



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO : 318

DATA : 20/07/2012

A P P U N T I

STUDENTE : Ottina

MATERIA : Metodi Numerici e Statistici
Prof. Delitala

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

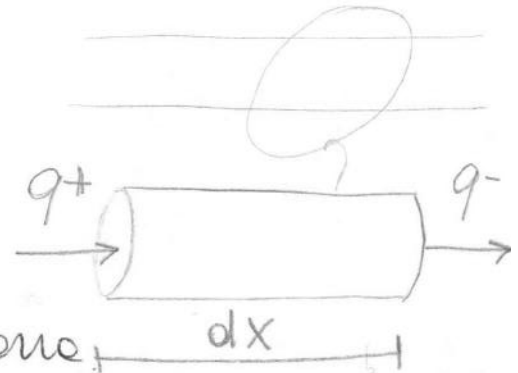
METODI NUMERICI E STATISTICI PER L'INGEGNERIA

PDE: EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI

1) MODELLO SEMPLICE DI DIFFUSIONE DEL CALORE

Supponiamo di avere una sbarra e di vedere come il calore si diffonde in essa:

Bisogna definire una variabile di stato, ovvero una variabile che descriva il fenomeno



$u = u(t, x)$ temperatura della sbarra

$t =$ tempo

$x =$ spazio

} variabili indipendenti

Per costruire un modello devo fare delle assunzioni fenomenologiche sul flusso di calore.

LEGGE DI FOURIER

$$q = -k \frac{\partial u}{\partial x}$$

q : flusso di calore; il flusso è proporzionale al gradiente di temperatura.

k : coefficiente di conduzione del calore.

Consideriamo un elemento infinitesimo di sbarra (dx)

EQUAZIONE DI BILANCIO

$$-c \frac{\partial u}{\partial t} A dx = A (q^+ - q^-)$$

c : capacità termica

A : area della sezione

$q^- = q(x+dx)$ flusso in uscita

$q^+ = q(x)$ flusso in entrata

- 1- la tensione della corda è sufficientemente forte
- 2- Trascuriamo le vibrazioni orizzontali
- 3- Trascuriamo l'effetto di gravità; l'attrito e ...

Considerando un elemento della corda

α : angolo fra la tangente della corda e l'orizzontale.

Bilanciamo le componenti verticali della tensione.

Assumiamo una tensione (τ) interna alla corda costante e consideriamo solo le vibrazioni verticali.

La differenza di tensione:

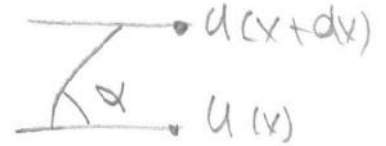
$$\Delta T = \tau \mu (\alpha(x+dx)) - \tau \mu (\alpha(x))$$

T. tensione

"quanto la corda è tesa in m , meno quanto la corda è tesa in gm "

Per le piccole oscillazioni: $\mu \alpha \approx \frac{\partial u}{\partial x}$

$$\Delta T = \tau \left[\frac{\partial u}{\partial x}(x+dx) - \frac{\partial u}{\partial x}(x) \right]$$



LEGGE DI BILANCIO: II legge di Newton

$$m \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \text{Forze applicate nel tratto } (x, x+dx)$$

$$\left. \begin{array}{l} m = \text{massa del corpo} \\ \rho = \text{densità di massa} \end{array} \right\} m = \rho dx$$

$$\rho dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \tau \left[\frac{\partial u}{\partial x}(x+dx) - \frac{\partial u}{\partial x}(x) \right]$$

$$\text{Per } dx \rightarrow 0 \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\tau}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad ; \quad c = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}$$

EQUAZIONE DELLE ONDE

Cosa ci aspettiamo dal modello?

- u_1, u_2, u_3 sono punti d'equilibrio, infatti

$$f(u_1) = f(u_2) = f(u_3) = 0 \rightarrow \frac{du}{dt} = 0 \quad \text{LA U STA FERMA}$$

- $\forall u < u_1, f(u) > 0, \frac{du}{dt} > 0 \Rightarrow u$ cresce

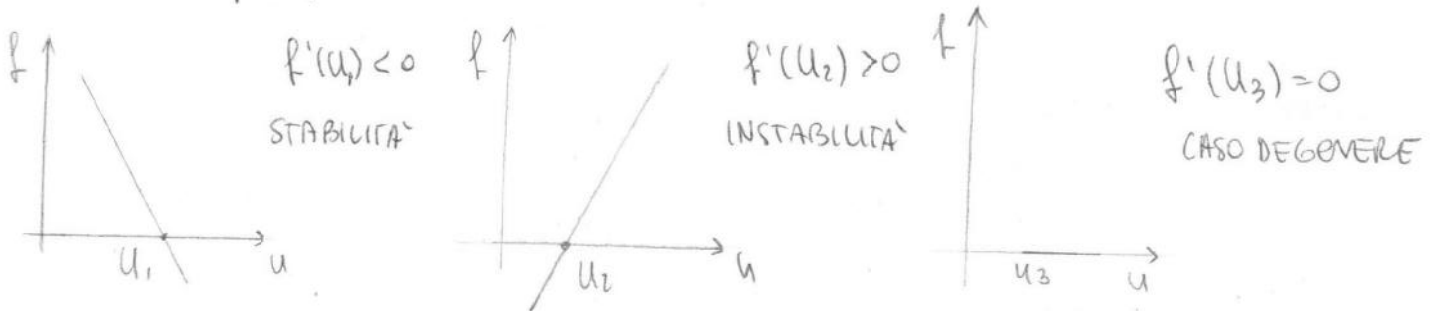
$$\forall u \in (u_1, u_2), f(u) < 0, \frac{du}{dt} < 0 \Rightarrow u \text{ decresce}$$

$$\forall u > u_2, f(u) > 0, \frac{du}{dt} > 0 \Rightarrow u \text{ cresce}$$

La funzione al campo vettoriale abbiamo un'idea del comportamento del modello:

- u_1 = equilibrio stabile
- u_2 e u_3 = equilibrio instabile; se ripreso di poco quel punto d'equilibrio u ha un altro andamento.

Graficamente si vede come si siano punti d'equilibrio di natura diversa (stabili o instabili) legati alle derivate del campo f .



2° METODO

Consideriamo un altro ragionamento:

$$\frac{du}{dt} = f(u)$$

u_e = configurazione d'equilibrio tale che $f(u_e) = 0$

$f(u)$ = sviluppiamo in serie di Taylor in un intorno del punto d'equilibrio u_e

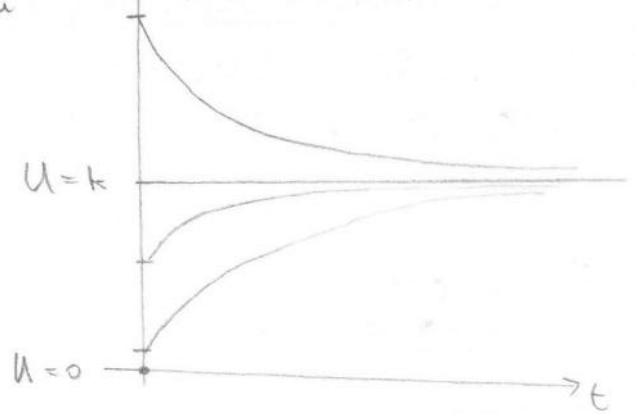
$$f(u) \approx \underbrace{f(u_e)}_{=0} + f'(u)|_{u_e} (u - u_e) + o(u - u_e)$$

$$f(u) \approx f'(u_e)(u - u_e)$$

$v = (u - u_e)$ perturbazione in un intorno del punto d'equilibrio ("di quanto ci allontaniamo dal punto d'equilibrio")

$u=0$ punto d'equilibrio instabile

$u=K$ punto d'equilibrio stabile
ed è anche il valore di
capacità dell'ambiente.



