affrontare una curva piana:

$$v = \sqrt{\mu_s g r}$$

Pendolo semplice

- $T_F = mg \Rightarrow$ in posizione di eq. statico (posizione verticale)
- Spostando il punto dalla verticale: $mg + T_F = ma$
- componenti lungo la traiettoria e ortogonali alla traiettoria: • $R_T = -mg\,sen\theta = ma_T$ (forza di richiamo)
  • $R_N = T_F - mg\cos\theta = ma_N$ *

- Energia cinetica

- $dW = F_T\, ds = m a_T\, ds = m \frac{dv}{dt} ds = m \frac{ds}{dt} dv = mv\,dv$

- $W = \int_A^B mv\,dv = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = E_{K_B} - E_{K_A} = \Delta E_K$ (percorso finito da A a B)

<u>Relazioni energia cinetica - quantità di moto:</u>

$E_K = \frac{1}{2} m v^2$; $p = mv$

$\Rightarrow E_K = \frac{p^2}{2m}$ $\qquad p = \sqrt{2mE_K}$

- Lavoro forza peso

- $W = \int_A^B F \cdot ds = \underbrace{F}_{\text{costante}} \cdot \int_A^B ds = mg \cdot r_{AB} \rightarrow r_B - r_A$

Componente di r_{AB} lungo l'asse z : $z_B - z_A$

- prodotto scalare: $(mg)(r_{AB}) = \underbrace{-}_{\text{forza peso opposta all'asse z}} mg(z_B - z_A)$

- $W = -(mgz_B - mgz_A) = -(E_{pB} - E_{pA}) = -\Delta E_p$ $\quad (E_p = mgz)$

$h_0 = \frac{v_A^2}{2g} \rightarrow h$ a cui si ferma il punto lungo un piano inclinato (esempio 4.1)

- se B in posizione più bassa rispetto ad A $\rightarrow W > 0 \rightarrow E_p$ diminuisce
- se B " " " alta " " " $\rightarrow W < 0 \rightarrow E_p$ aumenta

- Lavoro forza costante

- $W = -(Fz_B - Fz_A) = -\Delta E_p$ con $E_p = Fz$ (con z parallelo e discorde a F)
  $E_p = -Fz$ (con z " " concorde a F)

- Lavoro forza elastica

- $W = \int_A^B -kx\vec{u}_x \cdot dx\vec{u}_x = -k \int_A^B x\,dx = \frac{1}{2} k x_A^2 - \frac{1}{2} k x_B^2 = -\Delta E_p$ con $E_p = \frac{1}{2} k x^2$

- coord. iniziale > coord. finale $\quad W > 0 \quad E_p$ diminuisce
- " < " $\quad W < 0 \quad E_p$ aumenta

esempio 4.2

• Teorema momento angolare:

$$\frac{dL}{dt} = \underbrace{\frac{dr}{dt}}_{v_r} \times mv + r \times m\frac{dv}{dt}$$

– se consideriamo il polo O fisso: $\frac{dr}{dt}$ coincide con la velocità di P (sono // e quindi sen θ = sen 0 = 0).
Il primo prodotto vettoriale si annulla.

$m\frac{dv}{dt} = ma$ = forza F applicata al punto P (se il sistema di rif. è inerziale).

$\Rightarrow \frac{dL}{dt} = M$ → momento della forza rispetto allo stesso polo O

• $\frac{dL}{dt} = 0$ se la forza è nulla o se r ed F sono //
$\Rightarrow$ L costante

• $\int_{t_{in}}^{t_f} M dt = \Delta L = L_{fin} - L_{in}$

• Teorema del momento dell'impulso

$$\int_0^t M dt = \int_0^t (r \times F) dt = \underbrace{r}_{} \times \int_0^t F dt = r \times J = \Delta L$$

+ appunti Ale

se la forza viene applicata per un tempo molto breve r è costante.

• Lavoro in un moto circolare

$$W = \int_A^B F_T \underbrace{ds}_{r d\theta} = \int_{\theta_A}^{\theta_B} r F_T d\theta = \int_{\theta_A}^{\theta_B} M d\theta$$

MOTI RELATIVI

• Relazione tra posizioni punto P rispetto a due sistemi di rif.: $r = OO' + r'$
v_P assoluta

• Teorema velocità relative: $v = v' + v_0 + \omega \times r'$
→ v relativa

• Velocità di trascinamento: $v_T = v - v' = v_0 + \omega \times r'$

– Due casi particolari:

1) Il sistema mobile non ruota rispetto a quello fisso: $\omega = 0 \Rightarrow$ moto di trascinamento traslatorio

$v = v' + v_0$, $v_T = v_0$

2) Il sistema mobile non si sposta rispetto a quello fisso: $v_0 = 0 \Rightarrow$ moto di trascinamento rotatorio

$v = v' + \omega \times r'$, $v_T = \omega \times r'$

- Sistemi di riferimento inerziali. Relatività galileiana

- Sistema di rif. inerziale → sistema in cui valga la legge di inerzia
  ⇒ definito un sistema di rif. inerziale, tutti gli altri sistemi in moto rettilineo uniforme rispetto a questo sono anch'essi inerziali.

- Relatività galileiana: non è possibile stabilire, tramite misure effettuate in questi diversi sistemi di riferimento, se uno di essi è in quiete o in moto.

- $F - ma_T - ma_C = ma'$ → forma modificata della legge di Newton valida in un sistema non inerziale
  Agiscono forze apparenti che non esistono in un sistema inerziale che vengono anche chiamate "forze di inerzia".

- Moto di trascinamento traslatorio rettilineo

- 1° caso: entrambi sistemi inerziali

- $v = v' + v_0 \qquad a = a'$ (moto di O' uniforme → $a_0 = 0$)
- Legame tra raggi vettori: $r = v_0 t + r'$ → supponendo che a $t = 0$ le origini coincidono
- Relazioni vettoriali proiettate sugli assi cartesiani:

$$\left.\begin{array}{lll} x' = x - v_0 t & y = y' & z = z' \\ v'_x = v_x - v_0 & v'_y = v_y & v'_z = v_z \\ a'_x = a_x & a'_y = a_y & a'_z = a_z \end{array}\right\} \text{Trasformazioni galileiane}$$

- 2° caso: O inerziale e O' non inerziale
  ↓
  con acceleraz. costante $a_0 = a_T$ e velocità iniziale v_{in}, concordi e // all'asse $x \equiv x'$

- Posizione e velocità di O': $x_0 = v_{in} t + \frac{1}{2} a_T t^2$
  $v_0 = v_{in} + a_T t$

- $r' = r - OO' \qquad x' = x - v_{in} t - \frac{1}{2} a_T t^2 \qquad y' = y \qquad z' = z$

  $v' = v - v_0 \qquad v'_x = v_x - v_{in} - a_T t \qquad v'_y = v_y \qquad v'_z = v_z$

  $a' = a - a_0 \qquad a'_x = a_x - a_0 \qquad a'_y = a_y \qquad a'_z = a_z$

- $a_{cm} = \frac{dr_{cm}}{dt} = \frac{\sum_i m_i \frac{dv_i}{dt}}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i a_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i a_i}{m}$
- Se il sistema di rif. è inerziale: $m_i a_i = F_i = F_i^{(E)} + F_i^{(I)}$
- $m a_{CM} = \sum_i m_i a_i = \sum_i (F_i^{(E)} + F_i^{(I)}) = R^{(E)} + \underbrace{R^{(I)}}_{R^{(I)}=0} = R^{(E)}$
- Teorema del moto del centro di massa: $R^{(E)} = m a_{CM}$

$$R^{(E)} = m a_{CM} = m \frac{dv_{CM}}{dt} = \frac{d}{dt}(m v_{CM}) = \frac{dP}{dt}$$

se $R^{(E)} = 0 \rightarrow a_{CM} = 0$, $v_{CM} = \text{cost.}$, $P = \text{cost.} \longrightarrow P_x = \text{cost.}$, $P_y = \text{cost.}$, $P_z = \text{cost.}$ } si può verificare anche parzialmente

- due punti isolati: $P = p_1 + p_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2 = \text{cost}$

$$= \frac{d}{dt}(m_1 v_1 + m_2 v_2) = m_1 a_1 + m_2 a_2 = 0$$

$$\Rightarrow F_1 + F_2 = 0 \longrightarrow F_1 = -F_2$$ → non implica che le due forze abbiano la stessa retta d'azione

da questo: $m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0 \longrightarrow$ in modulo $m_2 = m_1 \frac{v_1}{v_2}$

