centro appunti
www.centroappunti.it
Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari
Tesi di laurea
Cartoleria e cancelleria
Stampa file e fotocopie
Print on demand
Rilegature

NUMERO : 330

DATA : 25/07/2012

A P P U N T I

STUDENTE : Spina

MATERIA : Analisi Matematica I
Prof. Camporesi

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell’autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.
Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTI E NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 25

RELAZIONE FONDAMENTALE DELLA TRIGONOMETRIA

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

FORMULE ADDIZIONE E SOTTRAZIONE +-

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha$$

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\beta\cos\alpha$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

ANGOLI ASSOCIATI

	sen	cos	tg	cotg	
$(-\alpha)$	-	+	-	-	
$(2\pi-\alpha)$	-	+	-	-	
$(\pi-\alpha)$	+	-	-	-	
$(\pi+\alpha)$	-	-	+	+	
$(\frac{\pi}{2}-\alpha)$	+	+	+	+	•
$(\frac{\pi}{2}+\alpha)$	+	-	-	-	•
$(\frac{3}{2}\pi-\alpha)$	-	-	+	+	•
$(\frac{3}{2}\pi+\alpha)$	-	+	-	-	•

sen e cos invertiti

FORMULE DUPLICAZIONE x2

$$\operatorname{sen}2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$$

$$\cos2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha$$

$$\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$$

FORMULE BISEZIONE $\frac{1}{2}$

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$$

FORMULE PARAMETRICHE =

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2t}{1-t^2}$$

$$t = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$$

FORMULE DI PROSTAFERESI: somme in prodotto

$$\operatorname{sen}p + \operatorname{sen}q = 2\operatorname{sen}\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\operatorname{sen}p - \operatorname{sen}q = 2\operatorname{sen}\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$$

ciao!

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2\operatorname{sen}\frac{p+q}{2}\operatorname{sen}\frac{p-q}{2}$$

FORMULE DI WERNER prodotto in somma

$$\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right]$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right]$$

$$\operatorname{sen}\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(\alpha-\beta) + \operatorname{sen}(\alpha+\beta)\right]$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 25

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 5 di 25

TEOREMI SUI LIMITI

- **UNICITÀ DEL LIMITE** $\lim_{x\to c} f(x) = l$, $\lim_{x\to c} f(x) = l'$ $\Rightarrow l = l'$
- **LIMITATEZZA LOCALE** $\lim_{x\to c} f(x) = l$, $l \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow f$ È LIMITATO IN ALMENO UN INTORNO DI C
- **PERMANENZA DEL SEGNO** $\lim_{x\to c} f(x) = l$ $\Rightarrow$ ESISTE ALMENO UN INTORNO DI C IN CUI $f(x)$ ASSUME LO STESSO SEGNO DI l
- **CONFRONTO**
  1. $f > g$ $\quad f \to l_1$, $g \to l_2$ $\Rightarrow l_1 > l_2$
  2. $f > g$ $\quad g \to +\infty$ $\Rightarrow f \to +\infty$
  3. $f > g$ $\quad f \to -\infty$ $\Rightarrow g \to -\infty$
- **DOPPIO CONFRONTO**

$$f(x) \le g(x) \le h(x)$$
$$\searrow \quad \downarrow \quad \swarrow$$
$$l$$

- **INFINITESIMO - LIMITATO**

$$\underset{\downarrow\, 0}{(\text{INFINITESIMO})} \cdot (\text{LIMITATO}) = \underset{\downarrow\, 0}{\text{INFINITESIMO}}$$
LIMITATO $= a \le f(x) \le b$

ex $\operatorname{sen} x$

~~INFINITO - LIMITATO~~ (INFINITO → 0)

