



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO : 335

DATA : 25/07/2012

A P P U N T I

STUDENTE : Gignone

MATERIA : Fondamenti di Meccanica Strutturale

Prof. Algostino

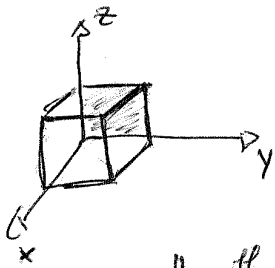
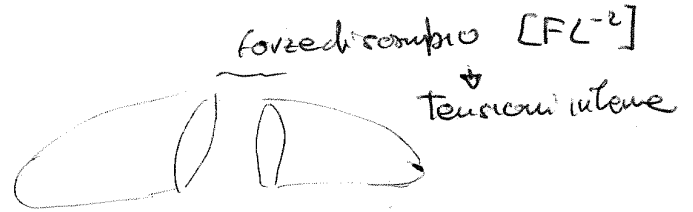
Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

1 - Analisi stato di tensione

- Le componenti della tensione



- Descrivere la forza sulla faccia infinitesima $dz dy$;
 Su di essa avremo una forza generica $\underline{\sigma_x dz dy}$

Il vettore $\underline{\sigma}$ è della forma $\underline{\sigma_x} = \sigma_{x\alpha} \cdot \underline{i}_\alpha = \sigma_{xx} \underline{i}_x + \sigma_{xy} \underline{i}_y + \sigma_{xz} \underline{i}_z$
 direzione perpendicolare al piano di azione \downarrow
 direzione della componente \downarrow

$$\sigma_x = \sigma_{x\alpha} \underline{i}_\alpha = \dots$$

$$\sigma_y = \sigma_{y\alpha} \underline{i}_\alpha = \dots$$

$$\sigma_z = \sigma_{z\alpha} \underline{i}_\alpha = \dots$$

↳ 9 componenti scalari \Rightarrow Tensore

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{pmatrix} = [\sigma] \cdot \begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix}$$

↳ Vettori

Componente vettoriale

Componenti tangenziali

- Parallelepipedo elementare: verso le condizioni di equilibrio.

- Prendendo faccia $dz dy$ con forza σ_x applicata questa è descritta da:
 $-\sigma_x dy dz$

- Prendendo faccia $dz dy$ incrementata di dx avremo un forza:
 $+(\sigma_x + \partial_x \sigma_x \cdot dx) dy dz = \sigma_x dy dz + \partial_x \sigma_x dx$

Identico alle altre facce

- Introduco forze di volume: peso, magnetico

$$f dV = f_\alpha \underline{i}_\alpha dV = (f_x \underline{i}_x + f_y \underline{i}_y + f_z \underline{i}_z) dV$$

- Reciprocità delle tensioni tangenziali

$$\sum M_x i_x = 0$$

$$\Downarrow \quad \leftarrow \quad \alpha = \cancel{x} \quad \rightarrow$$

$$M_y i_y = 0$$

\Downarrow

$$M_y = + \tau_{zx} dx dy \cdot \underbrace{dz}_{\text{Braccio}} - \tau_{xz} dz dy \cdot \underbrace{dx}_{\text{Braccio}}$$

\Downarrow

$$M_y = (\tau_{zx} - \tau_{xz}) dV = 0$$

\Downarrow

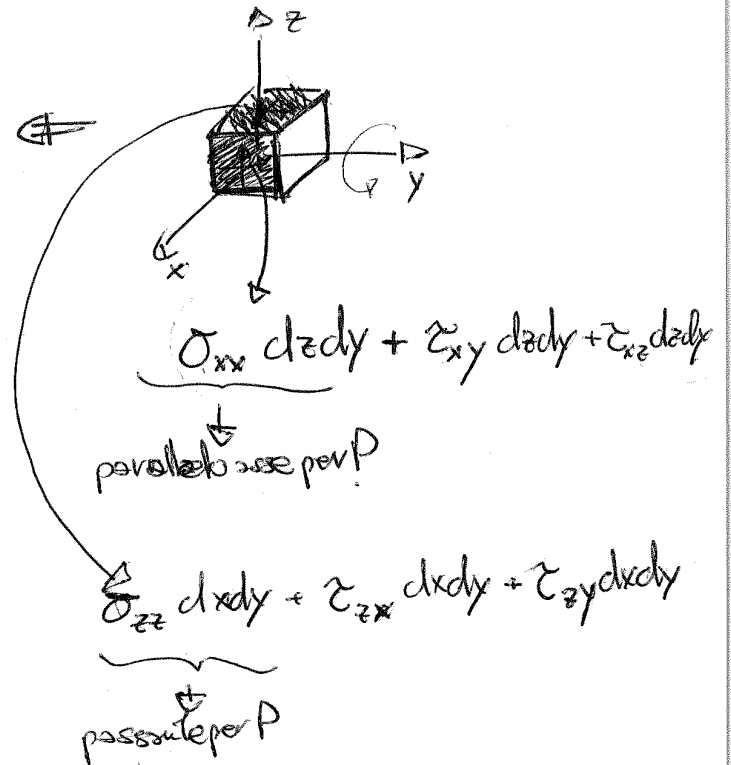
$$\tau_{zx} = \tau_{xz}$$

\Downarrow

\leftarrow Analogamente le altre facce

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

$$\text{con: } \begin{cases} \tau_{xy} = \tau_{yx} \\ \tau_{xz} = \tau_{zx} \\ \tau_{zy} = \tau_{yz} \end{cases}$$

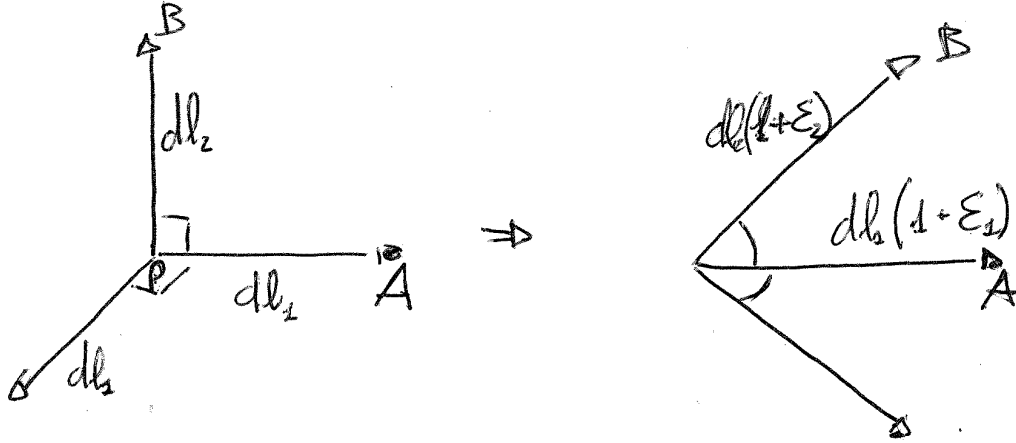


- Piccolezza delle deformazioni:

Non è infinitesimo, altrimenti non esisterebbe
 È piccolissima rispetto alle dimensioni del manufatto

- Dilatazioni

- Scomparti



Dilatazioni

Indefinito
 $A = \vec{P} + \vec{i}_2 dx_2$

$$\Downarrow$$

$$A = \vec{P} + \partial_2 \vec{P} dx_2$$

Deformato

$$A' = \vec{P}' + \partial_2 \vec{P}' dx_2$$

$$\Downarrow$$

$$A' = \vec{P}' + \partial_2 \vec{P}' dx_2$$

$$\partial_\alpha \vec{P} = \vec{i}_\alpha$$

distorsione
 $l^2 = (P-Q)^2$

$$\overline{AP} = l_2^2 = (A-P)^2 = (\partial_2 \vec{P} dx_2)^2$$

$$\overline{AP'} = l_2'^2 = (A'-P')^2 = (\partial_2 \vec{P}' dx_2)^2$$

$$\Downarrow$$

$$(\partial_2 \vec{P} dx_2)^2 = (\vec{i}_2^2 \cdot dx_2^2) = (dx_2)^2$$

$$\Downarrow$$

$$(\partial_2 \vec{P}')^2 \cdot (dx_2)^2 = l_2'^2$$

$$l_2'^2 = l_2^2 \cdot \partial_2 \vec{P}'^2$$

- Tensore di deformazione : $\epsilon_{\alpha\beta} = \frac{\partial_\alpha U_\beta + \partial_\beta U_\alpha}{2}$

- Direzioni principali della deformazione :

Nell'intorno di P sapre tre direzioni de permutano ortogonali $\Rightarrow \gamma_{\alpha\beta} = 0 \Rightarrow$ direzioni principali

- Condizioni di congruenza

Dipendenza delle tre direzioni di spostamento U_α con sei componenti deformazione $\epsilon_{\alpha\beta}$

6 equazioni : (36 derivate seconde - 30 derivate terze U_α)

↳ Equazioni di congruenza

$$\left. \begin{aligned} \partial_1 \partial_2 \gamma_{12} &= \partial_1 \partial_2^2 U_1 + \partial_1^2 \partial_2 U_2 \\ \partial_2^2 \epsilon_1 &= \partial_1 \partial_2^2 U_1 \\ \partial_1^2 \epsilon_2 &= \partial_1^2 \partial_2 U_2 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \partial_1 \partial_2 \gamma_{12} &= \partial_2^2 \epsilon_1 + \partial_1^2 \epsilon_2 \\ &\Downarrow \\ \partial_1 \partial_3 \gamma_{13} &= \partial_3^2 \epsilon_1 + \partial_1^2 \epsilon_3 \\ \partial_2 \partial_3 \gamma_{23} &= \partial_3^2 \epsilon_2 + \partial_2^2 \epsilon_3 \end{aligned}$$

A queste si aggiungono

$$\begin{aligned} 2\partial_2 \partial_3 \epsilon_1 &= \partial_1 (\partial_3 \gamma_{12} + \partial_2 \gamma_{13} - \partial_1 \gamma_{23}) \\ 2\partial_1 \partial_3 \epsilon_2 &= \partial_2 (\partial_1 \gamma_{23} + \partial_3 \gamma_{12} - \partial_2 \gamma_{13}) \\ 2\partial_1 \partial_2 \epsilon_3 &= \partial_3 (\partial_2 \gamma_{13} + \partial_1 \gamma_{23} - \partial_3 \gamma_{12}) \end{aligned}$$

↳ Se una non viene verificata non esiste un sistema \vec{U} di spostamenti così descritto

- Lavoro esterno

- Necessità di congruenza : NO scissione nel corpo
- Lavoro delle forze esterne di superficie

$$L_e^{ab} = \int_V f^a \cdot U^b dV + \int_S \sigma_n^a \cdot U^b dS + \int_l f_e^a \cdot U^b dl + \sum F^a \cdot U^b$$

$$L_i^{ab} \stackrel{\parallel}{=} L_e^{ab}$$

- Indipendenti
- forze equilibrate
- spostamenti congruenti e piccoli

- Teorema del minimo di energia potenziale : $\frac{1}{n_{\text{membri}}}$
 Tra tutti i sistemi di deformazioni congruenti quello col minimo di lavoro soddisfa anche le relazioni di equilibrio

- Corpo isotropo

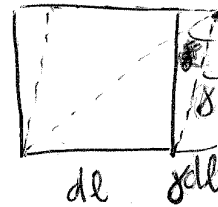
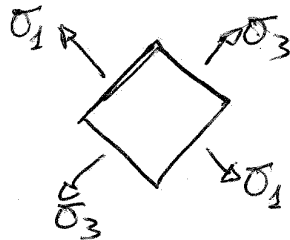
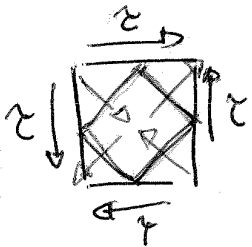
↳ Medesima legge tensione-deformazione in ogni direzione

↓
 Ruotando asse non cambiano coefficienti elastici

$$[A] = \begin{bmatrix} 2\mu & 2\mu & 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 2\mu & 2\mu & 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 2\mu & 2\mu & 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix}$$

- I tre moduli non sono indipendenti:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$