- Teorema del momento angolare

- $L = \sum_i r_i \times m_i v_i$

$\frac{dL}{dt} = \sum_i \underbrace{\frac{dr_i}{dt}}_{v - v_0} \times m_i v_i + \sum_i r_i \times m_i \frac{dv_i}{dt} \longrightarrow m_i a_i = F_i = F_i^{(E)} + F_i^{(I)}$ (sist. rif. inerziale)

$$\Rightarrow \frac{dL}{dt} = \sum_i (v - v_0) \times m_i v_i + \sum_i r_i \times (F_i^{(E)} + F_i^{(I)})$$

$$= \underbrace{\sum_i v_i \times m_i v_i}_{0 \,\to\, \text{vettori paralleli}} - \sum_i v_0 \times m_i v_i + \sum_i r_i \times F_i^{(E)} + \sum_i r_i \times F_i^{(I)}$$

$$= -v_0 \times m v_{CM} + M^{(E)} + M^{(I)}$$

$M^{(I)} = 0$ perché $M^{(I)}_{ij} = r_i \times F_{ij} + r_j \times F_{ji} = (r_j - r_i) \times F_{ij} = r_{ij} \times F_{ij}$; r_{ij} // a F_{ij} quindi $M_{ij} = 0$

somma di tutti i possibili termini M_{ij}

- $\frac{dL}{dt} = M^{(E)} \underbrace{- v_0 \times M v_{CM}}$ → se nullo: $\frac{dL}{dt} = M^{(E)}$
  - polo O fisso nel sist. rif. inerziale, $v_0 = 0$
  - centro di massa in quiete nel s.r.i.
  - polo O ≡ centro di massa, per cui $v_{CM} = v_0$ e $v_{CM} \times v_0 = 0$
  - v_0 // v_{CM}

- Teorema dell'energia cinetica

- $d\omega_i = \underbrace{F_i \cdot dr_i}_{m_i v_i dv} = F_i^{(E)} dr_i + F_i^{(I)} dr_i = d\omega_i^{(E)} + d\omega_i^{(I)}$

$F_{ij} \cdot dr_j + F_{ji} \cdot dr_i = F_{ij} \cdot (dr_j - dr_i) =$
$= F_{ij} \cdot d(r_j - r_i) = F_{ij} \cdot dr_{ij}$

sommando su tutti i punti e integrando:

$\omega = \Sigma_i \frac{1}{2} m_i v_{iB}^2 - \Sigma_i \frac{1}{2} m_i v_{iA}^2 = E_{KB} - E_{KA}$

- Teorema dell'energia cinetica: $\omega^{(E)} + \omega^{(I)} = E_{KB} - E_{KA} = \Delta E_K$

- Se le forze interne sono conservative: $\omega^{(I)} = -\Delta E_P^{(I)}$
- " " " esterne " " : $\omega^{(E)} = -\Delta E_P^{(E)}$

- Conservaz. dell'energia meccanica: $\omega = \Delta E_K = -\Delta E_P = E_{PA} - E_{PB}$
$\Rightarrow (E_K + E_P)_A = (E_K + E_P)_B = costante$

- Lavoro forze non conservative: $(E_K + E_P)_A - (E_K + E_P)_B = \omega_{nc}$

- Proprietà dei sistemi di forze applicate a punti diversi

- $R = \Sigma_i F_i$
- $M_O = \Sigma_i OP_i \times F_i = \Sigma_i r_i \times F_i$

- Se cambiamo polo: $M_O = \Sigma_i r_i \times F_i$ con $r_i = OO' + r_i'$
$\Rightarrow M_O = \Sigma_i (OO' + r_i') \times F_i = OO' \times \Sigma_i F_i + \Sigma_i r_i' \times F_i = OO' \times R + M_{O'}$

↳ tranne che per $R = 0$ il momento dipende dal polo

coppia di forze → il momento non dipende dalla scelta del polo

p. 110

- Sistema di forze parallele

$M = \Sigma_i r_i \times F_i \vec{u} = (\Sigma_i F_i r_i) \times \vec{u}$

$M = OC \times R = r_c \times R$

Eguagliando: $(\Sigma_i F_i r_i) \times \vec{u} = r_c \times (\Sigma_i F_i) \vec{u} = (\Sigma_i F_i) r_c \times \vec{u}$

$\Rightarrow r_c = OC = \frac{\Sigma_i F_i r_i}{\Sigma_i F_i} = \frac{F_1 r_1 + F_2 r_2 + \dots + F_n r_n}{F_1 + F_2 + \dots + F_n}$

C = centro delle forze parallele

- Con le forze peso: $r_c = \frac{\Sigma_i m_i g r_i}{\Sigma_i m_i g} = \frac{\Sigma_i m_i r_i}{\Sigma_i m_i} = r_{CM}$ → centro di gravità o baricentro, coincide con il centro di massa

- Momento risultante forze peso: $M = OC \times mg = r_{CM} \times mg$

- Calcolo della posizione del centro di massa

• $r_{CM} = \dfrac{\int r\,dm}{\int dm} = \dfrac{\int r\rho\,dV}{m}$

• Se il corpo è **omogeneo** (ρ = costante) : $r_{CM} = \dfrac{\rho}{m}\int r\,dV = \dfrac{1}{V}\int r\,dV$

- Centro di massa e forza peso

• $\int g\,dm = g\int dm = mg$

• $M = \int r \times g\,dm = \left(\int r\,dm\right) \times g = m r_{CM} \times g = r_{CM} \times mg$

• $E_p = \int g\,z\,dm = g\int z\,dm = mg\,z_{CM}$

- Rotazioni rigide attorno ad un asse fisso in un sistema di riferimento inerziale

• z come asse di rotaz. $\rightarrow \omega \parallel z$
$R_i = r_i \operatorname{sen}\theta$ (fig. 7.10 p. 212)

• Momento angolare del punto P rispetto al polo O: $L_i = r_i \times m_i v_i \rightarrow$ modulo $m_i v_i r_i = m_i r_i R_i \omega$
L_i forma un angolo $\frac{\pi}{2} - \theta$ con l'asse z

• Momento angolare assiale: $L_{iz} = L_i \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = L_i \operatorname{sen}\theta_i = m_i r_i R_i \omega \operatorname{sen}\theta = m_i R_i^2 \omega$

• Momento angolare del corpo: $L = \Sigma_i L_i$ (non // all'asse di rotazione) $\Rightarrow$ moto di precessione

• Proiez. L sull'asse z : $L_z = \Sigma_i L_{iz} = (\Sigma_i m_i R_i^2)\,\omega = I_z \omega$
(non dipende dalla scelta del polo)
I_z momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse z $= \Sigma_i m_i (x_i^2 + y_i^2)$

• Componente ortogonale: $L_{i\perp} = L_i \cos\theta_i = m_i r_i \omega \cos\theta_i$

• Momento angolare // asse di rotazione quando quest'ultimo è un asse di simmetria del corpo $\rightarrow L_z = I_z \omega \quad L = L_z \quad L_\perp = 0$

- Equazione del moto

• Se $L \parallel \omega$: $\dfrac{dL}{dt} = \dfrac{d}{dt} I_z \omega = I_z \dfrac{d\omega}{dt} = I_z \alpha \rightarrow M = I_z \alpha$ eq. moto di rotazione

• Legge oraria : $\alpha = \dfrac{M}{I_z} \Rightarrow \omega(t) = \omega_0 + \int_0^t \alpha\,dt \Rightarrow \theta(t) = \theta_0 + \int_0^t \omega\,dt$

• $M = 0$: quiete o moto circ. uniforme $\alpha = 0$, $\omega = \omega_0$, $\theta = \theta_0 + \omega t$

• M = costante : moto circ. unif. accelerato α = cost., $\omega = \omega_0 + \alpha t$, $\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$

- Teorema di H.S. e di König

- $E_K = \frac{1}{2}(I_c + md^2)\omega^2 = \frac{1}{2} I_c \omega^2 + \frac{1}{2} m d^2 \omega^2$
  ↳ d distanza tra i due assi
- $E_K = \frac{1}{2} I_c \omega^2 + \frac{1}{2} m v_{CM}^2$

- Pendolo composto

- eq. moto $= \frac{dL_z}{dt} = I_z \alpha = I_z \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgR\sin\theta \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgR}{I_z}\sin\theta = 0$
  ↳ $I_z = I_c + mR^2$
- se l'ampiezza delle oscillazioni è piccola: $\sin\theta \approx \theta$

$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgR}{I}\theta = 0 \rightarrow$ eq. diff. moto armonico
soluz. $\theta = \theta_0 \sin(\Omega t + \phi)$

- pulsazione: $\Omega = \sqrt{\frac{mgR}{I}}$
- periodo: $T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I_z}{mgR}} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$
- $\ell = \frac{I_z}{mR}$: lungh. ridotta del pendolo composto
- posto $R' = I_c / mR \rightarrow I_c = mRR'$

$\ell = \frac{I_z}{mR} = \frac{I_c + mR^2}{mR} = \frac{mRR'}{mR} + \frac{mR^2}{mR} = R' + R > R$

