



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO : 342

DATA : 25/07/2012

A P P U N T I

STUDENTE : Fantini

MATERIA : Scienza delle Costruzioni
Prof. Chiaia - Surace

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

I PARTE

VINCOLI

	CINEMATICA	STATICA
	$\int \dot{m}_p \dot{m}^T = 0$ $\int \dot{m}_p \dot{p}^T \neq 0$ $\varphi \neq 0$	$\int R_p \dot{m}^T \neq 0$ $\int R_p \dot{p}^T = 0$ $M_p = 0$
	$\int \dot{m}_p \dot{m}^T \neq 0$ $\int \dot{m}_p \dot{p}^T \neq 0$ $\varphi = 0$	$\int R_p \dot{m}^T = 0$ $\int R_p \dot{p}^T = 0$ $M_p \neq 0$
	$\int \dot{m}_p \dot{m}^T = 0$ $\int \dot{m}_p \dot{p}^T = 0$ $\varphi \neq 0$	$\int R_p \dot{m}^T \neq 0$ $\int R_p \dot{p}^T \neq 0$ $M_p = 0$
	$\int \dot{m}_p \dot{m}^T = 0$ $\int \dot{m}_p \dot{p}^T \neq 0$ $\varphi = 0$	$\int R_p \dot{m}^T \neq 0$ $\int R_p \dot{p}^T = 0$ $M_p \neq 0$
	$\int \dot{m}_p \dot{m}^T = 0$ $\int \dot{m}_p \dot{p}^T = 0$ $\varphi = 0$	$\int R_p \dot{m}^T \neq 0$ $\int R_p \dot{p}^T \neq 0$ $M_p \neq 0$

C. I. R.
retta m

qualsiasi punto della retta in p/ra

P

senza $\dot{\omega}$ in direzione m

\neq

Statica

Cinematica

$$|C| \begin{vmatrix} u_A \\ v_A \\ \varphi_A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$|C| \begin{vmatrix} M_A \\ V_A \\ M_A \end{vmatrix} = |F_{ext}| \rightarrow |C: F| \text{ se indice ordina ha rango diverso} \downarrow \text{vincoli md disp.}$$

$L_p \Delta = 0 \rightarrow$ vincoli md disp.

Gradi:

$$g - v = l - i$$

DUALITA' STATICO-CINEMATICA

$$[C] \begin{matrix} v \times g \\ g \times 1 \end{matrix} \begin{matrix} \{s_0\} \\ \{s_1\} \end{matrix} = \begin{matrix} \{s_2\} \\ \{s_3\} \end{matrix} = \begin{matrix} \{0\} \\ \{0\} \end{matrix}$$

matrice cinematica vettore spostamenti dei nodi vettore spostamenti dei f.t. vincolati

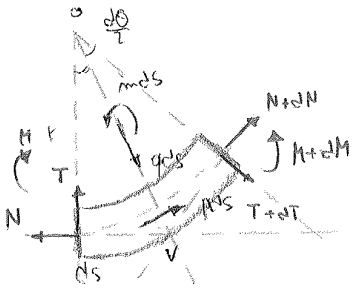
v: equazioni
g: incognite

$v < g \rightarrow \infty^v - g$ soluzioni: LABILE

$v = g \rightarrow$ almeno la soluzione unica se per disp.: ISO

$v > g \rightarrow$ almeno la soluzione: IPER
unica se per disp.

EQ. INDEFINITE DI EQUILIBRIO



$$\begin{aligned}
 \rightarrow p ds - N \cos \frac{d\theta}{2} + (N+dN) \cos \frac{d\theta}{2} + T \sin \frac{d\theta}{2} + (T+dT) \sin \frac{d\theta}{2} &= 0 \\
 + \downarrow q ds - T \cos \frac{d\theta}{2} + (T+dT) \cos \frac{d\theta}{2} - N \sin \frac{d\theta}{2} - (N+dN) \sin \frac{d\theta}{2} &= 0 \\
 \curvearrowright (v) m ds - M + M + dM - p ds \left(\frac{T}{\cos \frac{d\theta}{2}} - r \right) - T + T + dT - (T+dT) + T + dT &= 0
 \end{aligned}$$

$$\sin \frac{d\theta}{2} \approx \frac{d\theta}{2} \quad \cos \frac{d\theta}{2} = 1 \quad \tan \frac{d\theta}{2} \approx \frac{d\theta}{2} \quad ds = r d\theta$$

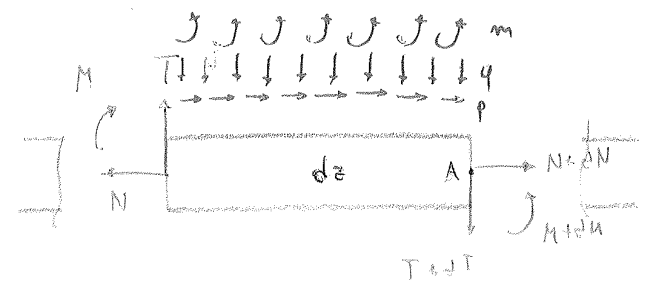
$$\begin{cases} p ds + dN + T d\theta = 0 \\ q ds + dT - N d\theta = 0 \\ m ds + dM - T + dT = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{dN}{ds} + \frac{T}{r} + p = 0 \\ \frac{dT}{ds} - \frac{N}{r} + q = 0 \\ \frac{dM}{ds} - T + m = 0 \end{cases}$$

Equazioni differenziali

$[S] \cdot \{Q\} + \{F\} = \{0\}$
 dove $\{Q\}$ sono le coordinate generali, $\{F\}$ sono le forze esterne.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{ds} & \frac{1}{r} & 0 \\ -\frac{1}{r} & \frac{1}{ds} & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{ds} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N \\ T \\ M \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} p \\ q \\ m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Trova rettilinea



$$\begin{aligned}
 \rightarrow -N + N + dN + p dz &= 0 \\
 + \downarrow -T + T + dT + q dz &= 0 \\
 \curvearrowright (A) -M + M + dM + m dz - T dz &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \frac{dN}{dz} = -p(z) \\ \frac{dT}{dz} = -q(z) \\ \frac{dM}{dz} = T - m \end{cases} \quad \frac{d^2M}{dz^2} = -q(z)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{dz} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{dz} & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{dz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N \\ T \\ M \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} p \\ q \\ m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