- Diagonale orizzontale = $\sqrt{2dl^2}$

- Diagonale finale = $d' = \sqrt{dl^2 + (dl + ydl)^2} = \sqrt{dl^2 + dl^2 + y^2 dl^2 + 2ydl^2} =$

$$= \sqrt{2dl^2 + 2ydl^2} = \sqrt{2dl^2(1+y)}$$

$$(1 + \frac{y}{2})^2 \approx 1 + y$$

$$d' = d \cdot \sqrt{1+y} \approx d \cdot (1 + \frac{y}{2})$$

↓
 Trascurato

$$\epsilon_d = \frac{d' - d}{d} = \frac{d + \frac{y}{2}d - d}{d} = \frac{y}{2} = \frac{\tau}{2G} = \epsilon_3 = \frac{1}{E} (\tau(1+\nu))$$

5- Il Problema di St. Venant

- Solido: materiale elastico lineare, isotropo, omogeneo di forma cilindrica con basi terminali uguali
- Terna ortogonale origine nel baricentro con asse z perpendicolare alle basi terminali
- Forze esterne solo sulle basi applicate in modo tale che:

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0$$

Inoltre: $\tau_{xy} = \tau_{yx} = 0$

Da risolvere:

- $\tau_{zx} = \tau_{xz} \Rightarrow \tau_x$
- $\tau_{zy} = \tau_{yz} \Rightarrow \tau_y$
- $\sigma_z \Rightarrow \sigma_z$

⇒ Impostazione del problema

- Equazioni indefinite di equilibrio

$$\left. \begin{aligned} \partial_x \sigma_{xx} + \partial_y \sigma_{yx} + \partial_z \sigma_{zx} + k_x &= 0 \\ \partial_x \sigma_{xy} + \partial_y \sigma_{yy} + \partial_z \sigma_{zy} + k_y &= 0 \\ \partial_x \sigma_{xz} + \partial_y \sigma_{yz} + \partial_z \sigma_{zz} + k_z &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{cases} \partial_z \tau_x = 0 \\ \partial_z \tau_y = 0 \\ \partial_z \sigma_z + \partial_x \tau_x + \partial_y \tau_y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_z \tau_x = 0 \\ \partial_z \tau_y = 0 \\ \partial_z \sigma_z = -\operatorname{div} \tau \end{cases}$$

⇓ derivando per ∂_z

$$\partial_z^2 \sigma_z = \partial_z \partial_x \tau_x + \partial_z \partial_y \tau_y$$

⇓ $\partial_z \partial_x \tau_x = \partial_x \partial_z \tau_x = \partial_x (0) = 0$

$$\partial_z^2 \sigma_z = 0 \Rightarrow \text{Dipendenza lineare da } z, \tau \text{ indipendenti da } z$$

+I identicamente soddisfatte

+IV-V

$$\left. \begin{aligned} 2 \partial_y \partial_z \varepsilon_x &= \partial_x (\partial_y \gamma_{xz} - \partial_x \gamma_{yz}) & -2 \frac{\nu}{E} \partial_y \partial_z \sigma_z &= \frac{1}{G} \partial_x (\partial_y \tau_{xz} - \partial_x \tau_{yz}) \\ 2 \partial_z \partial_x \varepsilon_y &= \partial_y (\partial_x \gamma_{yz} - \partial_y \gamma_{zx}) & -2 \frac{\nu}{E} \partial_y \partial_z \sigma_z &= \frac{1}{G} \partial_y (\partial_x \tau_{yz} - \partial_y \tau_{zx}) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E} \sigma_z = \frac{\tau_{xz}}{G}$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E} \sigma_z - \frac{\nu}{E} \sigma_x = -\frac{\nu}{E} \sigma_z$$

⇓

$$\int -2 \frac{\nu}{E} \partial_y \partial_z (K_0 + K_1 x + K_2 y) = \frac{2(1+\nu)}{E} \partial_x (\partial_y \tau_{zx} - \partial_x \tau_{zy})$$

$$\int -2 \frac{\nu}{E} \partial_y \partial_z (K_0 + K_1 x + K_2 y) = \frac{2(1+\nu)}{E} \partial_y (\partial_x \tau_{zy} - \partial_y \tau_{zx})$$

⇓ Faccio le derivate

$$-\frac{2\nu}{1+\nu} (K_{2,1}) = \partial_x (\partial_y \tau_x - \partial_x \tau_y) = \partial_x (-\text{rot } \tau)$$

$$-\frac{2\nu}{1+\nu} (K_{1,1}) = \partial_y (\partial_x \tau_y - \partial_y \tau_x) = \partial_y (\text{rot } \tau)$$

⇓ Integro

$$\text{rot } \tau = \frac{2\nu}{1+\nu} K_{2,1} \cdot x + K_4$$

$$\text{rot } \tau = -\frac{2\nu}{1+\nu} K_{1,1} \cdot y + K_5$$

⇓ Compongo

$$\boxed{(\partial_x \tau_y - \partial_y \tau_x) = -\frac{2\nu}{1+\nu} (x K_{2,1} - y K_{1,1}) + K_3}$$

6 - SFORZO NORMALE e FLESSIONE

$$\sigma_z = K_{0,0} + K_{0,1}z + (K_{1,0} + K_{1,1}z)x + (K_{2,0} + K_{2,1}z)y$$

Procedimento inverso: dato dei $K_{\alpha\beta}$ e vero z da sollecitazioni corrispondono (permesso da principio di unicita')

$$\Rightarrow K_1 \neq K_2 \neq K_3 = 0$$

$$\downarrow$$

$$\sigma_z = K_{0,0} + K_{0,1}z$$

$$\partial_x z_y - \partial_y z_x = -\frac{\nu}{1+\nu} (0-0) + 0 = 0$$

$$x, y \text{ sono assi baricentrici} \Rightarrow \int_A x dA = \int_A y dA = 0$$

$$N = \int_A \sigma_z dA$$

$$M_x = \int_A y \sigma_z dA$$

$$M_y = \int_A x \sigma_z dA$$

$$N = \int_A K_0 dA = K_0 A$$

$$M_x = \int_A y K_0 dA = 0$$

$$M_y = \int_A x K_0 dA = 0$$

$$N = K_0 A$$

considerando che il solido è costituito solo dalle basi ($K_0 = \text{cost.}$)

