



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO : 310

DATA : 16/07/2012

A P P U N T I

STUDENTE : Rinaldi

MATERIA : Fondamenti di Meccanica delle Strutture

Prof. Carrera

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

FONDAMENTI
DI
MECCANICA
deeee
STRUTTURE

2011 - 2012

PROFF. CARRERA

INTRODUZIONE

OGNI STRUTTURA È FORMATA DA PEGÙ ELEMENTI STRUTTURALI

LA TEORIA DELL'ELASTICITÀ PREVEDE DEI CASI PARTICOLARI CHE SONO LE STRUTTURE PER FACILITARE I CALCOLI.

LA TEORIA DELLE STRUTTURE

NELLA PRIMA SI PREVEDE DI ANALIZZARE CORPI ELASTICI CHE NON SI "ROMPONO" E CHE TORNAVANO NELLE LORO FIGURAZIONI INIZIALI QUANDO SI TOGLIE IL CARICO. NOI ANALIZZEREMO UNA PARTE PIÙ ALTA RISPETTO AI SOLI CORPI ELASTICI: EQUAZIONI FONDAMENTALI DEI CONTINUI DEFORMABILI

↳ SONO ESPRESSIONI MATEMATICHE

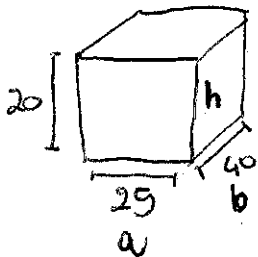
↳ MA ACCETTIAMO CHE NEL CORPO CI SIANO DELLE DISCONTINUITÀ CIOÈ NE VUOTI NE SOVLAPPOSIZIONI DI MATERIALI

NOI FAREMO RIFERIMENTO A CORPI TRIDIMENSIONALI CIOÈ LE CUI DIMENSIONI SONO DELLO STESSO ORDINE DI GRANDEZZA QUINDI NESSUNA È TRASCURABILE.

LE EQ. F. D. C. D SI RIFERISCONO A CORPI TRIDIMENSIONALI NELLE STRUTTURE ESISTONO ELEMENTI PICCOLI DETTI ELEMENTI SECONDARI CHE SECONDO LE EQ. F. D. C. D E SONO TRIDIMENSIONALI

LE STRUTTURE POSSONO ESSERE BIDIMENSIONALI O MONODIMENSIONALI NELLE QUALI UNA O DUE DIMENSIONI SONO TRASCURABILI.

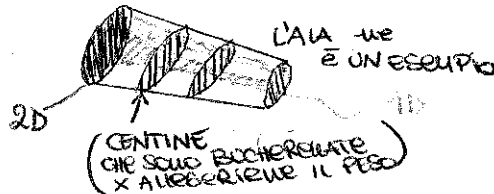
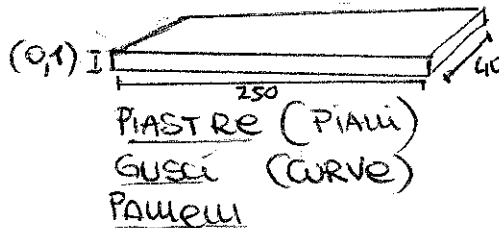
3D



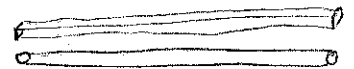
POSSO APPROSSIMARE L'ALA A UN ELEMENTO TRAVE

2D

(A PARETE SOTTILE)



1D



$$\frac{h}{a}, \frac{b}{b} \ll 1$$

TRAVI

↓
(noi analizzeremo questi casi, poiché hanno equazioni più facili)

L'INGEGNERE AEROSPAZIALE È SPECIALISTA DELLE STRUTTURE LEGGERE: HA COME SCOPO QUELLO DI ELIMINARE TUTTO IL PESO CHE NON SERVE!!

LA TEORIA DELLE STRUTTURE CI PERMETTE DI ANALIZZARE ELEMENTI 2D

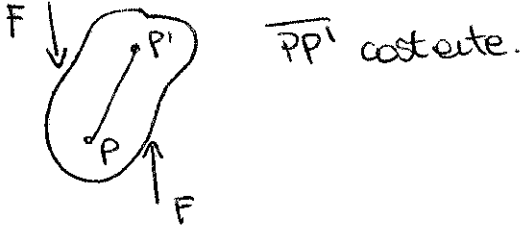
NEGLI AGGANCI AIA - POSCOPERA A CAUSA DEI SFORZI IN MOLTE DIREZIONI USEREMO STRUTTURE 3D PIÙ SOLIDE E RESISTENTI

IN SEGUITO INTRODURREMO LO SCHEMA STRUTTURALE DI SEMIGUSCIO IDEALE CHE È UN MODO SEMPLICE PER TRATTARE DEI COMPLESSI SEMIGUSCI RINFORZATI

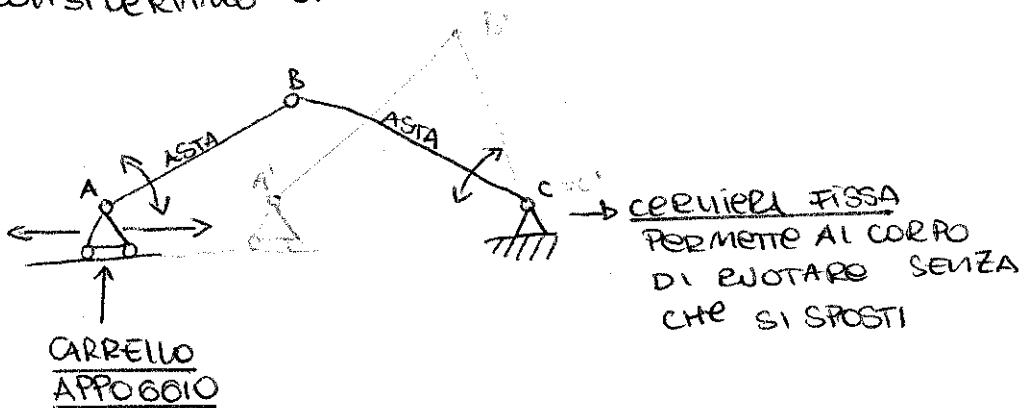
NEL CORSO TRATTEREMO LA TEORIA DELLA TRAVE, CALCOLANDO LE PROPRIETÀ DELLE AREE DI SEZIONE DELLE TRAVI CON LA GEOMETRIA DELLE AREE, NELL'ANALISI DEI PROBLEMI USEREMO IL PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI.

08-03-2012 ~~CORPI RIGIDI E DEFORMABILI~~

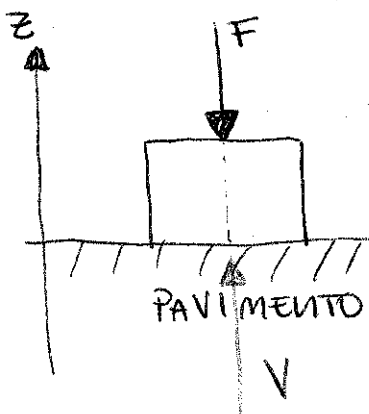
È IMPORTANTE CAPIRE LA DIFFERENZA TRA CORPI RIGIDI E DEFORMABILI. CI CHIEDEREMO QUALE È IL LIMITE DELL'APPROSSIMAZIONE DI CORPO RIGIDO. IL CORPO RIGIDO È UN CORPO NEL QUALE DUE PUNTI SONO A UNA CERTA DISTANZA CHE RIMANE FISSA ANCHO QUANDO A ESSO SONO APPLICATE DELLE FORZE.