- I' momento d'inerzia del corpo rispetto al nuovo asse di rotazione

$\ell' = \frac{I'}{mR'} = \frac{I_c + mR'^2}{mR'} = \frac{mRR'}{mR'} + \frac{mR'^2}{mR'} = R + R' = \ell \Rightarrow$ assi reciproci
$\rightarrow$ stesso periodo di oscillazione

- Moto di puro rotolamento

- $v_c = \omega|PC|$ oppure $v_c = v_{CM} + \omega \times r$
- condizione di puro rotolamento: $v_c = 0 \rightarrow v_{CM} = -\omega \times r$
  $v_{CM} = \omega r \Rightarrow a_{CM} = \alpha r$ (in modulo)

- Corpo che rotola senza strisciare su un piano orizz. sotto l'azione di una forza F costante applicata all'asse: (massa m, raggio r)

- moto centro di massa: $F + R + mg = ma_{CM}$
- proiettato sugli assi: $F - f = ma_{CM}$ (x) $N - mg = 0 \rightarrow N = mg$ (y)
  ↳ f componente tangenz. della reazione del piano (forza di attrito statico)

- $M_* = r \times f = I\alpha \Rightarrow rf = I\alpha = I\frac{a_{CM}}{r}$ (avendo scelto il CM come polo)

- Impulso angolare. Momento dell'impulso

• $\underbrace{\int_{t_1}^{t_2} M\,dt}_{\text{impulso angolare}} = L(t_2) - L(t_1) = \Delta L$

• $\dfrac{\Delta L}{t_2 - t_1}$ = valore medio del momento nell'intervallo di integrazione

• $\int M dt = \int (r \times F) dt = r \times \int F dt = \underbrace{r \times J}_{\text{momento dell'impulso}} = \Delta L$

- Teorema di Poisnot. Assi d'inerzia

• Fissato un punto O di un corpo rigido, è sempre possibile trovare almeno tre assi cartesiani mutuamente (perpendicolari) con centro in O tali che, se si sceglie uno di questi assi come asse di rotazione, L risulta // a ω. Tali assi si chiamano ASSI PRINCIPALI DI INERZIA relativi al punto O. Se O coincide col centro di massa si parla di ASSI CENTRALI D'INERZIA.

- Leggi di conservazione nel moto di un corpo rigido

• Se M = 0 → momento angolare costante in modulo, direzione e verso. Non comporta però ω = cost. perché il moto di rotazione può avvenire non in un asse principale di inerzia.

• Conserv. del momento angolare in un sistema formato da più corpi rigidi: variaz. posiz. singole parti ⇒ variaz. momento d'inerzia del sistema

+ (formule esempio) dist. iniziale $= 2r_1 \gg r$, $\omega_1 = \text{cost.}$

- $L = I_1 \omega_1 = \text{cost.}$ $\qquad I_1 = 2\left[\frac{2}{5} mr^2 + m(r+r_1)^2\right] \cong 2mr_1^2$

- dist. finale $= 2r_2$ con $r_2 < r_1$ $\qquad I_2 = 2mr_2^2 < I_1$

$L_2 = L_1 \Rightarrow 2mr_2^2 \omega_2 = 2mr_1^2 \omega_1 \Rightarrow \omega_2 = \dfrac{r_1^2}{r_2^2}\omega_1 > \omega_1$

• Variazione momento d'inerzia → variaz. velocità angolare anche se L è costante (l'energia non si conserva) → indipendenza legge di conservaz. momento angolare da quella dell'energia

• Modo più generale di calcolare il lavoro: $W = \Delta E_k = E_{k_{fin}} - E_{k_{in}} = \dfrac{L^2}{2I_{fin}} - \dfrac{L^2}{2I_{in}}$

• Se agisce solo la forza peso e ci sono le condizioni per la conservaz. dell'energia meccanica:
- se il CM resta in un piano orizzontale → considera solo en. cinetica
- se cambia la quota del CM: $\Delta E_p = mg\,\Delta z_{CM}$

(formule esempio) • $E_{in} = mgl = E_{fin} = \frac{1}{2} I\omega^2 + mg\frac{l}{2}$

con $I = \frac{1}{3} ml^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\dfrac{3g}{l}}$, $\quad v_{CM} = \omega \dfrac{l}{2} = \sqrt{\dfrac{3gl}{4}}$

- Urto completamente anelastico
i due punti restano attaccati dopo l'urto

- $m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) \underbrace{v'}_{\text{la velocità dopo l'urto}} = (m_1 + m_2) v_{CM}$

$v_{CM} = \dfrac{m_1 v_1 + v_2 m_2}{m_1 + m_2}$

- $\Delta p_1 = m_1 v_{CM} - m_1 v_1 \qquad \Delta p_2 = m_2 v_{CM} - m_2 v_2$
- Energia prima dell'urto: $E_{kin} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = E'_k + \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_{CM}^2$
- Energia dopo l'urto: $E_{kfin} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_{CM}^2 < E_{kfin}$
- $\Delta E_k = E_{kfin} - E_{kin} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_{CM}^2 - \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_2 v_2^2$

- Urto elastico

- $P_{in} = P_{fin} \quad , \quad E_{kin} = E_{kfin}$
- $m_1 v_{1in} + m_2 v_{2in} = m_1 v_{1fin} + m_2 v_{2fin}$
- $\frac{1}{2} m_1 v_{1in}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2in}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1fin}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2fin}^2$
- $\Rightarrow v_{1fin} = \dfrac{(m_1 - m_2) v_{1in} + 2 m_2 v_{2in}}{m_1 + m_2}$

$v_{2fin} = \dfrac{2 m_1 v_{1in} + (m_2 - m_1) v_{2in}}{m_1 + m_2}$

- Se l'urto elastico viene considerato nel sistema di rif. del centro di massa:

$v'_{1fin} = - v'_{1in} \quad , \quad v'_{2fin} = - v'_{2in}$

- Urto anelastico

- Nel sistema di rif. del centro di massa:
- e (coeff. di restituzione) $= - \dfrac{p'_{1fin}}{p'_{1in}} = - \dfrac{v'_{1fin}}{v'_{1in}} = - \dfrac{p'_{2fin}}{p'_{2in}} = - \dfrac{v'_{2fin}}{v'_{2in}}$
- Energia cinetica del sistema dopo l'urto:

$E'_{kfin} = \frac{1}{2} m_1 v'^2_{1fin} + \frac{1}{2} m_2 v'^2_{2fin} = e^2 \left(\frac{1}{2} m_1 v'^2_{1in} + \frac{1}{2} m_2 v'^2_{2in} \right)$

$\Rightarrow E'_{kfin} = e^2 E'_{kin}$

- Variazione relativa di energia cinetica nell'urto: $\alpha = \dfrac{E'_{kfin} - E'_{kin}}{E'_{kin}} = e^2 - 1$

- $v_{1fin} = \dfrac{(m_1 - e m_2) v_{1in} + m_2 (1 + e) v_{2in}}{m_1 + m_2} \qquad v_{2fin} = \dfrac{m_1 (1 + e) v_{1in} + (m_2 - e m_1) v_{2in}}{m_1 + m_2}$

- Superficie isobariche

- p = cost E_{pm} = cost (energia potenziale per unità di massa) ρ = cost

- Manometro ad U

- $h = \dfrac{p_1 - p_2}{\rho g}$

- Barometro di Torricelli

- $|h| = \dfrac{\rho h}{\rho'}$

- Pressione atmosferica e sue variazioni

Asse z orientato verso l'alto e con origine al livello del mare, dove densità e pressione valgono ρ_0 e p_0.

- Alla quota z_1 → pressione = p, $\rho = \dfrac{\rho_0 p}{p_0}$

Applichiamo la legge di Stevino ad una variazione di quota dz:

- $\dfrac{dp}{dz} = -\rho g = -\dfrac{g\rho_0}{p_0} p \Rightarrow \dfrac{dp}{p} = -\dfrac{g\rho_0}{p_0} dz = -\dfrac{dz}{\alpha}$

con $\alpha = \dfrac{p_0}{g\rho_0} = \cong 8$ Km.

- Integrando: $\displaystyle\int_{p_0}^{p} \frac{dp}{p} = \frac{1}{\alpha}\int_0^z dz \Rightarrow \ln\frac{p}{p_0} = -\frac{z}{\alpha} \Rightarrow p = p_0 e^{-z/\alpha}$

- Nell'atmosfera isoterma (in cui vale la legge di Boyle (pV = cost, ovvero $\dfrac{p}{\rho}$ = cost)), la pressione decresce esponenzialmente con l'altezza

- Principio di Archimede

- Un corpo immerso in un fluido riceve una spinta verso l'alto, $F_A = -\rho V_0 g$, pari al peso del volume di liquido spostato.