Momenti d'inerzia

$$K_0 = K_{0,0} = \frac{N}{A}$$

$$\downarrow$$

$$\partial_x z_y - \partial_y z_x = 0$$

$$\partial_x z_x + \partial_y z_y = 0$$

$$\frac{z_y}{z_x} = \frac{dy}{dx}$$

$$\partial_x z_x = -\partial_y z_y$$

$$\partial_y z_y = \partial_x z_x$$

$$\Rightarrow 0 = 0$$

$$z_x = z_y = 0$$

$$T_x = T_y = M_z = 0$$

$$\sigma_x = \frac{N}{A}$$

Quando presente sforzo normale

Flessione

$$K_0 = K_1 = K_3 = 0 \Rightarrow \sigma_z = (K_{2,0} + K_{2,1} z) y \quad (\text{Annullano sull'asse } x)$$

$$K_0 = K_2 = K_3 = 0 \Rightarrow \sigma_z = (K_{1,0} + K_{1,1} z) x \quad (\text{Annullano sull'asse } y)$$

$$\Rightarrow N = \int_A K_2 y dA = K_2 \int_A y dA = K_2 \cdot S_x = 0$$

$$M_x^* = \int_A K_2 y^2 dA = K_2 J_x$$

$$M_y^{**} = \int_A K_2 y x dA = K_2 J_{xy}$$

$$K_2 = \frac{M_x^*}{J_x} \Rightarrow M_y^{**} = \frac{J_{xy}}{J_x} M_x^*$$

$$\sigma_z = \frac{M_x^*}{J_x} y + \frac{M_y^{**}}{J_y} x$$

Normale e flessione

$$K_0 = K_1 = K_2 \neq 0$$

$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{M_x^*}{J_x} y + \frac{M_y^{**}}{J_y} x$$

Lavoro interno

$$dL_i^{ab} = \int_A \sigma_z^2 \epsilon_z^b dA = \int_A \left(\frac{N^2}{A^2} + \frac{M_x^{*2}}{J_x^2} y^2 + \frac{M_y^{**2}}{J_y^2} x^2 \right) \left(\frac{N^b}{EA} + \frac{M_x^{*b}}{EJ_x} y + \frac{M_y^{**b}}{EJ_y} x \right) dA$$

$$\Downarrow \int_A dA = 0 \quad \int_A x dA = 0 \quad \int_A x^2 dA = J_x \quad \int_A xy dA = J_{xy}$$

$\int_l dz$ (intero solido)

$$L = \frac{1}{2} \int_l \left(\frac{N^2}{EA} + \frac{M_x M_x^*}{EJ_x} + \frac{M_y M_y^*}{EJ_y} \right) dz$$

- Rigidezza Torsionale $G \cdot J_T$

Modulo Torsionale

$$dL_e^{ab} = dL_i^{ab}$$

$$M_T^2 \partial_z \theta^b = \int_A \tau^2 y^b dA = \int_A \tau^2 \frac{z^b}{G} dA$$

$\Downarrow \leftarrow \tau = M_T t_f$ (soluzioni lineari $\Rightarrow M_T$ varia in funzione di un vettore t_f)

$$M_T^2 \partial_z \theta^b = \int_A \frac{M_T^2 t_f \cdot M_T^b t_f}{G} dA = \frac{M_T^2 M_T^b}{G} \int_A t_f^2 dA = \frac{M_T^2 M_T^b}{G J_T}$$

\Downarrow Momento torcente

$$\partial_z \theta^b = \frac{M_T^b}{J_T} \frac{1}{G}$$

Rigidezza

$$J_T = \frac{1}{\int_A t_f^2 dA}$$

7.1 Torsione su sezione cava (chiusa)

Imponendo solo la rotazione

$$U_x = -\partial_z y; \quad U_y = \partial_z x; \quad U_z = 0 \quad K_3 = 2G \partial_z \theta$$

$$\tau_x = G \gamma_{xz} = G (\partial_x U_z + \partial_z U_x) = -G \partial_z \theta y$$

$$\tau_y = \underline{-G \partial_z \theta x}$$

Verificare solo se circonferenza con centro negli assi dato che $\frac{\tau_y}{\tau_x} = \frac{dy}{dx} \Rightarrow$ normale al piano

$$T_x = \int_A \tau_x dA = 0$$

$$T_y = \int_A \tau_y dA = 0$$

$$M_T = \int_A (x \tau_y - y \tau_x) dA = G \partial_z \theta J_P \Rightarrow \begin{cases} \tau_x = -\frac{M_T}{J_P} y & \tau_y = \frac{M_T}{J_P} x \\ \tau = \frac{M_T}{J_P} \cdot r \end{cases}$$

7.3 Sezione sottile (aperta) rettangolare (piena)

- forma qualunque $\tau = 2 \frac{M_t}{J_T} \xi$

$\partial_x \tau_y - \partial_y \tau_x = K_3$ $\partial_x \tau_x + \partial_y \tau_y = 0$ - Figure composte $\tau_{max} = \frac{M_t \cdot S_{max}}{J_T' + J_T'' + J_T'''}$

Supponendo tensione tangenziale parallela a "y", eliminando le zone prossime ai lati corti

$\tau_x \approx 0$

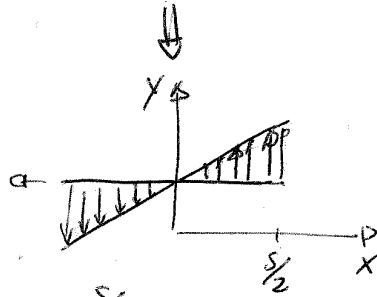
$\partial_x \tau_y = K_3$ $\partial_y \tau_y = 0$ $K_3 = 2G \partial_z \theta$

↓ ↓
 ← indipendente da y

$\tau_y = \int \partial_x \tau_y dx = \int 2G \partial_z \theta dx = 2G \partial_z \theta x + \tau_{y0}$

flusso visibilmente zero

$q = \int_{-s/2}^{s/2} \tau_y dx = 0$ ← Corolla



$q = \int_{-s/2}^{s/2} \tau_y dx = \left[\frac{1}{2} 2G \partial_z \theta x^2 \right]_{-s/2}^{s/2} + \left[\tau_{y0} x \right]_{-s/2}^{s/2}$

Dovrebbe essere $\tau_{y0} x = 0$
 Infatti $\tau_y = 2G \partial_z \theta x$
 $\tau_{y0} \frac{s}{2} - (-\tau_{y0} (+\frac{s}{2}))$
 $\tau_{y0} s = 0$
 $\tau_{y0} = 0$