CONSIDERIAMO UNA STRUTTURA DI QUESTO TIPO



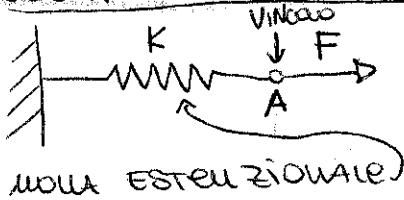
LE ASTE POTREBBERO ESSERE RIGIDE O DEFORMABILI. SE SONO RIGIDE \overline{AB} È COSTANTE PER ESEMPIO E LO È ANCHE \overline{BC} . CIÒ SIGNIFICA CHE SE SPOSTO IL CARRELLO HO IL DISEGNO AZZURRO. SE SUPPONIAMO CHE PER ALCUNI PROBLEMI POSSO TRASCURARE DELLE DEFORMAZIONI OTTIENIAMO DEI CORPI RIGIDI. DELLE VOLTE NON POSSO TRASCURARE LA DEFORMAZIONI DELL'ASTA xcché cambiano molte cose!



SE APPLICO UN CARICO A UNA STRUTTURA DI FORMA DI PARALLELEPIPEDO NEL SUO CENTRO VUOLIO CONOSCERE LA REAZIONE DEL PAVIMENTO E SAPENDO ESSA POSSO CAPIRE SE IL PAVIMENTO CEDE O MENO. SUPPONENDO CHE LA DEFORMAZIONE NON INFLUENZA NULLA. $V = F$

IN QUESTO CASO HO UN PROBLEMA ISOSTATICO CIÒ È LA DEFORMAZIONE DEL CORPO NON INTERVIENE NEL CALCOLO DELLE REAZIONI VINCOLARI

ESEMPIO DI PROBLEMA ELASTICO



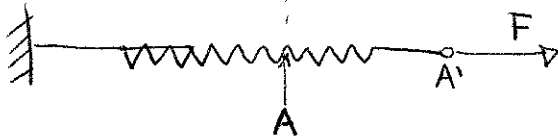
← CONFIGURAZIONE INIZIALE INDEFORMATA

MOIA ESTERNAZIONALE

$K =$ COSTANTE ELASTICA DELLA MOIA

IN QUESTO CASO CONOSCO K, F, A e i VINCOLI
VOGLIO CONOSCERE LA POSIZIONE DI A'

DISEGNO LA CONFIGURAZIONE FINALE DEFORMATA



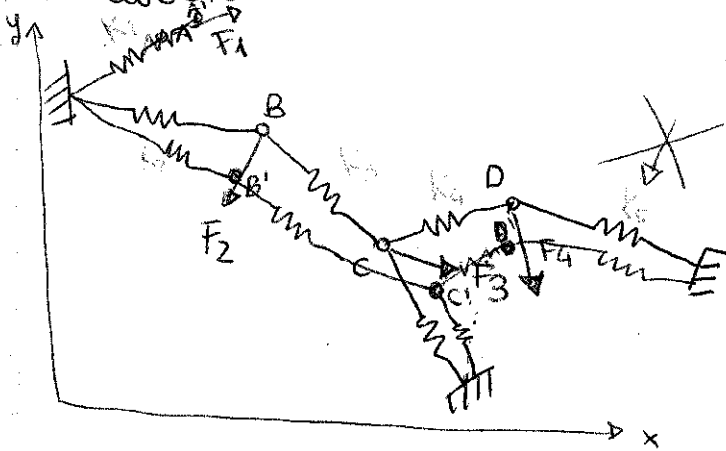
RISOLVERE

IL PROBLEMA ELASTICO SIGNIFICA CONOSCERE $\overline{AA'}$

Sapendo che $\hat{F} = K\bar{u}$ $\bar{u} = \overline{AA'}$ $\Rightarrow u = \frac{F}{K}$

ESEMPIO 2

HO QUESTO SISTEMA di MOIE



so tutte le COORDINATE DEI PUNTI
CONOSCO LA GEOMETRIA
I CARICHI A CUI DO DEI NOMI
e I MATERIALI

non posso mettere cost!!

$A' B' C' D' ?$

(SISTEMA di ELASTICITA' CONCENTRATE)

IL PROBLEMA TENDE A DIVENTARE SEMPRE PIU' COMPLESSO.
NOI POSSIAMO CONSIDERARE UN SISTEMA CONTINUO COME
UN SISTEMA INFINITO DI MOIE CHE PRODUCONO ELASTICITA'
DIVERSE O UGUALI TRA LORO.

NOI SIAMO INTERESSATI A PROBLEMI CHE RIGUARDANO
CORPI TRIDIMENSIONALI.

INSERIAMO DELLE NOTAZIONI :

● IL CORPO LO INDICHEREMO CON C

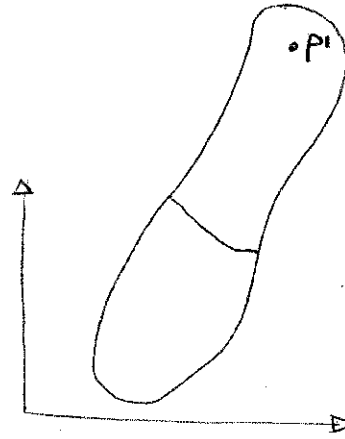
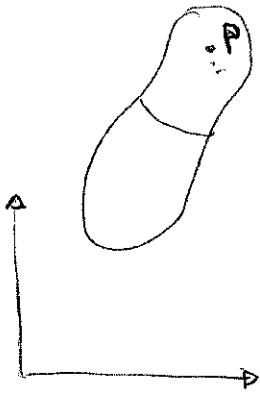
● CHE HA UN VOLUME V

● ED E' POSIZIONATO IN UN PUNTO QUALSIASI P NEL SISTEMA
CARTESIANO (x, y, z) E SI TROVA NEL VOLUME V

⑤

CONFIGURAZIONE INDEFORMATA

CONFIGURAZIONE DEFORMATA



IL CORPO CAMBIA FORMA PER EFFETTO DEI CARICHI.

LA CONFIGURAZIONE DEFORMATA È IDENTIFICATA DAL VETTORE SPOSTAMENTO DEL PUNTO P NEL PUNTO P'

$$\vec{J}(x, y, z) = \overline{PP'}$$

$$\vec{J}(x, y, z) = \underbrace{u(x, y, z)}_{f_1} \vec{i} + \underbrace{v(x, y, z)}_{f_2} \vec{j} + \underbrace{w(x, y, z)}_{f_3} \vec{k}$$

devo cioè conoscere 3 funzioni in ogni punto del corpo f_1, f_2, f_3 che sono in funzione di x, y, z .

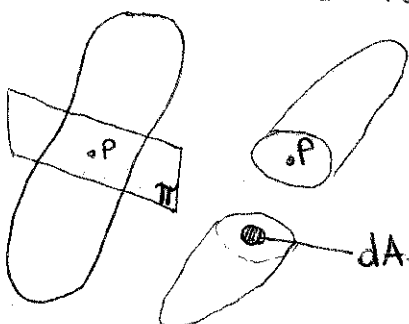
STATO DI TENSIONE

UN CORPO SOTTOPOSTO A UN CARICO È IN UNO STATO DI TENSIONE.

