NUMERO : 32

DATA : 22/02/2011

A P P U N T I

STUDENTE : Triolo

MATERIA : Geometria

TRIOLO VINCENZO

DOMANDE DI GEOMETRIA

A.A. 2009 - 2010

- DOMANDE ALGEBRA LINEARE
- DOMANDE GEOMETRIA ANALITICA
- DOMANDE FUNZIONI IN PIÙ VARIABILI
- SCHEMA CONICHE
- SCHEMA QUADRICHE

4) DEFINIRE LA NOZIONE DI BASE PER UNO SPAZIO VETTORIALE FINITAMENTE GENERATO.

4) SIA V UNO SPAZIO VETTORIALE SU UN CAMPO K, V SI DICE FINITAMENTE GENERATO SE ESISTE UN NUMERO FINITO h DI VETTORI $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_h$ TALI CHE
$V = L(\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_h)$

5) DEFINIRE LA NOZIONE DI AUTOVALORE, AUTOVETTORE E AUTOSPAZIO DI UN ENDOMORFISMO DI UNO SPAZIO VETTORIALE.

5) - SIA V UNO SPAZIO VETTORIALE (DEFINITO SU $\mathbb{K}$) E SIA $\varphi: V \to V$ UN ENDOMORFISMO, CIOÈ UNA APPLICAZIONE LINEARE DI V IN SE STESSO. UN NUMERO $\lambda \in \mathbb{K}$ È UN AUTOVALORE DI φ SE ESISTE UN VETTORE NON NULLO $v \in V$ TALE CHE $\varphi(v) = \lambda v$. QUINDI $\lambda \in \mathbb{K}$ È UN AUTOVALORE SE E SOLO SE L'EQUAZIONE IN $v \in V$ $\varphi(v) - \lambda v = 0$ HA SOLUZIONI NON NULLE IN V.
- SIA $\lambda \in \mathbb{K}$ UN AUTOVALORE DELL'ENDOMORFISMO $\varphi: V \to V$ UN $v \in V$ SI CHIAMA AUTOVETTORE DI φ ASSOCIATO ALL'AUTOVALORE λ SE SI HA $\varphi(v) = \lambda v$ OSSIA $\varphi(v) - \lambda v = 0$ (CON $\underline{v} \neq \underline{0}$)
- L'INSIEME DEGLI AUTOVETTORI ASSOCIATI ALL'AUTOVALORE λ COINCIDE DUNQUE COL NUCLEO DELL'APPLICAZIONE LINEARE $\varphi_\lambda : V \to V$; È QUINDI UN SOTTOSPAZIO DI V. QUESTO SOTTOSPAZIO SI CHIAMA AUTOSPAZIO DI φ ASSOCIATO ALL'AUTOVALORE λ E SI DENOTA CON V_λ. DALLA DEFINIZIONE RISULTA CHE UN AUTOSPAZIO V_λ CONTIENE ELEMENTI NON NULLI. SI HA DUNQUE $\dim V_\lambda > 0$ PER OGNI AUTOVALORE λ

VOLTA PER $\underline{e}'_2$ OTTENGO DUE CONDIZIONI PER DEFINIRE λ E μ ADATTI. RICAVO CIOÈ:

$$\begin{cases} \underline{e}^*_3 \cdot \underline{e}'_1 = \underline{e}_3 \cdot \underline{e}'_1 + \lambda \underline{e}'_1 \cdot \underline{e}'_1 + \mu \underline{e}'_2 \cdot \underline{e}'_1 = 0 \\ \underline{e}^*_3 \cdot \underline{e}'_1 = \underline{e}_3 \cdot \underline{e}'_2 + \lambda \underline{e}'_1 \cdot \underline{e}'_2 + \mu \underline{e}'_2 \cdot \underline{e}'_2 = 0 \end{cases}$$

DA CUI SAPENDO CHE $\underline{e}'_1 \perp \underline{e}'_2$ PER COSTRUZIONE

$$\begin{cases} \underline{e}_3 \cdot \underline{e}'_1 + \lambda 1 + \mu \emptyset = 0 \\ \underline{e}_3 \cdot \underline{e}'_2 + \lambda \emptyset + \mu 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \underline{e}_3 \cdot \underline{e}'_1 + \lambda = 0 \\ \underline{e}_3 \cdot \underline{e}'_2 + \mu = 0 \end{cases}$$

RICAVO DA QUI I VALORI λ E μ CHE SODDISFANO LA $\perp$

$$\lambda = -\underline{e}_3 \cdot \underline{e}'_1$$
$$\mu = -\underline{e}_3 \cdot \underline{e}'_2$$

SOSTITUENDO IN $\underline{e}^*_3$ OTTENGO IL TERZO VETTORE DI B_2

$$\underline{e}^*_3 = \underline{e}_3 - (\underline{e}_3 \cdot \underline{e}'_1)\underline{e}'_1 - (\underline{e}_3 \cdot \underline{e}'_2)\underline{e}'_2$$ DA CUI TROVO IL VERSORE $$\underline{e}'_3 = \frac{e^*_3}{\| e^*_3 \|}$$

7) DEFINIRE LA NOZIONE DI LINEARE DIPENDENZA E LINEARE INDIPENDENZA

7) DEFINIRE LINEARE INDIPENDENZA:

- I VETTORI $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_h$ DI V SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI SU $\mathbb{K}$ SE, PRESI h COEFFICIENTI $\lambda \in \mathbb{K}$, L'UNICA COMBINAZIONE LINEARE CHE DÀ LUOGO AL VETTORE NULLO È QUELLA CON COEFFICIENTI TUTTI NULLI $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_h = 0)$

DEFINIRE LINEARE DIPENDENZA:

- $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_h \in V$ ~~PER IL PRODOTTO DI UN NUMERO QUALUNQUE~~ SONO LINEARMENTE DIPENDENTI SU $\mathbb{K}$ SE DANNO LUOGO AD UNA COMBINAZIONE LINEARE EQUIVALENTE AL VETTORE NULLO ANCHE CON COEFFICIENTI NON TUTTI NULLI.

4

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 7 di 74

$Im f$ CIOÈ $Im f$ È INSIEME CHIUSO RISPETTO ALLA COMBINAZIONE LINEARE DUNQUE $Im f$ È SOTTOSPAZIO DI W.

10) SIA $F: V \to W$ UN'APPLICAZIONE LINEARE TRA DUE SPAZI VETTORIALI SUL CAMPO $\mathbb{K}$. DEFINIRE $Ker(F)$ E VERIFICARE CHE SI TRATTA DI UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE DI V.

10) $Ker f$ È L'INSIEME DEI VETTORI $\underline{x} \in V$ CHE HANNO IMMAGINE NULLA. $Ker f = \{ \underline{x} \in V \,/\, f(\underline{x}) = \underline{0}_W \}$ PER CUI $Ker f = f^{-1}(\underline{0}_W) \rightsquigarrow \underline{0}_V$ APPARTIENE AL NUCLEO, PERCHÈ SI È OSSERVATO CHE IL VETTORE $\underline{0}_V \in V$ CORRISPONDE SEMPRE A $\underline{0}_W \in W$ DUNQUE $Ker f$ NON È MAI VUOTO: $Ker f \neq 0$.

$Ker f$ È SOTTOSPAZIO DI V.

- IPOTESI: DATA $f: V \to W$ APPLICAZIONE LINEARE
- TESI: $Ker f$ È SOTTOSPAZIO DI V CIOÈ SE $\underline{x}_1, \underline{x}_2 \in Ker f$ ALLORA $\underline{x}_1 + \underline{x}_2 \in Ker f$, SE $\underline{x} \in Ker f$ E $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ SI HA $\lambda \underline{x} \in Ker f$.
- DIMOSTRAZIONE: PRESI $\underline{x}_1$ E $\underline{x}_2$ QUALSIASI IN $Ker f$:
  - $\forall \underline{x}_1, \underline{x}_2 \in Ker f \rightsquigarrow f(\underline{x}_1) = \underline{0}_W$ e $f(\underline{x}_2) = \underline{0}_W$
  - CALCOLO $f(\lambda \underline{x}_1 + \mu \underline{x}_2) = \lambda f(\underline{x}_1) + \mu f(\underline{x}_2) =$ $= \underline{0}_W + \underline{0}_W = \underline{0}_W$
  - DUNQUE $(\lambda \underline{x}_1 + \mu \underline{x}_2) \in Ker f$ PERCHÈ HA IMMAGINE NULLA, E PERTANTO $Ker f$ È UN SOTTOSPAZIO.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 9 di 74

12) SIA $F: V \to W$ UN'APPLICAZIONE LINEARE TRA SPAZI VETTORIALI FINITAMENTE GENERATI. VERIFICARE CHE $\dim(V) = \dim(\mathrm{Im}(F)) + \dim(\mathrm{Ker}(F))$

12) IL SOTTOSPAZIO $\mathrm{Ker} f$ HA DIMENSIONE FINITA, ESSENDO UN SOTTOSPAZIO DI V. SE $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ È UNA BASE DI V, UN QUALUNQUE VETTORE $x \in V$ SI PUÒ SCRIVERE

$\underline{x} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_m e_m$ E QUINDI SI HA

$$f(x) = f(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_m e_m) = x_1 f(e_1) + \\ + x_2 f(e_2) + \dots + x_m f(e_m)$$

FORMULA CHE METTE IN EVIDENZA:

a) UN APPLICAZIONE LINEARE f DI V IN W È NOTA SE SONO NOTI I VETTORI DI V

b) LO SPAZIO $\mathrm{Im} f$ È GENERATO DAI VETTORI $f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_m)$ E QUINDI HA DIMENSIONE FINITA, RAPPRESENTATA DAL NUMERO MASSIMO $(\leq m)$ DI VETTORI LINEARMENTE INDIPENDENTI TRA ESSI.