$\tau = M_t t_f \Rightarrow t_f = \frac{\tau}{M_t} = \frac{2G \partial_z \theta x}{M_t} = \frac{2G}{M_t} x \partial_z \theta = \frac{2G}{M_t} x \frac{M_t}{6J_T} = \frac{2x}{6J_T}$

$\frac{1}{J_T} = \int_A t_f^2 dA = \int_A \left(\frac{2x}{6J_T} \right)^2 dA = \frac{4}{J_T^2} \int_A x^2 dA = \frac{4}{J_T^2} \frac{bs^3}{12} \Rightarrow J_T = \frac{bs^3}{3}$

$\tau_y = 2G \partial_z \theta x = 2 \frac{M_t}{J_T} x$ (Approssimato) $\Rightarrow J_T = \frac{(b - 0.6s)s^3}{3}$ correzione

- teoria approssimata

- Non tiene conto del rot $\tau = \frac{\gamma}{1+\gamma} (K_{2,1}x - K_{1,2}y) + 0$

ma solo $(\text{div } \tau) \quad \frac{d\gamma}{dx} = \frac{\tau_y}{C_x}$

- sezioni sottili aperte

Se sottile e quindi curva \perp pareti ~~tra loro~~

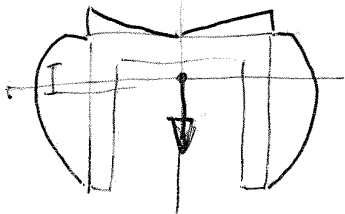
$$q = \int_1 \tau \cdot \vec{n} \, dl = \tau_{\text{med}} \cdot S$$

↳ valore medio

$$\hookrightarrow q = - \left(\frac{T_y^*}{J_x} S_x^A + \frac{T_x^*}{J_y} S_y^A \right)$$

+ Diagrammi dei flussi: sezione simmetrica
taglio lungo asse di simmetria

- Se assi = assi di inerzia $T_y^* = T_y \quad T_x^* = T_x$



$$q^I = - \frac{T_y}{J_x} S_x^I - \frac{T_x}{J_y} S_y^I$$

$$q^{II} = - \frac{T_y}{J_x} S_x^{II}$$

↳ Proporzionalità al momento statico $S_x^I - S_x^{II}$

+ Centro di taglio

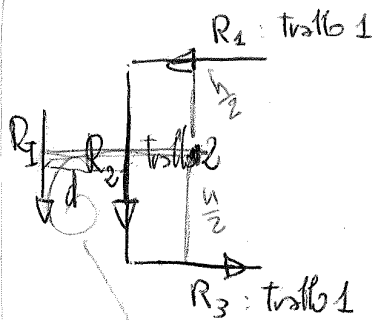
$$M_T = \int_A (\tau_y (x - x_c) - \tau_x (y - y_c)) \, dA$$

$x_c - y_c$ coordinate centro di taglio

$$\begin{aligned} \int_A \tau_x \, dA &= T_x \quad \int_A \tau_y \, dA = T_y \\ \int_A (\tau_y x - \tau_x y) \, dA &= M_z \end{aligned}$$

$$M_T = M_z - T_y x_c - T_x y_c$$

⇒ Centro di taglio punto della retta d'azione T all'incirca non ruoti
taglio puro - esente da torsione



R_1 ed R_3 sono una coppia agente come R_2 ad una distanza d

$$d = \frac{R_1 \cdot h}{R_2} = \frac{\frac{J_y}{J_x} \frac{b^2 h^3 s_1}{2} \cdot h}{\frac{J_y}{J_x} \left(\frac{b h^3 s_1}{2} + \frac{h^3 s_2}{12} \right)} = \frac{\frac{b^2 h^2 s_1}{J_x \cdot 2}}{1} =$$

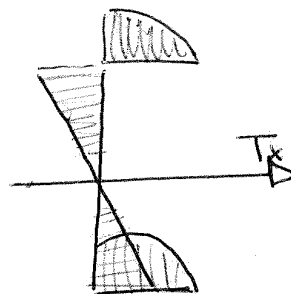
J_x se calcolabile

$$= \frac{b^2 h^2 s_1}{2 \cdot \left(\frac{b h^3 s_1}{2} + \frac{h^3 s_2}{12} \right)} = \frac{b^2 s_1}{2 b s_1 + \frac{h s_2}{6}} = \frac{b^2 s_1}{12 b s_1 + h s_2}$$

$$= \frac{b^2 s_1 \cdot 6}{12 b s_1 + h s_2} = d$$

+ Poi uso $T_x \neq 0, T_y = 0$

Dalla simmetria capisco che il centro di taglio è per forza sull'asse "x" e la distanza sarà appunto "d"