7 equilibrio delle tensioni lungo gli assi

$$\int(\sigma_x) \tau_{zy} dA_z \frac{dz}{3} - \tau_{yz} dA_y \frac{dy}{3} = 0 \rightarrow \left. \begin{aligned} \tau_{zy} &= \tau_{yz} \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} \\ \tau_{xz} &= \tau_{zx} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{reciproca delle} \\ \text{tensioni} \\ \text{tangenziali} \end{array}$$

• Trasformazione del tensore di tensioni

$$[\sigma_p]_{m \times m} = [N] [\sigma_p] [N]^T$$

$3 \times 3 \quad \quad \quad 3 \times 3$

• Direzioni principali

solo tensioni normali, $\tau = 0 \rightarrow$ problema agli autovalori

① $\{t_n\} = [\sigma] \cdot \{m\} \quad [\sigma] \cdot \{m\} - \sigma_n \cdot \{m\} = \{0\} \rightarrow ([\sigma] - \sigma_n [I]) \cdot \{m\} = \{0\}$

② $\{t_n\} = \sigma_n \cdot \{m\}$

escluso la soluzione banale $\det[A] = \det([\sigma] - [I] \cdot \sigma_n) = 0 \rightarrow \sigma_n^3 - T_1 \sigma_n^2 - T_2 \sigma_n - T_3 = 0$
 invarianti della tensione

$$\begin{bmatrix} (\sigma_x - \sigma_n) & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & (\sigma_y - \sigma_n) & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & (\sigma_z - \sigma_n) \end{bmatrix}$$

3 soluzioni reali $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \rightarrow$ si distinguono e si risolve trovando gli autovalori

$\{m_1\}, \{m_2\}, \{m_3\}$

$$[\sigma_p] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} T_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 & \sigma_n &= \frac{T_1}{3} \\ T_2 &= -[(\sigma_1 \sigma_2) + (\sigma_1 \sigma_3) + (\sigma_2 \sigma_3)] & & \text{secondo di deviazione} \\ T_3 &= (\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3) & & (\text{se } \neq 0 \text{ triadico}) \end{aligned}$$

se $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \rightarrow$ Stato tensionale idrostatico

• Tensore idrostatico e deviatorico

tensione normale media $\bar{\sigma} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{T_1}{3}$ per qualunque sistema di r.f.

$$[\sigma] = [\sigma^i] + [\sigma^d] \quad [\sigma^i] = \begin{bmatrix} \bar{\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\sigma} \end{bmatrix} \rightarrow \text{volumi}$$

idrostatica deviatorica

$$[\sigma^d] = \begin{bmatrix} \sigma_x - \bar{\sigma} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \bar{\sigma} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \bar{\sigma} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} \text{deviazioni, componenti di} \\ \text{forma} \\ \text{il sistema di riferimento} \end{array}$$

• Cerchi di Mohr

Stato di sforzo nell'interno di un punto in maniera grafica sul piano delle tensioni

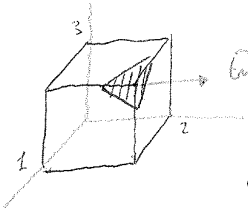
Si trovano le tensioni principali e le direzioni principali in un punto

nel sistema principale:

$$\{t_n\} = [\sigma] \cdot \{m\} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} \quad \sigma_n = \{m\} [\sigma] \{m\} = [m_1 \ m_2 \ m_3] \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix}$$

9

• Stato tensionale piano



Quando in un punto P in un corpo (tr) ha come la sola sollecitazione e non dipende dalla sezione scelta → una delle 3 tensioni principali deve essere nulla

$\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 \neq 0, \sigma_3 = 0$ il piano 1-2 è il piano delle tensioni

affinamento principale → ($\sigma_3 = 0$) ⇒
$$\begin{bmatrix} t_{11} \\ t_{22} \\ t_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} \Rightarrow t_{33} = 0$$

affinamento qualunque
$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R=2$$

per trovare lo σ principali → problema egl. caratteristico

$$\sigma_m^2 - (\sigma_x + \sigma_y) \sigma_m + (\sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2) = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \\ \sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \end{array} \right.$$

osserva del diametro ⇒ egl. di Mohr
centro C

effere si riguarda il tensore degli sforzi ($\tau_{xy}^* = 0$) infatti

$$[\sigma^*]_{x'y'} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

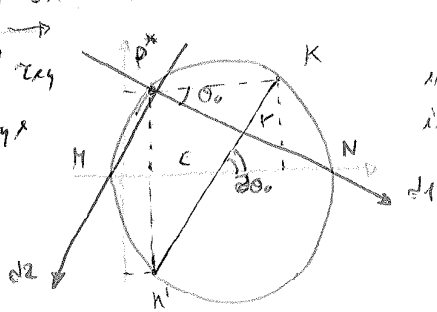
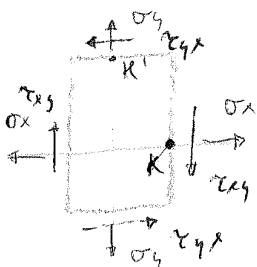
disegna traccia θ_0 da riguarda il tensore

$$\tau_{xy}^* = \tau_{xy} \cos 2\theta - \frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\theta = 0 \rightarrow \theta_0 = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right)$$

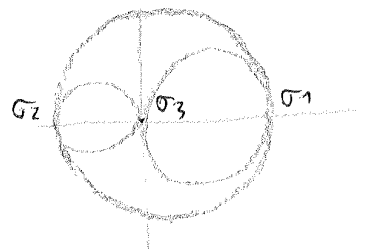
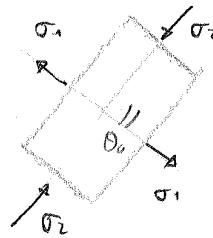
Nel piano di Mohr ($\sigma_n - \tau_n$)

$\sigma < 0 \rightarrow$ trazione
 $\tau > 0 \rightarrow$ reazione su K

$K(\sigma_x; \tau_{xy}) \quad K'(\sigma_y; \tau_{yx})$



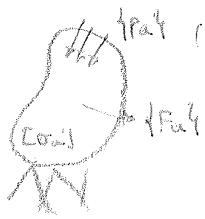
in N → $\sigma_1 > 0$
in H → $\sigma_2 < 0$