STABILITÀ DI SISTEMI DINAMICI

$$\frac{du}{dt} = f(u)$$

date i punti d'equilibrio annulliamo il campo f ; $u_e: f(u_e) = 0$
sviluppiamo il membro (sviluppo di Taylor):

$$\frac{dv}{dt} = f'(u_e) v \quad v = u - u_e$$

- $f'(u_e) < 0$: u_e punto d'equilibrio stabile
- $f'(u_e) > 0$: u_e punto d'equilibrio instabile
- $f'(u_e) = 0$: u_e punto d'equilibrio degenere

SISTEMA AUTONOMO

Un sistema di n -equazioni alle derivate ordinarie si dice
AUTONOMO se non può scrivere

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = \bar{f}(\bar{u}, t)$$

non compare esplicitamente il tempo nel campo vettoriale \bar{f} , mentre
compare implicitamente attraverso la variabile di stato

$$u = u(t)$$

\bar{f} è una funzione

PUNTO D'EQUILIBRIO

Il punto \bar{u}_e è punto d'equilibrio se $\bar{f}(\bar{u}_e) = 0$, ovvero se

$$\bar{u}(t_0) = \bar{u}_e \rightarrow \bar{u}(t) = \bar{u}_e \quad \forall t > t_0$$

EQUILIBRIO STABILE SECONDO LIAPUNOV

Un punto d'equilibrio \bar{u}_e è stabile se, per un dato $\epsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che

"vicino": $\forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon) > 0$:

$$\forall \bar{u}(t_0) : \|\bar{u}(t_0) - \bar{u}_e\| = \delta(\epsilon)$$

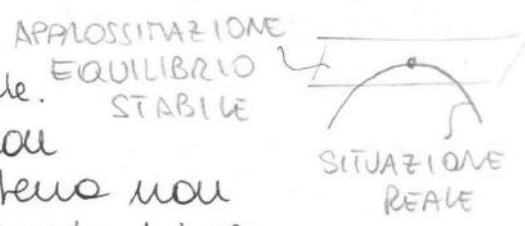
allora il moto è tale che $\|\bar{u}(t) - \bar{u}_e\| < \epsilon \quad \forall t > 0$

Il moto rimane "vicino" allo stato d'equilibrio.

Se $\forall i = 1 \dots N, \operatorname{Re} \lambda_i \leq 0$, allora \vec{u}_e è asintoticamente stabile detto anche **ATTRATTORE**

- Se tutti gli autovalori sono minori di zero, $\forall \|t\| \rightarrow 0$
- Se esiste $\hat{i} : \operatorname{Re}(\lambda_{\hat{i}}) > 0$, allora \vec{u}_e è instabile, $\forall \|t\| \rightarrow \infty$.

Basta un solo autovalore positivo per dare instabilità ed allora hanno modo di \vec{u}_e .



- Se esiste un autovalore: $\operatorname{Re}(\lambda_{\hat{i}}) = 0$, non si può dire nulla sulla stabilità del sistema non lineare; quindi bisogna usare altri metodi per studiare le nature del punto d'equilibrio.

ESEMPIO: metodi di stabilità non lineare e funzione vola di LIAPUNOV.

CASO BIDIMENSIONALE

Si può effettuare una classificazione completa dello stato dei punti d'equilibrio.

Supponiamo che la configurazione d'equilibrio sia l'origine e che il sistema sia linearizzato nell'intorno dell'origine:

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases} \rightarrow J(0,0) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$\vec{u} = (u_1, u_2) = (x, y)$ con punto d'equilibrio l'origine $(0,0)$.

Valuto gli autovalori della matrice jacobiana per avere informazioni sullo stato dei punti d'equilibrio.

Polinomio caratteristico: $\lambda^2 - \lambda \operatorname{tr}(J) + \det(J) = 0$

TRACCIA $\operatorname{tr}(J) = \lambda_1 + \lambda_2$

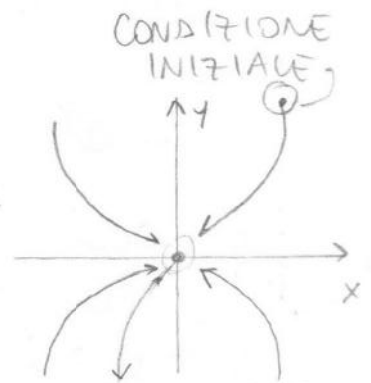
DETERMINANTE $\det(J) = \lambda_1 \cdot \lambda_2$

Ho diverse possibilità:

- 1 - 2 autovalori reali e distinti (\neq CASO)

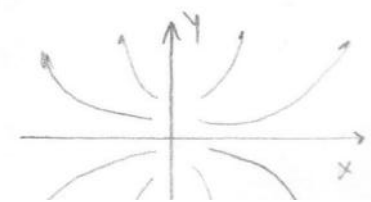
$$\vec{r}(t) = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 t}$$

- 2 - Se $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ il punto d'equilibrio stabile viene detto **NODO STABILE**.
Orbita nello spazio delle fasi (piano xy) in cui il tempo è un parametro.



- 3 - Se $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ il punto d'equilibrio instabile è detto **NODO INSTABILE**

Adesso torniamo dalla condizione d'equilibrio



$$J = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda(a+d) + ab - bc = 0$$

Polinomio caratteristico

$$\lambda^2 - \lambda \operatorname{tr}(J) + \det(J) = 0$$

$$\lambda = \frac{\operatorname{tr} J \pm \sqrt{(\operatorname{tr} J)^2 - 4 \det(J)}}{2} = \frac{\operatorname{tr}(J) \pm \sqrt{\Delta}}{2}$$

con $\Delta = (\operatorname{tr}(J))^2 - 4 \det(J)$

- Se $\det(J) < 0$, gli autovalori hanno segno discorde, il punto è un sella: punto di sella o colle
- Se $\det(J) > 0$ e $\Delta > 0$, gli autovalori sono di segno concorde e dello stesso segno dello traccia
 - Nodo stabile se $\operatorname{Tr}(J) < 0$
 - Nodo instabile se $\operatorname{Tr}(J) > 0$
- Se $\Delta < 0$, autovalori complessi coniugati e natura determinata dal segno della traccia
 - Fuoco stabile se $\operatorname{Tr}(J) < 0$
 - Fuoco instabile se $\operatorname{Tr}(J) > 0$

DIAGRAMMA RIASSUNTIVO

$$\Delta = (\operatorname{tr} J)^2 - 4 \det J = 0$$

$$\det J = \frac{(\operatorname{tr} J)^2}{4}$$



BIFURCAZIONI IN SISTEMI DINAMICI

Alcuni parametri influenzano il numero e la natura delle configurazioni d'equilibrio (argomento vasto e complesso che apre la porta al caos e ai sistemi caotici).

CASO MONODIMENSIONALE

A) BIFORCAZIONE A FORCONE

$$\frac{du}{dt} = \alpha u - u^3 = f(u, \alpha) \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Configurazione d'equilibrio: $\alpha u - u^3 = 0 \quad \begin{cases} u=0 \\ u^2 = \alpha \end{cases}$

1- $\alpha < 0$

C'è un solo punto d'equilibrio: $u=0$

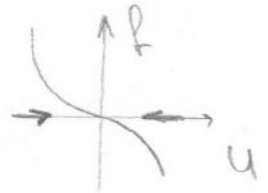
$u^2 = \alpha < 0$ NON ha soluzione.

Valuto la natura del punto d'equilibrio: lo Jacobiano in una dimensione è la derivata.

$$f'(u) = \alpha - 3u^2$$

Valuto la natura di $u_e = 0$

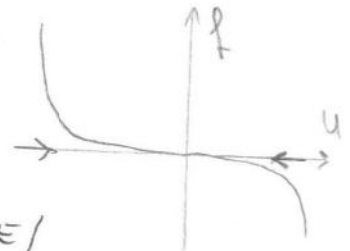
$$f'(0) = \alpha - 3 \cdot 0 = \alpha < 0 \rightarrow u_e = 0 \text{ PUNTO STABILE}$$



2- $\alpha = 0$

Punto d'equilibrio: $u_e = 0$

$$f'(u) = \alpha - 3u^2; \quad f'(0) = \alpha = 0 \text{ CASO DEGENERE / STABILITA' NEUTRA}$$



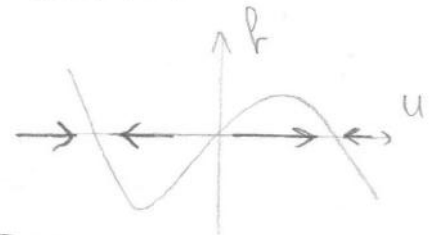
3- $\alpha > 0$

Ho 3 punti d'equilibrio: $u_e = 0, u_e = \pm \sqrt{\alpha}$

$$f'(u) = \alpha - 3u^2$$

$$f'(0) = \alpha > 0 \rightarrow u_e = 0 \text{ PUNTO INSTABILE}$$

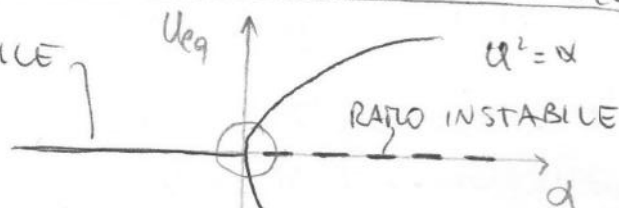
$$f'(\pm \sqrt{\alpha}) = \alpha - 3\alpha = -2\alpha < 0 \rightarrow u_e = \pm \sqrt{\alpha} \text{ PUNTO STABILE}$$



Al variare di α ho un punto d'equilibrio stabile ($u=0$) che diventa instabile per $\alpha > 0$ e nascono altri 2 punti d'equilibrio stabile.