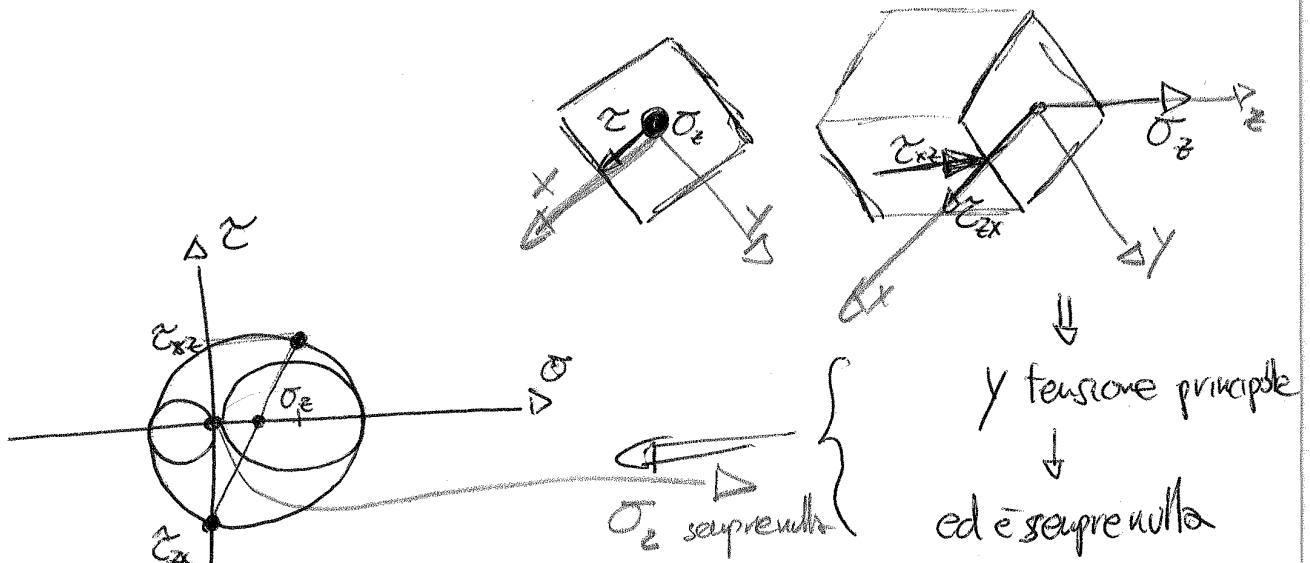
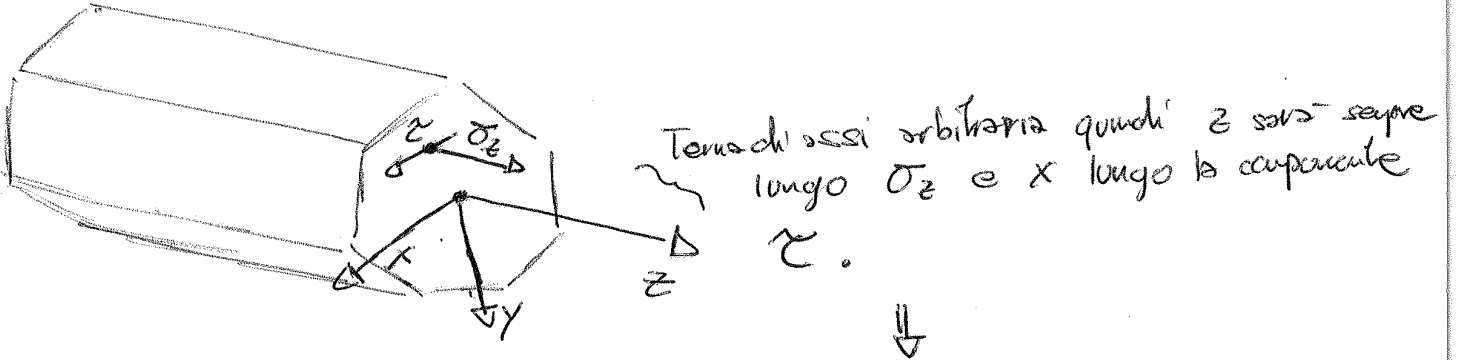


- ⇒ Se c'è un asse di simmetria il centro di taglio sta su quell'asse
- ⇒ Se ha due assi di simmetria o antineutralità il centro coincide col baricentro
- ⇒ Se i tralci rettilinei di una struttura passano tutti per un punto allora quello è il centro di taglio perché esso è il punto di incontro di tutte le risultanti parziali

11- Applicazione alle Travi:

- Forme non perfettamente cilindriche
 - Carichi anche fuori dalle basi
 - Vincolate \Rightarrow non possibili spostamenti
- } esclusione di punti molto prossimi all'applicazione delle F

+ Tensioni principali:



$$\sigma_1 = \frac{\sigma_z}{2} - r = \frac{\sigma_z}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2}$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_z}{2} + r = \frac{\sigma_z}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2}$$

\downarrow
Tensioni ideali

$$\sigma_{id} = \sigma_3 - \sigma_1 = \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau^2}$$

$$\sigma_{id} = \dots = \sqrt{\sigma_z^2 + 3\tau^2}$$

- Preparazione alle diverse condizioni di vincolo

$$\frac{u}{C} = - \frac{X_1}{PC} z + \frac{X_2}{PC} + \operatorname{sen} \frac{\pi}{l_e} (z-c)$$

$$\frac{u}{C} = az + b + \operatorname{sen} \frac{\pi}{l_e} (z-c)$$

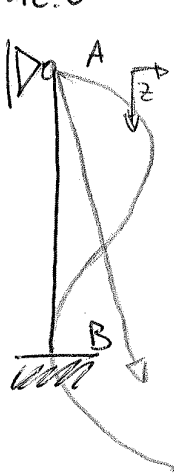
$$\Downarrow \quad \longleftarrow \quad \frac{du}{dz} = \varphi \quad ; \quad \frac{d^2 u}{dz^2} = \frac{M}{EJ}$$

$$\frac{d}{dz} \frac{u}{C} = \frac{1}{C} \frac{du}{dz} = - \frac{\varphi}{C} = +a + \frac{\pi}{l_e} \cos \frac{\pi}{l_e} (z-c)$$

$$\frac{d^2}{dz^2} \frac{u}{C} = \frac{1}{C} \frac{d^2 u}{dz^2} = - \frac{M}{CEJ} = - \frac{\pi^2}{l_e} \operatorname{sen} \frac{\pi}{l_e} (z-c)$$

a, b, c, l_e costanti dei vincoli ; C indeterminata

12.2 Incastro e appoggio



$$N_A = 0 \rightarrow \frac{0}{C} = 0 + b + \text{sen} \frac{\pi}{l_e} (0 - c)$$

$$M_A = 0 \rightarrow \frac{0}{CEI} = \frac{\pi^2}{l_e^2} \text{sen} \frac{\pi}{l_e} (0 - c)$$

$$N_B = 0 \rightarrow \frac{0}{C} = a \cdot l + b + \text{sen} \frac{\pi}{l_e} (l - c)$$

$$\varphi_B = 0 \rightarrow \frac{0}{C} = -a - \frac{\pi}{l_e} \cos \frac{\pi}{l_e} (l - c)$$

$$\left. \begin{aligned} b + \text{sen} \frac{\pi}{l_e} (-c) &= 0 \\ \frac{\pi^2}{l_e^2} \text{sen} \frac{\pi}{l_e} (-c) &= 0 \\ 2l + b + \text{sen} \frac{\pi}{l_e} (l - c) &= 0 \\ 2 + \frac{\pi}{l_e} \cos \frac{\pi}{l_e} (l - c) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$2l + \text{sen} \frac{\pi}{l_e} (l) = 2 + \frac{\pi}{l_e} \cos \frac{\pi}{l_e} l$$