CONOSCERE LO STATO DI TENSIONE DI UN CORPO

SIGNIFICA CONOSCERE $\hat{\sigma}$ IL TENSORE DI TENSIONE CON LE SUE TRE COMPONENTI.

DOBBIAMO ANDARE A VEDERE ALL'INTERNO DEL CORPO COSA SUCCEDER. ADORA PRENDO IL MIO CORPO E LO TAGLIO CON IL PIANO Π IN DUE PARTI. TAGLIARE SIGNIFICA INDIVIDUARE UN PIANO CIOÈ INDIVIDUARE UN PUNTO P E UNA NORMALE IN P.



P = PUNTO / solo 3 numeri

$$\vec{n} = \text{NORMALE} = n_x \vec{i} + n_y \vec{j} + n_z \vec{k}$$

PRESA LA PICCOLA AREA da MI CHIEDO DA PICCOLA AREA CHE COSA C'È SU DI ESSA PRIMA DEL TAGLIO.

2° MOMENTO STATICO DI PRIMO ORDINE

$$S = \int_A (ax + by) dx dy$$

La dicitura è l'idea di come è distribuita la forma della sezione che stiamo studiando rispetto a un particolare asse di riferimento

S = MOMENTO STATICO

• a e b dipendono da x e y

quando $a=0$ $b=1$

RICAVO IL MOMENTO STATICO RISPETTO ALL'ASSE X S_x

$$S_x = \int_A y dx dy$$

$$S_y = \int_A x dx dy$$

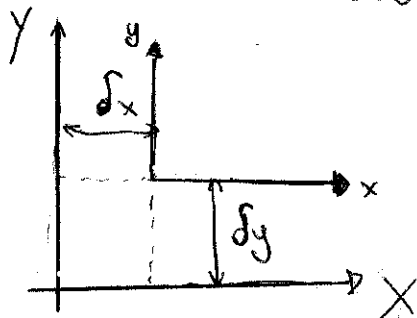
← se $a=1$ e $b=0$ HO IL MOMENTO STATICO RISPETTO ALL'ASSE Y

⊗ I MOMENTI STATICI SONO nulli SE RIFERITI AGLI ASSI BARICENTRALI IL BARICENTRO. LO POSSO SCRIVERE IN GENERALE

$$X_g = \frac{S_y}{A}$$

$$Y_g = \frac{S_x}{A}$$

VEDIAMO LA TRASPOSIZIONE DEI MOMENTI STATICI

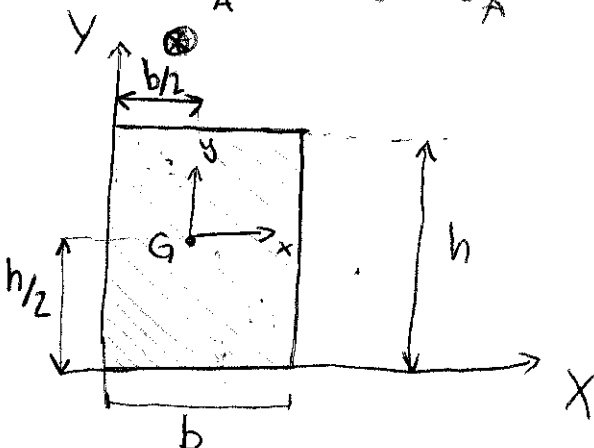


$$Y = y + \delta_y$$

$$X = x + \delta_x$$

$$S_x = \int_A Y dx dy = \int_A (y + \delta_y) dx dy = \int_A y dx dy + \delta_y \int_A dx dy = S_x + \delta_y A$$

$$S_y = \int_A X dx dy = \int_A (x + \delta_x) dx dy = S_y + \delta_x A$$

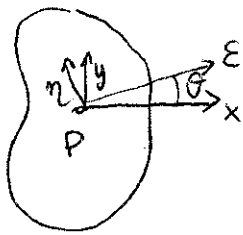


$$S_x = A \frac{h}{2} = \frac{bh^2}{2}$$

$$S_y = A \frac{b}{2} = \frac{hb^2}{2}$$

NEGLI ASSI DIMENSIONALI I MOMENTI STATICI SONO LUNGHEZZE AL CUOBO! ⊗

$$I_{xy} = \int_A (x + \Delta x)(y + \Delta y) dx dy = I_{xy} + \Delta x \Delta y + \Delta x \Delta y + \Delta x \Delta y$$



$\bar{\theta}$ = È L'ANGOLO PER CUI RUOTATI x e y HOGGI ASSI ξ e η CHE SONO GLI ASSI PRINCIPALI DI INERZIA

I_{ξ} I_{η} $I_{\xi\eta}$ = MOMENTO DI INERZIA CENTRIFUGO

UN SISTEMA PRINCIPALE DI INERZIA HA IL MOMENTO CENTRIFUGO NUOVO E I_{ξ} e I_{η} sono uno massimo e uno minimo ⊗

$$\begin{cases} \xi = x \cos \theta + y \sin \theta \\ \eta = -x \sin \theta + y \cos \theta \end{cases}$$

$$I_{\xi} = \int_A \eta^2 d\xi d\eta = \int_A (-x \sin \theta + y \cos \theta)^2 dx dy$$

$$I_{\eta} = \int_A \xi^2 d\xi d\eta = \int_A (x \cos \theta + y \sin \theta)^2 dx dy$$

$$I_{\xi\eta} = \int_A \xi \eta d\xi d\eta$$

LE FORMULE FINALI SONO:

$$I_{\xi} = \frac{1}{2} (I_x + I_y) + \frac{1}{2} (I_x - I_y) \cos 2\theta - I_{xy} \sin 2\theta$$

$$I_{\eta} = \frac{1}{2} (I_x + I_y) - \frac{1}{2} (I_x - I_y) \cos 2\theta + I_{xy} \sin 2\theta$$

$$\left. \frac{dI_{\xi}}{d\theta} \right|_{\theta=\bar{\theta}} = - (I_x - I_y) \sin 2\bar{\theta} - 2 I_{xy} \cos 2\bar{\theta} = 0$$

(IMPONIAMO CHE VOGLIO CHE SIA MAX/MIN ⊗)

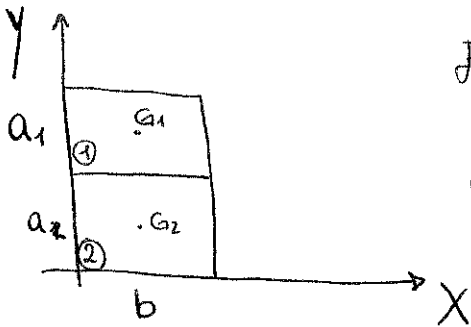
$$\left. \frac{dI_{\eta}}{d\theta} \right|_{\theta=\bar{\theta}} = (I_x - I_y) \sin 2\bar{\theta} + 2 I_{xy} \cos 2\bar{\theta} = 0$$

(SERVE A TROVARE GLI ASSI PRINCIPALI DI INERZIA)

se divido tutto per $\cos 2\bar{\theta}$ ⇒ $\tan 2\bar{\theta} = \frac{-2 I_{xy}}{(I_x - I_y)}$

se sostituisco al $\bar{\theta}$ il valore che ho ricavato Nella I_{xy} viene = 0