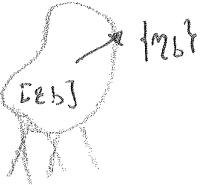
~~EQUAZIONI INDEFINITE DI EQUILIBRIO~~

11

Principio dei lavori virtuali



Sistema di forze e tensioni deve essere staticamente ammissibile
 $[Ca]T \cdot \{ \delta a \} = - \{ \delta F \}$ $\forall P \in V$ equilibrato
 $[Ca]T \cdot \{ \delta a \} = \{ \delta Pa \}$ $\forall P \in S_2$

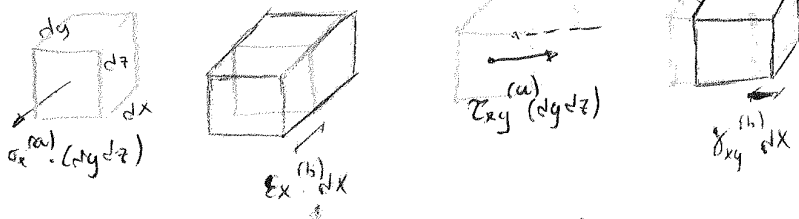


Sistema di spostamenti e deformazioni deve essere cinematicamente ammissibile
 $[Cb] \cdot \{ \delta b \} = \{ \delta e_b \}$ $\forall P \in V$ compatte
 $\{ \delta b \} = \{ \delta v \}$ $\forall P \in V$
 vincoli (se $\{ \delta v \} = 0$)
 causa

(b) è indipendente da (a) $\implies [Ca] \xrightarrow{\text{causa}} [Cb]$
 $\{ Fa \} \wedge \{ Pa \} \xrightarrow{\text{causa}} \{ vb \}$

$L_{\text{Esterno}}^* = L_{\text{Interno}}^*$ (se corpo rigido $\rightarrow L_i^* = 0$)

Lavori interni (dimensionazione elastica)



Componenti normali e tangenziali lungo X

$\sigma_x dx = \tau_{xy}^{(a)} dx dy dz = \tau_{xy}^{(a)} \cdot \gamma_{xy}^{(b)} dV$

$\delta L_i^* = \int_V \{ \sigma a \}^T \{ \delta e_b \} dV \rightarrow \text{scalare}$

Lavori esterni

$L_e^* = \int_V \{ Fa \}^T \{ \delta v_b \} dV + \int_{S_2} \{ Pa \}^T \{ \delta v_b \} dS$

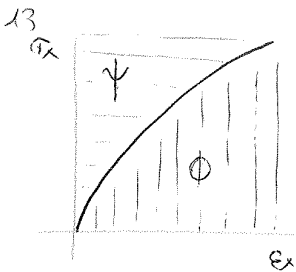
è indipendente dal tipo di materiale

$\int_V \{ Fa \}^T \{ \delta v_b \} dV + \int_{S_2} \{ Pa \}^T \{ \delta v_b \} dS = \int_V \{ \sigma a \}^T \{ \delta e_b \} dV$

Legame costitutivo

Assiomi di Noll

- 1° principio dell'estremizzazione: lo stato di tensione del continuo dipende dalla storia della deformazione
- 2° principio dell'azione locale: lo stato di tensione in P può determinarsi ignorando la deformazione del continuo in punti P' a sufficiente distanza da P
- 3° principio dell'indifferenza materiale: la risposta di un materiale alle sollecitazioni deve essere indipendente dall'osservatore



area $\Psi + \Phi \rightarrow$ Lavoro di def. se la tensione fosse costante e pari a quella finale

ELASTICITA' LINEARE



$\sigma_x = E \cdot \epsilon_x$

$\Phi = \Psi$

Esprimiamo la legge di Hooke per lo stato tridimensionale

Tensore di elasticità (del IV ordine) ha 81 componenti

Per la simmetria di $[\sigma]$ e $[\epsilon] \rightarrow$ simmetria minore \rightarrow 36 indipendenti

Per l'isotropia ($\exists \Phi$) \rightarrow simmetria maggiore \rightarrow 21 indipendenti

Sviluppi in serie di McL del f.d. Φ (nell'ipotesi di piccole deformazioni)

$$\Phi(\epsilon_x, \dots, \epsilon_{yz}) = \Phi(0) + \underbrace{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_x}\right)_0}_{\sigma_x(0)=0} \epsilon_x + \dots + \underbrace{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_{yz}}\right)_0}_{\sigma_{yz}(0)=0} \epsilon_{yz} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \epsilon_x^2}\right)_0 \epsilon_x^2 + \dots + \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \epsilon_{yz}^2}\right)_0 \epsilon_{yz}^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \epsilon_x \partial \epsilon_{yz}}\right)_0 \epsilon_x \epsilon_{yz} + \dots \right\} + \dots$$

Costante $\rightarrow 0$

210 ind. indipendenti

rimangono soltanto le derivate seconde di Φ

matrice lineare del f.d. elastico

$[H]$ con 21 indipendenti 6×6

$$[H] = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \epsilon_x^2}\right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \epsilon_x \partial \epsilon_{yz}}\right)_0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \epsilon_{yz} \partial \epsilon_x}\right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \epsilon_{yz}^2}\right)_0 \end{bmatrix}$$

21 cost. elastiche del materiale

$\Phi = \frac{1}{2} \{\epsilon\}^T [H] \{\epsilon\}$ analogia con $\Phi = \frac{1}{2} k x^2$ (oscillatore armonico)

Legge costitutiva tridimensionale

$\{\sigma\} = \frac{\partial \Phi}{\partial \{\epsilon\}} \rightarrow \{\sigma\} = [H] \{\epsilon\}$ (analogia con $F = k \cdot x$)

$\Phi = \frac{1}{2} \{\epsilon\}^T [H] \{\epsilon\} = \frac{1}{2} \{\sigma\}^T \{\epsilon\}$

analogia con la forza di pesante

Invertibilità del legame costitutivo

condizione $\det[H] > 0 \rightarrow$ 210 ind. \rightarrow è un minimo assoluto del f.d. Φ
 $\hookrightarrow \{\epsilon\} = [H]^{-1} \{\sigma\}$

$\Phi = \Psi = \frac{1}{2} \{\epsilon\}^T \{\sigma\} = \frac{1}{2} \{\sigma\}^T \{\epsilon\} = \frac{1}{2} \{\sigma\}^T [H]^{-1} \{\sigma\}$

15

• Teorema di Clapeyron



data un processo di carico quasi statico con un sistema di forze si genera un campo di spostamenti che è la soluzione del problema elastico lineare