RISOLVERE UN LIMITE

- EQUAZ RISOLVIBILE , $C = \infty$ → A OCCHIO
- EQUAZ. DIFFICILE , $C \neq \infty$ → SOSTITUISCO
  - $\frac{\neq 0}{0} \to \infty$ VERIFICO IL SEGNO $x \to x_0^+$, $x \to x_0^-$
  - $\frac{0}{0} \to$
    - RUFFINI
    - LIMITI NOTEVOLI
    - DE L'HÔPITAL (ANCHE $\frac{\infty}{\infty}$)
  - IMPOSSIBILE (FUNZIONI OSCILLANTI)
  - $n \to m$
- EQUAZ DIFFICILE , $C = \pm\infty$ →
  - $n > m \to \infty$ VERIFICO IL SEGNO (x^α, α DISPARI, α PARI)
  - $n = m \to$ RAPPORTO COEFFICIENTI TERMINI MAX
  - $n < m \to 0$
- ALTRI CASI
  - TEOREMA SUI LIMITI
  - O-PICCOLI , TAYLOR E MC LAURIN
  - $A^B = e^{\ln A^B} = e^{B \ln A}$
  - $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$ $\quad A^3 - B^3 = (A-B)(A^2 + AB + B^2)$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 5 di 25

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 7 di 25

FORME INDET.

$+\infty-\infty$; $0(\pm\infty)$; $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$

1^{∞} ; 0^{0} ; ∞^{0}

INFINITI IN ORDINE CRESCENTE

$>$

$\log n$; n^{α} ; a^{n} ; $n!$; n^{n}

$\log x$; x^{α} ; a^{x} ; $x!$; x^{x}

SUCCESSIONI

n elementi in gruppi da k

$D_{n,k}$ $\quad \underbrace{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}_{k} = \frac{n!}{(n-k)!}$

$D'_{n,k}$ $\quad n^{k}$

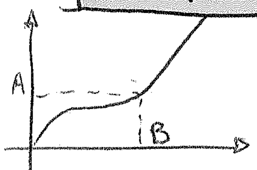
$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{n-k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \frac{D_{n,k}}{k!}$

$C'_{n,k} = C_{(n+k-1),k}$

$P_n = n!$

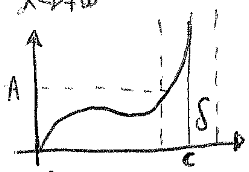
$P'_n = \frac{n!}{k_1!\,k_2!\dots}$ n° ripetiz 1° elemento 2°

VERIFICARE UN LIMITE



$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\forall A>0, \exists B>0 \,/\, x\in dom\, f,\ x>B \Longrightarrow f(x)>A$

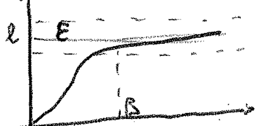


$\lim_{x\to c} f(x) = +\infty$

$\forall A>0, \exists \delta>0 \,/\, x\in dom\, f,\ 0<|x-c|<\delta \Longrightarrow f(x)>A$

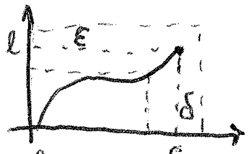
$l=\infty$ $\quad \boxed{|f(x)|>A}$

$\forall \varepsilon>0, \exists B>0 \,/\, x\in dom\, f,\ x>B \Longrightarrow |f(x)-l|<\varepsilon$



$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$

$l\neq\infty$ $\quad \boxed{|f(x)-l|<\varepsilon}$ $\quad \boxed{l-\varepsilon<f(x)<l+\varepsilon}$



$\lim_{x\to c} f(x) = l$

$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0 \,/\, x\in dom\, f,\ 0<|x-c|<\delta \Longrightarrow |f(x)-l|<\varepsilon$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 7 di 25

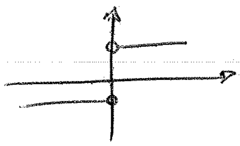
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 9 di 25

CONTINUITÀ

f CONTINUA IN $x_0 \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$

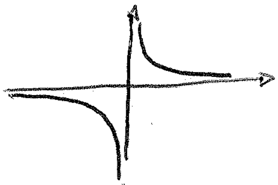
DISCONTINUITÀ

1ª SPECIE (SALTO)



$\lim_{x \to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^-} f(x)$

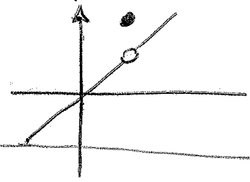
2ª SPECIE



$\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ o $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ $= \infty$