ESERCIZIO pag 33 2.1.6



$$\rho_1 = 28 \cdot 10^{-6} \frac{\text{kg}}{\text{mm}^3}$$

$$a_1 = 200 \text{ mm}$$

$$\rho_2 = 7,86 \cdot 10^{-6} \frac{\text{kg}}{\text{mm}^3}$$

$$a_2 = 200 \text{ mm}$$

$$b = 200 \text{ mm}$$

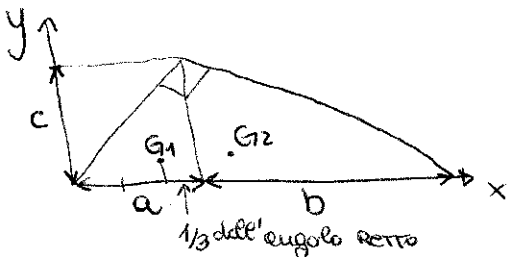
$$A_1 = A_2 = 40'000 \text{ mm}^2$$

$$X_G = \frac{\sum_{i=1}^2 \rho_i X_{Gi} A_i}{\sum_{i=1}^2 \rho_i A_i} = \frac{\rho_1 A_1 \frac{b}{2} + \rho_2 A_2 \frac{b}{2}}{\rho_1 A_1 + \rho_2 A_2} = \frac{A_1 \frac{b}{2} (\rho_1 + \rho_2)}{A_1 (\rho_1 + \rho_2)} = \frac{b}{2}$$

Poiché $A_1 = A_2$

$$y_G = \frac{\sum_{i=1}^2 \rho_i y_{Gi} A_i}{\sum_{i=1}^2 \rho_i A_i} = \frac{\rho_1 A_1 (a_2 + \frac{a_1}{2}) + \rho_2 A_2 (\frac{a_2}{2})}{\rho_1 A_1 + \rho_2 A_2} = \frac{300\rho_1 + 100\rho_2}{\rho_1 + \rho_2} = 152,333 \text{ mm}$$

ES 2.1.7.6 pag 35



$$a = 50 \text{ mm}$$

$$b = 200 \text{ mm}$$

$$c = 300 \text{ mm}$$

$$A_1 = \frac{a \cdot c}{2} = 7500 \text{ mm}^2$$

$$A_2 = \frac{b \cdot c}{2} = 30'000 \text{ mm}^2$$

$$X_{G1} = (a - \frac{a}{3}) = \frac{100}{3} \text{ mm}$$

$$X_{G2} = (a + \frac{b}{3}) = \frac{350}{3} \text{ mm}$$

$$y_{G1} = \frac{c}{3} = 100 \text{ mm}$$

$$y_{G2} = \frac{c}{3} = 100 \text{ mm}$$

$$X_G = \frac{\sum X_{Gi} A_i}{\sum A_i} = \frac{(7500 \cdot \frac{100}{3} + 30000 \cdot \frac{350}{3})}{7500 + 30'000} \text{ mm} = 100 \text{ mm}$$

$$y_G = \frac{\sum y_{Gi} A_i}{\sum A_i} = \frac{y_{G1} A_1 + y_{G2} A_2}{A_1 + A_2} = 100 \text{ mm}$$

$$\begin{aligned}
 X_{G2} &= 30 & X_{G3} &= -75 & X_{G1} &= 135 \\
 Y_{G2} &= 150 & Y_{G3} &= 30 & Y_{G1} &= 270
 \end{aligned}$$

$$S_{X1} = 3'000 \times 270 = 2430'000$$

$$S_{X2} = 18'000 \times 150 = 2700'000$$

$$S_{X3} = 9'000 \times 30 = 270'000$$

$$S_{Y1} = 8'000 \times 135 = 1'215'000$$

$$S_{Y2} = 18'000 \times (-30) = -540'000$$

$$S_{Y3} = 8'000 \times (-75) = -675'000$$

$$S_{XT} = S_{X1} + S_{X2} + S_{X3}$$

$$A_{TOT} = A_1 + A_2 + A_3$$

$$S_{YT} = S_{Y1} + S_{Y2} + S_{Y3}$$

$$X_{G_{TOT}} = \frac{S_{XTOT}}{A_{TOT}}$$

$$Y_{G_{TOT}} = \frac{S_{YTOT}}{A_{TOT}}$$

Similmente, nel caso di un asse X posto ad una distanza d_y da x :

$$S_X = \int_A (y + d_y) dx dy = \int_A y dx dy + d_y \int_A dx dy = S_y + d_y A. \quad (B.11)$$

Nel caso particolare in cui gli assi xy siano *baricentrici*, le formule divengono:

$$S_y = d_x A \quad S_x = d_y A. \quad (B.12)$$

Ad esempio, se si considera una sezione rettangolare (figura B.5) e gli assi XY sono tangenti ai lati, i momenti statici rispetto a tali assi valgono:

$$S_Y = \frac{b}{2} A = \frac{b^2 h}{2} \quad S_X = \frac{h}{2} A = \frac{b^2 h}{2}. \quad (B.13)$$

Le formule qui viste valgono per sistemi continui, ma l'estensione al caso di aree concentrate è immediata e viene lasciata per esercizio al lettore.

B.3 Momenti del secondo ordine

Il generico momento del secondo ordine può essere introdotto mediante la relazione:

$$I = \int_A (ax^2 + by^2 + cxy) dx dy \quad (B.14)$$

dove a, b e c sono in generale funzione del punto sulla sezione. I *momenti di inerzia puramente geometrici*, rispetto agli assi x e y si definiscono ponendo $a = c = 0$; $b = 1$ e $b = c = 0$; $a = 1$ rispettivamente. Si ha allora:

$$I_x = \int_A y^2 dx dy \quad I_y = \int_A x^2 dx dy. \quad (B.15)$$

Questi rappresentano grandezze sempre positive.

Nel caso in cui si abbia $a = b = 0$; $c = 1$ si parla di *momento centrifugo*:

$$I_{xy} = \int_A xy dx dy \quad (B.16)$$

che può essere invece positivo, negativo o nullo.

Ponendo infine $a = b = 1$; $c = 0$ si definisce il *momento di inerzia polare* rispetto all'origine P del sistema di riferimento:

$$I_P = \int_A (x^2 + y^2) dx dy = I_x + I_y \quad (B.17)$$

Delle grandezze correlate ai momenti d'inerzia sono i *raggi d'inerzia*, definiti secondo la seguenti relazioni:

$$\rho_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \quad \rho_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}. \quad (B.18)$$

Tali grandezze possono essere interpretate come la misura della distribuzione media dell'area attorno l'asse considerato.

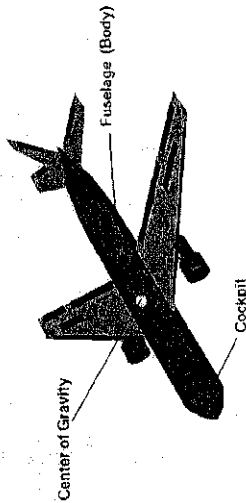


Figura B.3: Baricentro, caso tridimensionale.

B.2 Momenti del primo ordine

Dato un sistema di riferimento ortogonale xy , il generico momento del primo ordine si definisce nel modo seguente:

$$S = \int_A (ax + by) dx dy, \quad (B.6)$$

dove $a = a(x, y)$ e $b = b(x, y)$ sono due proprietà del materiale nel punto. Si discutono di seguito alcuni casi particolari.