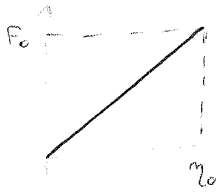
Si applica il P.L.V.

si considerano come annullabili i sistemi finiti.

$$\frac{1}{2} \int_V \{F\}^T \{u\} dV + \frac{1}{2} \int_{S_c} \{P\}^T \{u\} dS = \frac{1}{2} \int_V \{c\}^T \{e\} dV$$

reale

$$\frac{1}{2} \int_V \{F\}^T \{u\} dV + \frac{1}{2} \int_{S_c} \{P\}^T \{u\} dS = \int_V \phi dV$$

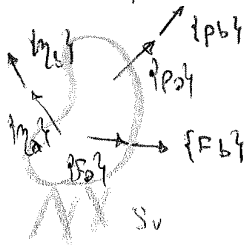


il lavoro di def. compiuto dalle f. esterne br facendo il capo della data indf. a quello def. e' alla metà del lavoro che tale f. compirebbe se agissero con il loro valore finale durante tutto il processo di carico

$$L_{def} = \int_0^{u_0} F(u) du = \frac{1}{2} F_0 u_0$$

• Teorema di Betti

La sovrapposizione degli effetti non vale br l'energia perché non considero il lavoro medio



processo di carico quasi statico con valori finali {F2} e {P2} lavoro di def. compiuto → L₀ si applica il sistema b con i ~~valori finali~~ comp. e → L_b

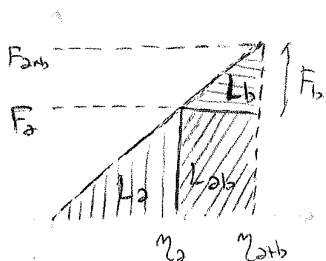
trm. di Clapeyron → $L_0 = \frac{1}{2} \int_V \{F_2\}^T \{u_0\} dV + \frac{1}{2} \int_{S_c} \{P_2\}^T \{u_0\} dS$ $L_{ab} = L_0 + L_b$

$$L_b = \frac{1}{2} \int_V \{F_2\}^T \{u_b\} dV + \frac{1}{2} \int_{S_c} \{P_2\}^T \{u_b\} dS$$

L'applicazione di b successivo ad a già presente produce un lavoro di traslazione L_{ab} delle forze del sistema a br gli spostamenti indotti dal sistema b

$$L_{ab} = \int_V \{F_2\}^T \{u_b\} dV + \int_{S_c} \{P_2\}^T \{u_b\} dS \quad (\text{no Clapeyron, no } \frac{1}{2})$$

forze spostamenti già valori finali.



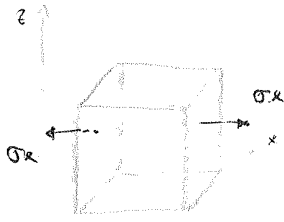
Si può invertire l'ordine

$$L_{ba} = \int_V \{F_1\}^T \{u_a\} dV + \int_{S_c} \{P_1\}^T \{u_a\} dS$$

$$L_{ab} = \int_V \{F_2\}^T \{u_b\} dV + \int_{S_c} \{P_2\}^T \{u_b\} dS$$

17

significato fisico di E e ν



$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

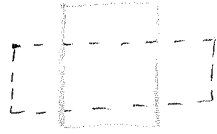
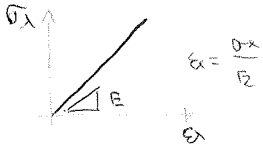
$$\epsilon_y = -\frac{\nu}{E} \sigma_x = -\nu \epsilon_x$$

$$\epsilon_z = -\frac{\nu}{E} \sigma_x = -\nu \epsilon_x$$

E : modulo di elasticità longitudinale
modulo di Young

è la rigatura del materiale nei confronti delle dilatazioni normali.

ν : coeff. di Poisson, coeff. di contrazione trasversale



$$\nu = \left| \frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} \right| = \left| \frac{\epsilon_z}{\epsilon_x} \right|$$

dilatazioni sempre diverse quindi:

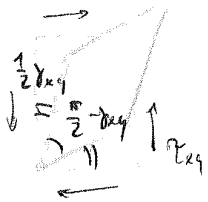
$$\nu > 0 \rightarrow 0 < \nu < \frac{1}{2}$$

$$\frac{\Delta V}{V} = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \frac{\sigma_x}{E} (1 - 2\nu)$$

segno della variazione volumetrica è correlato con σ_x

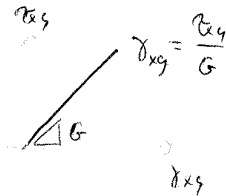
$\nu = \frac{1}{2} \rightarrow$ caso incomprimibile \rightarrow def. bloccare

significato fisico di G



$$\chi_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

modulo di elasticità tangenziale



19

metallo semi-inverso

ipotesi trasversale $\rightarrow \begin{cases} \sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 & \forall P \in V \\ \sigma_z = c \end{cases}$

verifica delle condizioni vincolo fissato in trasversale $\rightarrow N = \int_{A_1} \sigma_z dA = c \cdot A \rightarrow c = \frac{N}{A}$

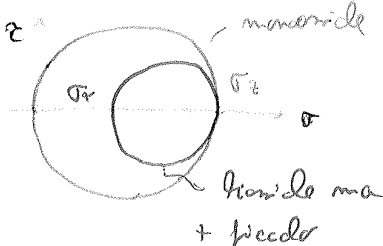
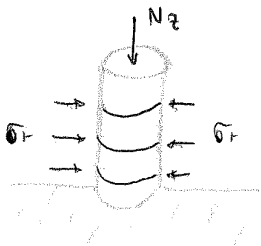
verifica eq. infinite di equilibrio $\rightarrow \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \quad \forall P \in V$

superficie laterale $\rightarrow m_z = 0 \quad \forall P \in S_c$

leggi costitutive $\rightarrow \{\epsilon\} = [H]^{-1} \{\sigma\}$ lo s.d.c. dipende non solo dalle deformazioni a differenza di quelle trasversali

$$\begin{cases} \epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} = \frac{N}{EA} & \text{ripresca derivando dalla relazione} \\ \epsilon_x = \epsilon_y = -\nu \frac{\sigma_z}{E} = -\nu \epsilon_z & \Delta l = \frac{N \cdot l}{EA} \quad \frac{EA}{l} \text{ rigidezza di tutta l'asta} \\ \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0 \end{cases}$$