$\dim(\mathrm{Ker} f) + \dim(\mathrm{Im} f) = \dim V$ È IMMEDIATA NEL CASO IN CUI $\mathrm{Ker} f = \{\underline{0}_V\}$ IN QUANTO I VETTORI $f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_m)$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI. È ANCHE IMMEDIATA NEL CASO IN CUI $\mathrm{Ker} f = V$ IN QUANTO IN TAL CASO f È APPLICAZIONE NULLA E $\mathrm{Im} f = \{\underline{0}_W\}$. CONSIDERANDO GLI ALTRI CASI. SIA $\{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_q\}$ UNA BASE DI $\mathrm{Ker} f$; SUPPONIAMO $0 < q < m$ E SIA $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_p\}$ UNA BASE DI $\mathrm{Im} f$ DIMOSTRIAMO $q + p = m$ POICHÈ $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_p \in \mathrm{Im} f$ ESISTONO p VETTORI $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_p \in V$ TALI CHE $f(\underline{w}_1) = \underline{v}_1, \dots, f(w_p) = \underline{v}_p$

$\boxed{q + p = m}$ e $\boxed{\dim V = \dim \mathrm{Ker} f + \dim \mathrm{Im} f}$ SI PROVANO VERIFICANDO CHE I VETTORI $\{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_q, \underline{w}_1, \dots, \underline{w}_p\}$ COSTITUISCONO UNA BASE DI V. DIMOSTRIAMO ANZITUTTO CHE TALI VETTORI SONO GENERATORI DI V. POICHÈ QUALUNQUE SIA $\underline{x} \in V$ RISULTA $f(\underline{x}) \in \mathrm{Im} f = L(\lambda_1 \underline{w}_1 + \dots + \lambda_p \underline{w}_p)$ DA INIETTIVITÀ

8

(E ANCHE LE RIGHE) DI A SONO INDIPENDENTI: $\rho(A) = m$.
VICEVERSA, SE $\rho(A) = m$, f È SURIETTIVO ED ANCHE INIETTIVO ESSENDO CHE $\dim \operatorname{Ker} f = 0$; PERTANTO f E LA SUA MATRICE A SONO INVERTIBILI, CIOÈ $\det A \neq 0$.

15) VERIFICARE CHE UN'APPLICAZIONE LINEARE $F: V \to W$ È INIETTIVA SE E SOLO SE $\operatorname{Ker}(F) = (\vec{0})$

15) CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE AFFINCHÉ UNA APPLICAZIONE $f: V \to W$ SIA INIETTIVA È CHE $\operatorname{Ker} f = \{\underline{0}_V\}$ CIOÈ f È SICURAMENTE INIETTIVA SE $\operatorname{Ker} f$ CONTIENE IL SOLO VETTORE NULLO.

- DIM TEOREMA DIRETTO $\Rightarrow$ a) SE PER ASSURDO f NON FOSSE INIETTIVA ESISTEREBBERO $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2 \in V$ TALI CHE $f(\underline{v}_1) = f(\underline{v}_2)$

b) PER LA LINEARITÀ $f(\underline{v}_1) - f(\underline{v}_2) = \underline{0}_V \Rightarrow f(\underline{v}_1 - \underline{v}_2) = \underline{0}_W$

c) CIOÈ $\underline{v}_1 - \underline{v}_2 \in \operatorname{Ker} f$ DUNQUE $\underline{v}_1 - \underline{v}_2 = \underline{0}_V$ PER IPOTESI

d) CIÒ DETERMINA $\underline{v}_1 = \underline{v}_2$ CIOÈ DUE VETTORI HANNO STESSA IMMAGINE SE E SOLO SE SONO LO STESSO VETTORE, E DUNQUE LA FUNZIONE È EFFETTIVAMENTE INIETTIVA.

- DIM TEOREMA INVERSO $\Rightarrow$ SE ESISTESSE IN $\operatorname{Ker} f$ UN VETTORE $\underline{v} \neq \underline{0}_V$ SI DOVREBBE AVERE $f(\underline{0}_V) = \underline{0}_W$ MA ANCHE $f(\underline{v}) = \underline{0}_W$ MA CIÒ CONTRADDICE L'IPOTESI DI INIETTIVITÀ.

16) VERIFICARE CHE UN'APPLICAZIONE LINEARE $F: V \to W$ TRA SPAZI VETTORIALI FINITAMENTE GENERATI È SURIETTIVA SE E SOLO SE $\operatorname{RANGO}(F) = \dim(W)$

16) SIA $f: V \to W$ APPLICAZIONE LINEARE E A LA MATRICE ASSOCIATA ALL'APPLICAZIONE:
SE $\rho(A) = \dim W$ SI HA $\dim(\operatorname{Im} f) = \dim W$

10

PONIAMO $A = M_f^{EE}$. ALLORA LE SEGUENTI CONDIZIONI SONO EQUIVALENTI: a) f È AUTOAGGIUNTO b) A È SIMMETRICA.

- ESSENDO E ORTONORMALE PER OGNI $v \in V$ RISULTA $v = (v \cdot e_1)e_1 + \dots + (v \cdot e_n)e_n$ QUINDI IN PARTICOLARE

$$f(e_1) = (f(e_1) \cdot e_1)e_1 + \dots + (f(e_1) \cdot e_n)e_n$$

$$\dots\dots\dots$$

$$f(e_n) = (f(e_n) \cdot e_1)e_1 + \dots + (f(e_n) \cdot e_n)e_n$$

RISULTA ALLORA

$$A = M_f^{E,E} = \begin{pmatrix} f(e_1)\cdot e_1 & f(e_2)\cdot e_1 & \dots & f(e_n)\cdot e_1 \\ f(e_1)\cdot e_2 & f(e_2)\cdot e_2 & \dots & f(e_n)\cdot e_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f(e_1)\cdot e_n & f(e_2)\cdot e_n & & f(e_n)\cdot e_n \end{pmatrix}$$

È QUINDI IMMEDIATO CHE SE f È AGGIUNTO ALLORA A È SIMMETRICA. VICEVERSA SE A È SIMMETRICA RISULTA.

$f(e_i) \cdot e_j = e_i \cdot f(e_j)$ PER OGNI SCELTA DEGLI INDICI i, j E QUINDI f È AUTOAGGIUNTO (PER IL TEOREMO SUL CRITERIO PER GLI ENDOMORFISMI AUTOAGGIUNTI).

19) VERIFICARE CHE SE $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ È UN ENDOMORFISMO AUTOAGGIUNTO ALLORA TUTTI GLI ZERI DEL POLINOMIO CARATTERISTICO DI F SONO REALI.

19) SIA $\lambda_1 = a_{11} + i b_1$ UNA SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE CARATTERISTICA, $\det(A - \lambda I) = 0$ DI UNA MATRICE SIMMETRICA A DI ORDINE n. CONSIDERATO IL SISTEMA LINEARE OMOGENEO DI n EQUAZIONI IN n INCOGNITE $(A - \lambda_1 I)X = 0$ ESSO AMMETTE ALMENO UNA SOLUZIONE NON NULLA $z_1 = x_1 + i y_1 \in \mathbb{C}^n$ CON $x_1, y_1 \in \mathbb{R}^n$ E NON ENTRAMBI NULLI SI HA CIOÈ $Az_1 = \lambda z_1$ E QUINDI

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = \lambda x_1 \\ \dots \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = \lambda x_n \end{cases}$$

DOVE I PRIMI MEMBRI SONO LE COMPONENTI DI $f(\underline{x})$, I SECONDI MEMBRI SONO LE COMPONENTI DI $\lambda \underline{X}$. IL SISTEMA SI PUÒ ANCHE SCRIVERE COSÌ:

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + \dots + (a_{nn}-\lambda)x_n = 0 \end{cases}$$

O ANCHE IN FORMA COMPATTA $(A-\lambda I)X = 0$

PERCHÈ IL SISTEMA LINEARE OMOGENEO DI n EQUAZIONI NELLE n INCOGNITE $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ABBIA SOLUZIONI NON NULLE, DEVE ESSERE:

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{2n} \\ \dots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

OSSIA GLI AUTOVALORI DI f SONO LE SOLUZIONI APPARTENENTI AL CAMPO $\mathbb{K}$ SU CUI È DEFINITO V, DELL'EQUAZIONE DI GRADO n IN λ OTTENUTA SVILUPPANDO IL DETERMINANTE.