Ponendo $a = 0$ e $b = 1$ si definisce il *momento statico rispetto all'asse x* :

$$S_x = \int_A y dx dy. \quad (B.7)$$

In maniera analoga, ponendo $a = 1$ e $b = 0$ si definisce il *momento statico rispetto all'asse y* :

$$S_y = \int_A x dx dy. \quad (B.8)$$

Osservando le formule che permettono la determinazione delle coordinate del baricentro, si deduce immediatamente:

$$x_G = \frac{S_y}{A} \quad y_G = \frac{S_x}{A}. \quad (B.9)$$

Si comprende facilmente dalla relazione precedente che se si assume un riferimento *baricentrico* i momenti statici valutati rispetto ad esso sono *nulli*. Infatti in tale sistema x_G e y_G sono nulli.

Nota S_y , si immagini di voler ricavare il momento S_y rispetto ad un asse Y parallelo a y e posto ad una distanza d_x da esso. Dalla definizione di momento statico, si ha:

$$S_y = \int_A X dx dy = \int_A (x + d_x) dx dy = \int_A x dx dy + d_x \int_A dx dy = S_y + d_x A. \quad (B.10)$$

Il momento polare può ricavarsi anch'esso per differenza¹:

$$I_{1P} = \int_{A_1} \int_{A_1} r^2 dx dy = \int_0^{R_1} \int_0^{2\pi} r^2 dr d\theta = \int_0^{R_1} r^3 \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) dr = 2\pi \int_0^{R_1} r^3 dr = \frac{\pi R_1^4}{2}$$

$$I_{2P} = \int_{A_2} \int_{A_2} r^2 dx dy = \int_0^{R_2} \int_0^{2\pi} r^2 dr d\theta = \int_0^{R_2} r^3 \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) dr = 2\pi \int_0^{R_2} r^3 dr = \frac{\pi R_2^4}{2}$$

ottenendo:

$$I_G = \frac{\pi (R_1^4 - R_2^4)}{2}$$

Atto approssimato. Si immagini di concentrare l'area dell'anello attorno ad una circonferenza di raggio $R_m = \frac{R_1 + R_2}{2}$, il momento di inerzia polare sarebbe pari semplicemente al prodotto di detta area per il quadrato della distanza R_m dal polo P. Traducendo questo in formule si avrebbe:

$$I_P = [2\pi R_m \cdot (R_1 - R_2)] R_m^2 = \frac{\pi}{4} (R_1 + R_2)^3 (R_1 - R_2)$$

Questa espressione è approssimata ma si avvicina alla soluzione esatta se i raggi R_1 ed R_2 tendono a coincidere. Analiticamente ciò è dimostrabile calcolando il limite del rapporto tra il momento di inerzia polare calcolato in modo esatto e approssimato. Si ha:

$$\lim_{R_1 \rightarrow R_2} \frac{I_{P, \text{esatto}}}{I_{P, \text{appross}}} = \lim_{R_1 \rightarrow R_2} \frac{\frac{\pi}{2} (R_1^4 - R_2^4)}{R_1 - R_2 \cdot \frac{\pi}{4} (R_1 + R_2)^3 (R_1 - R_2)} = 1$$

Dunque i due valori tendono a coincidere se i due raggi tendono ad essere uguali.

Esempio 3: sezione triangolare

Considerando un sistema di riferimento con assi X ed Y coincidenti con i cateti del triangolo, come riportato in figura B.7, la posizione del baricentro risulta essere:

$$\begin{aligned} X_G &= \frac{S_y}{A} = \frac{1}{A} \int_0^b \int_0^{h-\frac{b}{h}X} X dY dX = \frac{1}{A} \int_0^b X \left(\int_0^{h-\frac{b}{h}X} dY \right) dX = \frac{1}{A} \int_0^b X \left(h - \frac{b}{h}X \right) dX = \\ &= \frac{2}{bh} \frac{hb^2}{6} = \frac{b}{3} \end{aligned}$$

¹ Questa operazione è possibile in quanto il momento polare altro non è che un integrale. Pertanto si può usare la nota proprietà $\int f(x, y) dx dy = \int \int f(x, y) dx dy - \int \int f(x, y) dx dy$. Dove $D = D_1 - D_2 \in D_1, D_2$ sono regioni del piano.

Esempio 2: sezione circolare cava

Si assumano come assi x, y quelli baricentrici (figura B.6). Per comodità, conviene calcolare il momento di inerzia della sezione considerata piena:

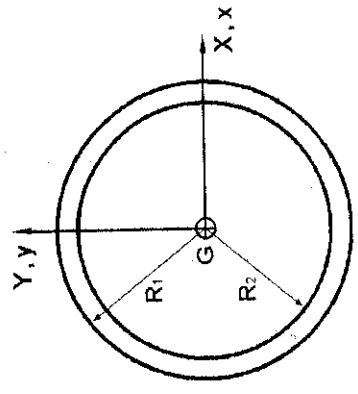


Figura B.6: Sezione circolare cava

$$\begin{aligned} I_{1x} &= \int_{A_1} \int_{A_1} y^2 dx dy = \int_0^{R_1} \int_0^{2\pi} (r \sin \vartheta)^2 r dr d\vartheta = \int_0^{R_1} r^3 \left(\int_0^{2\pi} \sin^2 \vartheta d\vartheta \right) dr = \\ &= \frac{R_1^4}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2 \vartheta d\vartheta = \frac{\pi R_1^4}{4} \end{aligned}$$

e sottrarre il momento di inerzia del cerchio interno:

$$\begin{aligned} I_{2x} &= \int_{A_2} \int_{A_2} y^2 dx dy = \int_0^{R_2} \int_0^{2\pi} (r \sin \vartheta)^2 r dr d\vartheta = \int_0^{R_2} r^3 \left(\int_0^{2\pi} \sin^2 \vartheta d\vartheta \right) d\vartheta = \\ &= \frac{R_2^4}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2 \vartheta d\vartheta = \frac{\pi R_2^4}{4} \end{aligned}$$

Ottenendo:

$$I_x = I_{1x} - I_{2x} = \frac{\pi (R_1^4 - R_2^4)}{4}$$

Similmente si ragiona per il momento lungo y. Osservando però che la sezione presenta delle simmetrie e che si possono scambiare i ruoli degli assi x, y si deduce immediatamente che $I_x = I_y$. È inoltre $I_{xy} = 0$. Si comprende allora che in una sezione circolare (piena o cava) qualunque coppia di assi ortogonali baricentrici è principale.

quella in essa riportata. Si calcolano ora i momenti di inerzia e centrifugo. Si ha:

$$I_x = 2 \left(\frac{4a \cdot a^3}{12} + 4a \cdot a \left(6a + \frac{a}{2}\right)^2 \right) + \frac{2a \cdot (14a)^3}{12} = 796a^4$$

$$I_y = 2 \left(\frac{a \cdot (4a)^3}{12} + a \cdot 4a (3a)^2 \right) + \frac{14a \cdot (2a)^3}{12} = 92a^4$$

$$I_{xy} = 4a \cdot a \cdot (-3a) \left(6a + \frac{a}{2}\right) + 4a \cdot a (3a) \left[-\left(6a + \frac{a}{2}\right)\right] = -156a^4$$