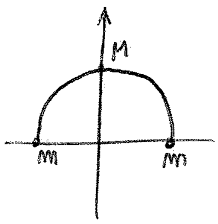
o NON ESISTE

ELIMINABILE (3ª SPECIE)



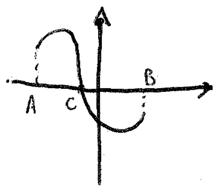
$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$ MA $\neq f(x_0)$

TEOREMA DI WEIERSTRASS



$f(x)$ CONTINUA IN $[a,b] \Longrightarrow \exists\, M, m \in [a,b]$
$f(a) = f(b)$

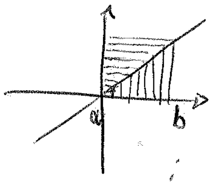
T. DI ESISTENZA DEGLI ZERI



$f(x)$ CONTINUA IN $[a,b]$, $f(a) < 0$, $f(b) > 0$

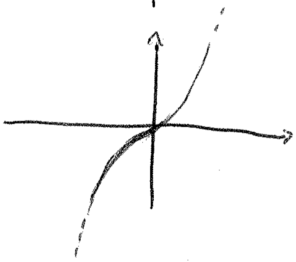
$\Longrightarrow \exists\, c \in [a;b] \,/\, f(c) = 0$

T. DI BOLZANO-DARBOUX



$f(x)$ CONTINUA IN $[a,b] \Rightarrow f(x)$ ASSUME ALMENO UNA VOLTA $\forall x \in [a,b]$

ESISTENZA ZERI SU INTERVALLI QUALSIASI



SIA $f: I \to \mathbb{R}$, CONTINUA SU $\mathbb{R}$; $a, b \in \mathbb{R}^*$

$\lim_{x \to a} f(x) = l < 0$ e $\lim_{x \to b} f(x) = l' > 0$

$\Rightarrow \exists\, x_0 \in I \,/\, f(x_0) = 0$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 9 di 25

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 11 di 25

DERIVATE

COEFF. ANG. $f(x)$ IN x_0 $\rightarrow$ $f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$

$f(x) \longrightarrow f'(x_0)$

$Y = K \longrightarrow 0$

$Y = x \longrightarrow 1$

$Y = x^m \longrightarrow m x_0^{m-1}$

$Y = |x| \longrightarrow \frac{|x|}{x} \vee \frac{x}{|x|}$

$Y = x^2 \longrightarrow 2x_0$

$Y = x^3 \longrightarrow 3x^2$

$Y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \longrightarrow \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$

$\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$\frac{1}{x} \rightarrow -\frac{1}{x^2}$

$Y = \operatorname{sen} x \longrightarrow \cos x_0$

$Y = \cos x \longrightarrow -\operatorname{sen} x_0$

$Y = a^x \longrightarrow a^x \ln a$

$Y = e^x \longrightarrow e^x$

$Y = \log_a x \longrightarrow \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a}$

$Y = \ln x \longrightarrow \frac{1}{x_0}$

SOMMA F. $\quad Y = f(x) + g(x) \longrightarrow Y' = f'(x) + g'(x)$

PRODOTTO F. $\quad Y = f(x) \cdot g(x) \longrightarrow Y' = f'(x) g(x) + f(x) g'(x)$

PROD. FUNZ/COST $\quad Y = K f(x) \longrightarrow Y' = K f'(x)$

QUOZIENTE F. $\quad Y = \frac{f(x)}{g(x)} \longrightarrow Y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) g'(x)}{g(x)^2} \Rightarrow \frac{1}{f(x)} \rightarrow -\frac{f'(x)}{f(x)^2}$

$Y = \operatorname{tg} x \longrightarrow \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$

$Y = \operatorname{cotg} x \longrightarrow -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = -1 - \operatorname{cotg}^2 x$

$Y = \operatorname{arcsen} x \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$Y = \arccos x \longrightarrow -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$Y = \operatorname{arctg} x \longrightarrow \frac{1}{1+x^2}$