- $F_p + F_v = F_p + mg = 0 \Rightarrow F_p = -mg$, essendo $m = \rho V_0 \Rightarrow F_p = -\rho V_0 g$

  Sostituiamo V_0 con un volume di un'altra sostanza con massa $m' = \rho' V_0$.
  F_p rimane costante ma cambia F_v → non c'è più equilibrio

- Forza risultante: $(m' - m)g = (\rho' - \rho) V_0 g$ → Se $\rho' > \rho$ il corpo scende nel fluido
  Se $\rho' < \rho$ il corpo sale

- F_A si applica nel centro di massa del liquido spostato, in quanto risultante delle forze esterne di pressione applicate a V_0 dal fluido circostante. Il corpo che occupa V_0 ha il centro di massa in una posizione diversa → anche momento risultante

- Flusso in un tubo a sezione costante

- $p_1 + \rho g z_1 = p_2 + \rho g z_2$ (v è costante se la sezione è costante quindi l'en. cinetica non varia)
- Con $h = z_2 - z_1$ la variazione di pressione è $\rho g h$, come se il fluido fosse in quiete

- Tubo di Venturi

- $p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$ (il condotto è orizzontale)

  $v_1 S_1 = v_2 S_2$
- $v_1^2 = \frac{2(p_1 - p_2)}{\rho} \frac{S_2^2}{S_1^2 - S_2^2}$

- Tubo di Pitot

- $p_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = p_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 = p_0$
- Dalla diff. di pressioni in O (punto di inizio dell'ostacolo) e B si calcola la velocità del fluido relativa al tubo

- Teorema di Torricelli

- $\left(p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z\right)_{sup} = \left(p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z\right)_{foro}$

Sulla superficie libera $p = p_0$, $v = 0$ e, assumendo il livello del foro come riferimento, $z = h$; all'uscita del foro $p = p_0$ e $z = 0$

- $\Rightarrow p_0 + \rho g h = p_0 + \frac{1}{2}\rho v^2 \Rightarrow v = \sqrt{2gh}$ → la velocità non dipende né da ρ né da p_0 ed è pari a quella che avrebbe il liquido se scendesse in caduta libera da un'altezza h

- Effetti dinamici. Vortici.

- Conservazione del momento angolare. Vortici:

- v_{in} velocità quando inizia il moto di rotazione
- r_{in} distanza dall'asse
- $L = dm\, v_{in} r_{in}$

Quando l'elemento è a distanza r dall'asse: $v = \frac{v_{in} r_{in}}{r} \Rightarrow \omega = \frac{v}{r} = \frac{\omega_{in} r_{in}^2}{r^2}$

- Nella massa liquida in rotazione elementi contigui hanno velocità diverse, però se $\eta = 0$ non si originano forze di attrito interno

OSCILLAZIONI

- Proprietà dell'eq. diff. dell'oscillatore armonico

- $\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = 0$ → equazione diff. del secondo ordine lineare, a coeff. costanti, omogenea *

- se $x(t)$ è soluzione, anche $\alpha x(t)$ è soluzione
- se $y(t)$ è un'altra soluzione, anche $z(t) = x(t) + y(t)$ è soluzione

$$\rightarrow \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}(x+y) = \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 x - \omega^2 y = -\omega^2(x+y) = -\omega^2 z$$

- * ammette due soluz. reali: $x(t) = a \operatorname{sen}\omega t + b\cos\omega t$ (soluz. più generale)

$\rightarrow x(t) = A\operatorname{sen}(\omega t + \phi)$ con $a = A\cos\phi$, $b = A\operatorname{sen}\phi$

$\rightarrow x(t) = B\cos(\omega t + \varphi)$ con $a = -B\operatorname{sen}\varphi$, $b = B\cos\varphi$

utilizzando le formule di addizione di seno e coseno

- $A = \sqrt{a^2+b^2} = B$, $\operatorname{tg}\phi = \dfrac{b}{a}$, $\operatorname{tg}\varphi = -\dfrac{a}{b}$

- Eq. non omogenea: $\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = f(t)$

se $x_p(x)$ è una soluz. particolare → $x(t) = \alpha\operatorname{sen}\omega t + \beta\cos\omega t + x_p(t)$

- Se con una certa $f_1(t)$ si ha come soluz. $x_1(t)$ e con una certa $f_2(t)$ la soluz. $x_2(t)$, allora se il termine noto è $f_1(t) + f_2(t)$ la soluz. è $x_1(t) + x_2(t)$

$$\frac{d^2}{dt^2}(x_1+x_2) + \omega^2(x_1+x_2) = \frac{d^2x_1}{dt^2} + \omega^2 x_1 + \frac{d^2x_2}{dt^2} + \omega^2 x_2 = f_1 + f_2$$

PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE

- Energia dell'oscillatore armonico

- $E_K = \dfrac{1}{2}mv^2 = \dfrac{1}{2}m\omega^2A^2\cos^2(\omega t + \phi)$
- $E_P = \dfrac{1}{2}Kx^2 = \dfrac{1}{2}KA^2\operatorname{sen}^2(\omega t + \phi)$

Inserendo $\omega^2 = \dfrac{K}{m}$

- $\Rightarrow E_{mecc} = E_K + E_P = \underbrace{\dfrac{1}{2}KA^2}_{\text{valore massimo assunto da } E_P \text{ (agli estremi)}} = \underbrace{\dfrac{1}{2}m\omega^2A^2}_{\text{valore massimo assunto da } E_K \text{ (nel centro di oscillazione)}} = \text{costante}$

In una posiz. generica $E_{mecc} = \dfrac{1}{2}mv^2(x) + \dfrac{1}{2}Kx^2$

- Valori medi di posizione, velocità, acc. in un periodo sono nulli

- $(E_K)_m = \dfrac{1}{2} m\omega^2A^2 \cos^2(\omega t + \phi)_m = \dfrac{1}{4}m\omega^2A^2 = \dfrac{1}{2}E_{mecc}$

- se $A_1 = A_2 = A$ e $\phi_1 = \phi_2 = 0$

$x = x_1 + x_2 = A \operatorname{sen} \omega_1 t + A \operatorname{sen} \omega_2 t = 2A \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \operatorname{sen} \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t$ (utilizzando le formule di prostaferesi)

$\Rightarrow x(t) = A(t) \operatorname{sen} \omega t = 2A \cos \Omega t \operatorname{sen} \omega t$

è un moto oscillatorio con pulsazione $\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ e ampiezza modulata con pulsazione

$\Omega = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$ FENOMENO DI BATTIMENTO

- Somma di moti armonici su assi ortogonali → un grado di libertà
Somma di moti armonici rettilinei che danno un moto piano

$x = A \operatorname{sen} \omega t$ $\quad y = B \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$ (forze uguali)

- se i moti sono in fase: $\phi = 0$

* $\frac{x}{y} = \frac{A}{B}$ → il punto si muove lungo un segmento di retta tra le posizioni $-A, -B$ e A, B

* $\theta = \operatorname{arctg} \frac{B}{A}$ → angolo che forma la retta con l'asse x

- se i moti sono in opposizione di fase: $\phi = \pi$

$\frac{x}{y} = -\frac{A}{B}$ e $\theta = -\theta$ (situazione analoga alla precedente, retta simmetrica rispetto all'asse y)

- se i moti sono in quadratura di fase: $\phi = \frac{\pi}{2}$

$x = A \operatorname{sen} \omega t$ $\quad y = B \operatorname{sen}\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \omega t$, $\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{y}{B}\right)^2 = 1$

La traiettoria di P è un'ellisse percorsa in senso orario

- se $\phi = \frac{3}{2}\pi$ l'ellisse è percorsa in senso antiorario.
- se $A = B$ → traiettoria circolare (moto uniforme)
- se ϕ è generico ellisse con assi non paralleli agli assi cartesiani, anche se $A = B$

- Forza che dà origine al moto: $F_x = -Kx$ e $F_y = -Ky$ (componenti)

$\Rightarrow \vec{F} = -Kx\vec{u}_x - Ky\vec{u}_y = -K(x\vec{u}_x + y\vec{u}_y) = -K\vec{r}$ → forza elastica bidimensionale

è una forza conservativa con $E_p = \frac{1}{2} K r^2$

- $E_K = \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2) = \frac{1}{2} m\omega^2 \left[A^2 \cos^2 \omega t + B^2 \cos^2(\omega t + \phi)\right]$
- $E_p = \frac{1}{2} K r^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 (x^2 + y^2) = \frac{1}{2} m\omega^2 \left[A^2 \operatorname{sen}^2 \omega t + B^2 \operatorname{sen}^2(\omega t + \phi)\right]$
- $E_{mecc} = E_K + E_p = \frac{1}{2} m\omega^2 (A^2 + B^2) = \frac{1}{2} K (A^2 + B^2)$
- $\frac{1}{2} m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2} K A^2$ en. mecc. moto lungo l'asse x $\quad \frac{1}{2} m\omega^2 B^2 = \frac{1}{2} K B^2$ en. mecc. moto lungo l'asse y

- La soluzione dell'omogenea associata $\ddot{z}+\beta\dot{z}+\omega^2 z=0$ descrive un moto smorzato: dopo un certo tempo (regime transitorio) si raggiunge il regime stazionario, rappresentato dalla soluz. particolare:
- $z(t)=B\cos(\Omega t+\varphi)$ → descrive oscillazioni forzate indotte dalla forza $\vec{F}(t)$
- $B=\dfrac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega^2-\Omega^2)^2+b^2\Omega^2}}$
- $\tan\varphi=-\dfrac{b\Omega}{m(\omega^2-\Omega^2)}$
- Ampiezza delle oscillazioni massima per: $\Omega=\omega\sqrt{1-\dfrac{b^2}{2m^2\omega^2}}$ ⇒ RISONANZA

La risonanza è tanto più evidente quanto è minore il contributo dell'attrito (proporzionale a b).