TALE EQUAZIONE SI DICE EQUAZIONE CARATTERISTICA DI f ED È DEL TIPO:

$$P(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} b_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + (-1) b_1 \lambda + b_0 = 0$$

OVE IN PARTICOLARE È $P(0) = b_0 = \det A$

22) SIA $F: V \to V$ UN ENDOMORFISMO DI UNO SPAZIO VETTORIALE SUL CAMPO K E SUPPONIAMO CHE V SIA FINITAMENTE GENERATO. VERIFICARE CHE GLI AUTOVALORI DI F SONO GLI ZERI DEL POLINOMIO CARATTERISTICO CHE APPARTENGONO AL CAMPO K

22) IL POLINOMIO CARATTERISTICO È L'EQUAZIONE DEGLI AUTOVALORI. ESSO È RICAVATO DALL'EQUAZIONE $\det(A-\lambda I)=0$ DOVE λ SONO GLI AUTOVALORI E QUINDI GLI AUTOVALORI SONO TALI PER CUI IL POLINOMIO CARATTERISTICO SI ANNULLA. QUINDI GLI AUTOVALORI DI f SONO GLI ZERI DEL POLINOMIO CARATTERISTICO.

23) SIA $F: V \to V$ UN ENDOMORFISMO DI UNO SPAZIO VETTORIALE n-DIMENSIONALE SUL CAMPO K. VERIFICARE CHE SE IL POLINOMIO CARATTERISTICO DI F HA n-RADICI DISTINTE APPARTENENTI A K ALLORA F È SEMPLICE

23) SE $\dim V = n$ E φ HA n AUTOVALORI DISTINTI, φ È SEMPLICE. INFATTI PER IL TEOREMA SULL'INDIPENDENZA LINEARE DEGLI AUTOVETTORI (CHE AFFERMA CHE AUTOVETTORI NON NULLI CORRISPONDENTI AD AUTOVALORI DISTINTI SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI) ESISTONO IN V n AUTOVETTORI LINEARMENTE INDIPENDENTI; TALI AUTOVETTORI FORMANO QUINDI UNA BASE DI V.

25) SIA $F: V \to V$ UN ENDOMORFISMO DI UNO SPAZIO VETTORIALE FINITAMENTE GENERATO E SIA $B = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_K)$ UNA BASE DI V. VERIFICARE CHE F È SEMPLICE SE E SOLO SE LA MATRICE $M_B(F)$ È DIAGONALIZZABILE.

25) IN ALTRI TERMINI UNA MATRICE A È DIAGONALIZZABILE SE È SIMILE AD UNA MATRICE DIAGONALE D, CIOÈ SE ESISTE UNA MATRICE INVERTIBILE P TALE CHE $D = P^{-1} A P$. SI OSSERVI CHE SE È DIAGONALIZZABILE, LA MATRICE P PER CUI SI REALIZZA $D = P^{-1} A P$ È LA MATRICE AVENTE PER COLONNE LE COMPONENTI DI m AUTOVETTORI INDIPENDENTI DI f RELATIVE ALLA BASE RISPETTO A CUI f È RAPPRESENTATO DALLA MATRICE A.

26) SIA W UNO SPAZIO VETTORIALE FINITAMENTE GENERATO E SUPPONIAMO CHE W SIA LA SOMMA DI DUE SOTTOSPAZI V_1 E V_2. ENUNCIARE LA RELAZIONE CHE LEGA LA DIMENSIONE DI W ALLE DIMENSIONI DI V_1, V_2 E $V_1 \cap V_2$

26) LA DIMENSIONE DI UN SOTTOSPAZIO V_1 DI W È DEFINITA COME IL NUMERO DI GENERATORI LINEARMENTE INDIPENDENTI DI W. SE V_1 E V_2 SONO SOTTOSPAZI DI W SI HA LA RELAZIONE DI GRASSMAN.

$$\dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$$

- INOLTRE SIA W UNO SPAZIO VETTORIALE DI DIMENSIONE FINITA SU K, E SIANO V_1 E V_2 DUE SOTTOSPAZI PROPRI DI W TALI CHE $W = V_1 \oplus V_2$. SE $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_s\}$, $\{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_t\}$ SONO DUE BASI DI V_1 E V_2 ALLORA $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_s, \underline{w}_1 \dots \underline{w}_t\}$ È UNA BASE DI W E RISULTA

$$\dim W = \dim V_1 + \dim V_2$$

A UNA RETTA r E V_2 IL SOTTOSPAZIO DI V_3 COSTITUITO DAI VETTORI PARALLELI AD UN PIANO δ, QUALORA r NON SIA PARALLELA A δ, $V_1 \cup V_2$ NON È UN SOTTOSPAZIO DI V_3 PERCHÈ CONSIDERATO UN VETTORE $X \in V_1 \subset V_1 \cup V_2$ E UN VETTORE $Y \in V_2 \subset V_1 \cup V_2$, SE X E Y NON SONO NULLI, SI HA CHE $X+Y \notin V_1 \cup V_2$.

28) SIA $A \in \mathbb{R}(m,m)$ UNA MATRICE SIMMETRICA. PROVARE CHE ESISTE UNA MATRICE ORTOGONALE P, CON m-RIGHE E m-COLONNE TALE CHE $P^T \cdot A \cdot P$ È DIAGONALE.

28) RICORDANDO CHE UNA MATRICE SIMMETRICA REALE NON SOLO È DIAGONALIZZABILE MA PUÒ ESSERE DIAGONALIZZATA ANCHE MEDIANTE UNA MATRICE ORTOGONALE ALLORA:

- CONSIDERIAMO $\mathbb{R}^n$ EUCLIDEO E SIA $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ L'ENDOMORFISMO ASSOCIATO AD A MEDIANTE LA BASE CANONICA E. POICHÈ E È ~~ORTOGONALE~~ ORTONORMALE ED A È SIMMETRICA, f È AUTOAGGIUNTO. QUINDI ESISTE UNA BASE ORTONORMALE F FORMATA DA AUTOVETTORI DI f. SE P È LA MATRICE DI PASSAGGIO TRA BASI ORTONORMALI. INOLTRE DAL TEOREMA SUL CAMBIO BASE RISULTA $A' = M_f^{F,F} = P^{-1} A P$ MA ESSENDO F FORMATA DA AUTOVETTORI LA MATRICE A' È DIAGONALE

29) DEFINIRE LA NOZIONE DI MATRICE RIDOTTA PER RIGHE. VERIFICARE CHE SE UNA MATRICE È RIDOTTA PER RIGHE ALLORA IL SUO RANGO È UGUALE AL NUMERO DELLE RIGHE NON NULLE.

29) UNA MATRICE SI DICE RIDOTTA PER RIGHE SE SU OGNI RIGA NON NULLA (CIOÈ NON COSTITUITA TUTTA DA ZERI) C'È ALMENO UN ELEMENTO NON NULLO TALE CHE GLI ELEMENTI

QUADRATICA ASSOCIATA ALLA FORMA BILINEARE SIMMETRICA b DEFINITA DA:

$$b(x,y) = f(x) \cdot y$$

- OGNI FORMA QUADRATICA $q(X) = {}^tX A X$ HA UNA FORMA CANONICA DEL TIPO:

$$Q(x) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2$$

DOVE $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ SONO GLI AUTOVALORI DELLA MATRICE A.
IN BASE A QUESTI AUTOVALORI SI PUÒ CLASSIFICARE UNA FORMA QUADRATICA.