$Y = \operatorname{arccotg} x \longrightarrow -\frac{1}{1+x^2}$

$\pm \frac{K}{\sqrt{1 \pm (Kx)^2}}$

F. COMPOSTE

LA DERIVATA DI UNA FUNZ COMPOSTA È IL PRODOTTO DELLE DERIVATE DELLE FUNZIONI CHE LA COMPONGONO

ECCEZIONE

$x^x \longrightarrow x^x(\ln x + 1)$

RICORDA $e^{\ln a} = a$

F. INVERSE

$$\boxed{(f^{-1})'(y_0) \longrightarrow \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 11 di 25

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 13 di 25

TEOREMI SULLE DERIVATE

- **TEOREMA DI FERMAT**

$f: I \to \mathbb{R}$, x_0 interno all'intervallo I, x_0 max o min rel.
$\Rightarrow f'(x_0) = 0$

- **TEOREMA DI ROLLE**

f continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b), $f(a) = f(b)$
$\Rightarrow \exists c \in (a,b) \,/\, f'(c) = 0$

- **TEOREMA DI LAGRANGE**

f continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b)
$\Rightarrow \exists c \in (a,b) \,/\, f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

- **TEOREMA DI CAUCHY**

f, g continue in $[a,b]$ e derivabili in (a,b), $g' \neq 0 \ \forall x$
$\Rightarrow g(b) \neq g(a)$
$\Rightarrow \exists c \in (a,b) \,/\, \dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

- **TEOREMA DI DE L'HÔPITAL**

f e g derivabili in $I - \{c\}$, $g' \neq 0$ in $I - \{c\}$, $\lim_{x \to c} f = \lim_{x \to c} g$
$\Rightarrow \lim_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

[cioè viene $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$]

1ª FORMULA DELL'INCREMENTO FINITO

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)_{x \to x_0}}$$

2ª FORMULA DELL'INCREMENTO FINITO

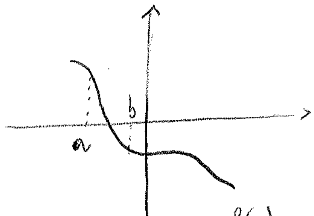
$$\boxed{f(x) = f(x_0) + f'(t)(x-x_0)}$$

METODI DI APPROSSIMAZIONE

BISEZIONE

Trovare soluzione a equazione con errore $< 10^{-6}$

$\operatorname{sen} x + x = \frac{1}{2}$ una soluz in $[0; \frac{\pi}{4}]$

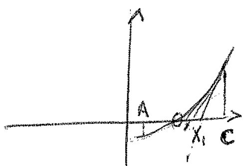


$$\Rightarrow \boxed{\frac{b-a}{2^n} < 10^{-6}} \qquad \frac{\frac{\pi}{4} - 0}{2^n} < 10^{-6} \ \ldots$$

Oppure calcolo $f(a)$ e $f(b)$ → quando sono discordi trovo punto intermedio c e faccio lo stesso finché l'errore non è abbastanza piccolo

TANGENTI

procedimento iterativo di Newton



- $f(a)$ $f(c)$ sono discordi
- $f''(x)$ esiste ed è continua in $[a,c]$
- $f''(x)$ ha sempre lo stesso segno in $[a,c]$

$$\boxed{x = c - \frac{f(c)}{f'(c)}}$$

Poi trovo gli altri punti più vicini all'intersezione che cerco; + vado avanti + il punto si avvicina

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 13 di 25

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 15 di 25

SVILUPPI DI MAC LAURIN ELEMENTARI

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \longrightarrow$ T + 1 !
- $\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) \longrightarrow$ D - x !


F. DISPARI

- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) \longrightarrow$ P - 1 !


F. PARI

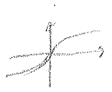
- $\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) \longrightarrow$ D + x !


F. DISPARI

- $\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) \longrightarrow$ P + 1 !