• Dilatazioni trasversali impedite (esclusione delle colonne)



impedire le dilatazioni trasversali

tensioni radiali contratte

• Instabilità

se quella si inflette \rightarrow surriscaldamento (non rispettare la teoria del Saint Venant)

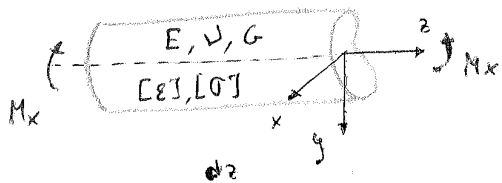
$\sigma = \frac{N}{A}$ ma la teoria di Euler $N_c = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$ (carica critica euleriana)

$\lambda = \frac{l_c}{\rho}$ \rightarrow lunghezza libera di inflessione } nelle barre dell'elemento d'inflessione
 \rightarrow raggio di inerzia

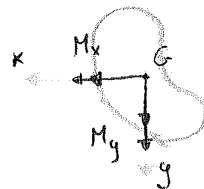
↳ distacco nodale

FLESSIONE

• Flessione retta

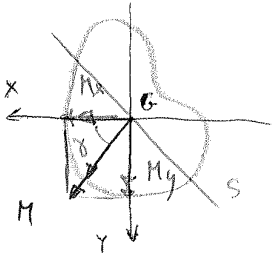


equilibrio della sezione rispetto a qualsiasi filo



applicazione di una componente di momento attorno ad un asse (X, Y)

Si scomponi M



$$\left. \begin{aligned} M_x &= M \cdot \cos \gamma \\ M_y &= M \cdot \sin \gamma \end{aligned} \right\} \text{decomposizione degli effetti}$$

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x$$

retta // $M : y = \tan \gamma \cdot x$
 eq. ass. $s \rightarrow y = -\frac{1}{\tan \gamma} x$

eq. dell'asse neutro ($\sigma_z = 0$) $\rightarrow 0 = \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x$

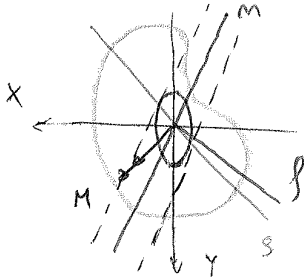
$$y = \frac{M_y}{M_x} - \frac{I_x}{I_y} x = \tan \gamma \cdot \left(\frac{\beta_x^2}{\beta_y^2} \right) \cdot x$$

$$\underbrace{\tan \gamma}_{\frac{A \beta_y^2}{A \beta_x^2}}$$

l'asse neutro e l'assiale \perp tra \perp all'asse s

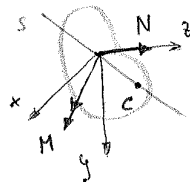
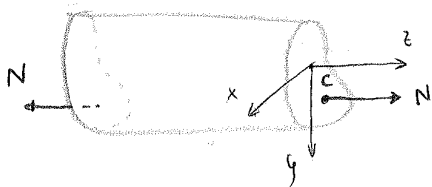
valore se $\beta_x = \beta_y$ asse n e asse s sono coincidenti.

sezioni giacchiformi (cerchio, quadrato, triangolo equilatero)



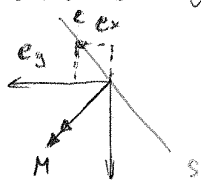
l'asse neutro e l'asse di s
 sono direzioni coniugate
 rispetto all'ellisse centrale
 di inerzia

SFORZO NORMALE ECCENTRICO



il solido e' soggetto a sforzo normale
 eccentrico quando la risultante dei carichi
 N ha retta d'azione parallela, ma non
 coincidente, con l'asse z baricentrico

s.m.l = sforzo normale centrico + flessione con asse di rotazione lontano da GC
 il luogo (z) dei centri di flessione nelle successive sezioni trasversali rappresenta la
 curva delle flessioni della struttura



$$e = \sqrt{e_x^2 + e_y^2}$$

$$M = N \cdot e \begin{cases} M_x = N \cdot e_y \\ M_y = -N \cdot e_x \end{cases}$$

$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x$$

asse neutro ($\sigma_z = 0$) $\rightarrow 0 = \frac{N}{A} + \frac{N e_y}{A \beta_x^2} y - \frac{N e_x}{A \beta_y^2} x$

$$\rightarrow 1 + \frac{e_y}{\beta_x^2} y + \frac{e_x}{\beta_y^2} x = 0$$

non e' baricentrico

23

$$\begin{cases} u = -\Theta \cdot z \cdot y \\ v = \Theta \cdot z \cdot x \\ w = 0 \end{cases}$$

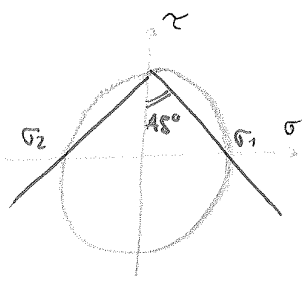
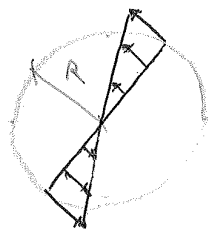
eq. caratteristiche
 $\{\epsilon\} = [D] \{\eta\}$

$$\begin{cases} \epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \gamma_{xy} = 0 \\ \gamma_{zx} = -\Theta \cdot y \\ \gamma_{zy} = \Theta \cdot x \end{cases}$$

eq. costitutive
 $\{\sigma\} = [H] \{\epsilon\}$

$$\begin{cases} \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0 \\ \tau_{zx} = -G \cdot \Theta \cdot y \\ \tau_{zy} = G \cdot \Theta \cdot x \end{cases} \quad \tau_z(r) = G \cdot \Theta \cdot r$$

tensione tangenziale risultante



isodrome di tensione
 isodrome di compressione

andamento lineare delle tensioni tangenziali.