SI INTRODUCONO ORA 3 PARAMETRI:

P = NUMERO AUTOVALORI POSITIVI DI A

N = NUMERO AUTOVALORI NEGATIVI DI A

Z = NUMERO AUTOVALORI NULLI DI A

OVVIAMENTE RISULTA $\Rightarrow P + N + Z = 3$ (PERCHÈ SIAMO IN $\mathbb{R}^3$)

q È
- DEFINITA POSITIVA SE $P = 3$
- DEFINITA NEGATIVA SE $N = 3$
- SEMIDEFINITA POSITIVA SE $N = 0$
- SEMIDEFINITA NEGATIVA SE $P = 0$
- NON DEFINITA SE $P > 0$ E $N > 0$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 25 di 74

DETTA X LA MATRICE COLONNA DI UN VETTORE $\underline{v} \in V$ IN BASE $\mathcal{B}$ E X' LA MATRICE COLONNA DELLO STESSO VETTORE IN BASE $\mathcal{B}'$:

IN $\mathcal{B}$: $\underline{v} = x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2 + \dots + x_n \underline{e}_n$

IN $\mathcal{B}'$: $\underline{v} = x_1' \underline{u}_1 + x_2' \underline{u}_2 + \dots + x_n' \underline{u}_n$

CON $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ E $X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$

TRAMITE CALCOLO SI PUÒ DIMOSTRARE CHE IL LEGAME TRA X E X' (CIOÈ TRA LE COMPONENTI DEL GENERICO $\underline{v}$ IN BASE $\mathcal{B}$ E IN $\mathcal{B}'$) È DATO DA $X = PX' \longleftrightarrow X' = P^{-1}X$

– DATO L'ENDOMORFISMO $V_n \to V_n$ E DATA LA MATRICE DI PASSAGGIO DI BASE Q, NONCHÈ LA MATRICE ASSOCIATA A f IN BASE $\mathcal{B}$ INIZIALE $M_{\mathcal{B}}(f) = A \rightsquigarrow$ DETERMINARE LA MATRICE ASSOCIATA:

- IN $\mathcal{B}$ CONOSCO LA RELAZIONE $f: X \to Y$ CIOÈ
  $Y = AX$
- RIFERENDOSI A $\mathcal{B}'$, IL GENERICO ELEMENTO DI f PUÒ ESSERE INDIVIDUATO USANDO LE RELAZIONI $Y = QY'$ e $X = QX'$ PERTANTO L'APPLICAZIONE DIVENTA $f: QY' = AQX'$ CIOÈ

$$Y' = Q^{-1} A Q X' \quad \text{DOVE}$$

$$Q^{-1} \cdot A \cdot Q = A' \quad \text{CIOÈ LA MATRICE DI } f$$

IN BASE $\mathcal{B}'$ RISULTA $A' = Q^{-1}AQ$

LA ⊛⊛ PUÒ ESSERE SODDISFATTA SOLO $a_1 = \dots = a_{p-1} = 0$ E QUINDI $\vec{x}_p = \vec{0}$ CONTRO L'IPOTESI $\vec{x}_p$ SIA UN AUTOVETTORE.

34) VERIFICARE CHE LA MOLTEPLICITÀ GEOMETRICA DI UN AUTOVALORE È $\leq$ DELLA MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA.

34) SIA μ_0 UN AUTOVALORE DI F. RICORDIAMO CHE SE $(\lambda - \mu_0)^m$ DIVIDE IL POLINOMIO CARATTERISTICO ALLORA m È MINORE (O AL PIÙ UGUALE) ALLA MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA DELLA RADICE μ_0 DEL POLINOMIO CARATTERISTICO, DENOTIAMO CON m LA MOLTEPLICITÀ GEOMETRICAMENTE DI μ_0, CIOÈ LA DIMENSIONE DELL'AUTOSPAZIO V_{μ_0}. SCEGLIAMO UNA BASE $(v_1, \dots, \vec{v}_m)$ DELL'AUTOSPAZIO. POI COMPLETIAMO $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m)$ CON $n-m$ VETTORI $(\vec{v}_{m+1}, \dots, v_n)$ IN MODO CHE $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m, \vec{v}_{m+1}, \dots, \vec{v}_n)$ SIA UNA BASE DI V. LA MATRICE CHE RAPPRESENTA L'ENDOMORFISMO F RISPETTO A QUESTA BASE È UNA MATRICE A BLOCCHI DEL TIPO:

$$\begin{pmatrix} \mu_0 1_{m \times m} & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

DOVE $C \in K(n-m, n-m)$ È UNA MATRICE QUADRATA, QUINDI

$$P(\lambda) = \det \begin{pmatrix} (\mu_0 - \lambda) 1_{m \times m} & B \\ 0 & C - \lambda 1_{(n-m) \times (n-m)} \end{pmatrix} =$$

$$= (\mu_0 - \lambda)^m \cdot Q(\lambda)$$ DOVE $Q(\lambda)$ È IL POLINOMIO $\det(C - \lambda 1_{(n-m) \times (n-m)})$. ALLORA DA QUANTO DETTO SOPRA SEGUE CHE m È MINORE O UGUALE ALLA MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA DI μ_0 (COME RADICE DEL POLINOMIO CARATTERISTICO)

CIÒ SIGNIFICA CHE, NELLA MATRICE COMPLETA (A/B), LA COLONNA DEI TERMINI NOTI È COMBINAZIONE LINEARE DELLE PRECEDENTI n COLONNE, OVVERO CHE LO SPAZIO DELLA MATRICE COMPLETA È GENERATO DALLE n COLONNE DELLA MATRICE A.

37) ENUNCIARE IL TEOREMA DI ROUCHÈ - CAPELLI

37) SIANO ρ, ρ' I RANGHI DELLA MATRICE DEI COEFFICIENTI A E DELLA MATRICE COMPLETA (A, b) DEL SISTEMA LINEARE DOVE b SONO I TERMINI NOTI: I) SE $\rho < \rho'$ (E IN TAL CASO $\rho' = \rho + 1$) IL SISTEMA NON HA SOLUZIONI II) SE $\rho = \rho'$ IL SISTEMA È COMPATIBILE SE IL NUMERO DELLE INCOGNITE n COINCIDE CON ρ (E ρ') IL SISTEMA HA UNA SOLA SOLUZIONE, MENTRE SE $n > \rho$ IL SISTEMA HA $\infty^{n-\rho}$ SOLUZIONI.

38) DEFINIRE IL COMPLEMENTO ORTOGONALE $W^\perp$ DI UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE W DI $\mathbb{R}^n$. VERIFICARE CHE $W^\perp$ È UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE E CHE $\mathbb{R}^n = W \oplus W^\perp$

38) SI PUÒ DIMOSTRARE CHE, SCELTO UN SOTTOSPAZIO W CONTENUTO IN V, L'INSIEME:

$$W^\perp = \{ \underline{v} \in V \,/\, \underline{v} \cdot \underline{w} = 0, \ \forall \underline{w} \in W \}$$

È ANCORA SOTTOSPAZIO DI V E SI CHIAMA SOTTOSPAZIO DI V ORTOGONALE W. SE ACCADE CHE $W^\perp \oplus W = V$ ALLORA SI DICE CHE $W^\perp$ È IL COMPLEMENTO ORTOGONALE DI W IN V.

ESEMPI: - ESSENDO V IL PIANO β PER L'ORIGINE, $V^\perp$ È LA RETTA r PER O E $\perp$ A β.

- SE V È LA RETTA S PER O, VICEVERSA, $V^\perp$ IL PIANO γ PER O E $\perp$ A S.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 31 di 74

41) DEFINIRE L'OPERAZIONE DI MOLTIPLICAZIONE "RIGA PER COLONNA" DI DUE MATRICI

41) SIA $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, $B \in \mathbb{R}^{p,m}$. IL PRODOTTO DELLE MATRICI B ED A È LA MATRICE $T = BA \in \mathbb{R}^{p,n}$ IL CUI ELEMENTO GENERICO È DATO DA $t_{K,J} = \sum_{i=1}^{m} b_{Ki} a_{iJ}$ $(K=1,\dots,p;\ J=1,\dots,n)$ CIOÈ LA MATRICE T HA NUMERO DI RIGHE PARI A QUELLO DELLA MATRICE DI SINISTRA E NUMERO DI COLONNE PARI A QUELLO DELLA MATRICE DI DESTRA E IL SUO ELEMENTO t_{KJ} SULLA RIGA DI POSTO K E SULLA COLONNA DI POSTO J È LA SOMMA DEI PRODOTTI DEGLI ELEMENTI DELLA RIGA DI POSTO K DELLA MATRICE B PER I CORRISPONDENTI ELEMENTI DELLA COLONNA DI POSTO J DELLA MATRICE A. IL PRODOTTO TRA MATRICI NON GODE DELLA PROPRIETÀ COMMUTATIVA, MA SÌ DELLE SEGUENTI PROPRIETÀ:

$$A(B+C) = AB + AC \,; \quad A(BC) = (AB)C \,;$$

$$A(\lambda B) = \lambda(AB)$$

42) ENUNCIARE E PROVARE IL TEOREMA DEL COMPLETAMENTO DELLA BASE.