$$b + \text{sen} \frac{\pi}{l_e} (-c) = 0 = \text{sen} \frac{\pi}{l_e} (-c)$$

$$b = 0$$

$$\text{sen} \frac{\pi}{l_e} (-c) = 0 \rightarrow -\frac{\pi}{l_e} c = n\pi$$

$$-\frac{c}{l_e} = n$$

$$c = n l_e$$

$$c = 0$$

$$\frac{1}{\cos \frac{\pi}{l_e} (l)} (2l - 2) = \left(-\text{sen} \frac{\pi}{l_e} (l) + \frac{\pi}{l_e} \cos \frac{\pi}{l_e} l \right) \frac{1}{\cos \frac{\pi}{l_e} l}$$

$$\frac{2(l-1)}{\cos \frac{\pi}{l_e} l} = -\tan \frac{\pi}{l_e} l + \frac{\pi}{l_e} \cdot l$$

$$\tan \frac{\pi}{l_e} l = \frac{\pi}{l_e} - \frac{2(l-1)}{\cos \frac{\pi}{l_e} l}$$

$$\tan \frac{\pi}{l_e} l = \frac{\pi}{l_e} \frac{(-\frac{\pi}{l_e} \cos \frac{\pi}{l_e} l)(l-1)}{\cos \frac{\pi}{l_e} l}$$

$$-\frac{\pi}{l_e} \cos \frac{\pi}{l_e} l = +2$$

$$\tan \frac{\pi}{l_e} l = \frac{\pi}{l_e} + \frac{\pi}{l_e} (l-1)$$

$$\tan \frac{\pi}{l_e} l = \frac{\pi}{l_e} l$$

\Rightarrow

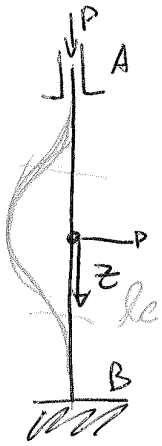
Esiste solo un valore de per tan e uguale a se stesso

$$\tan \frac{\pi}{0,7} \Rightarrow \frac{\pi}{l_e} l = \frac{\pi}{0,7} \Rightarrow l_e = 0,7 l$$

\Downarrow

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{(0,7)^2 l^2}$$

12.4 Incastri ad entrambi



simmetrica : η_r deve essere verticale $-\frac{x_1}{PC} = a = 0$

$$\phi_0 = 0 \Rightarrow \frac{0}{C} = -0 - \frac{\pi}{l_e} \cos \frac{\pi}{l_e} (0 - c) \Rightarrow \cos \frac{\pi}{l_e} c = 0 \Rightarrow c = \frac{l_e}{2}$$

$$\phi_{\frac{l}{2}} = 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow \cos \frac{\pi}{l_e} \left(\frac{l}{2} - \frac{l_e}{2} \right) = 0 \rightarrow \frac{\pi}{l_e} \left(\frac{l}{2} - \frac{l_e}{2} \right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\eta_{\frac{l}{2}} = 0 \Rightarrow \frac{0}{C} = 0 + b + \text{sen} \frac{\pi}{l_e} \left(\frac{l}{2} - \frac{l_e}{2} \right) \Rightarrow$$

$$\frac{l - l_e}{l_e} = 1$$

$$l - l_e = l_e$$

$$l = 2l_e$$

$$P_c = \frac{\pi^2 EJ}{l_e^2} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} 2^2$$

antisimmetrica

$$\eta_0 = 0$$

$$M_0 = 0$$

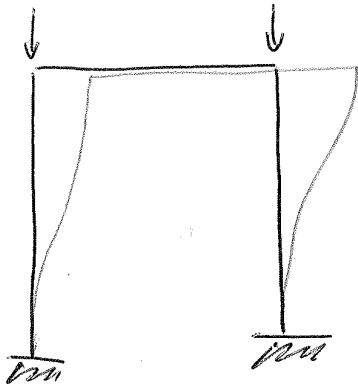
$$\eta_{\frac{l}{2}} = 0$$

$$\phi_{\frac{l}{2}} = 0$$

$$l_e = 0,35 l$$

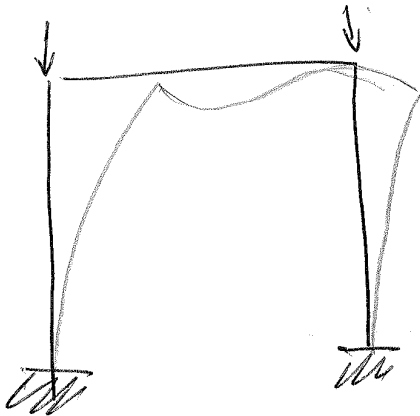
$$P_c = \frac{\pi^2 EJ}{0,15 l^2}$$

12.6 Portale traversa infinitamente rigida



$$l_e = l \Rightarrow P_c = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$$

12.7 Portale infinitamente deformabile



$$l_e = 2l \Rightarrow P_c = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2}$$

Portale rigidità simile ... Non fatto

- Cerchi di Mohr pg 13 : Prima da vedere \Rightarrow disegni cerchi di Mohr
- Deduzione analitica lavori virtuali pg 41
- Teoremi pg 50 - 59
- Dimostrazione Flessione pg 90
- Dimostrazione Flessione deformazioni pg 91
- Torsione composite - ingobbimenti pg 118
- Lavoro tensioni funzionali pg 130 - 133
- Sezione Eterogenea pg 150
- Sezione Anisotropica pg 153
- Struttura alcestruzzo pg 158
- Porte pg 181