– Analisi di Fourier

- Funzione periodica $f(t)$ che nell'intervallo T sia divisibile in un numero finito di tratti in cui $f(t)$ sia continua e monotona. Tale $f(t)$ è sempre esprimibile come somma di una serie di termini sinusoidali:
- $f(t)=a_0+\sum_1^\infty{}_m(a_m \operatorname{sen} m\omega t+b_m\cos m\omega t)=a_0+\sum_1^\infty{}_m C_m \operatorname{sen}(m\omega t+\phi_m)$

SVILUPPO IN SERIE DI FOURIER

- Coefficienti di Fourier: $a_m=\dfrac{2}{T}\int_0^T f(t)\operatorname{sen} m\omega t\,dt$

$$b_m=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos m\omega t\,dt$$

$$C_m=\sqrt{a_m^2+b_m^2} \qquad \operatorname{tg}\phi=\frac{b_m}{a_m}$$

$$a_0=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt \rightarrow \text{valor medio di } f(t)$$

- Con $m=1$ primo armonico, con $m>1$ armonici superiori (pulsazioni $2\omega, 3\omega$)
- Se invece che uno spettro discreto si ha uno spettro continuo:

$$f(t)=\int_0^\infty [a(\omega)\operatorname{sen}\omega t+b(\omega)\cos\omega t]\,d\omega$$

$$a(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\operatorname{sen}\omega t\,dt$$

$$b(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\omega t\,dt$$

GRAVITAZIONE

- Forze centrali

- Si definisce forza centrale una forza tale che la sua direzione passa sempre per un punto fisso, detto centro della forza, e il modulo è funzione soltanto della distanza dal centro stesso

- $\vec{u}_r$ versore direzione $OP = r$, $F = F(r)u_r$, con $F(r) > 0$ se la forza è repulsiva, $F(r) < 0$ se è attrattiva

- La presenza di una forza, funzione della posizione, che agisce in una certa regione dello spazio costituisce una modifica dello spazio stesso, chiamata campo di forza

- $\frac{dL}{dt} = 0$ ed L = costante (direz., verso, modulo) perchè il momento della forza rispetto al centro è ovunque nullo

Se L costante in direzione $\rightarrow$ r e v devono stare sempre sullo stesso piano
" " " verso $\rightarrow$ verso di percorrenza sulla traiettoria fisso

- $L = r \times mv = r \times m(v_r + v_\theta) = r \times mv_\theta \rightarrow r\frac{d\theta}{dt}$

perchè r ed **vr sono** // $\rightarrow$ prodotto vettoriale nullo

- $\underset{\text{costante}}{L} = mrv_\theta = mr^2 \frac{d\theta}{dt}$ (in modulo) $\rightarrow$ costante

- Velocità areale: $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{2m}$ = costante (modulo L costante)

Se la traiettoria è chiusa: $\frac{dA}{dt} = C \rightarrow C = \frac{A}{T}$ $T \rightarrow$ periodo impiegato a percorrere l'area

$\frac{A}{T} = \frac{L}{2m} \rightarrow T = \frac{2m}{L} A$

- Le forze centrali sono conservative: $\omega = \int_A^B F \cdot ds = \int_A^B F(r) \underbrace{u_r \cdot ds}_{ds \cdot \cos\theta = dr}$

$\Rightarrow \omega = \int_A^B F(r)dr = f(r_B) - f(r_A)$ (f = - energia)

- La forza gravitazionale

- LEGGI DI KEPLERO:
  1) I pianeti percorrono orbite ellittiche intorno al Sole che occupa uno dei fuochi dell'ellisse
  2) La velocità areale con cui il raggio vettore che unisce il Sole ad un pianeta descrive l'orbita è costante
  3) Il quadrato del periodo di rivoluzione di ogni pianeta è proporzionale al cubo del semiasse maggiore dell'ellisse: $T^2 = Kr^3$

- Massa inerziale e massa gravitazionale

- $m_I g = \gamma \frac{m_{TG} m_G}{r_T^2}$ $\quad m_I$ = massa inerziale, m_G = massa gravitazionale

$\Rightarrow g = \gamma \frac{m_{TG}}{r_T^2} \frac{m_G}{m_I}$ → costante, indipendentemente dal corpo

Si suppone $m_G = m_I$ (nell'esperimento di Cavendish le masse delle sfere sono quelle inerziali, quindi γ è calcolato a partire da masse inerziali)

- Campo gravitazionale

- $F_{1,2} = \left(-\gamma \frac{m_1}{r^2} u_{1,2}\right) m_2$ $\qquad F_{2,1} = \left(-\gamma \frac{m_2}{r^2} u_{2,1}\right) m_1$

⇓

prodotto di un vettore che dipende solo da m_1 e dalla distanza da m_1 per la massa m_2

- Vettore = campo gravitazionale G, generato dalla massa sorgente del campo, nel punto P distante r

- $G_1 = -\gamma \frac{m_1}{r^2} u_1$, $F_{1,2} = m_2 G_1$
  $G_2 = -\gamma \frac{m_2}{r^2} u_2$, $F_{2,1} = m_1 G_2$
  * u_i versore uscente radialmente dal punto in cui si trova la massa sorgente m_i

$G_1 \neq G_2$ ma $F_{1,2} = -F_{2,1}$

* valide per masse puntiformi o a simmetria sferica

- $G(P) = \sum_1^n{}_i G_i = \sum_1^n{}_i \left(-\gamma \frac{m_i}{r_i^2} u_i\right)$ → contributo di n masse puntiformi
- Se il corpo è di massa estesa: $\int dG$ (contributi di elementi di massa dm)
- Se la massa sui cui agisce il campo è puntiforme $F = mG$, se è estesa $\int dF$ agente sulla massa dm

- Energia potenziale gravitazionale

- $dW = F \cdot ds = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \underbrace{\vec{u}_1 \cdot ds}_{= dr}$
- $W = \int_A^B dW = \int_{r_A}^{r_B} \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} dr = -\gamma m_1 m_2 \left(-\frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_A}\right) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r_A} - \left(-\gamma \frac{m_1 m_2}{r_B}\right) +$

$\Rightarrow \boxed{E_{p,A} - E_{p,B}}$

- Energia potenziale: $E_p = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r}$
  il segno indica che la forza gravitazionale è attrattiva

TERMODINAMICA

PRIMO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA

- Sistema termodinamico: porzione del mondo che può essere costituita da una o più parti, delle quali si osservano le caratteristiche fisiche macroscopiche e le loro eventuali variazioni (sistema continuo)
- Ambiente: insieme costituito da una o più parti con cui il sistema può interagire
- Sistema + ambiente = universo termodinamico (in senso locale)
- Sistema aperto: scambi di energia e materia
- " chiuso: solo scambi di energia
- " isolato: né scambi di materia né di energia (universo termodinamico)
- Variabili termodinamiche: servono a descrivere il sistema
  - estensive: proprietà globali, additive (massa, volume)
  - intensive: " locali, non additive (temperatura, pressione)
- Equilibrio termodinamico: le variabili termodinamiche (variabili di stato) sono costanti nel tempo
  - equilibrio meccanico
  - equilibrio chimico
  - equilibrio termico
- Equazione di stato: precisa relazione tra le variabili termodinamiche
  - forma implicita: $f(p,V,T)=0$
  - " esplicita: $p=p(V,T)$, $T=T(p,V)$, $V=V(p,T)$
- Trasformazione termodinamica: trasformaz. da un primo ad un secondo stato di equilibrio termod.
- Equilibrio termico: due sistemi con la stessa temperatura
- Principio dell'eq. termico: due sistemi in eq. termico con un terzo sono in eq. termico tra loro
- Sistema adiabatico: circondato da pareti adiabatiche (non si raggiunge mai l'equilibrio termico)

- Definizione di temperatura. Termometri
- Temperatura empirica $T = 273,16 \dfrac{X}{X_{pt}}$ K