DIAGRAMMA DELLE BIFORCAZIONI: BIFORCAZIONE A FORCONE

Ramo stabile: $u_e = 0$ e STABILE



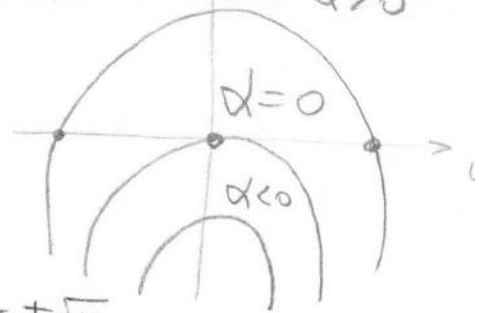
Punto di biforcazione in cui cambia il numero e la natura delle configurazioni d'equilibrio.

41

$\frac{du}{dt}$

Punto d'equilibrio: $u^2 = \alpha$

- $\alpha < 0$ No punti d'equilibrio
- $\alpha = 0$ 1 punto d'equilibrio
- $\alpha > 0$ 2 punti d'equilibrio $u_e = \pm\sqrt{\alpha}$

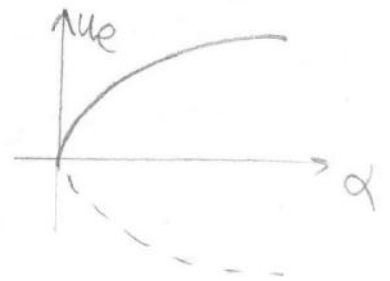


Natura del punto d'equilibrio

- $\alpha = 0$ CASO DEGENERE
- $\alpha > 0$
 - $f'(u) = -2u$
 - $f'(\pm\sqrt{\alpha}) = \mp 2\sqrt{\alpha}$
 - $u_e = +\sqrt{\alpha}$ STABILE
 - $u_e = -\sqrt{\alpha}$ INSTABILE

DIAGRAMMA DELLE BIFORCAZIONI: BIFORCAZIONE NODO-SELVA

Si può dimostrare che tutte le biforcazioni si possono ricondurre a queste 4 fondamentali.



CASO MULTIDIMENSIONALE

Aumentando la dimensione della variabile di stato troviamo casi più complicati.

ESEMPIO

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \mu x - \omega y - x(x^2 + y^2) = f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = \mu y + \omega x - y(x^2 + y^2) = g(x, y) \end{cases}$$

Studiamo la stabilità lineare

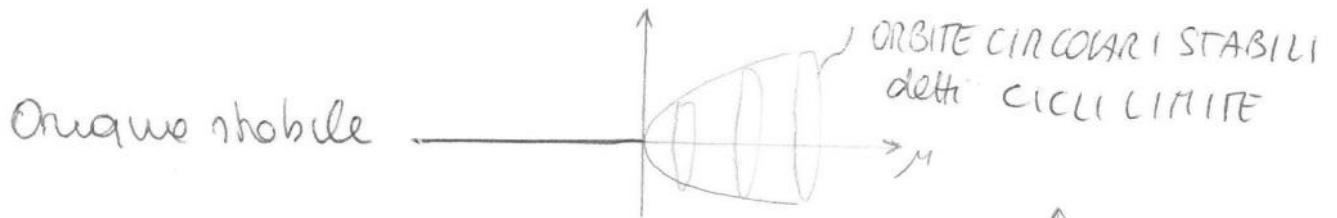
$$\begin{cases} \mu x - \omega y - x(x^2 + y^2) = 0 \\ \mu y + \omega x - y(x^2 + y^2) = 0 \end{cases} \rightarrow \text{UNICA SOLUZIONE} \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Studiamo la natura dei punti d'equilibrio: Jacobiano

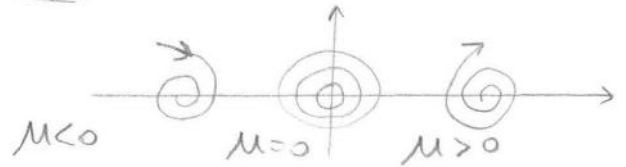
$$J(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu - (x^2 + y^2) - 2x^2 & -\omega - 2xy \\ \omega - 2xy & \mu - (x^2 + y^2) - 2y^2 \end{pmatrix}$$

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} \mu & -\omega \\ \omega & \mu \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il polinomio caratteristico



Lineare:



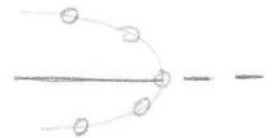
Sistema NON lineare:



CASO LIMITE STABILE



CASO LIMITE INSTABILE



Non ci accorgiamo perché ci allentiamo subito
Questa biforcazione a forca con ciclo limite è detta
BIFORCAZIONE DI HOPF

CICLO LIMITE (NO ESERCIZI)

Un'orbita tende ad una curva chiusa Γ , detta CICLO LIMITE, se esiste un periodo $T > 0$ tale che la sequenza dei punti $u(t + nT)$ tende ad un punto della curva Γ per $n \rightarrow \infty$.

Un ciclo limite Γ dice stabile se esiste un intorno U_Γ tale che se $u(0) \in U_\Gamma \rightarrow u(t) \rightarrow \Gamma$ per $t \rightarrow +\infty$.

Vi è una differenza dalle oscillazioni di sistemi meccanici (oscillatore o pendolo)

Nel ciclo limite abbiamo oscillazioni di ampiezza ben determinata (ad esempio $p = \sqrt{2}$ nel caso precedente) e NON variabile in funzione alle condizioni iniziali (caso del pendolo).

Il ciclo limite dà origine ad oscillazioni AUTOSOSTENUTE, anche perché non ne hanno fenomeni dissipativi

Come individuare l'esistenza di un ciclo limite?

Questo è caos DETERMINISTICO (non stocastico).

Nelle Mappe discrete (e non nei sistemi dinamici) il caos
 si può avere in dimensioni più basse.

MODELLO LOGISTICO (ODE)

$$\frac{dx}{dt} = R x (1-x)$$

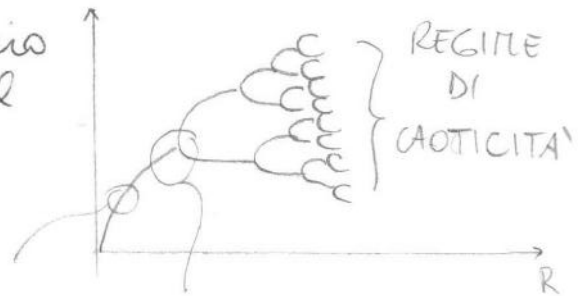
punti d'equilibrio ben definiti

MAPPA LOGISTICA

$$x_{m+1} = R x_m (1-x_m)$$

Le mappe logistiche lavorano a tempo discreto.

Lo scenario delle biforcazioni d'equilibrio
 nel caso discreto è più complesso del
 caso continuo (ODE).



Si ha una "CASCATA DI BIFORCAZIONI"

A PUNTO D'EQUILIBRIO STABILE

BIFORCAZIONE A FORCONE: 2 PUNTI D'EQ.

Nascono più biforcazioni e ne il
 numero cresce in via al caos.

PDE DEL II ORDINE

Si può dare una classificazione esaustiva delle tipologie di equazioni:

$$\left[\sum_{i,j=1}^M A_{ij}(\bar{x}) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = F(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_M}) \right]$$

con $u = u(x_1, x_2, \dots, x_M) = u(\bar{x})$

$x =$ variabili indipendenti

$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ l'ordine massimo è 2.

A_{ij} : matrice dei coefficienti della parte principale, che dipende solo dalle variabili indipendenti e NON dalla variabile di stato u o dalle sue derivate.

L'equazione con scritta è QUASI lineare, ovvero è lineare nelle derivate di ordine massimo, mentre per ordini inferiori può essere non lineare

$$F(x, \partial_x u, \partial_{x_2} u, \dots)$$

Ad esempio: $u^2, u \cdot \partial_x u, \partial_{x_1} u \cdot \partial_{x_2} u$

In funzione dei valori della matrice A_{ij} :

• EQUAZIONI IPERBOLICHE

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall i: \lambda_i \neq 0 \quad \exists! \lambda_i > 0 \\ \forall i: \lambda_i \neq 0 \quad \exists! \lambda_i < 0 \end{array} \right. \quad \exists! \text{ ESISTE UN UNICO COM}$$

descrive fenomeni di trasporto

• EQUAZIONI PARABOLICHE

$$\lambda_i = 0 \quad (\det A = 0)$$

descrive fenomeni di diffusione

• EQUAZIONI ELLITTICHE

$$\forall i: \lambda_i > 0 \text{ oppure } \lambda_i < 0 \quad \text{TUTTI DI SEGNO CONCORDE}$$

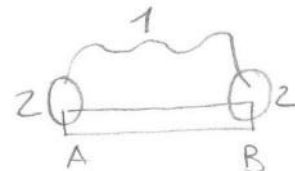
Caratterizzano del mezzo diffusivo, equazione di Laplace, Poisson...