Quest'ultima espressione è stata ricavata tenendo presente che i momenti centrifughi dei tre rettangoli sono nulli rispetto ai loro assi baricentrici paralleli agli assi x, y . In altre parole, il solo contributo non nullo è dato dal trasporto dei rettangoli 1 e 3. È ora possibile calcolare i momenti rispetto agli assi centrali di inerzia ξ, η usando le formule viste. Si ha:

$$\tan 2\vartheta = \frac{2I_{xy}}{(I_x - I_y)} = \frac{2(-156a^4)}{796a^4 - 92a^4} = \frac{39}{88} = .44318 \Rightarrow \vartheta = 11^{\circ}57'$$

$$I_\xi = \frac{1}{2}(I_x + I_y) + \frac{1}{2}\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2} = \frac{1}{2}(796a^4 + 92a^4) + \frac{1}{2}\sqrt{(796a^4 - 92a^4)^2 + 4(-156a^4)^2} = 829.02a^4$$

$$I_\eta = \frac{1}{2}(I_x + I_y) - \frac{1}{2}\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2} = \frac{1}{2}(796a^4 + 92a^4) - \frac{1}{2}\sqrt{(796a^4 - 92a^4)^2 + 4(-156a^4)^2} = 58.981a^4$$

In alternativa a queste ultime espressioni è possibile utilizzare le seguenti:

$$I_\xi = I_y \sin^2 \vartheta + I_x \cos^2 \vartheta - 2I_{xy} \sin \vartheta \cos \vartheta$$

$$I_\eta = I_y \cos^2 \vartheta + I_x \sin^2 \vartheta + 2I_{xy} \sin \vartheta \cos \vartheta$$

che forniscono ovviamente lo stesso risultato.

B.1.6 Esempio 6: sezione con tre correnti

Si consideri la sezione di figura B.11. Per semplificare i calcoli conviene utilizzare la seguente

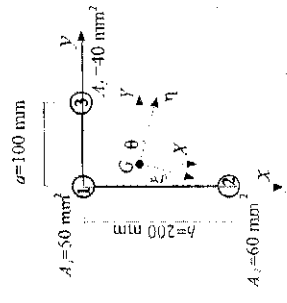


Figura B.11: Sezione a tre correnti.

tabella.

Calcolo approssimato. Si schematizzi la sezione concentrando le aree dei rettangoli 1 e 3 nei rispettivi baricentri (figura B.9). Il momento di inerzia sarà:

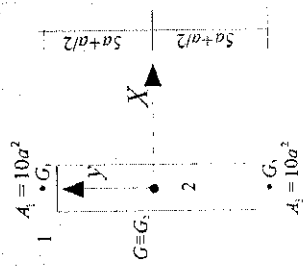


Figura B.9: Sezione ad I con aree 1 e 3 concentrate.

$$I_x = I_{1x} + I_{2x} + I_{3x}$$

$$I_{1x} = I_{3x} = 10a^2 \left(5a + \frac{a}{2}\right)^2; I_{2x} = \frac{2a \cdot (10a)^3}{12}$$

Semplificando l'espressione si ottiene il valore approssimato $I_x = \frac{2315}{3}a^4$ molto vicino a quello esatto prima ottenuto.

B.1.5 Esempio 5: sezione a Z

Si consideri la sezione di figura B.10. È facile verificare che la posizione del baricentro è

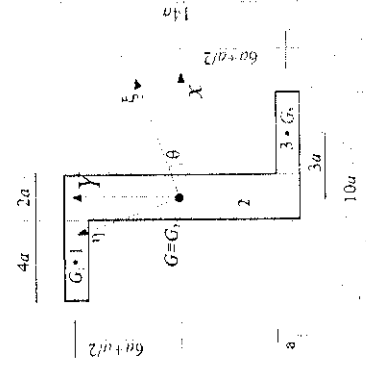


Figura B.10: Sezione a Z.

Si ha dunque:

$$I_x = \sum_{i=1}^{i=8} I_{x_i} = 2781500 \text{ mm}^4$$

$$I_y = \sum_{i=1}^{i=8} I_{y_i} = 3364000 \text{ mm}^4$$

$$I_{xy} = \sum_{i=1}^{i=8} I_{x_i y_i} = 2592000 \text{ mm}^4$$

I momenti d'inerzia riferiti agli assi baricentrici X, Y sono facilmente calcolabili utilizzando la formula di trasposizione:

$$I_X = I_x - y_G^2 \sum_{i=1}^{i=8} A_i = 2781500 - 530 \left(\frac{36700}{530} \right)^2 = 240198.1132 \text{ mm}^4$$

$$I_Y = I_y - x_G^2 \sum_{i=1}^{i=8} A_i = 3364000 - 530 \left(\frac{37400}{530} \right)^2 = 724830.1887 \text{ mm}^4$$

$$I_{XY} = I_{xy} - x_G y_G \sum_{i=1}^{i=8} A_i = 2592000 - 530 \left(\frac{37400}{530} \right) \left(\frac{36700}{530} \right) = 2226.4 \text{ mm}^4$$

I valori riferiti alla **terna centrale d'inerzia**, sono:

$$I_\xi = \frac{1}{2} (I_X + I_Y) - \frac{1}{2} \sqrt{(I_X - I_Y)^2 + 4I_{XY}^2} = 240187.8851 \text{ mm}^4$$

$$I_\eta = \frac{1}{2} (I_X + I_Y) + \frac{1}{2} \sqrt{(I_X - I_Y)^2 + 4I_{XY}^2} = 724840.4167 \text{ mm}^4$$

Menure l'angolo di rotazione vale:

$$\vartheta = \frac{1}{2} \arctan \left(-\frac{2I_{XY}}{I_X - I_Y} \right) \Rightarrow \vartheta = 0^\circ 15' 48''$$

E.3. Esempio 3: sezione non omogenea

Si consideri una sezione rettangolare costituita da due materiali come riportato in figura B.13. Il baricentro dovrà ora essere calcolato tenendo presente le diverse densità ρ dei materiali. Si ha:

$$x_G = \frac{\int x \rho(x, y) dx dy}{\int \rho(x, y) dx dy}; \quad y_G = \frac{\int y \rho(x, y) dx dy}{\int \rho(x, y) dx dy}$$

Le espressioni precedenti sono state ricavate usando le relazioni B.3. In generale, la densità del materiale è una funzione variabile da punto a punto e dunque è una funzione di x, y . Nel caso in esame, la sezione è costituita da due materiali omogenei, differenti. Pertanto la densità è costante nelle porzioni di sezione in cui si ha lo stesso materiale. Questa è la ragione per cui può essere portata fuori dagli integrali. In base a quanto qui detto, si può scrivere:

$$x_G = \frac{\int_{A_1} \rho_1 x dx dy + \int_{A_2} \rho_2 x dx dy}{\int_{A_1} \rho_1 dx dy + \int_{A_2} \rho_2 dx dy} = \frac{\rho_1 \int_{A_1} x dx dy + \rho_2 \int_{A_2} x dx dy}{\rho_1 \int_{A_1} dx dy + \rho_2 \int_{A_2} dx dy} = \frac{\rho_1 \int_{A_1} x dx dy + \rho_2 \int_{A_2} x dx dy}{\rho_1 A_1 + \rho_2 A_2}$$

$$y_G = \frac{\int_{A_1} \rho_1 y dx dy + \int_{A_2} \rho_2 y dx dy}{\int_{A_1} \rho_1 dx dy + \int_{A_2} \rho_2 dx dy} = \frac{\rho_1 \int_{A_1} y dx dy + \rho_2 \int_{A_2} y dx dy}{\rho_1 A_1 + \rho_2 A_2}$$

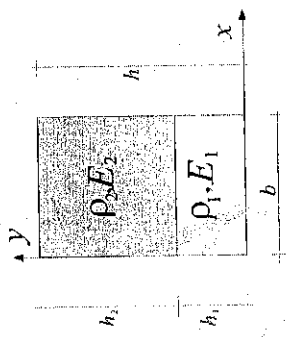


Figura B.13. Cassone alare.