42) SE $\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_p$ SONO $p < n$ VETTORI LINEARMENTE INDIPENDENTI DI V_n È POSSIBILE DETERMINARE ALTRI $n-p$ VETTORI $\underline{v}_{p+1}, \dots, \underline{v}_n$ DI V_n TALI CHE: $\{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_p, \underline{v}_{p+1}, \dots, \underline{v}_n\}$ SIA UNA BASE DI V_n.
SIA DIFATTI $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\}$ UNA BASE DI V_n CONSIDERATI I $p+n$ VETTORI: $\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_p, \underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ SI HA CHE $L(\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_p, \underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n) = V_n$

44) DEFINIRE L'OPERAZIONE DI PRODOTTO SCALARE TRA DUE VETTORI DI $\mathbb{R}^n$. ENUNCIARE LE SUE PRINCIPALI PROPRIETÀ.

44) SI CHIAMA PRODOTTO SCALARE IN $\mathbb{R}^n$ UN OPERAZIONE BINARIA CHE AD OGNI COPPIA $\underline{u}, \underline{v}$ DI VETTORI DI $\mathbb{R}^n$ FACCIA CORRISPONDERE UN NUMERO REALE E CHE GODA DELLE SEGUENTI PROPRIETÀ: $\forall \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^n$ e $\forall \lambda \in \mathbb{R}$:

I) PROPRIETÀ COMMUTATIVA: $\underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{v} \cdot \underline{u}$

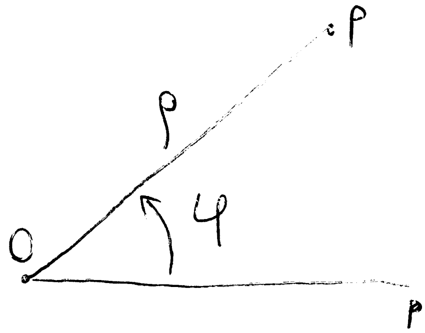
II) PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA: $(\underline{u} + \underline{v})\, \underline{w} = \underline{u} \cdot \underline{w} + \underline{v} \cdot \underline{w}$

III) PROPRIETÀ DI OMOGENEITÀ: $\lambda \underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{u} \cdot \lambda \underline{v} = \lambda (\underline{u} \cdot \underline{v})$

IV) PRODOTTO SCALARE DEFINITO POSITIVO: $\underline{u} \cdot \underline{u} \geq 0$ (AL PIÙ NULLO SE $\underline{u} = \underline{0}$)

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 35 di 74

3) DEFINIRE LE COORDINATE POLARI DI $\mathbb{R}^2$



3) DEFINIAMO → UN SISTEMA DI RIFERIMENTO POLARE DI UN PIANO È COSTITUITO DA: UN PUNTO O DETTO POLO, UNA SEMIRETTA p DI ORIGINE O DETTA ASSE POLARE, UN UNITÀ DI MISURA PER I SEGMENTI, UN VERSO DI ROTAZIONE DEL PIANO CHE SUPPORREMO ANTIORARIO. AD OGNI PUNTO P DEL PIANO ESCLUSO O, SONO ASSOCIATI I SEGUENTI NUMERI REALI: a) LA DISTANZA OP CHE SI INDICA DI SOLITO CON ρ E SI DICE RAGGIO VETTORE (O DISTANZA RADIALE) b) LA MISURA φ DELLA MINIMA ROTAZIONE ANTIORARIA CHE SOVRAPPONE L'ASSE POLARE ALLA SEMIRETTA OP (DI ORIGINE O) CHE SI DICE ANOMALIA
PER IL PUNTO O È $\rho = 0$ E φ È INDETERMINATO.
PERTANTO OGNI PUNTO DEL PIANO HA COORDINATE POLARI (ORDINARIA) (ρ, φ) SODDISFACENTI ALLE LIMITAZIONI $\rho \geq 0$, $0 < \varphi < 2\pi$ LE CURVE $\rho = c_1$, $\varphi = c_2$ OVE c_1, c_2 SONO COSTANTI SODDISFACENTI LE PRECEDENTI LIMITAZIONI, SONO RISPETTIVAMENTE CIRCONFERENZE DI CENTRO O E SEMIRETTE DI ORIGINE O.

4) CAMBIAMENTI DI RIFERIMENTI CARTESIANI ORTONORMALI DEL PIANO

4) SIANO $R(O, i, j)$, $R'(O, i, j)$ DUE RIFERIMENTI ORTONORMALI RELATIVI ALLA STESSA UNITÀ DI MISURA E SUPPONIAMO R POSITIVO. INDICHIAMO CON (x, y), (x', y') LE COORDINATE DI UNO STESSO PUNTO P DEL PIANO RELATIVE AI DUE SISTEMI DI RIFERIMENTO.
SUPPOSTA NOTA LA POSIZIONE DEL RIFERIMENTO R'

CHE SI POSSONO ANCHE SCRIVERE

$$\begin{cases} x' = x\cos\varphi + y\,\mathrm{sen}\,\varphi + a \\ y' = \varepsilon(-x\,\mathrm{sen}\,\varphi + y\cos\varphi) + b \end{cases}$$

OVE (a,b) RAPPRESENTANO LE COORDINATE DEL PUNTO O DEL RIFERIMENTO R', COME SUBITO SEGUE IN CUI SI PONGA $x = y = 0$. PERTANTO (1) RAPPRESENTA LA FORMULA DI TRASFORMAZIONE DELLE COORDINATE ALLORCHÈ SI PASSA DA UN SISTEMA DI RIFERIMENTO ORTONORMALE AD UN ALTRO SISTEMA ORTONORMALE. IN PARTICOLARE SE I 2 SISTEMI DI RIFERIMENTO HANNO GLI STESSI VERSORI $i = i'$, $j = j'$ E DIFFERISCONO SOLO PER L'ORIGINE SI SCRIVONO:

$$\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \end{cases}$$

IN QUESTO CASO SI DICE CHE IL RIFERIMENTO R' È OTTENUTO DA R PER TRASLAZIONE.

5) DISCUTERE LA MUTUA POSIZIONE DI DUE RETTE DELLO SPAZIO.

5) DUE RETTE DISTINTE r, s POSSONO ESSERE O SGHEMBE, CIOÈ NON CONTENUTE IN UNO STESSO PIANO, OVVERO COMPLANARI (ED IN TAL CASO POSSONO ESSERE O PARALLELE, O INCIDENTI, CIOÈ CON UN PUNTO IN COMUNE). SUPPOSTO CHE LE RETTE r, s ABBIANO RISPETTIVAMENTE PARAMETRI DIRETTORI (l, m, n), (l', m', n'), LA CONDIZIONE DI PARALLELISMO È ESPRESSA DA $l/l' = m/m' = n/n'$. PER VERIFICARE SE DUE RETTE SONO INCIDENTI BISOGNERÀ CONTROLLARE

6) RAPPRESENTAZIONE PARAMETRICA E RAPPRESENTAZIONE CARTESIANA DELLE RETTE NELLO SPAZIO.

6) DATO $P_0 \in r$ E $\vec{u} // r$:
- DATO P_0 E $\vec{u}$
- DATI P_0 E P_1, POSTO $\vec{u} = P_1 - P_0$

DATO IL GENERICO PUNTO P DELLA RETTA, $P \in r$ SE E SOLO SE $P - P_0 // \vec{u}$

$P(x, y, z)$ $\quad P_0(x_0, y_0, z_0)$ $\quad \vec{u} = l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k}$

DEVE ESSERE $P - P_0 // \vec{u}$

$\rightarrow$ $\boxed{\text{MODO I}}$ (RAPPR. CARTESIANA) $\Rightarrow P - P_0 // \vec{u}$ SE LE COMPONENTI SONO PROPORZIONALI.
- RETTA IN FORMA DI RAPPORTI UGUALI

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

$\rightarrow$ $\boxed{\text{MODO II}}$ (RAPPRESENT. PARAMETRICA)

$\Rightarrow P - P_0 // \vec{u}$ SE $P - P_0 = t\vec{u}$, $t \in \mathbb{R}$

RETTA IN FORMA PARAMETRICA:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$

8) ESPORRE LA CLASSIFICAZIONE DELLE CONICHE IN FORMA CANONICA.