Se i coefficienti sono variabili, allora il segno di $B^2 - 4AC$ può cambiare e l'equazione può cambiare di tipologia.

FORMULAZIONE DEL PROBLEMA MATEMATICO

Si ammette il quinto numero di condizioni iniziali (tempi iniziali) e al bordo (sugli estremi del dominio)

Considero una stanza e voglio vedere la sua temperatura:



1- Condizione iniziale $u(t=0, x) = \phi(x)$

2- Condizione al bordo $u(t, x=A) = \varphi(t)$

$u(t, x=B) = \psi(t)$

ϕ, φ, ψ FUNZIONI NOTE

Quante e quali condizioni al bordo devo ammettere?

REGOLA DEL POLLICE

È quella di ammettere un numero di condizioni al bordo uguali all'ordine di derivata massima nello spazio e come condizione iniziale un numero uguale all'ordine di derivata di ordine massimo nel tempo.

ESEMPIO

1) Diffusione del calore

$$u_t = u_{xx}$$

$u_t = 1$ condizione iniziale

$u_{xx} = 2$ condizioni al bordo

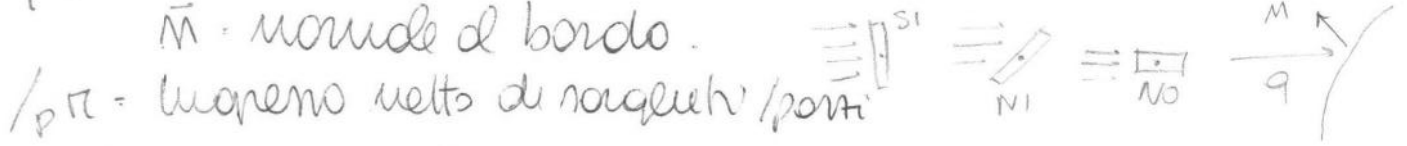
2) Equazione delle onde

$$u_{tt} = u_{xx}$$

$u_{tt} = 2$ condizioni iniziali (per esempio posizione e velocità iniziali della corda)

$u_{xx} = 2$ condizioni al bordo.

$q \cdot \vec{m}$: flusso uscente attraverso il bordo del dominio
 \vec{m} : normale al bordo.



Per funzioni sufficientemente regolari si può usare il teorema di Gauss

$$\frac{d}{dt} \int_V u = - \int_V \nabla \cdot q + \int_V \pi$$

legge di bilancio di Gauss o dello divergenza

Scegliendo $\partial_t \int$ ottengo

$$\int_V \partial_t u = \int_V [- \nabla \cdot q + \pi] \quad \int_V (\partial_t u + \nabla \cdot q - \pi) = 0$$

Per funzioni regolari scriviamo la formulazione differenziale (eliminando l'integrale) la legge di bilancio:

$$\partial_t u + \nabla \cdot q - \pi = 0$$

$$\partial_t u = - \nabla \cdot q + \pi$$

Formulazione differenziale della legge di bilancio.

In tale forma l'equazione di bilancio è CHIUSA, ovvero non rappresenta un'equazione differenziale nella quantità u e mi devo occupare delle RELAZIONI COSTITUTIVE tra le variabili di stato e il momento, ovvero definire:

- il flusso $q = q(u, \nabla u)$
- la sorgente $\pi = \pi_{INT}(u, \nabla u) + \pi_{EXT}$

π_{INT} : per esempio reazioni chimiche, mortalità/morte per il modello delle popolazioni

π_{EXT} : per esempio immigrazione o emigrazione

• RELAZIONI COSTITUTIVE PER DESCRIVERE IL FLUSSO q

1- FLUSSO LINEARE

$$\vec{q} = \vec{c} u \quad \text{con } \vec{c} = c(t, \vec{x}) \text{ funzione assegnata,}$$

Flusso lineare nello spazio che rappresenta

fenomeni di trasporto passivo con velocità c data

→ equazione del 1° ordine di trasporto

2 - TRASPORTO NON LINEARE

la velocità è dipendente in maniera locale dalla variabile di stato (densità locale).

$$\vec{q} = \vec{q}(u(t, \vec{x}))$$

$$\partial_t u + \nabla \cdot \vec{q}(\vec{u}) = \pi$$

CASO 1D: EQUAZIONE DI BURGER

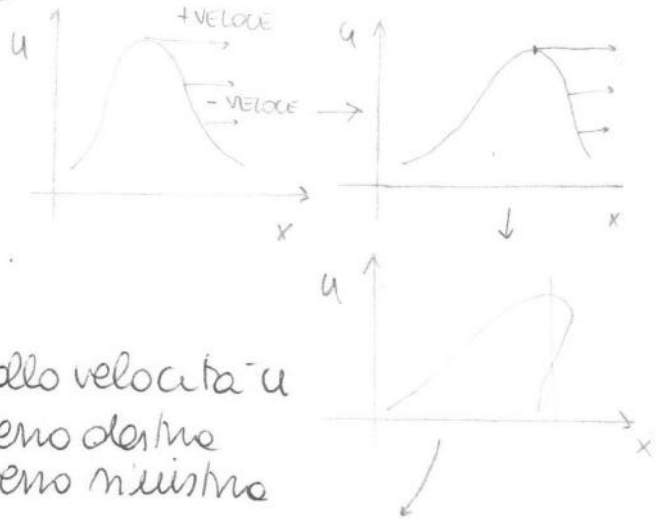
flusso $\frac{u^2}{2}$: $\partial_t u + \partial_x \left(\frac{u^2}{2} \right) = 0$

equazione non lineare, derivandola.

$$\partial_t u + u \partial_x u = 0$$

la velocità di trasporto dipende dalla velocità u

u = velocità di trasporto: $u > 0$ vena destra
 $u < 0$ vena sinistra



Situazione non fisica perché la densità assume 2 valori in x , voglio una corrispondenza UNIVOC (situazione dell'onda che si rompe), e un'altra via per definire le soluzioni fisiche.

3 - FLUSSO DIFFUSIVO

LEGGE DI FOURIER

$$\vec{q} = -k \nabla u$$



Flusso parallelo al gradiente di densità o equivalentemente perpendicolare alle curve di livello ($u = \text{costante}$).

Linee di livello della pressione (ISOBARE)

Il trasporto avviene da zone di alta densità a zone di bassa densità, vena valori di u decrescenti.

$$\partial_t u + \nabla \cdot (-k \nabla u) = \pi \quad \partial_t u = \nabla \cdot (k \nabla u) + \pi$$

k = coefficiente di diffusione

Se il coefficiente di diffusione è costante $k = (k(t, x, u))$

$$\partial_t u = k \Delta u + \pi$$

Δ = LAPLACIANO, elemento di diffusione

CASO 1D $\Delta u = \partial_{xx} u$

CASO 2D $\Delta u = \partial_{xx} u + \partial_{yy} u$

Bisogna assegnare le condizioni iniziali e al bordo.

- Il numero delle condizioni iniziali è uguale all'ordine massimo della derivata nel tempo.
- Il numero delle condizioni al bordo è uguale all'ordine massimo della derivata spaziale.

Se le condizioni iniziali e al bordo sono assegnate correttamente, il problema è ben formulato, se si può sperare di avere esistenza e unicità della soluzione, il problema è ben posto.

Aver posto bene il problema non è automatico e dipende dal modello scelto.

ESEMPIO

In Biologia, il flusso va verso le zone con maggiore concentrazione

$$\vec{q} = -k \nabla \bar{u}$$

CASO 1D

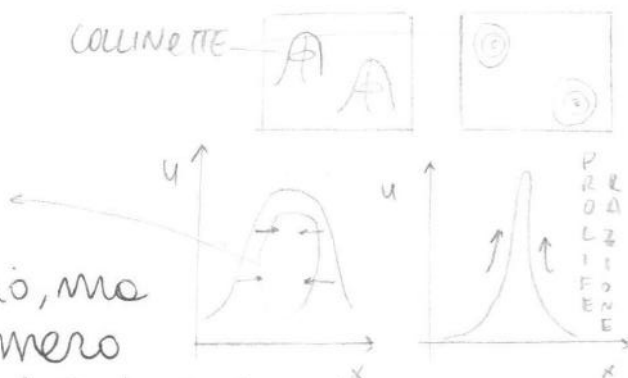
$$q = -k \partial_x \bar{u} \quad \text{formazione di aggregati}$$

Se oltre al termine conservativo del flusso ho una sorgente, (per esempio per proliferazione in funzione della densità), posso avere il "blow up" in tempo finito, ovvero la soluzione cresce fino all'infinito.