$\tau_{z \max} = G \cdot \Theta \cdot R$
 * Cent. di massa delle equ. di equilibrio nelle Oss

$M_z = \int_A r \cdot \tau_{z\theta} \cdot dA = G \cdot \Theta \cdot \int_A r^2 \cdot dA = G \cdot \Theta \cdot I_p$

momento d'inerzia polare

$$\begin{cases} T_x = \int_A \tau_{zx} \cdot dA = -G \cdot \Theta \int_A y \cdot dA = 0 \\ T_y = \int_A \tau_{zy} \cdot dA = G \cdot \Theta \int_A x \cdot dA = 0 \end{cases}$$

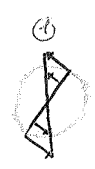
$\Theta = \frac{M_z}{G \cdot I_p} = \frac{2M_z}{G \cdot \pi \cdot R^4}$

$\varphi_z(l) = \frac{M_z \cdot l}{G \cdot I_p}$ (dipende da l)

rigidità torsionale

$\tau_z(r) = G \cdot \Theta \cdot r = \frac{M_z}{I_p} \cdot r$

$\tau_z(\max) = \frac{M_z}{I_p} \cdot R$



1) face interna -> tau(r) = b(r)

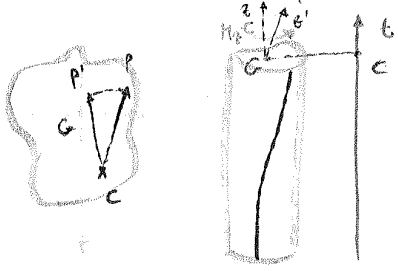
2) a partire da area resse meglio le tensioni

L'andamento va messo all'ossato, l'angolo risulta a 45° in direzione delle sigma di tensione ma se la tensione cambia verso si un problema -> differenziali con diametro. Se

* verifica delle eq. di equilibrio

$[N] \cdot \{\sigma\} = -\{P\}$
 $[N] \cdot \{\sigma\} = \{P\}$

• Traccia sezione qualunque



ogni sezione viene indotta ad un'asse longitudinale (asse di tensione) formata da C, non essendo piano ma subendo ingobbimento solo l'asse t non si deforma

ipotesi cinematiche

$$\begin{cases} u = -\Theta \cdot z \cdot (y - y_0) \\ v = \Theta \cdot z \cdot (x - x_0) \\ w = \Theta \cdot a(x, y) \end{cases}$$

eq. caratteristiche
 $\{\epsilon\} = [D] \{\eta\}$

$$\begin{cases} \epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \gamma_{xy} = 0 \\ \gamma_{xz} = \Theta \cdot (x - x_0) + \Theta \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \\ \gamma_{yz} = -\Theta \cdot (y - y_0) + \Theta \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \end{cases}$$

eq. costitutive
 $[H] \{\epsilon\} = \{\sigma\}$

$$\begin{cases} \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0 \\ \tau_{zx} = G \cdot \Theta \left[\frac{\partial w}{\partial x} - (y - y_0) \right] \\ \tau_{zy} = G \cdot \Theta \left[\frac{\partial w}{\partial y} + (x - x_0) \right] \end{cases}$$

tensione ingobbimento

Verifica delle eq. di D.D.

- eq. in diff. di equilibrio $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \rightarrow \nabla^2 w = 0$ funzione armonica
- eq. di contorno sulle superficie libere $[\frac{\partial w}{\partial x} - (y-y_c)]m_x + [\frac{\partial w}{\partial y} + (x-x_c)]m_y = 0$

Problema di Neumann: la soluzione esiste ed è unica a meno di costante

Per trovare il centro di tensione materiale i tagli sulle braccia:

$$\begin{aligned} T_x = \int_A \tau_{xy} dA = G \oplus \int_A [\frac{\partial w}{\partial x} - (y-y_c)] dA = 0 \\ T_y = \int_A \tau_{xy} dA = G \oplus \int_A [\frac{\partial w}{\partial y} + (x-x_c)] dA = 0 \end{aligned} \rightarrow \begin{cases} x_c = \frac{1}{A} \int \frac{\partial w}{\partial y} dA = -\frac{1}{A} \int_c w dx \\ y_c = -\frac{1}{A} \int \frac{\partial w}{\partial x} dA = -\frac{1}{A} \int_c w dy \end{cases}$$

il problema si ben posto e diventa

$$[\frac{\partial w}{\partial x} - y - \frac{1}{A} w dx] m_x + [\frac{\partial w}{\partial y} + x + \frac{1}{A} \int_c w dx] m_y = 0$$

eq. di contorno di omogeneità sulle braccia:

$$M_z = \int_A (x^2 + y^2 + x \frac{\partial w}{\partial y} - y \frac{\partial w}{\partial x}) dA = G \oplus \int_A \dots dA$$

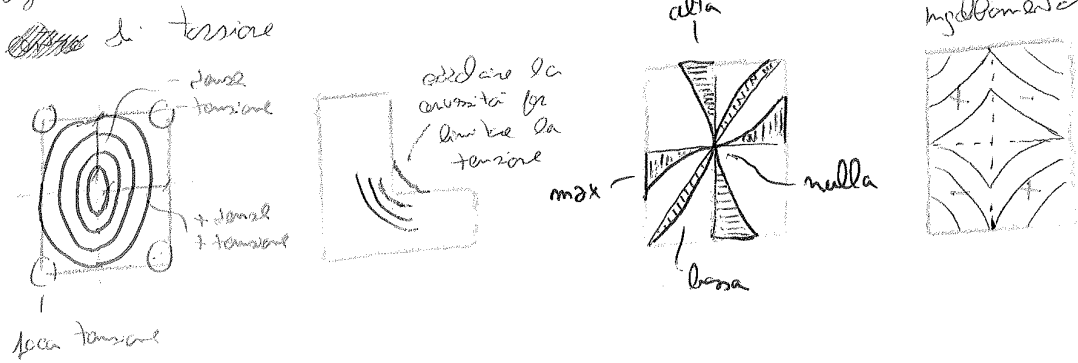
$$\rightarrow \Theta = \frac{M_z}{G I_t} \quad (I_t \leq I_p)$$

non mai inferiore a quelle circolari

funzione di risposta torsionale (geometrica)

• Analogia idrodinamica

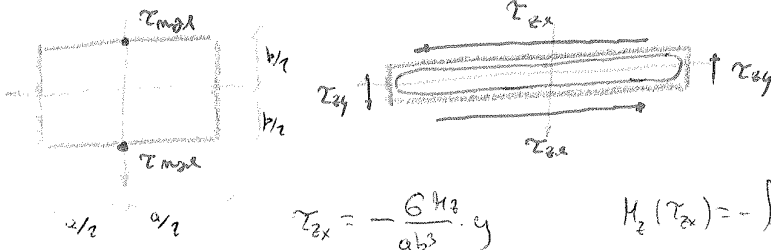
le linee di flusso delle $\tau = \alpha \omega$ con le linee di flusso della velocità dei fluidi di un liquido defluito in un recipiente di forma identica alle braccia, meno in ragione diretta dell'angolo di torsione