F. PARI

- $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + o(x^n) \longrightarrow$ T - x ~~!~~
- $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}) \longrightarrow$ D - x ~~!~~


F. DISPARI

- $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + o(x^n) \longrightarrow$ T + 1
- $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n) \longrightarrow$ T - 1
- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$

$$= \binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1} x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \dots + \binom{\alpha}{n} x^n + o(x^n) \longrightarrow \text{T + 1 !}$$

O-PICCOLI CORRISPONDENTI

⚠

f PARI $\to f'$ DISPARI $\to f''$ PARI ...
f DISPARI $\to f'$ PARI $\to f''$ DISPARI ...

$\Rightarrow$ f PARI $\to f^{(k)}(0) = 0 \ \forall k$ DISPARI, x^k DIVENTA DISPARI
f DISPARI $\to f^{(k)}(0) = 0 \ \forall k$ PARI, " " "

$\Longrightarrow$ / f PARI $\Rightarrow P_{f,0,n}(x)$ HA SOLO POTENZE PARI e / f DISPARI $\Rightarrow P_{f,0,n}(x)$ HA SOLO POTENZE DISPARI

⚠

IL POLINOMIO DI MAC LAURIN DI UNA FUNZIONE POLINOMIALE COINCIDE ALL'ORDINE DESIDERATO CON LA FUNZIONE STESSA:

ex $f(x) = \underbrace{\overbrace{3 + 2x}^{P_{f,0,1}} + x^2}_{P_{f,0,2}} + 5x^3$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 15 di 25

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 17 di 25

$\int f(x)\,dx = F(x) + k$

INTEGRALI INDEFINITI

INTEGRALI IMMEDIATI

$$\int x^m\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + k \qquad (m \neq -1)$$

$$-\int \frac{2}{x^3} = \frac{1}{x^2} + k$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + k \qquad (m = -1)$$

+ DERIVATE AL CONTRARIO

OCCHIO ALLA DERIVATA

$$\int y^m \cdot y'\,dx = \frac{y^{m+1}}{m+1} + k$$

$$\int \frac{y'}{y}\,dx = \ln|y| + k$$

IN ORDINE LIATE (LOGARITMICHE, INVERSE, ALGEBRICHE, TRIGONOMETRICHE, ESPONENZIALI)

$f \rightarrow g'$

INTEGRAZIONE PER PARTI

$$\int f g'\,dx = fg - \int f' g\,dx$$

$f \rightarrow f'$

$g' \rightarrow g$

$\frac{dt}{dx}$ = derivata t

$\frac{dx}{dt}$ = derivata x

$\longrightarrow \int \ln x\,dx = x(\ln x - 1) + k$

INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE

se $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\,dx$ $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx$ allora $t = x + \sqrt{x^2 \pm a^2}$ → viene $\ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + k$

$t = z$ $\quad \frac{dt}{dx} = z'$ ... $dx = ?$ (lo scrivo in funzione di t)

[USARE FORMULE PARAMETRICHE + DUPLICAZIONE]

INTEGRALI DI FUNZIONI RAZIONALI

② $\int \frac{z}{ax^2+bx+c}\,dx \Rightarrow \frac{z}{a(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{A}{a(x-x_1)} + \frac{B}{(x-x_2)} \ldots$ $\quad \Delta > 0$

⑤ $\int \frac{z}{x^3+a^3}\,dx \Rightarrow$ ⊛ $\frac{z}{x^3+a^3} = \frac{A}{(x+a)} + \frac{Bx+C}{(x^2-ax+a^2)} \ldots$ $\quad$ °DENOM > 2°

(z → ANCHE espressione; → ANCHE ESPRESSIONE COMPLETA (CON RUFFINI))

① $\int \frac{ax^2+bx+e}{dx+e}\,dx \Rightarrow$ $ax^2+bx+c \,|\, dx+e$; $-ax^2 \ldots \ldots$ $px \ldots$ Ⓠ ; Ⓡ $\ldots = \int Q + \frac{R}{dx+e}\,dx$ $\quad$ ° DEN < ° NUM

③ $\int \frac{ax+b}{(x+c)^2}\,dx \Rightarrow \frac{ax+b}{(x+c)^2} = \frac{A}{(x+c)} + \frac{B}{(x+c)^2} \ldots$ $\quad \Delta = 0$

$$\int \frac{f'(x)}{[f(x)]^2 + k^2}\,dx \rightarrow \frac{1}{k}\operatorname{arctg}\frac{f(x)}{k} + c$$