Considerando la migrazione collinetta (per esempio la Gaussiana in 2D).

$$\text{Aggregazione} \quad q = k \partial_x u$$

L'aggregazione restringe il dominio, ma l'area, ovvero la densità totale (numero di individui, temperatura media...) resta costante.



Nelle PDE, anche prendendo il giusto numero di condizioni al contorno, il problema può non essere ben posto ed esplodere.

Il problema matematico dell'equazione di diffusione

- Equazione : $\partial_t u = -k \partial_{xx} u$ $u = u(t, x)$
- Condizioni iniziali: $u(0, x) = \phi(x)$ $t \in [0, T]$ $x \in [A, B]$
- Condizioni al bordo: due tipi

CONDIZIONI DI DIRICHLET
Valori di temperatura.

$$\begin{cases} u(t, A) = \alpha(t) \\ u(t, B) = \beta(t) \end{cases}$$

CONDIZIONI DI NEUMANN
Valore di flusso.

$$\begin{cases} \partial_x u(t, A) = \gamma(t) \\ \partial_x u(t, B) = \delta(t) \end{cases}$$

CONDIZIONI MISTE

$$\begin{cases} u(t, A) = \alpha(t) \\ \partial_x u(t, B) = \delta(t) \end{cases}$$

CONDIZIONI DI ROBIN

Combinazione lineare di u e $\partial_x u$.

$$\begin{cases} c_1 u(t, A) + c_2 \partial_x u(t, A) = \gamma(t) \\ c_3 u(t, B) + c_4 \partial_x u(t, B) = \delta(t) \end{cases}$$

Tale problema matematico è ben posto e posso ottenere la soluzione (che ottenerei col metodo di separazione delle variabili).

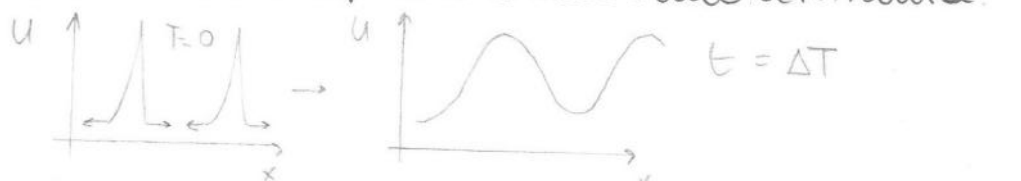
L'equazione di diffusione è di tipo parabolico (classificazione equazioni del II ordine).

PROPRIETA' DELLE SOLUZIONI PARABOLICHE

1- Descrivono un fenomeno irreversibile (non posso tornare indietro nel tempo)

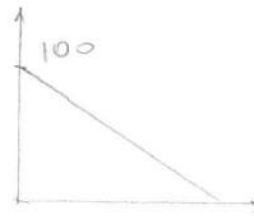
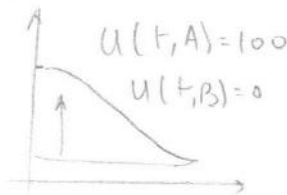
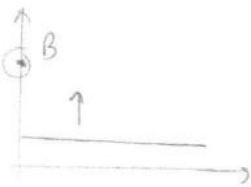
2- Regolarizza le soluzioni, ovvero smussa le discontinuità.

u : concentrazione inquinante che sappiamo inizialmente distribuita con DELTA DI DIRAC (gaussiane molto strette) o un generale funzioni regolari e con discontinuità.



Un tempo sufficientemente le discontinuità vengono eliminate (la funzione diventa regolare).

CONDIZIONI AL BORDO



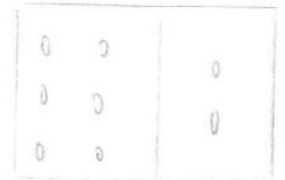
E - Permanenza del segno

Se il dato iniziale (condizione iniziale) $u(0, x)$ è non negativo, anche la soluzione rimane non negativa.

Abbiamo derivato l'equazione di diffusione da un modello deterministico (legge di bilancio), ora proviamo a ragionare in termini stocastici, guardando a livello microscopico.

IPOTESI DI RANDOM WALK (cammino casuale)

Probabilità di $\frac{1}{2}$ di saltare a destra o a sinistra dell'interfaccia.



Considerando un elevato numero di particelle, un modello stocastico di Random Walk (come lanciare una moneta: nota la soluzione al tempo \hat{t} non posso dire nulla sulla soluzione al tempo $\hat{t} + \Delta t$) da un'equazione di diffusione (modello deterministico, finite le condizioni iniziali e al bordo (problema matematico), ho la soluzione unica e ben determinata).

Quali metodi risolutivi usiamo per le PDE di questo tipo?

METODO DI SEPARAZIONE DELLE VARIABILI

Metodo applicabile a PDE omogenee con condizioni al contorno del tipo:

$$\begin{cases} \alpha \partial_x u(t, 0) + \beta u(t, 0) = 0 \\ \gamma \partial_x u(t, 1) + \delta u(t, 1) = 0 \end{cases}$$

CONDIZIONI AL CONTORNO LINEARI E OMOGENEE

Il dominio (spaziale) è limitato (per esempio $[0, 1]$)

$$X(x) T'(t) = \alpha^2 X(x) T(t)$$

DIPENDE SOLO DAL TEMPO

$$\frac{T'(t)}{\alpha^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = K$$

DIPENDE SOLO DALLO SPAZIO

variabili separate indipendenti ma loro equagliamo una costante K

Ho trasformato la PDE in un sistema di 2 ODE

$$\begin{cases} T' - K\alpha^2 T = 0 \\ X'' - KX = 0 \end{cases}$$

la costante di separazione dev'essere negativa, infatti

$T' - K\alpha^2 T = 0$, applicando la separazione delle variabili:

$$\frac{1}{T} \frac{dT}{dt} = K\alpha^2 \rightarrow \frac{d(\ln T)}{dt} = K\alpha^2 \rightarrow T = e^{K\alpha^2 t}$$

Se $K > 0$ e $K\alpha^2 t$ esplosive, $T(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$

e se $K > 0$ la soluzione $u = XT$ esplosiva (non è fisica).

Sceglia una costante di separazione negativa:

$$K = -\lambda^2 \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} T' + \lambda^2 \alpha^2 T = 0 \\ X'' + \lambda^2 X = 0 \end{cases}$$

che risulta hanno come soluzioni

$$\begin{cases} T(t) = A e^{-\lambda^2 \alpha^2 t} \\ X(x) = A \sin(\lambda x) + B \cos(\lambda x) \end{cases}$$

con A, B costanti arbitrarie

la soluzione:

$$u(t, x) = X(x) T(t) = A e^{-\lambda^2 \alpha^2 t} [A \sin(\lambda x) + B \cos(\lambda x)]$$

soddisfa la PDE di partenza

$$\partial_t u = \alpha^2 \partial_{xx} u$$

(non posso verificare formalmente).

infatti, si moltiplica

$$\phi(x) = \sum_m A_m \sin(m\pi x) = A_1 \sin(\pi x) + A_2 \sin(2\pi x) + A_3 \sin(3\pi x) \dots$$

con m arbitrario ed intero

$$\int_0^1 \phi(x) \sin(m\pi x) dx = A_m \int_0^1 \sin^2(m\pi x) dx = \frac{1}{2} A_m$$

abbiamo sfruttato la proprietà di ortogonalità della funzione $\sin(m\pi x)$ che dice che:

$$\int_0^1 \sin(m\pi x) \cdot \sin(n\pi x) dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{1}{2} & m = n \end{cases}$$

METODO DI SEPARAZIONE DELLE VARIABILI

Considero una PDE (come l'equazione di diffusione) dove la soluzione fondamentale è:

$$u_m(t, x) = X(x) T(t)$$

trasformata in un sistema ODE con condizioni al bordo, detto problema agli autovalori (caso semplice del problema di STURM-LIOVILLE).

Risolvendo troviamo $X(x), T(t)$ autovalori corrispondenti a λ

- Principio di sovrapposizione

$$u(t, x) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m T_m(t) X_m(x)$$

- Condizione iniziale

$$u(0, x) = \phi(x)$$

la soluzione, che nel caso dell'equazione di diffusione con condizioni al contorno di Dirichlet omogenee è

$$u(t, x) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m e^{-(m\pi a)^2 t} \sin(m\pi x)$$

con $A_m = 2 \int_0^1 \phi(x) \sin(m\pi x) dx$

N.B A_m ha convergenza formale ma se la funzione è sufficientemente regolare, la serie converge (puntuale, uniforme, in media quadratica) alla soluzione $u(t, x)$.