- Scale termometriche

- Scala Rankine = $\dfrac{9}{5} T(K)$
- Scala Fahrenheit = $t(°F) = \dfrac{9}{5} T(K) - 459,67$
- Conversione Fahrenheit - Celsius: $t(°C) = \dfrac{9}{5} t(°C) + 32$

$$t(°C) = \frac{5}{9}[t(°F) - 32]$$

- Sistemi adiabatici. Esperimenti di Joule. Calore

- $W_{ad} = -\Delta U = U_{in} - U_{fin}$ ($U \rightarrow$ funz. che dipende solo dallo stato del sistema)
- $W>0$ se il sistema fornisce lavoro all'esterno; $W<0$ se si compie lavoro dall'esterno sul sistema

- Calorimetria

- $Q = mc(T_{fin} - T_{in})$
- $dQ = mc\, dT$
- $c = \frac{1}{m}\frac{dQ}{dT}$ → calore specifico, dipende dal tipo di sostanza (calore necessario per far variare di 1K (1°C) la temperatura dell'unità di massa)
- $Q_1 = -Q_2 \Rightarrow m_1 c_1 (T_e - T_1) = -m_2 c_2 (T_e - T_2)$
- $C = mc$ → capacità termica: calore necessario per far variare di 1K la temperatura del corpo
- $Q = mc(T_2 - T_1)$ formula generalizzata
- Se il calore specifico nell'intervallo di temperatura non è costante:

$$Q = \int dQ = m\int_{T_1}^{T_2} c(T)\,dT$$

- Calore specifico molare: $c = \frac{1}{n}\frac{dQ}{dT}$ (n = n° di moli)
- $dQ = nc\,dT$
- $Q = nc(T_2 - T_1)$
- $Q = n\int_{T_1}^{T_2} c(T)\,dT$
- $c = \frac{1}{m}\frac{dU}{dT}$ o $c = \frac{1}{n}\frac{dU}{dT}$ (perché $dW = 0$, quindi $dQ = dU$)

Valide solo quando il calore scambiato può essere espresso come variazione di una funz. di stato.

- Processi isotermi. Cambiamenti di fase

- Calore latente: quantità di calore necessario per il cambiamento di fase di una massa m di sostanza pura
  $Q = m\lambda$
- I cambiamenti di fase sono reversibili (in opportune condizioni)

- Trasmissione del calore

- Convenzione, conduzione ed irraggiamento termici

- Conduzione del calore

- $dQ = -k \frac{dT}{dn} dS\, dt$ legge di Fourier

k → conduttività termica

$-$: flusso di calore ha verso opposto rispetto al gradiente (temp. minori)

dS: elemento di sup. isoterma

$\frac{dT}{dn}$: modulo del gradiente di temperatura, ortogonale a dS e diretto nel verso delle temperature crescenti

GAS IDEALI E REALI

- Legge isoterma di Boyle

- pV = costante → Legge di Boyle
- A temperatura costante la pressione è inversamente proporzionale al volume
- $p_1 V_1 = p_2 V_2$

- Luogo dei punti → ramo di iperbole equilatera di coordinate $p(y)$ $V(x)$
  ISOTERME DEL GAS IDEALE → per ogni temperatura una data iperbole

- Piano pV = piano di Clapeyron

- Legge isobara di Volta - Gay Lussac

- Trasformazione isobara → pressione costante
- Il volume varia linearmente con la temperatura: $V = \underbrace{V_0}_{\text{volume a } t=0}(1+\underbrace{\alpha}_{\text{coeff. di dilataz. termica}} t)$ → temp. in gradi Celsius
- Trasformazione rappresentata da un segmento di retta // all'asse dei volumi

- Legge isocora di Volta - Gay Lussac

- Se si mantiene costante il volume di un gas la **pressione** risulta funzione lineare della temperatura

- $p = \underbrace{p_0}_{\text{pressione a } t=0}(1+\underbrace{\beta}_{\text{costante indipendente dal tipo di gas}} t)$ → rappresentata da un segmento di retta // all'asse delle pressioni

- Alle condizioni di gas ideale: $\alpha = \beta = \frac{1}{273,15}$ °C^{-1}
- quindi: $V = V_0 \alpha \left(\frac{1}{\alpha} + t\right) = V_0 \alpha T$ con $T = \frac{1}{\alpha} + t = 273,15 + t$
  $p = p_0 \alpha \left(\frac{1}{\alpha} + t\right) = p_0 \alpha T$

- Legge di Avogadro

- Volumi uguali di gas diversi, alla stessa temperatura e pressione, contengono lo stesso numero di molecole (gas che abbiano un comportamento ideale)

- M massa totale del gas, m massa di ciascuna delle molecole che lo compongono
  - n° molecole: $N = \frac{M}{m}$
  - $m = A\, m_0 = A \cdot 1,66 \cdot 10^{-27}$ Kg (A massa molecolare, m_0 unità di massa atomica)
  $\Rightarrow N = 6,022 \cdot 10^{26} \frac{M}{A}$ (M numericamente uguale ad A)

  $\Rightarrow N = N_A = 6,022 \cdot 10^{26}$ molecole / Kmol (chilomole)

  $\Rightarrow N = N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$ molecole / mol (mole)

- Mole: quantità di materia che contiene tante entità elementari quanti sono gli atomi contenuti in 12 g dell'isotopo ^{12}C del carbonio, ovvero $6,022 \cdot 10^{23}$ entità elementari.

- Una mole di qualsiasi gas, a una data temperatura e pressione, occupa sempre lo stesso volume

- Dimostriamo che $c_p > c_v$ per un gas ideale

I principio : $Q = \Delta U + \omega$

- $Q_v = n c_v \Delta T = \Delta U$ in quanto $\omega = 0$

- $Q_p = n c_p \Delta T = \Delta U + p dV$ → il volume cresce con la temperatura quindi c'è lavoro

ΔU rimane la stessa, quindi $Q_p > Q_v \Rightarrow c_p > c_v$

- Il calore che bisogna cedere a una mole di gas ideale per fare aumentare la sua temperatura di 1K è maggiore a pressione costante che a volume costante, perché a pressione costante il gas compie anche del lavoro

- Valido anche se c_p e c_v sono funz. della temperatura (dimostrabile con le relazioni valide per le trasformazioni infinitesime)

$dQ = dU + d\omega$ $\quad dQ_v = n c_v dT = dU$ $\quad dQ_p = n c_p dT = dU + pdV > dQ_v$

- Energia interna del gas ideale
(esempio con trasf. isoterma)

- Nell'espansione libera l'energia interna di un gas ideale non varia, $\Delta U = Q - \omega = 0$
- Poiché nel processo la temperatura del gas non cambia, l'energia interna deve essere funzione soltanto della temperatura (vero solo per un gas ideale)

- Consideriamo due generici stati di equilibrio A e B: $\Delta U = U_B - U_A$ e scegliamo una trasf. AC isocora e CB isoterma

$\Delta U = U_B - U_A = U_B - \cancel{U_C} + \cancel{U_C} - U_A = U_B - U_A = U_C - U_A$

perché $U_B = U_C$ essendo gli stati B e C alla stessa temp. e U funz. solo della temp.

Applicando il primo principio alla trasf. isocora: $\omega = 0$, $\Delta U = Q$

$\Rightarrow$ • $\Delta U = U_B - U_A = n c_v (T_B - T_A) = n c_v \Delta T$ (c_v costante)

• $\Delta U = U_B - U_A = n \int_{T_A}^{T_B} c_v \, dT$ (c_v non costante)

- Per trasf. infinitesime: $dU = n c_v dT$

$\Rightarrow c_v = \frac{1}{n} \frac{dU}{dT}$ → poiché l'energia interna è funz. solo della temperatura, anche il calore specifico a volume costante di un gas ideale dipende solo dalla temperatura

- Primo principio in maniera esplicita per trasformazioni di gas ideali

$d Q = n c_v dT + d\omega \Rightarrow Q = n \int_{T_A}^{T_B} c_v dT + \omega$

$Q = n c_v \Delta T + \omega$ $\quad c_v =$ costante

- Se la trasf è reversibile:

$Q = n c_v dT + pdV \Rightarrow Q = n \int_{T_A}^{T_B} c_v dT + \int_{V_A}^{V_B} pdV$

$Q = n c_v \Delta T + \int_{V_B}^{V_B} pdV$ se c_v è costante

Integrando dallo stato A allo stato B e supponendo γ costante:

- $(\gamma - 1) \ln \frac{V_B}{V_A} = \ln \frac{T_A}{T_B} \Rightarrow \ln \left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{\gamma-1} = \ln \frac{T_A}{T_B}$

Uguaglianza tra logaritmi = uguaglianza tra argomenti:

- $T_A V_A^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1}$ -> relazione tra le coordinate termodinamiche del gas durante una trasformaz. adiabatica reversibile