8) ~~I~~ ELLISSE:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad a^2 > b^2$$

$$e < 1$$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$F = (\pm c, 0)$$

~~I~~ IPERBOLE:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad a^2 > b^2$$

$$e > 1$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$F = (\pm c, 0)$$

ASINTOTI $\Rightarrow \frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0$

~~I~~ PARABOLA:

$$y^2 = 2p\,x$$

$F = \left(\frac{p}{2}, 0\right)$ DIRETTRICE $\Rightarrow x = -\frac{p}{2}$

$2p > 0$ CONCAVITÀ IN ALTO

- SE $I_2 > 0$ SI RIDUCE A 2 RETTE IMMAGINARIE CONIUGATE

SE $I_3 \neq 0$ LA CONICA NON È DEGENERE ED IN PARTICOLARE:
- È UN IPERBOLE EQUILATERA SE $I_2 < 0$ E $I_1 = 0$
- È UN IPERBOLE NON EQUILATERA SE $I_2 < 0$ MA $I_1 \neq 0$
- È UNA PARABOLA SE $I_2 = 0$
- È UN ELLISSE REALE SE $I_2 > 0$ E $I_1 I_3 < 0$
- È UN ELLISSE IMMAGINARIA SE $I_2 > 0$ MA $I_1 I_3 > 0$

10) ILLUSTRARE IL PROCEDIMENTO DI RIDUZIONE IN FORMA CANONICA DELL'EQUAZIONE DI UNA CONICA NON-DEGENERE A CENTRO

10) DATA UNA CONICA IN $\mathbb{R}^2$, CHE HA EQUAZIONE COMPLETA DI II° GRADO:

$$Q(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

IN UN SISTEMA DI RIFERIMENTO $R(O, \vec{i}, \vec{j})$

- SI PUÒ TROVARE UN NUOVO SISTEMA $R'(O, \vec{i}', \vec{j}')$ IN CUI LA CONICA ABBIA FORMA CANONICA TRAMITE:
  1) ROTAZIONE 2) TRASLAZIONE.

$\boxed{\text{PROCEDIMENTO}}$. (1) CONSIDERO LA FORMA QUADRATICA DELLA CONICA Q DATA E NE ESTRAGGO LA MATRICE SIMMETRICA RIFERITA A BASE $B = \{i, j\}$.

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 \rightarrow M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

(2) M RAPPRESENTA UN ENDOMORFISMO SIMMETRICO DA CUI CALCOLO, CON IL SOLITO PROCEDIMENTO, AUTOVALORI λ_1, λ_2 E RELATIVI AUTOVETTORI $\underline{u}_1$, $\underline{u}_2$, ESSENDO ENDOMORFISMO SIMMETRICO; SE $\lambda_1 \neq \lambda_2$ SEGUE $\underline{u}_1 \perp \underline{u}_2$ CIOÈ

42

(6) TRAMITE COMPLETAMENTO DI QUADRATI ESEGUO UNA TRASLAZIONE : $X'' = X' - X_0$; $Y'' = Y' - Y_0$ DOVE (x_0, y_0) SONO LE COORDINATE DELLA NUOVA ORIGINE NEL VECCHIO RIFERIMENTO R.

SE $\lambda_1 \neq 0$ E $\lambda_2 \neq 0$

DOPO LA TRASLAZIONE LA CONICA ASSUME FORMA

$$\lambda_1 \bar{x}^2 + \lambda_2 \bar{y}^2 + d = 0$$

- $\left.\begin{array}{l}\lambda_1, \lambda_2 \text{ CONCORDI} \\ d = 0\end{array}\right\}$ ELLISSE

- $\left.\begin{array}{l}\lambda_1, \lambda_2 \text{ DISCORDI} \\ d \neq 0\end{array}\right\}$ IPERBOLE

11) ILLUSTRARE IL PROCEDIMENTO DI RIDUZIONE IN FORMA CANONICA DELL'EQUAZIONE DI UNA CONICA NON DEGENERE DI TIPO PARABOLICO.

11) STESSO PROCEDIMENTO DELLA DOMANDA 10) POI TROVATI I 2 AUTOVALORI λ_1 E λ_2, SE UNO È NULLO ALLORA AVREMO UNA PARABOLA. LA CONICA HA CENTRO IN O', SOLUZIONE DEL SISTEMA:

$$\begin{cases} a_{11} x + a_{12} y + a_{13} = 0 \\ a_{12} x + a_{22} y + a_{23} = 0 \end{cases}$$

OD ANCHE TENUTO PRESENTE CHE $f(x_0, y_0) = 0$

$a_{11}x_0x + a_{12}(x_0y + y_0x) + a_{22}y_0y + a_{13}(x_0+x) +$

$+ a_{23}(y_0+y) + a_{33} = 0$; QUEST'ULTIMA SI OTTIENE APPLICANDO LA REGOLA DEGLI SDOPPIAMENTI. LA (**) NON RAPPRESENTA UNA RETTA, OSSIA LA RETTA TANGENTE È INDETERMINATA, SE E SOLO SE P_0 È UN PUNTO DI C TALE CHE $a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} = 0$, $a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} = 0$ E QUINDI ANCHE $a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33} = 0$, PER L'APPARTENENZA DI P_0 A C. UN PUNTO P_0 SODDISFACENTE ALLE PRECEDENTI CONDIZIONI SI DICE UN PUNTO DOPPIO DI C; LA PRESENZA DI UN PUNTO DOPPIO COMPORTA CHE IL DISCRIMINANTE DI C SIA NULLO. UNA CONICA C CON $D=0$ SI DICE DEGENERE.

13) ESPORRE LA CLASSIFICAZIONE DELLE QUADRICHE IN FORMA CANONICA.

13) • ELLISSOIDE:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

• IPERBOLOIDE A 2 FALDE:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

• PARABOLOIDE IPERBOLICO:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

$$S(u,v) = \begin{pmatrix} \cos u - v \operatorname{sen} u \\ \operatorname{sen} u + v \cos u \\ v \end{pmatrix} ; \; u \in [0, 2\pi], \; v \in \mathbb{R}$$

15) VERIFICARE CHE I PARABOLOIDI ~~A UNA FALDA~~ IPERBOLICI SONO DELLE SUPERFICIE RIGATE.

15) I PARABOLOIDI IPERBOLICI SONO DELLE SUPERFICI RIGATE PERCHÈ AMMETTE UN DOPPIO SISTEMA DI GENERATRICI. INFATTI, LA SUA EQUAZIONE SCRITTA IN FORMA CANONICA:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$$ → PUÒ SCRIVERSI COME:

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 2z$$ E PUÒ ESSERE

SOSTITUITA: $$\begin{cases} (1) \; \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \lambda 2z \\ (2) \; \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \frac{1}{\lambda} \end{cases}$$

CHE RAPPRESENTANO DUE PIANI E LA LORO INTERSEZIONE È UNA RETTA APPARTENENTE AL NOSTRO PARABOLOIDE IPERBOLICO.

(1) RAPPRESENTA UN PIANO INCLINATO SUL PIANO $z=0$ CHE INTERSECA SECONDO LA RETTA $y = -b/a \cdot x$

(2) LA SECONDA RAPPRESENTA UN PIANO VERTICALE LA CUI TRACCIA SUL PIANO $z=0$ È // ALLA RETTA PER L'ORIGINE $y = (b/a)x$

OPPURE PUÒ ESSERE SOSTITUITA DA:

$$\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \lambda \\ \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \frac{1}{\lambda} 2z \end{cases}$$

→ I PIANI INCLINATI INTERSECANO CON UNA RETTA DI COEFF. ANGOLARE b/a

→ I PIANI VERTICALI INTERSECANO IL PIANO ORIZZONTALE SECONDO RETTA DI COEFF. ANGOLARE $-(b/a)$

18) DEFINIRE CURVATURA E TORSIONE DI UNA CURVA BIREGOLARE.

18) LA CURVATURA MISURA LA RAPIDITÀ CON CUI, IN UN PUNTO P_0, LA CURVA SCARTA L'ANDAMENTO RETTILINEO, IN PARAMETRIZZAZIONE INTRINSECA $K = \| P''(s) \|$, IN PARAMETRIZZAZIONE QUALSIASI $K = \dfrac{\| P'(t) \wedge P''(t) \|}{\| P'(t) \|^3}$

- TORSIONE $\Rightarrow$ RAPIDITÀ CON CUI LA CURVA SI SPOSTA DALL'ANDAMENTO PIANO, IN UN CERTO PUNTO P

$$\tau = - \frac{P' \wedge P'' \cdot P'''}{\| P' \wedge P'' \|^2}$$

SE $\tau = 0 \ \forall t$ LA CURVA È PIANA.