LO STATO STAZIONARIO

Lo stato stazionario del profilo finale della temperatura è quello che otteniamo se $t \rightarrow \infty$

$$\boxed{\lim_{t \rightarrow \infty} u(t, x) = 0}$$

Visto che gli esponenziali di tutti i termini $\rightarrow 0$, rispetto la scelta delle condizioni al bordo.

Se fornisci partito:

$$\begin{cases} \partial_t u = \partial_{xx} u \\ \partial_x u(t, 0) = \partial_x u(t, L) = 0 \quad \text{CONDIZIONI DI NEUMANN} \\ u(0, x) = \phi(x) \end{cases}$$

Applicando la separazione delle variabili

$$u(t, x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m e^{-\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 t} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$$

Se non si ha come condizione iniziale il piano trigonometrico $A_m = \frac{2}{L} \int_0^L \phi(x) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx$

La soluzione analitica:

$$u(t, x) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{A_0}{2} = \frac{2}{L} \int_0^L \phi(x) dx$$

D'altra parte i fenomeni stazionari sono descrivibili come

$$\partial_t u = \alpha^2 \partial_{xx} u + f$$

$u = u(t, x)$

DIFFUSIONE

SORGENTE

Il tempo in un fenomeno stazionario non è più variabile indipendente quindi $u = u(x)$

$$\partial_t u = 0 \rightarrow \alpha^2 \partial_{xx} u + f = 0$$

Se $x \in \mathbb{R}$, ∂_{xx} sono derivate totali (ODE)

$$\alpha^2 \frac{d^2 u}{dx^2} = -f \quad \frac{d^2 u}{dx^2} = -\frac{f}{\alpha^2} \quad \frac{du}{dx} = -\frac{f}{\alpha^2} x + \text{COSTANTE}$$

$$\boxed{u = -\frac{f}{\alpha^2} \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2}$$

La soluzione tende ad un profilo parabolico

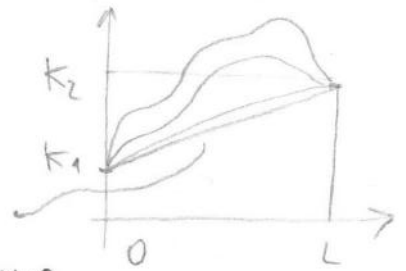
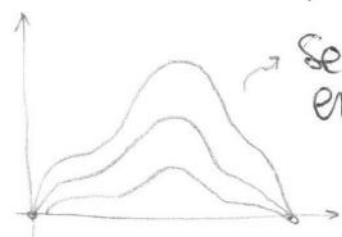
	SEPARAZIONE VARIABILI	TRASFORMATA INTEGRALE
PDE non omogenea	NO	SI
Condizione al bordo non omogenea	NO	SI
Coefficienti variabili	SI	NO
PDE non lineari	NO	NO
Variabili indipendenti in dominio limitato	SI	NO
Variabili dipendenti in dominio illimitato	NO	SI [0, +∞) LAPLACE (-∞, +∞) FOURIER

Un trucco che può essere usato è quello di effettuare trasformazioni opportune per ridurre a PDE più semplici che si possono trattare col metodo di separazione delle variabili.

ESEMPIO

(1)
$$\begin{cases} \partial_t u = \alpha^2 \partial_{xx} u & x \in [0, L] \quad t \in [0, +\infty) \\ u(t, 0) = k_1 \\ u(t, L) = k_2 \\ u(0, x) = \phi(x) \end{cases}$$

condizioni al bordo non omogenee, non posso applicare direttamente il metodo di separazione delle variabili



STATO TRANSITORIO costruzione nella forma della soluzione STATO STAZIONARIO

la soluzione:

$u(t, x)$: STATO STAZIONARIO + STATO TRANSITORIO

$$u(t, x) = k_1 + \frac{x}{L} (k_2 - k_1) + v(t, x) \quad (2)$$

retta tra k_1, k_2 incognite

a cura della sostituzione del tipo

$$u(t, x) = W(t, x) e^{-\beta t} \quad (4)$$

$W(t, x)$: tiene conto dello sola diffusione

$e^{-\beta t}$: tiene conto dello sola reazione

Sostituendo la (4) nella (3) otteniamo

$$\begin{cases} \partial_t W = \alpha^2 \partial_{xx} W \\ W(t, 0) = 0 \\ W(t, L) = 0 \\ W(0, x) = \phi(x) \end{cases}$$

Dove vengono usate le equazioni di reazione di diffusione?

Queste equazioni sono alla base dei fenomeni di morfogenesi (macchia di zebra), idee di TURING (1952)

Dal bilancio di massa:

$$\boxed{\partial_t M + \nabla \cdot J = f(M)}$$

$f(M)$ = sorgente

$\partial_t M$ = densità di individui

$\nabla \cdot J$ = flusso

Per costruire un modello si devono dare espressioni per il flusso e per la sorgente.

ESEMPI

1) Modello di dispersione degli animali

$$J = -D(M) \nabla M \quad \text{con} \quad \frac{dD}{dM} > 0$$

la diffusione è non lineare

• bassa se ci sono pochi individui nella comunità

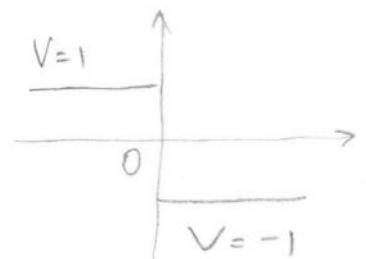
• alta se ci sono tanti individui nella comunità

2) Modelli di aggregazione

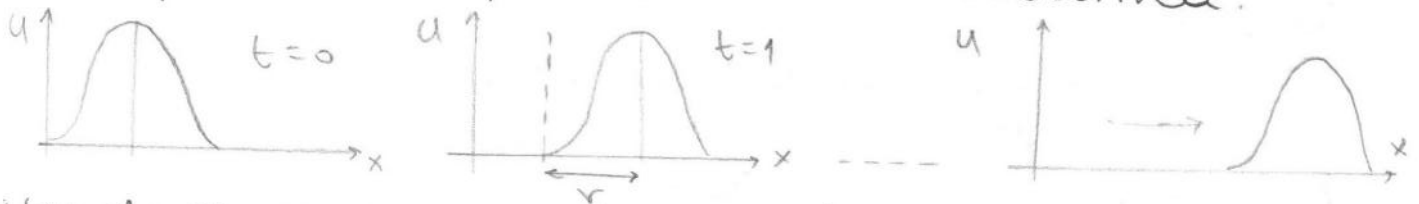
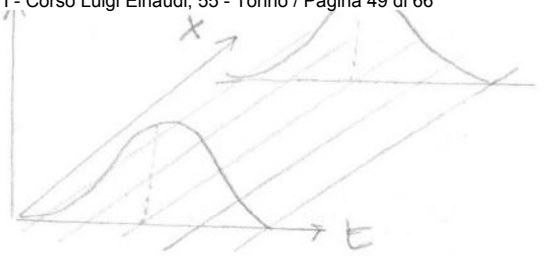
$$J = V_m M - D(M) \frac{\partial M}{\partial x}$$

V = velocità di trasporto, per esempio:

$$V = -V_0 \operatorname{sig}(x) \quad \text{SEGNO DI } x$$



La condizione iniziale (regole di partenza) è trasportata senza distorsioni lungo le caratteristiche, ad una velocità v data, corrispondente alla pendenza della caratteristica.



L'onda percorre uno spazio: $x = vt$.

La scelta di uno specifico x_0 equivale a scegliere una specifica caratteristica.

Il metodo delle caratteristiche permette di risolvere equazioni del tipo:

$$\begin{cases} a(t,x) \partial_t u + b(t,x) \partial_x u + c(t,x) u = 0 \\ u(0,x) = \psi(x) \quad x \in (-\infty, +\infty) \end{cases}$$

Risolve con un opportuno cambio di variabili che trasformano le PDE in ODE.

I coefficienti possono essere variabili (dipendenti da t, x). Si potranno risolvere anche equazioni non lineari, con coefficienti che dipendono dalla variabile di stato.

• VELOCITÀ DI TRASPORTO VARIABILE ($v = v(x)$)

$$\partial_t u + \partial_x (v(x) u) = 0$$

con il flusso $q = v(x) u$
Sviluppando la derivata

$$\partial_t u + v(x) \partial_x u + u \partial_x v(x) = 0$$

$$\partial_t u + v(x) \partial_x u = -(\partial_x v(x)) u$$

$v(x) \partial_x u$ - trasporto con velocità $v(x)$ che determina le caratteristiche.

$$\frac{du(t, x(t))}{dt} = -(\partial_x v(x)) u$$

la funzione u non è più costante lungo le caratteristiche

DOMINI ILLIMITATI

Nei domini illimitati il problema matematico è definito assegnando la condizione iniziale alla PDE e non assegnando nessuna condizione al bordo.