- $TV^{\gamma-1} = cost.$ $\quad pV^{\gamma} = cost.$ $\quad Tp^{(1-\gamma)/\gamma} = cost.$ -> eq. di una trasf. adiabatica reversibile di un gas ideale

- Trasformazioni isoterme

- Temperatura T costante -> $\Delta U = 0$, $Q = W$, $p_A V_A = p_B V_B$

- espansione isoterma: $W_{AB} > 0$ (il gas compie lavoro) $Q_{AB} > 0$ (assorbe calore)
  compressione isoterma: $W_{AB} < 0$ (il gas subisce lavoro) $Q_{AB} < 0$ (cede calore)

- Se reversibile: $W_{AB} = \int_A^B p\,dV = \int_A^B \frac{nRT}{V} dV = nRT \int_A^B \frac{dV}{V} = nRT \ln \frac{V_A}{V_B}$
  $\quad \| $
  Q (calore scambiato)

- Una trasf. isoterma reversibile comporta sempre uno scambio di calore

- Trasformazioni isocore

- $V =$ costante $\Rightarrow W = 0$
  $\Rightarrow Q = \Delta U = nc_V (T_B - T_A)$ se $c_V =$ costante

- Dall'eq. di stato si ha (essendo V costante):

  $$\frac{p_A}{T_A} = \frac{p_B}{T_B}$$

- Se si cede calore al gas, la sua pressione e la sua temperatura aumentano, mentre se si assorbe calore dal gas pressione e temperatura diminuiscono

- Una trasformazione isocora reversibile si realizza mettendo a contatto il gas con una serie infinita di sorgenti ($T_n = T_{n-1} + dT$)

- Trasformazioni isobare Entalpia.

- $\frac{V_A}{T_A} = \frac{V_B}{T_B} \Rightarrow \frac{V_A}{V_B} = \frac{T_A}{T_B}$

- Il gas può scambiare sia lavoro che calore:

  - $Q = nc_p (T_B - T_A)$
  - $W = p(V_B - V_A) = p\left(\frac{nRT_B}{p} - \frac{nRT_A}{p}\right) = nR(T_B - T_A)$

  e deve sempre essere $Q - W = \Delta U = nc_V (T_B - T_A)$

- Se si cede calore al gas, il suo volume e la sua temperatura aumentano e il gas compie lavoro; se si assorbe calore al gas, volume e temperatura diminuiscono, il gas subisce lavoro.

Dividendo membro a membro i termini delle relazioni:

$T_2 V_B^{\gamma-1} = T_1 V_C^{\gamma-1}$ $\qquad$ $T_2 V_A^{\gamma-1} = T_1 V_D^{\gamma-1}$

$\Rightarrow \left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_C}{V_D}\right)^{\gamma-1}$ ovvero $\frac{V_B}{V_A} = \frac{V_C}{V_D}$

- $\Rightarrow \eta = 1 - \frac{T_1}{T_2}$ il rendimento del ciclo di Carnot, descritto da un gas ideale con calore specifico costante, dipende solo dalle temperature a cui avvengono gli scambi isotermi di calore.
  Vale per qualunque sostanza descriva il ciclo

- Ciclo di Stirling

1) trasf. AB → espansione isoterma reversibile a temperatura T_2
2) " BC → isocora reversibile da T_2 a $T_1 < T_2$
3) " CD → compressione isoterma reversibile a temperatura T_1
4) " DA → isocora reversibile da T_1 a T_2

1) $Q_A = Q_{AB} = W_{AB} = nRT_2 \ln \frac{V_B}{V_A} > 0$

3) $Q_C = Q_{CD} = W_{CD} = nRT_1 \ln \frac{V_D}{V_C} < 0$

2) Serie infinitesima di sorgenti da T_2 a T_1, il gas cede calore

$Q_{BC} = nc_V (T_1 - T_2)$

4) Processo inverso, il gas assorbe calore

$Q_{DA} = nc_V (T_2 - T_1) = -Q_{BC}$

- Rendimento: $\eta = 1 + \frac{Q_C}{Q_A} = 1 + \frac{nRT_1 \ln (V_D/V_C)}{nRT_2 \ln (V_B/V_A)} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$ = ciclo di Carnot

perché $V_A = V_D$ e $V_B = V_C$

- Cicli frigoriferi

- Assorbe lavoro e cede calore $(Q = W < 0)$
- Assorbe calore Q_0 dalla sorgente fredda, assorbe lavoro e cede calore Q_C a una sorgente calda: risulta sempre $|Q_C| > Q_0$

- efficienza o coeff. di prestazione: $\xi = \frac{Q_0}{|W|}$, tanto maggiore quanto minore è il modulo del lavoro speso nel ciclo, a parità di calore Q_0 assorbito

- Ciclo di Carnot percorso in senso inverso = ciclo frigorifero (p. 308)

- $\xi = \frac{Q_0}{|Q_C + Q_0|} = \frac{nRT_1 \ln (V_C/V_D)}{nRT_2 \ln (V_B/V_A) - nRT_1 \ln (V_C/V_D)} = \frac{T_1}{T_2 - T_1}$

con $V_B/V_A = V_C/V_D$

- $Q_0 + |W| = |Q_C|$

- Teoria cinetica dei gas

• Ipotesi: 1) un gas è costituito da molecole uguali, in moto continuo e disordinato
2) gli urti tra molecole e tra molecole e contenitore sono elastici
3) non ci sono forze intermolecolari, se non durante gli urti
4) le dimensioni delle molecole sono molto piccole rispetto alle distanze medie tra di esse

- Calcolo della pressione

• Contenitore cubico di lato a
• Velocità molecola: $v_x\vec{u}_x + v_y\vec{u}_y + v_z\vec{u}_z$
• Urto contro la parete yz: da $v_x\vec{u}$ a $-v_x\vec{u}_x$
• Variaz. quantità di moto: $-2mv_x\vec{u}_x$
• Impulso comunicato alla parete: $2mv_x\vec{u}_x$
• Urto successivo dopo: $t = \frac{2a}{v_x}$
• N° urti al secondo: $\frac{1}{t} = \frac{v_x}{2a}$
• Impulso comunicato in un secondo: $F_x = 2mv_x \frac{v_x}{2a} = \frac{m v_x^2}{a}$ (singola molecola)
• Forza risultante sulla parete $R_x = \frac{m}{a} \sum_i v_{x,i}^2$ (somma estesa a tutte le molecole)
• Pressione sulla parete yz: $p = \frac{R_x}{S} = \frac{m}{a^3} \sum_i v_{x,i}^2 = \frac{Nm}{V} \frac{1}{N} \sum_i v_{x,i}^2$
• Velocità media quadratica: radice quadrata della media dei quadrati delle velocità

$$\bar{v}^2 = \bar{v}_x^2 + \bar{v}_y^2 + \bar{v}_z^2 = \frac{1}{N} \sum_i (v_{x,i}^2 + v_{y,i}^2 + v_{z,i}^2)$$

$$\bar{v}_x^2 = v_y^2 = v_z^2 = \frac{\bar{v^2}}{3}$$ → moto disordinato, non c'è una direzione preferita

• Eq. Joule - Clausius - Krönig: $p = \frac{Nm}{V}\frac{\bar{v}^2}{3} \Rightarrow pV = \frac{1}{3} Nm\bar{v}^2$
• Energia cinetica media di traslaz. della molecola: $E_K = \frac{1}{2} m\bar{v}^2$

$\Rightarrow pV = \frac{2}{3} \underbrace{N\bar{E}_K}_{\text{(en. totale)}}$

• Eguagliando con $pV = nRT$

$\Rightarrow E_K = \frac{3}{2}\frac{n}{N} RT = \frac{3}{2}\underbrace{\frac{R}{N_A}}_{k_B} T \Rightarrow E_K = \frac{3}{2} k_B T$ → l'energia cinetica media di traslazione di una molecola di gas è proporzionale alla temp. del gas

• Velocità media quadratica: $\frac{1}{2} m\bar{v}^2 = \frac{3}{2} k_B T$

$$\Rightarrow \bar{v} = \sqrt{\frac{3k_BT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{A}}$$

moltiplicato num. e den. per N_A

SECONDO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA

- Enunciati del secondo principio della termodinamica

- Enunciato di Kelvin-Planck: è impossibile realizzare un processo ciclico che abbia come unico risultato la trasf. in lavoro del calore fornito da una sorgente a temperatura uniforme

- Enunciato di Clausius: è impossibile realizzare un processo che abbia come unico risultato il trasferimento di una quantità di calore da un corpo ad un altro a temperatura maggiore

- I due processi sono possibili se non costituiscono l'unico risultato

- Per un ciclo monotermo reversibile: $\omega = 0$, $Q = 0$
  ↳ utilizza una sola sorgente

- Equivalenza tra i due enunciati: la negazione di uno comporta la negazione dell'altro

- Reversibilità e irreversibilità

- Una trasformazione reversibile non comporta alterazioni permanenti, nel senso che è sempre possibile riportare nei rispettivi stati iniziali il sistema e l'ambiente che con esso interagisce

- Quando avviene una trasformazione irreversibile non è più possibile ritornare allo stato di partenza senza modificare il resto dell'universo.