④ $\operatorname{arctg}(ax+b) \xrightarrow{y'} \frac{a}{(ax+b)^2+1}$ $\quad \int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx$ RICONDURLO A QUESTA FORMA $\quad$ NUM DI GRADO 0

$\Delta < 0$

$\int \frac{ax+b}{ax^2+bx+c}\,dx \rightarrow$ RENDO IL NUM. LA DERIVATA DEL DENOM. X FARLO AGGIUNGO UNA FRAZIONE OTTENENDO $\quad$ GRADO NUM > 0

$z\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx + z\int \frac{a}{ax^2+bx+c}$ CHE RISOLVO SEPARATAMENTE

$= \ln|f(x)|$

O AGGIUNGO E TOLGO QUALCOSA X SEMPLIFICARE

OPPURE $\frac{t^2+1}{t^2+t+1} \rightarrow \frac{t^2+t+1-t}{t^2+t+1}$

⊛ ax^3+bx^2+cx+d

	a	b	c	d
ZERO		az	.. +	..
	a	e	f	//

$(x - \text{zero})(ax^2 + ex + f)$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 17 di 25

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 19 di 25

PRIMITIVA GENERALIZZATA CHE VALE Y_0 IN X_0 → TROVO $F(x)+c$

PONGO $F(x_0)+c = Y_0$ OTTENENDO C_1

LO SOSTITUISCO $F(x)+C_1$ OTTENENDO LA FORMA RICHIESTA

$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}x \cos x \, dx = \emptyset$ ≠

ricordo che $\int_0^{2\pi} \cos^2 x = \pi = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 x$

$\boxed{\int \operatorname{sen}x \cos x \, dx}$

- SE HO

$$\int e^x \operatorname{sen}x \, dx \; ; \; \int e^x \cos x \, dx \; ; \; \int \operatorname{sh}x \operatorname{sen}x \; \ldots \; ; \; \boxed{\int \underset{\cos x \cos x}{\cos^2 x} \; ; \; \int \underset{\operatorname{sen}x \operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}^2 x}}$$

(*)

ANCHE QUESTI MI CONVIENE FARLI IN LOOP, sostituendo $1-\cos^2 = \operatorname{sen}^2$ o viceversa

IN QUESTI CASI, RE INTEGRANDO VA IN LOOP (ciclo infinito), DEVO INTEGRARE 2 VOLTE PER PARTI RIOTTENENDO L'INTEGRALE DI PARTENZA, CHE CONSIDERO COME UNA VARIABILE.

ex $\int e^x \operatorname{sen}x \, dx = e^x \operatorname{sen}x - \int e^x \cos x \, dx$

$\boxed{\int e^x \operatorname{sen}x \, dx} = e^x \operatorname{sen}x - e^x \cos x \boxed{- \int e^x \operatorname{sen}x \, dx} \Rightarrow 2\int e^x \operatorname{sen}x = e^x \operatorname{sen}x - e^x \cos x$

- SE INVECE HO EQUAZIONI A 2 VARIABILI DEL TIPO

$\int f(\operatorname{sen}x, \cos x) \, dx$ o INTEGRALI IN $\operatorname{sen}x, \cos x$ che non so risolvere

IN QUESTI CASI SOSTITUISCO CON LE PARAMETRICHE

$$\boxed{\operatorname{sen}x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}} \quad \boxed{t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}} \to x = 2\operatorname{arctg} t \Rightarrow dx = \frac{2}{1+t^2}$$

ex $\int \frac{1}{\operatorname{sen}x} dx = \int \frac{1}{\frac{2t}{\cancel{1+t^2}}} \frac{\cancel{2}}{\cancel{1+t^2}} dt = \int \frac{1}{t}$

$= \ln|t| \to \ln|\operatorname{tg}\frac{x}{2}| + c$

- SE INVECE COMPAIONO (*)

$$\int \operatorname{sen}^2 x \; ; \; \cos^2 x \; ; \; \operatorname{tg}x \; ; \; \operatorname{sen}x \cos x \; dx$$