• Sezioni sottili

$$\tau_{max} = \alpha \frac{M_z}{ab^3} \quad I_t = \beta ab^3$$

angolo di torsione $\alpha = 3 \quad \beta = \frac{1}{3}$



$$M_z(\tau_{xx}) = - \int_A \tau_{xx} y dA = \frac{6M_z}{ab^3} \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} y^2 dy \quad M_z(\tau_{xx}) = \frac{M_z}{2}$$

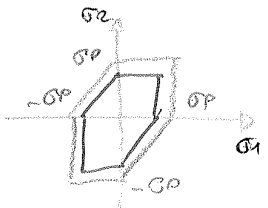
Contorno delle braccia: τ_{xy} prende forma buona migliore

$$\tau_{max} = \frac{M_z}{I_t} b$$

27

Se $\sigma_3 = 0 \rightarrow$ legge di Tresca

o Saint Venant



sezione quadrata + rotazione

tensioni concordi \rightarrow crea massima

$N, M_x, M_y \rightarrow \sigma_2$

$T_x, T_y, M_z \rightarrow \tau_2$

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_2^2 + 4\tau_2^2} < \frac{\sigma_p}{\gamma}$$

• Huber, von Mises - delle massime energie di distorsione

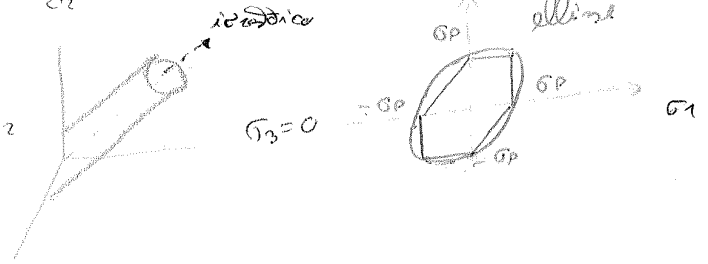
la crisi è dovuta all'energia di deformazione eccedente il tasso consentito σ^d

$$\phi = \phi^i + \phi^d \text{ (energia concorde e discorda)} \quad \phi = \frac{1}{2E} \{T_1^2 + 2T_2(1+\nu)\}$$

$$\phi^d = \frac{1+\nu}{E} T_2^d \text{ in quanto } T_1^d = 0$$

$$[(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)] < \sigma_p^2$$

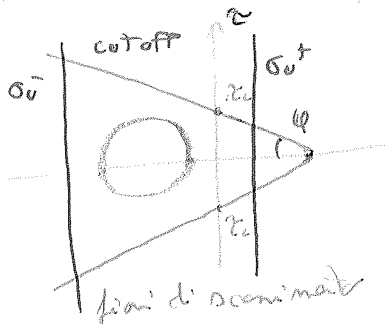
$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_2^2 + 3\tau_2^2} < \frac{\sigma_p}{\gamma}$$



• Mohr, Coulomb

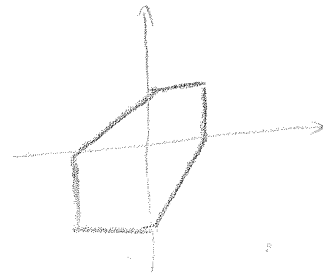
per materiali fragili (cemento, ceramica) \rightarrow strutto interno
 \rightarrow coesione del materiale

la resistenza aumenta con la compressione, la crisi è provocata dalle τ



$$\tau_{max} = \tau_c - \sigma \tan \phi$$

coesione angolo
strutto interno



29

$$\begin{cases} \delta_1(z) = \frac{dV}{dz} + \varphi \\ \delta_2(z) = \frac{dW}{dz} \\ \delta_3(z) = \frac{d\varphi}{dz} \end{cases} \quad \begin{cases} \{q\}^T = \{\delta_1, \delta_2, \delta_3\} \\ \{q\} = \{V, W, \varphi\} \end{cases} \quad \{q\} = [D] \{r\}$$

dove D è simmetrica

• Dualità D simmetrica - cinematica
 $[D]^* [D] \rightarrow [D]^* \neq [D]^T$ = a meno dei termini fuori del simbolo d'igno
 dualità D simmetrica - cinematica $\rightarrow P2V$

• Problema elastico lineare

$$\begin{aligned} [D]^* \{Q\} &= -\{F\} \text{ statiche} \\ \{Q\} &= [H] \{q\} \text{ cinematiche} \\ \{q\} &= [D] \{r\} \text{ cinematiche} \end{aligned}$$

$$[D]^* \{Q\} = -\{F\} \rightarrow [D]^* [H] \{q\} \{Q\} = -\{F\}$$

$$\downarrow$$

$$[D]^* [H] [D] \{r\} = -\{F\}$$

$[L]$ eq. di Lame'

Condizioni al contorno

$$\begin{aligned} \{Q\} &= \{Q_0\} \text{ statom. vincolate} \rightarrow [H][D] \{r\} = \{Q_0\} \quad z=0, l \\ \{r\} &= \{r_0\} \text{ statom. vincolate} \quad z=0, l \end{aligned}$$

• Spostamenti dovuti a carichi assiali

con forza sola $w \rightarrow$ solo spostamento assiale

$$\frac{dN}{dz} = -P \text{ eq. statiche} \quad \xrightarrow[N=EA \cdot \varepsilon_z]{\text{eq. cinematiche}} \quad \frac{d\varepsilon_z}{dz} = -\frac{P}{EA} \quad \xrightarrow[\varepsilon_z = dw/dz]{\text{eq. cinematiche}} \quad \frac{d^2w}{dz^2} = -\frac{P}{EA}$$