Dunque:

$$x_G = \frac{\rho_1 \int_0^{h_1} \int_0^b x dx dy + \rho_2 \int_0^{h_2} \int_0^b x dx dy}{\rho_1 \int_0^{h_1} \int_0^b dx dy + \rho_2 \int_0^{h_2} \int_0^b dx dy} = \frac{\frac{\rho_1}{2} h_1 b + \frac{\rho_2}{2} h_2 b}{\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2} = \frac{b}{2}$$

$$y_G = \frac{\rho_1 \int_0^{h_1} \int_0^b y dx dy + \rho_2 \int_0^{h_2} \int_0^b y dx dy}{\rho_1 \int_0^{h_1} \int_0^b dx dy + \rho_2 \int_0^{h_2} \int_0^b dx dy} = \frac{\frac{1}{2} \rho_1 h_1^2 + \frac{1}{2} \rho_2 (h_1^2 + h_2^2)}{\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2}$$

L'ascissa del baricentro rispetta le condizioni di simmetria (la sezione presenta un asse di simmetria) ma l'ordinata è funzione delle densità dei materiali. Si osservi inoltre che vale la relazione:

$$\lim_{h_1 \rightarrow 0} y_G = \lim_{h_2 \rightarrow 0} y_G = \lim_{\rho_1 \rightarrow \rho_2} y_G = \frac{h}{2}$$

Se la sezione tende ad essere omogenea o se una delle due parti tende ad essere piccolissima, si ritrova il valore noto per la sezione rettangolare.

Si supponga ora di voler calcolare la quantità EI_x e EI_y (l'importanza di tali espressioni sarà chiara nel seguito). Se la sezione fosse omogenea, la cosa sarebbe banale. Nel caso in esame, bisogna distinguere i due differenti contributi. Si ha, supponendo i moduli elastici dei due materiali costanti:

$$EI_x = \int_{A_1} E_1 y^2 dx dy + \int_{A_2} E_2 y^2 dx dy = E_1 \int_0^{h_1} \int_0^b y^2 dy dx + E_2 \int_0^{h_2} \int_0^b y^2 dy dx$$

$$EI_y = \int_{A_1} E_1 x^2 dx dy + \int_{A_2} E_2 x^2 dx dy = E_1 \int_0^{h_1} \int_0^b x^2 dx dy + E_2 \int_0^{h_2} \int_0^b x^2 dx dy$$

E svolgendo i calcoli:

$$EI_x = b E_1 \frac{h_1^3}{3} + b E_2 \frac{(h_1^3 + h_2^3)}{3}; \quad EI_y = E_1 h_1 \frac{b^3}{3} + E_2 (h - h_1) \frac{b^3}{3}$$

Con semplice passaggio al limite si dimostra che le due formule ricavate coincidono con le classiche relazioni per il rettangolo nel caso di sezione omogenea o nel caso di in cui una delle due parti tenda ad essere piccolissima.

LEZIONE 13-03-2012 STATO DI TENSIONE

STATO di TENSIONE IN UN PUNTO.

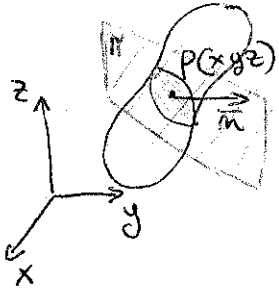
PRENDIAMO UN GENERICO CORPO TRIDIMENSIONALE AL CUI INTERNO HO UN QUALSIASI PUNTO $P(x,y,z)$. IL CORPO È VINCOLATO E CARICATO IN UN MODO QUALSIASI.

QUESTO PROBLEMA È GENERALE E IN QUESTO MODO PRENDEREMO LE EQUAZIONI COME VALDE IN MODO GENERICO.

PRENDIAMO UNA DIREZIONE NORMALE \bar{m} e QUINDI IDENTIFICO UN PIANO DI TAGLIO.

IL CORPO VIENE AVVINTATO IN DIREZIONE \perp a \bar{m} VADO A SCEGLIERE UN' AREA dA IDENTIFICATA DA 3 INFORMAZIONI m_x, m_y, m_z

SULL' AREA AGISCE UNA FORZA ELEMENTARE $d\bar{F}$



$$d\bar{F} = dF_x \bar{i} + dF_y \bar{j} + dF_z \bar{k}$$

PER SCRIVERE LO S.D.T HO $3 \times 3 = 9$ COMPONENTI, cioè NOVE INFORMAZIONI.

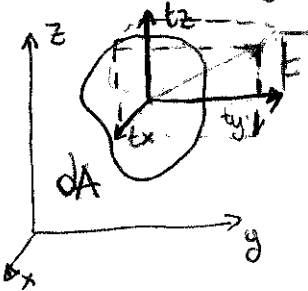
ECCO CHE INTRODUCIAMO IL VEETTORE DI TENSIONE \bar{t} che è DATO da:

$$\bar{t} = \frac{d\bar{F}}{dA}$$

È UNA FORZA PER UNITÀ di SUPERFICIE

(ed è diverso dal concetto di pressione) con $\left[\frac{N}{m^2} = Pa \right]$

IL VETTORE di TENSIONE AVrà IN GENERALE 3 componenti



$$\bar{t}_{dA} = t_x \bar{i} + t_y \bar{j} + t_z \bar{k}$$

È UNICO x ogni NORMALE

ECCO CHE SCRIVO IL VETTORE TENSIONE come \bar{t}_{dA}

che dipende dal PIANO con cui taglio il corpo e quindi da dA .

NORMALMENTE \bar{t} viene anche scritto in un altro modo \bar{t} è scritto in UN SISTEMA LOCALE

$$\bar{t}_m = t_n \bar{m}$$

e \bar{i} e \bar{j} sono nel PIANO π

↳ CHIAMO LA COMPONENTE di t PARALLELA AL VETTORE NORMALE A dA t_m

$$\bar{t}_{dA} = \tau_1 \bar{i} + \tau_2 \bar{j} + \sigma_m \bar{m}$$

TENSIONI di TAGLIO

TENSIONE NORMALE
DI COMPRESSIONE

o di TRAZIONE tende ad ALLONTANARE o VICINARE LE REE

$$\begin{aligned} \vec{E}_{dA_z} &= \tau_{zx} \vec{i} + \tau_{zy} \vec{j} + \sigma_{zz} \vec{k} \\ \vec{E}_{dA_y} &= \tau_{yx} \vec{i} + \sigma_{yy} \vec{j} + \tau_{yz} \vec{k} \\ \vec{E}_{dA_x} &= \sigma_{xx} \vec{i} + \tau_{xy} \vec{j} + \tau_{xz} \vec{k} \end{aligned}$$

pedici uguali individuano le componenti normali, pedici diversi le componenti tangenziali o di taglio.