- Teorema di Carnot

- Tutte le macchine reversibili che lavorano tra le stesse sorgenti alle temperature T_1 e T_2 hanno rendimento eguale; qualsiasi altra macchina che lavori tra le stesse sorgenti non può avere rendimento maggiore. Il risultato è indipendente dal tipo di sistema che compie il ciclo.

$$\eta_x = \eta_R \qquad \underset{\eta_{max}}{\eta} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$ → rendimento di tutte le macchine reversibili che lavorano con due sorgenti

- Se sono presenti più macchine che lavorano con più sorgenti, la macchina reversibile è quella il cui rendimento è il limite superiore dei rendimenti possibili

- Relazione tra calori scambiati e temperature a cui avviene lo scambio:

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0$$

- A parità di calore assorbito Q_A, la macchina reversibile è quella che fornisce il lavoro massimo

$$\omega_{max} = Q_A \eta_R = Q_A \left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right) = T_1 \left(\frac{Q_A}{T_1} - \frac{Q_A}{T_2}\right)$$

- A parità di lavoro fornito, la macchina reversibile è quella che assorbe meno calore

$$Q_{min} = \frac{\omega}{\eta_R} = \frac{\omega}{1 - \frac{T_1}{T_2}}$$

- Termometro costituito da una macch. reversibile che lavora tra la temp. da misurare e la temp. del punto triplo dell'acqua (273,16 K)

$$\frac{Q}{Q_{pt}} = \frac{g(t)}{g(t_{pt})} = \frac{g(t)}{273,16} \Rightarrow g(t) = 273,16 \left(\frac{Q}{Q_{pt}}\right)$$ → non dipende dalla sostanza che descrive il ciclo

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1}$$ T = temp. data dal termometro a gas ideale

- $$\frac{g(t_2)}{g(t_1)} = \frac{T_2}{T_1}$$ → proporzionali e coincidono al punto triplo dell'acqua ⇒ sono uguali

La temp. misurata col termometro a gas ideale è la temp. assoluta

- Definizione dell'unità Kelvin

- Pari a $\frac{1}{273,16}$ della temp. termodinamica assoluta del punto triplo dell'acqua, misurata con un termometro a ciclo di Carnot

- Teorema di Clausius

- data una macchina M qualsiasi che scambia calore con n sorgenti

$$\sum_{1}^{n}{}_i \frac{Q_i}{T_i} \leq 0 \; (<)$$ (dimostraz. pag. 325-6)

- se lo scambio di calore avviene con una serie infinita di sorgenti

$$\oint \frac{dQ}{T} \leq 0 \; (<)$$ $\oint$ = l'integrale è esteso a tutto il ciclo descritto dalla macchina M

- Teorema di Clausius per le macchine reversibili:

$$\sum_i \frac{Q_i}{T_i} = 0 \quad \text{o} \quad \oint \frac{dQ}{T} = 0$$

$$S_2 - S_1 = \frac{Q_A}{T_2} = \frac{-Q_C}{T_1}$$

$$\omega = (T_2 - T_1)(S_2 - S_1) = (T_2 - T_1)\frac{Q_A}{T_2}$$

- Isoterma reversibile: $\Delta S = \frac{Q}{T}$
- Adiabatica reversibile: $\Delta S = 0$
- Trasf. ciclica: $\Delta S = 0$

- Il principio di aumento dell'entropia

- $S_B - S_A = \int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_{rev} > \int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_{irr}$
- In termini infinitesimi: $dS = \left(\frac{dQ}{T}\right)_{rev} > \left(\frac{dQ}{T}\right)_{irr}$
- Se il sistema che descrive la trasf. AB è isolato termicamente:

$dQ = 0 \qquad S_B - S_A \geq 0 \Rightarrow S_B \geq S_A$ *

- L'entropia di un sistema termicamente isolato non può diminuire: essa aumenta se la trasformaz. è irreversibile, resta costante solo se la trasf. è reversibile.

* PRINCIPIO DI AUMENTO DELL'ENTROPIA

$dS \geq 0$ sistema isolato $\rightarrow$ formulazione matematica del secondo principio della termodinamica

- Per l'universo termodinamico: $\Delta S_U \geq 0$ con $\Delta S_U = \Delta S_{sist} + \Delta S_{amb}$
  - se l'universo compie una trasf. reversibile: $\Delta S_U = 0 \Rightarrow \Delta S_{sist} = -\Delta S_{amb}$
  - se " " " " irreversibile: $\Delta S_U > 0 \Rightarrow \Delta S_{sist} \neq -\Delta S_{amb}$
- Quando la trasf. è ciclica:
  - se il ciclo è reversibile: $\Delta S_U = \Delta S_{amb} = 0$
  - se il ciclo è irreversibile: $\Delta S_U = \Delta S_{amb} > 0$

$\Delta S_{sist} = 0$

- Calcoli di variazione di entropia

- Trasformazioni adiabatiche

- L'ambiente non scambia calore col sistema, ma soltanto lavoro: $\Delta S_{amb} = 0$

$\Delta S_{sist} = \Delta S_U \geq 0$

- Se la trasf. è reversibile: $\Delta S_{sist} = 0 \rightarrow$ trasf. ISOENTROPICA
- Se la trasf. è adiabatica irreversibile: $\Delta S_{sist} > 0 \rightarrow$ la variazione di entropia è calcolata lungo un'altra trasf. reversibile, che non può essere adiabatica a sua volta

- I due corpi raggiungono l'eq. termico alla temperatura:

$$T_e = \frac{m_1 c_1 T_1 + m_2 c_2 T_2}{m_1 c_1 + m_2 c_2}$$

- $\Delta S_1 = m c_1 \ln \frac{T_e}{T_1} > 0$ $\quad \Delta S_2 = mc \ln \frac{T_e}{T_2} < 0$

- $\Delta S_U = \Delta S_1 + \Delta S_2 > 0$ → processo adiabatico irreversibile

- Cambiamenti di fase

$$\Delta S = \frac{ml}{T}$$

- Riscaldamento per attrito

- Alla fine del processo l'unica variazione di entropia positiva è quella dell'ambiente che riceve il calore $-Q$ (calore ceduto dal corpo)

$$\Delta S_{amb} = -\frac{Q}{T_{amb}} = -\frac{W}{T_{amb}} = \Delta S_U > 0$$

- Entropia del gas ideale

- n moli di gas ideale passano dallo stato A (p_A, V_A, T_A) allo stato B (p_B, V_B, T_B).

$$dQ = nc_V dT + dW \quad (\text{I principio})$$

Per il calcolo utilizziamo una trasf. reversibile, quindi:

$$dW = p\,dV \qquad pV = nRT \Rightarrow dW = nRT\frac{dV}{V}$$

$$\Rightarrow S_B - S_A = \int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_{rev} = \int_A^B nc_V \frac{dT}{T} + \int_A^B \frac{nR\cancel{T}}{\cancel{T}}\frac{dV}{V}$$

Integrando:

- $S_B - S_A = nc_V \ln \frac{T_B}{T_A} + nR \ln \frac{V_B}{V_A}$

Utilizzando l'eq. di stato e la relazione di Mayer:

- $S_B - S_A = nc_V \ln \frac{p_B}{p_A} + nc_p \ln \frac{V_B}{V_A}$

- $S_B - S_A = nc_p \ln \frac{T_B}{T_A} - nR \ln \frac{p_B}{p_A}$

- La variazione di entropia dipende da due coordinate termodinamiche

- Macchina irreversibile che lavora fra due sorgenti

$$\omega_R - \omega = Q_2\left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right) - \left(Q_{1(c)} + Q_{2(A)}\right) = T_1\left(-\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2}\right) = T_1 \Delta S_U$$

- Energia inutilizzabile: $E_{IN} = T_0 \Delta S_U$

temperatura più bassa tra le sorgenti disponibili nell'ambiente

pari alla differenza tra il lavoro che si sarebbe potuto ottenere se il processo fosse stato reversibile e il lavoro effettivamente ottenuto, quando avviene un processo irreversibile in cui l'entropia dell'universo aumenta di ΔS_U

- L'energia inutilizzabile è pari al lavoro supplementare che bisognerebbe spendere per riportare in modo **reversibile** il sistema complessivo nello stato iniziale

- Cenni sul terzo principio della termodinamica

- TERZO PRINCIPIO: la variazione di entropia associata ad una trasformazione reversibile di un sistema tende a zero al tendere a zero della temperatura termodinamica assoluta (enunciato di Nernst-Simon)

oppure

con un numero finito di processi non è possibile raggiungere lo zero assoluto