• Spostamenti dovuti a carichi trasversali

si guarderà il zallo stesso con la manovella



$$T = F$$

$$M(z) = -F(l-z)$$

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dz} = \chi_x = \frac{M}{EI_x} \\ \frac{dW}{dz} + \varphi = t_y \frac{T}{GA} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{d\varphi}{dz} = -\frac{F(l-z)}{EI_x} \\ \frac{dW}{dz} + \varphi = t_y \frac{F}{GA} \end{cases} \quad \begin{matrix} c.c \\ \varphi(0) = 0 \\ W(0) = 0 \end{matrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \varphi = -\frac{F}{EI_x} \left(l z - \frac{z^2}{2} \right) + c_1 \rightarrow c_1 = 0 \\ \frac{dW}{dz} = t_y \frac{F}{GA} + \frac{F}{EI_x} \left(l z - \frac{z^2}{2} \right) \\ W = t_y \frac{F}{GA} z + \frac{F}{6EI_x} (3lz^2 - z^3) + c_2 \rightarrow c_2 = 0 \end{cases}$$

contributo del taglio $= z$ contributo flessionale $= z^3$

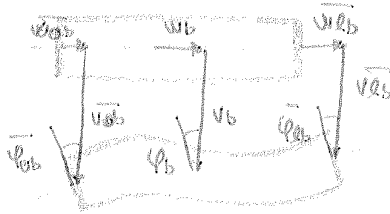
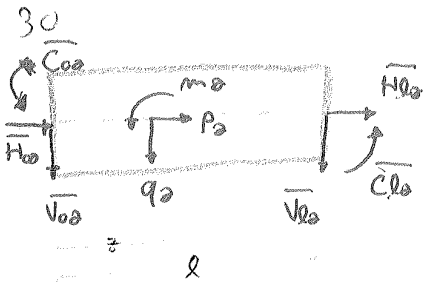
taglio trasversale \rightarrow le forze nelle

se l è snella \rightarrow prevale la lunghezza

$$V^T(l) = t_y \frac{F}{GA} l$$

$$V^M(l) = \frac{Fl^3}{3EI_x}$$

se l è tozza $\rightarrow A \gg I_x =$ lunghezza



$$L_{ve} = L_{vi} \quad 0 < z < l$$

$$L_{ve} = \int_0^l (q_0 v_b + P_0 w_b + m_0 \phi_b) dz + \bar{V}_{00} \bar{v}_{0b} + \bar{H}_{00} \bar{w}_{0b} + \bar{C}_{00} \bar{\phi}_{0b} + \bar{V}_{l0} \bar{v}_{l0} + \bar{H}_{l0} \bar{w}_{l0} + \bar{C}_{l0} \bar{\phi}_{l0}$$

$$L_{ve} = \int_0^l (q_0 v_b + P_0 w_b + m_0 \phi_b) dz + [T_0 v_b + N_0 w_b + M_0 \phi_b]_{z=0}^{z=l} \rightarrow \text{for } \begin{cases} \text{cinematiche omni.} \\ \text{e statiche omni.} \end{cases}$$

integrazione per parti (+ equazioni differenziali)

$$L_{ve} = \int_0^l \left[\left(q_0 + \frac{dT_0}{dz} \right) v_b + \left(P_0 + \frac{dN_0}{dz} \right) w_b + \left(m_0 + \frac{dM_0}{dz} \right) \phi_b + T_0 \frac{dv_b}{dz} + N_0 \frac{dw_b}{dz} + M_0 \frac{d\phi_b}{dz} \right] dz$$

valgono le eq. differenziali

$$L_{ve} = \int_0^l \left[T_0 \left(\frac{dv_b}{dz} + \phi_b \right) + N_0 \frac{dw_b}{dz} + M_0 \frac{d\phi_b}{dz} \right] dz$$

$$L_{ve} = \int_0^l [T_0 \chi_b + N_0 \varepsilon_b + M_0 \lambda_b] dz = L_{vi}$$

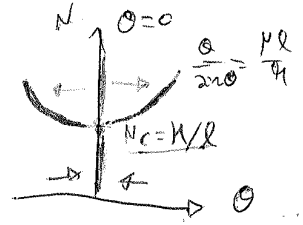
due tipi di deformazione cinematica

indipendenza del legame costitutivo

non c'è causalità tra statiche e cinematiche

se $M_S > M_i \rightarrow$ eq. stabile $N < N_c$
 se $M_S < M_i \rightarrow$ eq. instabile $N > N_c$

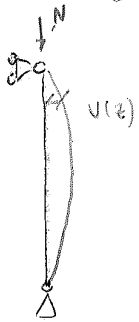
N_c : carico critico



Carico critico di Eulero

Per le travi (colonne) compresse, la espressione di equilibrio tra cui la trave rimane stabile dipende dalla presenza di un certo carico

La variazione con carico di forza o critica di Eulero



1. bilancia di equilibrio ma è difficile?

2. introduce la perturbazione $v(z) \rightarrow M_i = N \cdot v$

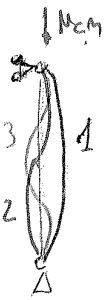
$$M_S = EI \chi = -EI v''$$

se $M_i = M_S \rightarrow$ equilibrio indifferente

$$\lambda^2 = \frac{N}{EI}$$

$$N \cdot v = -EI v'' \rightarrow v'' + \frac{N}{EI} v = 0 \rightarrow v'' + \lambda^2 v = 0 \rightarrow v(z) = A \cos(\lambda z) + B \sin(\lambda z)$$

c.c. $\rightarrow v(0) = v(l) = 0$



Carico critico N_c

che provoca lo svergolio

è il più basso ($n=1, N_{c1}$)

$$v_n(z) = B \sin(\lambda_n z)$$

$$\begin{cases} A=0 \\ B \sin(\lambda l) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda l = n\pi \end{cases}$$

$$N_{cn} = \frac{n^2 \pi^2 EI}{l^2} \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{l}$$

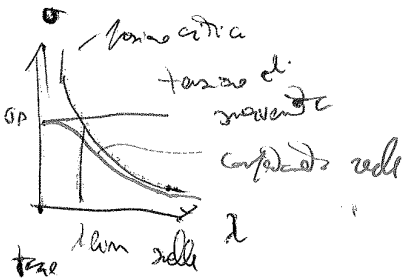


$\rightarrow N_c = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \rightarrow$ non dipende dalle condizioni del materiale

\rightarrow se la trave fosse svergolata, la forza deve l'innescare (minimo $I = I_{min}$)
 a fine di mondo la distanza minima di un'azione come
 trave fessura $I + fessura$

• Interazione momento - svergolio

$$N_c = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \rightarrow \text{carico critico} \quad \sigma_c = \frac{N_c}{A} = \frac{\pi^2 EI}{A l^2} \quad \left(p = \sqrt{I/A}, \lambda = l/p \right) \rightarrow \sigma_c = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$



$$\sigma_c = \sigma_p \quad \lambda_{lim} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}}$$