19) PROVARE LE EQUAZIONI DI FRENET PER UNA CURVA BIREGOLARE

19) SIA $L: P = P(s)$ UNA CURVA BIREGOLARE CON PARAMETRIZZAZIONE INTRINSECA. ALLORA VALGONO LE SEGUENTI UGUAGLIANZE:

$$\begin{cases} \vec{t}'(s) = \dfrac{1}{\rho(s)} \vec{n}(s) \\ \vec{n}'(s) = -\dfrac{1}{\rho(s)} \vec{t}(s) + \dfrac{1}{\tau(s)} \vec{b}(s) \\ b'(s) = -\dfrac{1}{\tau(s)} \vec{n}(s) \end{cases}$$

POICHÈ LA PARAMETRIZZAZIONE È INTRINSECA, SI HA $\vec{t}'(s) = P''(s)$ E QUINDI LA $t'(s)$ SEGUE DALLA

$$= \frac{\det\left(P'(t), P''(t), P'(t) \times P''(t)\right)}{\|P'(t)\|^3 \, \|P'(t) \times P''(t)\|}$$

TORSIONE $\Rightarrow$ INDICANDO CON $B(t)$ IL VERSORE BINORMALE ALLA CURVA IN $P(t)$

$$\frac{P'(t) \times P''(t)}{\|P'(t) \times P''(t)\|} = \vec{B}(t) \, ; \quad \vec{B}'(t) \perp \vec{B}(t)$$

$$\|B(t)\| = 1$$

$$\vec{B} = \frac{P' \times P''}{\|P' \times P''\|} \Rightarrow T \parallel P' \, ;$$

$$\vec{B}' = \frac{P'' \times P''}{\|P' \times P''\|} + \frac{P' \times P'''}{\|P' \times P''\|} + \left(\frac{1}{\|P' \times P''\|}\right)' P' \times P''$$

$$\vec{B}'(t) \perp P'(t) \parallel T(t) \, ; \quad B'(t) \parallel N(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists \, \tau(t) \, / \, B'(t) = v(t) \cdot \tau(t) \cdot \vec{N}(t)$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 55 di 74

22) DEFINIRE LA NOZIONE DI SUPERFICIE DEFINITA IMPLICITAMENTE.

22) UN LUOGO GEOMETRICO DI PUNTI $P(x,y,z)$ DEL PIANO TALE CHE LE COORDINATE (x,y,z) SODDISFANO UN EQUAZIONE $f(x,y,z)=0$ SI CHIAMA SUPERFICIE DELLO SPAZIO, ASSEGNATI IN MANIERA CARTESIANA.

- UN LUOGO S DI PUNTI $P(x,y,z)$ LE CUI COORDINATE SONO FUNZIONI DEI DUE PARAMETRI INDIPENDENTI REALI u e v SI CHIAMA SUPERFICIE IN FORMA PARAMETRICA. E SI SCRIVERÀ COME:

$$S: (x,y,z) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$ PER INDICARE LA SUPERFICIE S

23) DEFINIRE IL PIANO TANGENTE AD UNA SUPERFICIE DEFINITA IN MODO IMPLICITO.

23) CONSIDERIAMO UNA SUPERFICIE S ED UN SUO PUNTO P_0. SE ~~TANGENTE AD UNA SUPERFICIE DEFINITA~~ P_0 È UN PUNTO INSUFFICIENTEMENTE REGOLARE DI S SI DIMOSTRA CHE LE RETTE TANGENTI DEL PUNTO P_0 ALLE CURVE DI S PASSANTI PER TALE PUNTO APPARTENGONO AD UNO STESSO PIANO, DETTO PIANO TANGENTE ALLA SUPERFICIE S IN P_0.
SE INVECE LA SUPERFICIE S È RAPPRESENTATA IN FORMA CARTESIANA: $f(x,y,z)=0$ E SE NEL PUNTO P_0 ESISTONO E NON SONO TUTTE NULLE LE DERIVATE PARZIALI DI f:

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}(P_0) = f_x(P_0), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(P_0) = f_y(P_0), \quad \frac{\partial f}{\partial z}(P_0) = f_z(P_0) \right]$$

$$\left(\frac{dx(u,v_0)}{du}\right)_{u=u_0} = \frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0)$$

ED ANALOGHE PER LE ALTRE. POICHÈ IL PIANO TANGENTE AD S IN P_0 È IL PIANO PER TALE PUNTO E CONTENENTE I VETTORI TANGENTI ALLE LINEE COORDINATE L_1, L_2, LA SUA EQUAZIONE È DATA DA:

$$\begin{vmatrix} x-x(u_0,v_0) & y-y(u_0,v_0) & z-z(u_0,v_0) \\ \frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0) & \frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0) & \frac{\partial z}{\partial u}(u_0,v_0) \\ \frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0) & \frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0) & \frac{\partial z}{\partial v}(u_0,v_0) \end{vmatrix} = 0$$

4) DEFINIRE LA NOZIONE DI LIMITE DI UNA FUNZIONE $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ IN UN PUNTO DI ACCUMULAZIONE P_0 DI U

$\Rightarrow$

4) SI DICE CHE f HA LIMITE FINITO $\ell \in \mathbb{R}$ PER P CHE TENDE A P_0 E SI SCRIVE $\lim_{P \to P_0} f(P) = \ell$ SE, PRESO AD ARBITRIO UN $\varepsilon > 0$ ESISTE UN $\delta > 0$ TALE CHE

$$|f(P) - \ell| < \varepsilon \;,\; \forall P \in \operatorname{dom} f \;,\; 0 < \|P - P_0\| < \delta$$

5) DEFINIRE LA NOZIONE DI CONTINUITÀ DI UNA FUNZIONE $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ IN UN PUNTO P_0 DI U.

5) LA FUNZIONE f SI DICE CONTINUA IN P_0 SE, PER OGNI $\varepsilon > 0$, ESISTE UN $\delta > 0$ TALE CHE

$$|f(P) - f(P_0)| < \varepsilon \;,\; \forall P \in \operatorname{dom} f \;,\; \|P - P_0\| < \delta$$

6) DEFINIRE LA COMPOSIZIONE DI DUE FUNZIONI $f: U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ E $g: V \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^h$

6) SIA $f(y_1, \dots, y_m)$ UNA FUNZIONE DI m VARIABILI E SUPPONIAMO CHE $y_1, \dots, y_m$ SIANO A LORO VOLTA ESPRESSE COME FUNZIONI n VARIABILI $x_1, \dots, x_n$ CIOÈ:

$$2.4 \quad \begin{cases} y_1 = y_1(x_1, \dots, x_n) \\ \dots\dots \\ y_m = y_m(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

LA FUNZIONE $F(x_1, \dots, x_n) = f(y_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_m(x_1, \dots x_n))$ CHE SI OTTIENE SOSTITUENDO NELL'ESPRESSIONE DI f LE 2.4 AL POSTO DI $y_1, \dots, y_m$, SI DICE FUNZIONE COMPOSTA DELLE 2.4 DI f.

8) DEFINIRE LA NOZIONE DI DERIVATA PARZIALE DI UNA FUNZIONE $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ IN UN PUNTO INTERNO DI U E DEFINIRE LA NOZIONE DI DERIVABILITÀ DI f IN UN PUNTO INTERNO.

8) NEL CASO IN CUI IL VETTORE $\underline{u}$ COINCIDA CON UNO DEI VERSORI $\underline{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, \underline{e}_n = (0, 0, \dots, 1)$ DELLA BASE CANONICA DI $\mathbb{R}^n$, SI PONE CON NOTAZIONI EQUIVALENTI:

$$\left(\frac{df}{de_i}\right)_{P_0} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{P_0} = f_{x_i}(P_0)$$

E TALE NUMERO SI DICE LA DERIVATA PARZIALE PRIMA DI f RISPETTO ALLA VARIABILE x_i NEL PUNTO P_0.
LA DERIVATA PARZIALE RISPETTO AD UNA VARIABILE x_i SI OTTIENE CONSIDERANDO COSTANTI NELL'ESPRESSIONE DELLA FUNZIONE LE ALTRE $n-1$ VARIABILI E DERIVANDO LA FUNZIONE RISPETTO ALLA SOLA VARIABILE x_i COME UN ORDINARIA FUNZIONE DI UNA SOLA VARIABILE.

UNA FUNZIONE SI DICE DERIVABILE IN UN PUNTO P_0 SE AMMETTE TUTTE LE DERIVATE PARZIALI PRIME IN TALE PUNTO.

9) DEFINIRE IL GRADIENTE DI UNA FUNZIONE $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ DI CLASSE C^1.

9) SE $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ HA DERIVATE PARZIALI PRIME CONTINUE IN UN PUNTO P_0, IL GRADIENTE DI f IN P_0, CHE SI INDICA CON $\text{GRAD}_P f$ O ANCHE $\nabla_P f$, È IL VETTORE DI $\mathbb{R}^n$ DI COMPONENTI $(f_{x_1}(P_0), \dots, f_{x_n}(P_0))$.