PONGO

$$\boxed{\operatorname{tg}x = t} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} \operatorname{sen}^2 x = \dfrac{t^2}{1+t^2} \\ \cos^2 x = \dfrac{1}{1+t^2} \\ \operatorname{sen}x \cos x = \dfrac{t}{1+t^2} \end{cases}} \boxed{\Rightarrow dx = \frac{1}{1+t^2} dt}$$

ex $\int \frac{1}{\cos^2 x(1+\operatorname{sen}x\cos x)} dx = \int \frac{1}{\frac{1}{\cancel{1+t^2}}\left(1+\frac{t}{1+t^2}\right)} \frac{1}{\cancel{1+t^2}} dt =$

$= \int \frac{t^2+1}{t^2+t+1} dt \; \ldots$

- OPPURE PONGO

$$\boxed{\operatorname{sen}x = t \Rightarrow \cos x = \sqrt{1-t^2}}$$

- SE HO VARIABILI TIPO

$$\int f\left(x^{\frac{m_1}{m_2}}, x^{\frac{m_2}{m_2}}, \ldots x^{\frac{m_k}{m_k}}\right) dx$$

SOSTITUISCO

$$\boxed{x = t^m}$$

ex $\int \frac{\sqrt[6]{x}}{(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})^2} dx = \int \frac{x^{\frac{1}{6}}}{\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}\right)^2} dx \qquad x = t^6 \quad dx = 6t^5 \, dx$

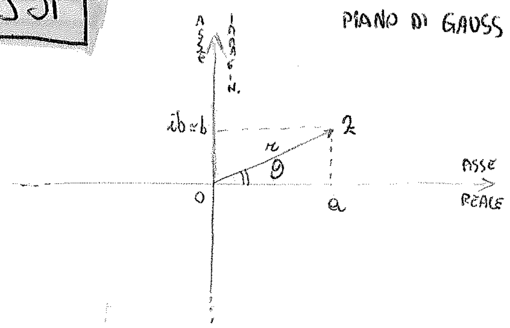
$= \int \frac{t}{(t^3+t^2)^2} 6t^5 \, dt \; \ldots$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 19 di 25

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 21 di 25

NUMERI COMPLESSI

PIANO DI GAUSS



$$\boxed{z = a + ib}$$

$$z = \mathrm{Re}\,z + i\,\mathrm{Im}\,z$$

$z \in \mathbb{C}$

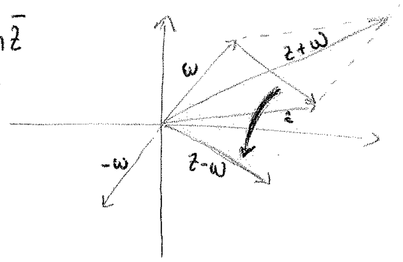
$\boxed{\bar{z} = a - ib}$ COMPLESSO CONIUGATO

$\bar{\bar{z}} = z \qquad \overline{mz} = m\bar{z}$

$m \in \mathbb{R}$

$\boxed{|z| = \sqrt{a^2+b^2}}$ MODULO z (LUNGHEZZA VETTORE $\vec{z}$) $= r$

$$\Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$$



1ª DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE $\boxed{|z+w| \leq |z| + |w|}$ ~ in triangolo $l_1 < l_2 + l_3$

2ª DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE $\boxed{\big||z|-|w|\big| \leq |z-w|}$ ~ in triangolo $l > l_2 - l_3$

i^n					
→ 1	se	$\frac{n}{4}$	da	resto	$\emptyset$
→ i	"	"	"	"	1
→ -1	"	"	"	"	2
→ $-i$	"	"	"	"	3

ex $z = a + ib = 0$
$\iff a = 0 \wedge b = 0$

FORMA POLARE DI z $\boxed{z = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)}$

$r = |z|$

$\theta = \arg(z)$ ARGOMENTO di z

$$\rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{a^2+b^2} \\ \cos\theta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \mathrm{sen}\,\theta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$$