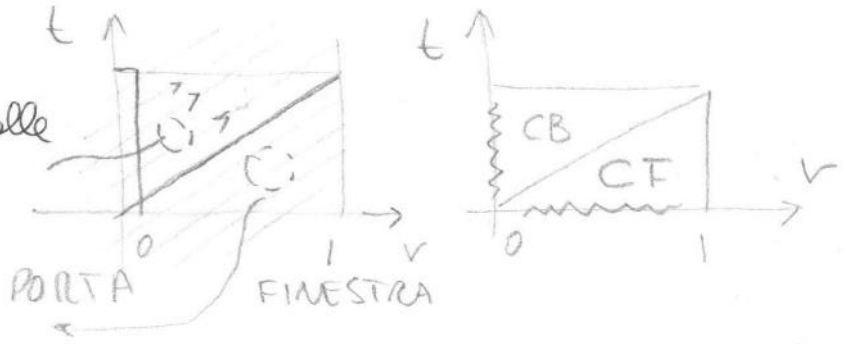
DOMINI LIMITATI

Assegnando una o più condizioni al bordo e condizioni iniziali dove entrano le caratteristiche del dominio.

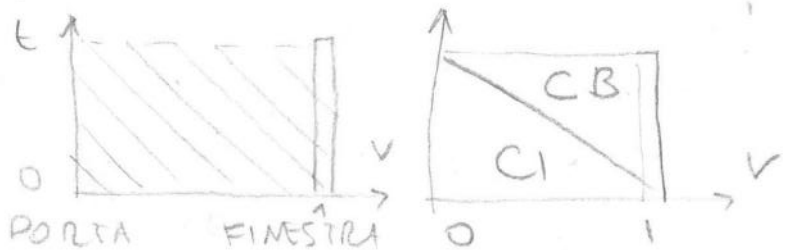
Se $V > 0$

Domínio influenzato dalle condizioni al bordo

Domínio influenzato dalle condizioni iniziali

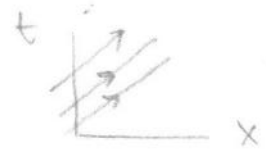


Se $V < 0$



Le condizioni al bordo vengono assegnate dove le caratteristiche entrano nel sistema

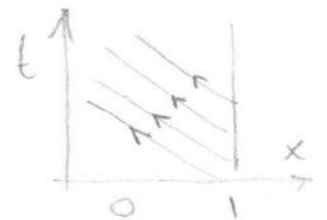
Se $V > 0$ assegnare le condizioni al bordo al bordo di sinistra



$$u(t, x=0) = \varphi(t) \quad \forall t \in [0, T]$$

Se $V < 0$ assegnare le condizioni al bordo al bordo di destra

$$u(t, x=1) = \psi(t)$$



In generale le caratteristiche sono delle curve non necessariamente rette: bisogna vedere dove entrano nel dominio e porre i termini in cui il problema matematico è ben formulato, assegnando condizioni ad entrambi i bordi; oppure altri casi in nessun bordo.

Ordiniamo la soluzione lungo le caratteristiche

$$u(t, x(t)) : \left\{ \begin{array}{l} \frac{du(t, x(t))}{dt} = 0 \\ u(t=0, x_0) = x_0^2 \end{array} \right.$$

lungo le caratteristiche: $\partial_t u + x \partial_x u = 0$

$u(t=0, x_0)$ condizione iniziale voluta in uno specifico punto x_0 :

Risolvo: $u(t, x(t)) = \text{COSTANTE}$

Determino le costanti della condizione iniziale

$$u(0, x(t)) = \text{COSTANTE} = x_0^2$$

la soluzione: $u(t, x(t)) = x_0^2$

Risolviendo per x_0 la relazione delle caratteristiche

$$x(t) = x_0 e^t \rightarrow x_0 = x e^{-t}$$

e sostituendo in $u(t, x(t)) = x_0^2$ ottengo

$$\boxed{u(t, x) = x^2 e^{-2t}}$$

Verifico la soluzione sostituendola nella PDE

$$\partial_t u + x \partial_x u = -2x^2 e^{-2t} + 2x \cdot x e^{-2t} = 0 \quad \text{OK}$$

$$2) \quad \partial_t u + (t-1) \partial_x u = f(t, x)$$

Dire come il problema matematico è ben posto in un dominio $x \in [a, b]$

Si deve assegnare 1 condizione al bordo iniziale e condizioni al bordo in funzione delle velocità-

- Se $t < 1$, $v = t-1 < 0$, devo assegnare 1 condizione al bordo a destra in $x=B$
- Se $t=1$, $v=0$, nessuna condizione al bordo
- Se $t > 1$, $v = t-1 > 0$, devo assegnare 1 condizione al bordo a sinistra in $x=A$

EQUAZIONI IPERBOLICHE (DI TRASPORTO) NON

LINEARI DEL I ORDINE (LEGGI DI CONSERVAZIONE)

Partiamo dalla legge di conservazione

$$\partial_t u + \partial_x q(u) = 0$$

flusso dipendente da u , variabile di stato.

$$\partial_t u + \frac{\partial q}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$\frac{\partial q}{\partial u} = g(u)$ velocità velocità di trasporto che è diversa dal caso lineare e dipende dalle variabile di stato.

$$\boxed{\partial_t u + g(u) \partial_x u = 0} \quad \text{EQUAZIONE NON LINEARE}$$

Tuttavia, il metodo risolutivo è analogo al caso lineare e studiamo le linee caratteristiche e le PDE in tali linee.

Caratteristiche $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = g(u) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$

Equazione linee caratteristiche

$$\boxed{x = x_0 + g(u)t}$$

lungo le caratteristiche $\frac{du(t, x(t))}{dt} = 0$

u è costante lungo le caratteristiche

N.B. in generale, se considero

$$\partial_t u + g(u) \partial_x u = f(t, x, u)$$

le caratteristiche sono sempre

$$x = x_0 + g(u)t \quad \text{soluzione di } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = g(u) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

e lungo le caratteristiche

$$\frac{du(t, x(t))}{dt} = f(t, x, u)$$

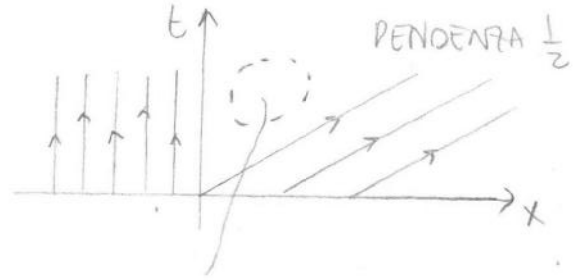
termine che comporta che u cresca o decresca lungo le caratteristiche.

Il procedimento è analogo ma il caso non lineare può riservare difficoltà aggiuntive

NON lineari e che, in alcuni casi, le equazioni caratteristiche non ricoprono tutto il dominio

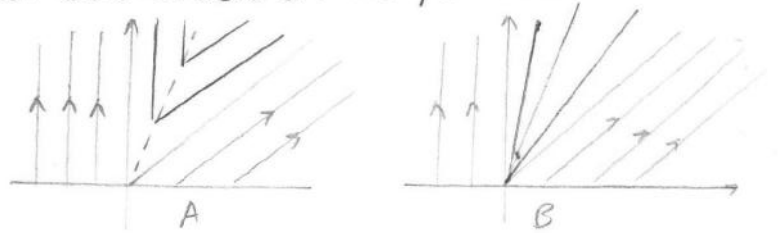
ESEMPIO

$$1) \begin{cases} \partial_t u + 2u \partial_x u = 0 \\ u(0, x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \end{cases}$$



Questa zona non è coperta dalle caratteristiche e non so che valore assegnare allo stesso soluzione: genera un ONDA DI RAREFAZIONE

la scelta di A porta a soluzioni non finite e la scelta B soddisfa i criteri entropici; soluzione conetta.



2) TRAFFICO VEICOLARE

Considero una strada in cui, guardando a scala macroscopica, considero il flusso di veicoli come un fluido. Considero solo il collo d'ingresso e di uscita per conservare il numero delle auto.