11) SPECIFICARE LE CONDIZIONI NECESSARIE AFFINCHÈ UNA FUNZIONE VERIFICHI $f_{x_i x_j} = f_{x_j x_i}$

11) LE CONDIZIONI NECESSARIE AFFINCHÈ UNA FUNZIONE VERIFICHI $f_{x_i x_j} = f_{x_j x_i}$ SONO.

$$\frac{\partial^2 f}{d\underline{u}\, d\underline{v}} = \frac{\partial^2 f}{d\underline{v}\, d\underline{u}} \; , \quad \frac{\partial^3 f}{\partial \underline{u}\, \partial \underline{v}\, \partial \underline{w}} = \dots\dots$$

CIOÈ È LECITO SPESSO CAMBIARE L'ORDINE DI DERIVAZIONE.

12) DEFINIRE LA MATRICE HESSIANA DI UNA FUNZIONE $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (DI CLASSE C^2)

12) UTILIZZANDO LE DERIVATE PARZIALI SECONDE IN UN PUNTO P_0 DI UNA FUNZIONE $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ SI INTRODUCE LA MATRICE:

$$H_{P_0} f = \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1}(P_0) & f_{x_1 x_2}(P_0) & \dots & f_{x_1 x_n}(P_0) \\ f_{x_i x_1}(P_0) & f_{x_i x_2}(P_0) & \dots & f_{x_i x_n}(P_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{x_n x_1}(P_0) & f_{x_n x_2}(P_0) & \dots & f_{x_n x_n}(P_0) \end{pmatrix}$$

DETTA MATRICE HESSIANA DI f IN P_0 ED IL CUI DETERMINANTE SI DICE HESSIANO DI f IN P_0.

DETTA $f_{x_i x_j} = f_{x_j x_i}$ $\quad H_{P_0} f$ È UNA MATRICE SIMMETRICA.

LA $\boxed{5,14}$ SI INDICA ANCHE CON $df = \text{GRAD} f \cdot dP$ E SI DICE CHE IL SIMBOLO df ESPRIME A MENO DI INFINITESIMI DI ORDINE SUPERIORE L'INCREMENTO SUBITO DA f NEL PASSAGGIO DAL PUNTO P AL PUNTO $P + dP$.

16) RICORDARE L'ENUNCIATO DEL TEOREMA DEL VALOR MEDIO.

16) SE f È DIFFERENZIABILE IN OGNI PUNTO DEL SEGMENTO DI ESTREMI P_0 E $P_0 + \underline{u}$ ESISTE ALMENO UN PUNTO P_1 INTERNO A TALE SEGMENTO PER CUI HA:

$$f(P_0 + \underline{u}) - f(P_0) = \left(\frac{df}{d\underline{u}}\right)_{P_1}$$

17) RICORDARE LA REGOLA DI DERIVAZIONE DELLE FUNZIONI COMPOSTE

17) RICORDANDO CHE $y = [f(g(x))] \Rightarrow y' = g'[(f(x))]\, f'(x)$ DICIAMO:

- $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ AGISCE SECONDO $\lambda : t \to (x_1(t), \ldots, x_m(t))$
- $f(\lambda) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ $\quad f(x_1(t), \ldots, x_m(t))$ VALORE REALE
- IN DEFINITIVA CHIAMATA $g(t) = f \circ \lambda$, SI HA $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, CIOÈ $g : t \to (x_1(t), \ldots, x_m(t)) \to f(x_1(t), \ldots, x_m(t))$ È LA FUNZIONE COMPOSTA

→ SECONDO LE MATRICI, PER LA DERIVAZIONE COMPOSTA, SI HA $(J_g)_{\bar{t}} = (J_f)_{\lambda(\bar{t})} \cdot (J_\lambda)_{\bar{t}}$ DOVE $g(t)$ È FUNZIONE $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, DUNQUE IN REALTÀ LA MATRICE (J_g) CONTIENE UN SOLO NUMERO $g'(\bar{t})$:

$$g'(\bar{t}) = (J_g)_{\bar{t}} = \left(\frac{df}{dx_1}, \frac{df}{dx_2} \ldots \frac{df}{dx_m}\right)_{\lambda(\bar{t})} \cdot \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \ldots \\ x_m'(t) \end{pmatrix}$$

DOVE $\lambda(\bar{t})$ È IL PUNTO DI APPLICAZIONE DI COORDINATE $\lambda(\bar{t}) = (x_1(\bar{t}), x_2(\bar{t}), \ldots, x_m(\bar{t}))$

→ CONSEGUE CHE $g'(t)$ È IL PRODOTTO DEL DERIVATO $\lambda'(t)$ PER IL GRADIENTE DI $f(\lambda)$ CALCOLATO IN $\lambda(\bar{t})$

20) DEFINIRE LE NOZIONI DI PUNTO DI MASSIMO (MINIMO) ASSOLUTO E DI MASSIMO (MINIMO) RELATIVO. ENUNCIARE IL TEOREMA DI WEIERSTRASS.

20) TEOREMA DI WEIERSTRASS ⇒ SE f È UNA FUNZIONE CONTINUA SU UN SOTTOINSIEME A DI $\mathbb{R}^n$ CHIUSO E LIMITATO (A SI DICE IN TAL CASO ANCHE COMPATTO) ESSA ASSUME IN A MASSIMO E MINIMO, CIOÈ ESISTONO ALMENO 2 PUNTI P_1, P_2 DI A TALI CHE:

$$f(P_1) \leq f(P) \leq f(P_2) \quad \forall P \in A$$

MINIMO ASSOLUTO ⇒ LA FUNZIONE $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ PRESENTA NEL PUNTO $P_0 \in \operatorname{dom} f$ UN PUNTO DI MINIMO (OVVERO DI MASSIMO) ASSOLUTO SE SI HA $f(P) \geq f(P_0)$ (OVVERO $f(P) \leq f(P_0)$)

PER OGNI $P \in \operatorname{dom} f$

MINIMO RELATIVO ⇒ IL PUNTO $P_0 \in \operatorname{dom} f$ SI DICE UN PUNTO DI MINIMO (OVVERO DI MASSIMO) RELATIVO DI f SE ESISTE UN INTORNO SFERICO $S(P_0, r)$ DI P_0 TALE CHE PER OGNI $P \in S(P_0, r) \cap \operatorname{dom} f$ SIA SODDISFATTA:

$$f(P) \geq f(P_0) \quad (\text{OVVERO } f(P) \leq f(P_0))$$

I PUNTI DI MINIMO E MASSIMO RELATIVO SI DICONO COMPLESSIVAMENTE I PUNTI DI ESTREMO RELATIVO DI f, I VALORI DI f IN TALI PUNTI SI DICONO GLI ESTREMI RELATIVI DI f.

21) PROVARE CHE SE P_0 È UN ESTREMO RELATIVO ALLORA $\nabla f_{P_0} = 0$

21) INFATTI CONSIDERATO UN QUALSIASI VETTORE $\underline{u} \neq \underline{0}$ LA FUNZIONE $F(t) = f(P_0 + t\underline{u})$ (DA $\mathbb{R}$ AD $\mathbb{R}$) PRESENTA UN ESTREMO RELATIVO NEL PUNTO $t=0$ INTERNO A $\operatorname{dom} F$ IN CUI F È DERIVABILE; PERTANTO È $F'(0) = 0$; D'ALTRA PARTE RISULTA

SCHEMA CONICHE

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$D_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$$

1) SE $\det D = 0 \rightsquigarrow$ CONICA DEGENERE

$$(ax + by + c)(a'x + b'y + c') = 0$$

- λ_1, λ_2 CONCORDI : $D_{33} > 0$

  DEGENERE ELLITTICA (DEGENERE IN UN PUNTO)

- λ_1, λ_2 DISCORDI : $D_{33} < 0$

  DEGENERE IPERBOLICA (DEGENERE IN COPPIA DI RETTE INCIDENTI)

- $\lambda = 0$: $D_{33} = 0$ DEGENERE PARABOLICA

  (CIOÈ DEGENERE IN COPPIA DI RETTE //)

  RANGO $D = 2$

- RETTE REALI COINCIDENTI : $\det D = 0$, $\det D_{33} = 0$, RANGO $D = 1$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 71 di 74

SCHEMA QUADRICHE

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 + 2a_{14}x +$$
$$+ 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$$

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix}$$

$$D_{44} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$D_{KK} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$\boxed{\alpha = a_{22}}$

SE $\det D = 0 \rightarrow D_{44} \neq 0$ CONO
$\searrow D_{44} = 0$ CILINDRO

SE $\det D \neq 0 \rightarrow D_{44} \neq 0$ ELLISSOIDE O IPERBOLOIDE
$\searrow D_{44} = 0$ PARABOLOIDE $[\exists \lambda_1 = 0]$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 73 di 74