FORMULA di DE MOIVRE $\boxed{z^m = r^m(\cos m\theta + i\,\mathrm{sen}\,m\theta)}$

$$\Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{1}{r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)} = \frac{\cos\theta - i\,\mathrm{sen}\,\theta}{r(\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\theta)}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 21 di 25

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 23 di 25

DIFFERENZIALI

$$F(x, y, y', y'', \dots y^{(m)}) = 0 \quad \forall x \in I \qquad y?$$

- A INTUITO ex $y' = y \Rightarrow y = ce^x$

PROBLEMA DI CAUCHY

$$\begin{cases} y' = G(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

IN GENERALE

$$\begin{cases} y^{(m)} = G(x, y, y', \dots y^{(m-1)}) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \\ \vdots \\ y^{(m-1)}(x_0) = y_0^{(m-1)} \end{cases}$$

ex se $\begin{cases} y'' + ay' + by = 0 \\ y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 0 \end{cases} \Rightarrow y(x) = 0$

CERCO INTEGRALE GENERALE POI SOSTITUISCO x_0 e y_0 OTTENENDO LA C DELL'INTEGRALE PARTICOLARE

1° ORDINE A VARIABILI SEPARABILI

$$y' = a(x) \cdot b(y)$$

- CERCO SOLUZIONI COSTANTI PONENDO $b(y) = 0$
- " " NON COSTANTI CON LA FORMULA

$$\boxed{\int \frac{1}{b(y)} \, dy = \int a(x) \, dx} \Rightarrow \text{ISOLO LA } y$$

TEOREMI CAUCHY

$a(x)$ CONTINUA IN INTORNO DI x_0 $b(y)$ DI CLASSE C^1 IN INTORNO DI y_0 $\Rightarrow$ PROB. CAUCHY HA 1 SOLUZ.	$a(x)$ CONTINUA IN INTORNO DI x_0 $b(y)$ " " " $\Rightarrow$ PROB CAUCHY HA ALMENO 1 SOLUZ.

1° ORDINE LINEARI

$\sim a(x) b(y) + c(x)$

$$y' = a(x) y + b(x)$$

① $b(x) = 0$ EQ. OMOGENEA ASSOCIATA $y' = a(x) y$ A VARIABILI SEPARABILI

$$y' = a(x) y \Rightarrow \boxed{y = k e^{A(x)}}$$

② $b(x) \neq 0$ EQ. NON OMOGENEA

$$y' = a(x) y + b(x) \Rightarrow \boxed{y(x) = e^{A(x)} \int e^{-A(x)} b(x) \, dx}$$

$$\boxed{y(x) = k e^{A(x)} + e^{A(x)} \int_{x_0}^{x} e^{-A(t)} b(t) \, dt}$$

PROB. CAUCHY $\begin{cases} y' = a(x) y + b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{k = y_0}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 23 di 25

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 25 di 25

SOSTITUZIONE

Se ho un eq. del tipo $y' = \frac{1 y^2}{4x^2} + \frac{3y}{2x} - \frac{3}{4}$ posso sostituire $\boxed{z = \frac{y}{x}}$ $\Rightarrow y' = xz' + z$

$\Rightarrow xz' + z = \frac{1}{4}z^2 + \frac{3}{2}z - \frac{3}{4} \Rightarrow z' = \frac{(z-1)(z+3)}{4x} \sim a(x)\, b(y)$

$\Rightarrow \int \frac{1}{4x}\, dx = \int \frac{1}{(z-1)(z+3)}\, dy \ldots$

$\Rightarrow \ln\left|\frac{z-1}{z+3}\right| = \ln x + c \Rightarrow \ln\left|\frac{z-1}{z+3}\right| = \underbrace{\ln x + \ln C'}_{= \ln x C'}$

$\Rightarrow \frac{z-1}{z+3} = C'x$ isolo $z \Rightarrow$

$\Rightarrow z = \frac{1+3Cx}{1-Cx}$ sostituisco $z = \frac{y}{x}$ $\Rightarrow \boxed{y = \frac{x+3Cx^2}{1-Cx}}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 25 di 25