Ragiono in termini di conservazione dei veicoli.

$$\partial_t u + \partial_x q(u) = 0$$

$u(t, x)$ densità di veicoli

Il modello è definito confrontando con il dato sperimentale DIAGRAMMA FONDAMENTALE

A: Flusso nullo se non ho la velocità

$$q = u(1-u)$$

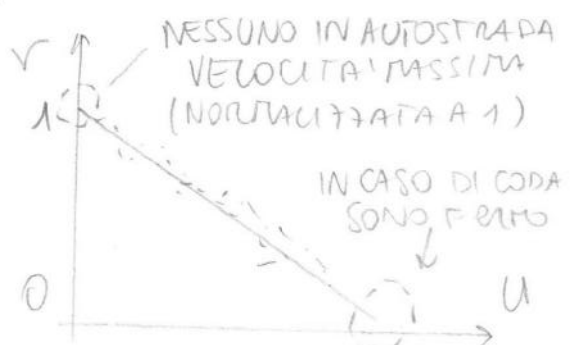


B: Se non tutti in coda (FERMI) ho il flusso nullo

Analogamente: vnto che $q = uv$

v = velocità media

$$\text{Se } q = u(1-u) \\ v = 1-u$$



L'equazione delle onde:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

$$A = 1$$

$$B = 0$$

$$C = -c^2$$

$$\rightarrow B^2 - 4AC = c^2 > 0$$

IPERBOLICA.

• PROPRIETA'

- 1) L'equazione può sviluppare singolarità in un tempo finito e la soluzione non può essere più regolare della regolarità del dato iniziale.
- 2) Velocità di propagazione finita.

Il problema matematico è ben formulato assegnando 2 condizioni iniziali

$$\begin{cases} u(0, x) = \phi(x) & \text{POSIZIONE INIZIALE DELLA CORDA} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = \psi(x) & \text{VELOCITA' INIZIALE DELLA CORDA} \end{cases}$$

e 2 condizioni al bordo (nel dominio è finito), dimostrando che le caratteristiche entrano ed escono da entrambi i bordi che possono essere di diverso tipo

CONDIZIONI DI DIRICHLET

$$\begin{cases} u(t, 0) = \alpha(t) \\ u(t, 1) = \beta(t) \end{cases} \quad x \in [0, 1]$$



α, β definitiscono i valori fissati agli estremi della corda.

CONDIZIONI DI NEUMANN

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(t, x=0) = \gamma(t) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(t, x=1) = \delta(t) \end{cases}$$

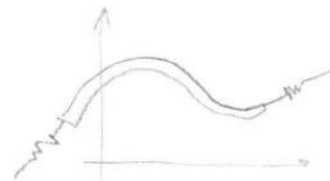


γ, δ forze assegnate agli estremi, impingono la componente verticale delle forze in x . $\tau \frac{\partial u}{\partial x}(t, x)$

CONDIZIONI MISTE

$$\tau \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = -k u(t, 0)$$

FORZA DI RICHIAMO DELLA MOLLA



$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = -\frac{k}{\tau} u(t, 0) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(t, 1) = -\frac{k}{\tau} u(t, 1) \end{cases}$$

Questo ci motiva un cambio di variabili
introducendo 2 nuove coordinate (ξ, η)

$$\xi = x + ct \quad \eta = x - ct$$

Con questo cambio:

$$\partial_t^2 u = c^2 \partial_{xx} u \quad ; \quad \partial_{\xi\eta} u = 0 \rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0, \text{ infatti:}$$

$$\partial_x u = \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial \xi} = \partial_\eta u + \partial_\xi u$$

analogamente:

$$\partial_t u = c (\partial_\xi u - \partial_\eta u)$$

$$\partial_{xx} u = \partial_{\xi\xi} u + 2 \partial_{\xi\eta} u + \partial_{\eta\eta} u$$

$$\partial_{tt} u = c^2 (\partial_{\xi\xi} u - 2 \partial_{\xi\eta} u + \partial_{\eta\eta} u)$$

L'equazione trasformata $\partial_{\xi\eta} u = 0$ può essere risolta
integrando rispetto a ξ .

$$\partial_\eta u(\xi, \eta) = \Phi(\eta)$$

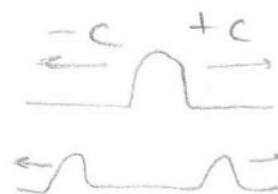
Integrando rispetto a η , ottengo la soluzione:

$$u(\xi, \eta) = \Phi(\eta) + \Psi(\xi)$$

Ritornando alle coordinate (x, t)

$$u(t, x) = \Phi(x - ct) + \Psi(x + ct)$$

La soluzione è nome dei due componenti
che viaggiano con velocità opposte ($\pm c$)



Cerchiamo quali soluzioni soddisfanno le condizioni iniziali

$$u(0, x) = f(x) = \Phi(x - c \cdot 0) + \Psi(x + c \cdot 0)$$

$$\Phi(x) + \Psi(x) = f(x)$$

la seconda condizione iniziale

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = g(x) = -c \Phi'(x) + c \Psi'(x), \quad c \neq 0 \Rightarrow \dots$$

Risolvendo si ha:

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2c} \int_{x_0}^x g(s) ds$$

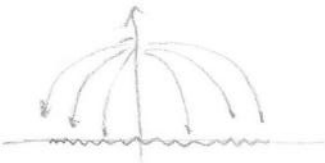
$$\Psi(x) = \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2c} \int_{x_0}^x g(s) ds$$

DOMINIO DI DIPENDENZA

Quello che accade in un punto è influenzato da quello che succede in un dominio finito.

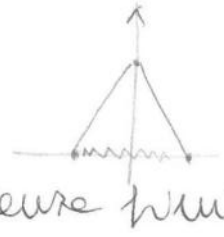
DIFFUSIONE

tutti i punti che stanno dentro l'intervallo influenzano quello che accade nel punto, dominio di dipendenza infinito.



ONDE

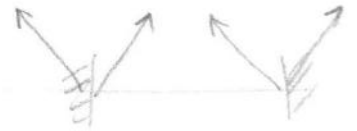
Dominio di dipendenza finito



ESEMPIO

1)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad x \in [0, L] \\ u(t, 0) = 0 \\ u(t, L) = 0 \\ u(0, x) = f(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = g(x) \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{CONDIZIONI AL BORDO DI} \\ \text{DIRICHLET omogenee} \\ \text{CONDIZIONI INIZIALI} \end{array}$$



Cerchiamo la soluzione col metodo di separazione delle variabili:

$$u(t, x) = X(x) T(t)$$

Sostituiamo nell'equazione:

$$X T'' = \alpha^2 X'' T \quad \frac{T''}{\alpha^2 T} = \frac{X''}{X} = \lambda \quad \text{costante di separazione}$$

DIPENDE SOLO DAL TEMPO DIPENDE SOLO DALLO SPAZIO

la PDE si riduce ad un sistema di 2 ODE

$$\begin{cases} T''(t) - \alpha^2 \lambda T(t) = 0 \\ X''(x) - \lambda X(x) = 0 \end{cases}$$

QUALI valori di λ ?

• $|\lambda > 0|$ ($\lambda = \beta^2$)

$$\left\{ \begin{array}{l} T(t) = A e^{(\alpha\beta)t} + B e^{-(\alpha\beta)t} \\ X(x) = C e^{\beta x} + D e^{-\beta x} \end{array} \right.$$

$T \rightarrow \infty$, esplosione: NON scelgo $\lambda > 0$

• $|\lambda = 0|$

$$\left\{ \begin{array}{l} T(t) = A t + B \\ X(x) = C x + D \end{array} \right.$$

Sostituendo $X(x)$ nelle condizioni al bordo mi ha la soluzione nulla (corda in equilibrio), soluzione poco interessante: NON scelgo $\lambda = 0$.

In generale (non negli esercizi d'esame), si deve risolvere il sistema usando le condizioni di ortogonalità:

$$\int_0^L \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{L}{2} & m = n \end{cases}$$

$$a_m = \frac{2}{m\pi\alpha} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx$$

$$b_m = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx$$

La soluzione è:

$$u(t, x) = \sum_{m=1}^{\infty} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \left[a_m \sin\left(\frac{m\pi \alpha t}{L}\right) + b_m \cos\left(\frac{m\pi \alpha t}{L}\right) \right]$$

- Se la velocità iniziale è nulla: $g(x) = 0$, $a_m = 0$, la soluzione:

$$u(t, x) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi \alpha t}{L}\right)$$

- Se $f(x) = \sin\frac{\pi x}{L} + \frac{1}{2} \sin\frac{3\pi x}{L}$, ovvero $f(x)$ è espressa in termini di componenti seno; confronto $f(x)$ con b_m

$$u(0, x) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin\frac{m\pi x}{L} \cos 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} b_1 = 1 \\ b_3 = \frac{1}{2} \\ b_k = 0 \quad k \neq 1, 3, k \in \mathbb{N} \end{array} \right.$$

La soluzione è data da

$$u(t, x) = \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi \alpha t}{L}\right) + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{3\pi \alpha t}{L}\right)$$

Ogni termine seno "vibra" con una frequenza particolare

Ogni armonica "vibra" con una specifica frequenza che è multiplo della frequenza fondamentale (che si ha con $m=1$)

In genere si parla dell' m -esima armonica e dell'emmentissimo modo di vibrare.