Sezioni circolari piene :

$$\tau_{max} = \frac{M_t \cdot R}{J_p}$$

$$J_p = \frac{1}{2} \pi R^4$$

$$\theta_{max} = \frac{M_t \cdot L}{J_p \cdot G}$$

forse G

$$W_t = \frac{J_p}{R} = \frac{\pi D^3}{16}$$

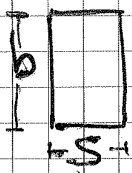
Sezioni circolari cave :

$$\tau_{max} = \frac{M_t (R_{est} - R_{int})}{J_p}$$

$$W_t = \frac{\pi (R_{est}^4 - R_{int}^4)}{2 \cdot 16 \cdot R_{est}}$$

$$J_p = \frac{1}{2} \pi R_{est}^4 - \frac{1}{2} \pi R_{int}^4$$

Sezioni rettangolari piene



$$\tau_y = \frac{2 M_t}{J_t} \cdot s$$

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{J_t} S_{max}$$

$$J_t = \frac{b s^3}{3}$$

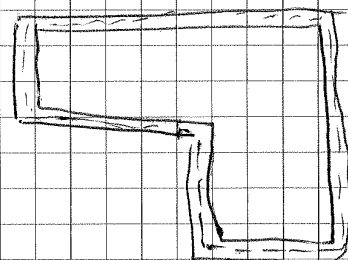
Sezioni cave varie

$$\tau = \frac{M_t}{2 \Omega \cdot s}$$

$$J_t = \frac{4 \Omega^2 \cdot s}{e}$$

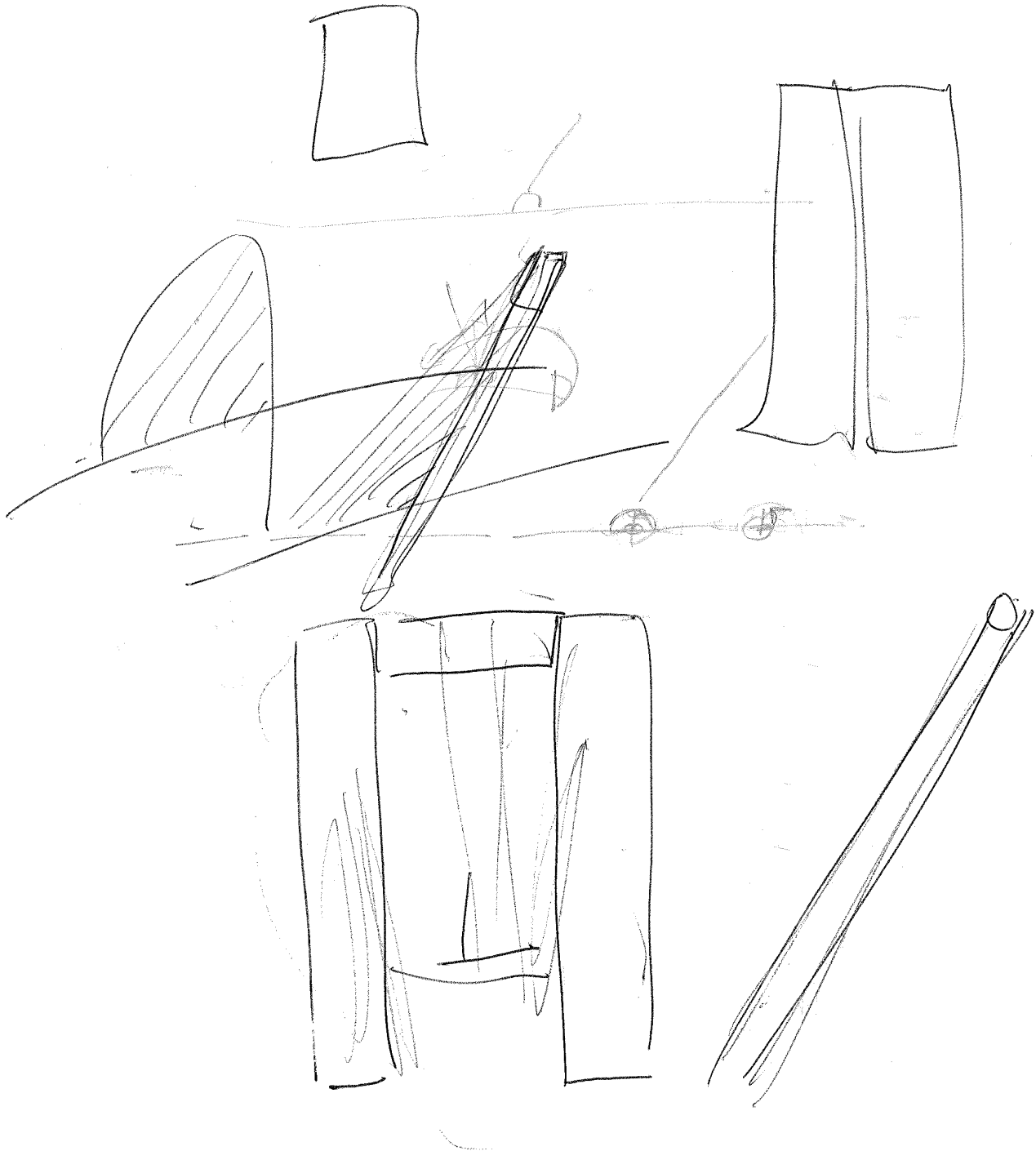
$$\theta = \frac{M_t}{S_t \cdot G}$$

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{2 \Omega \cdot S_{min}}$$



Ω = area dentro linee tratteggiate

s = spessore



Bancentro

$$Y_G = \frac{\sum Y_i \cdot A_i}{\sum A_i}$$

$$X_G = \frac{\sum X_i \cdot A_i}{\sum A_i}$$

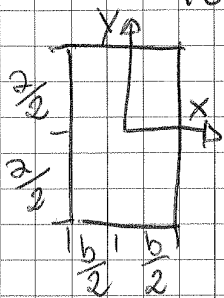
Momenti di inerzia locali

Rettangolo

$$A = a \cdot b$$

$$J_x = \frac{a^3 b}{12}$$

$$J_y = \frac{a b^3}{12}$$



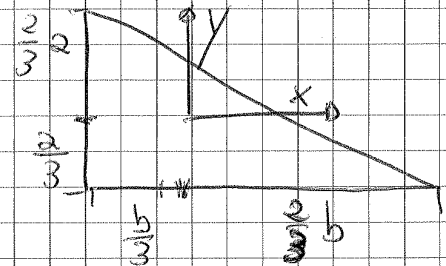
Triangolo rettangolo

$$A = \frac{a \cdot b}{2}$$

$$J_x = \frac{a^3 b}{36}$$

$$J_y = \frac{a b^3}{36}$$

$$J_{xy} = \frac{a^2 b^2}{72}$$



Momenti di inerzia complessivi

$$J_x = \sum (J_{x_i} + Y_i^2 A_i)$$

$$J_y = \sum (J_{y_i} + X_i^2 A_i)$$

$$J_{xy} = \sum (J_{xy_i} + X_i \cdot Y_i \cdot A_i)$$