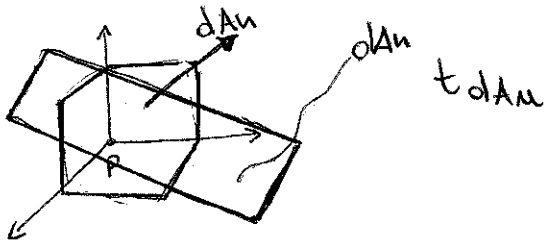
METTIAMO QUESTE NOSTRE COMPONENTI IN UNA TABELLA
 * NON PARLIAMO DI MATRICE PERCHÉ NON GODE DI TUTTE LE PROPRIETÀ DELLE MATRICI !!
 * È ANCHE DETTO TENSORE DELLO STATO DI TENSIONE (CARATTERISTICO DEL PUNTO P)

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \hat{\sigma}$$

TENSORE DEGLI SFORZI

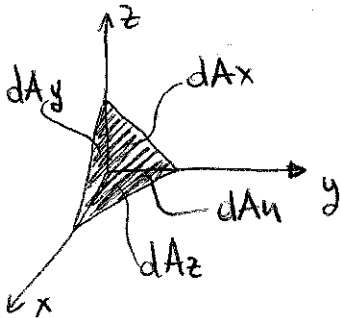
↳ $d^2 = 9$ componenti
 TENSORE DI ORDINE 2.

NOTO IL TENSORE DEGLI SFORZI SE PRENDO UNA QUALSIASI DIREZIONE CONOSCO IL SUO VETTORE DI TENSIONE.



le componenti di $\hat{\sigma}$ sono dette COMPONENTI SPECIALI DI TENSIONE.

CONSIDERO UNA STRUTTURA IN UNA CONDIZIONE DI EQUILIBRIO. SCELGO UN PRISMA CON LE TRE AUREOLE INFINITESIME.



dA sono infinitesime.

IL MIO CORPO HA UN V VOLUME E POSSO SCRIVERMI DELLE EQUAZIONI DI EQUILIBRIO E RICAVARE IL VETTORE DI TENSIONE \vec{t}_{dA_n}

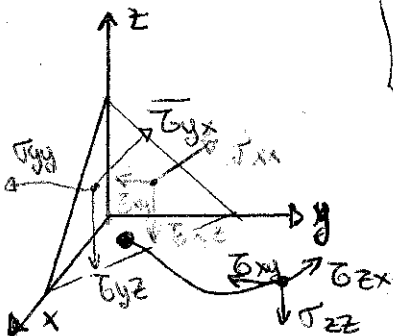
$$\vec{t}_{dA_n} = t_x \vec{i} + t_y \vec{j} + t_z \vec{k}$$

SUL MIO CORPO POSSO SCRIVERE LE EQUAZIONI CARDINALI DELLA STATICA.

CONVENZIONE UNIVERSALE DI SEGNO:

le tensioni sono positive quando sono uscenti dalla faccia del solido e negative quando sono entranti in esso.

Il primo pedice indica la direzione che individua il piano ortogonale all'asse elementare.
 Il secondo pedice individua la direzione lungo cui spira la componente del vettore di tensione.



CALCOLO DEI MOMENTI D'INERZIA ASSIAU

$$I_x = I_{1x} + I_{2x}$$

$$I_y = I_{1y} + I_{2y}$$

USO IL TEOREMA DEL TRASPORTO

$$I_{1x} = I_{1x_1} + A_1 y_{G1x}^2$$

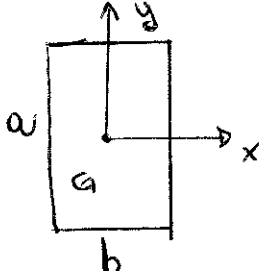
$$I_{2x} = I_{2x_2} + A_2 y_{G2x}^2$$

$$I_{1y} = I_{1y_1} + A_1 x_{G1y}^2$$

$$I_{2y} = I_{2y_2} + A_2 x_{G2y}^2$$

MOMENTO DI INERZIA PROPRIO DI CIASCUNA AREA ASSIAU RISPETTO AI PROPRI ASSI BARICENTRICI.

SE HO UN RETTANGOLO



$$I_x = \frac{1}{12} b \cdot a^3$$

$$I_y = \frac{1}{12} a b^3$$

$$I_{1x_1} = \frac{1}{12} b_1 a_1^3$$

$$I_{2x_2} = \frac{1}{12} b_2 a_2^3$$

$$I_{1y_1} = \frac{1}{12} a_1 b_1^3$$

$$I_{2y_2} = \frac{1}{12} a_2 b_2^3$$

CALCOLO LE DISTANZE DAGLI ASSI $x_1 y_1$ e $x_2 y_2$ A $x y$

$$y_{G1x} = \left(a_2 + \frac{a_1}{2} \right) - y_G$$

$$y_{G2x} = \left(\frac{a_2}{2} - y_G \right)$$

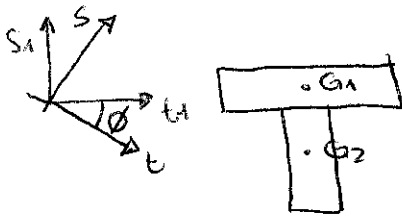
$$x_{G1x} = \frac{b_1}{2} - x_G$$

$$x_{G2x} = \frac{b_2}{2} - x_G$$

SOSTITUISCO E RICOVO I MOMENTI DI INERZIA CHE CERCAVO

$$I_{1x} = \frac{1}{12} b_1 a_1^3 + a_1 b_1 \left[\left(a_2 + \frac{a_1}{2} \right) - y_G \right]^2$$

$$I_{2x} = \frac{1}{12} b_2 a_2^3 + a_2 b_2 \left[\frac{a_2}{2} - y_G \right]^2$$



CALCOLO PRIMA I MOMENTI RISPETTO (s_1, t_1) e POI LI TRASLO RISPETTO AL SISTEMA (s, t) DELL'ANGOLO ϕ

$$I_{t_1} = I_x + A (y_{Gt_1})^2$$

$$I_{s_1} = I_y + A (x_{Gs_1})^2$$

$$I_{t_1 s_1} = I_{xy} + A y_{Gt_1} x_{Gs_1}$$

RICORDO LE FORMULE B.24 DELLA DISPENSA

$$I_t = I_{t_1} \cos^2 \phi + I_{s_1} \sin^2 \phi - 2 I_{t_1 s_1} \sin \phi \cos \phi$$

$$I_s = I_{s_1} \cos^2 \phi + I_{t_1} \sin^2 \phi + 2 I_{t_1 s_1} \sin \phi \cos \phi$$

$$I_{st} = I_{t_1} \sin \phi \cos \phi - I_{s_1} \sin \phi \cos \phi + I_{t_1 s_1} (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi)$$

$$\phi = 45^\circ$$

$$y_{Gt_1} = 50 \text{ mm}$$

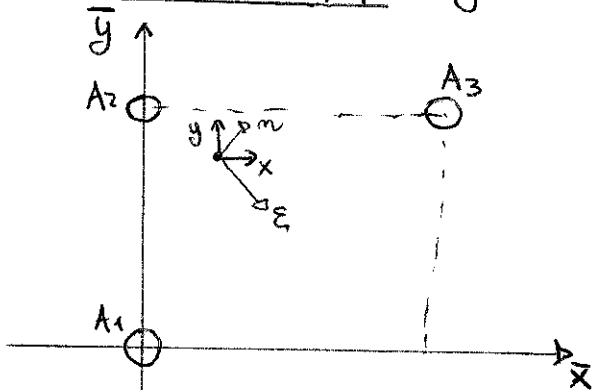
$$x_{Gs_1} = 80 \text{ mm}$$

$$I_{t_1} = (38'869'3182 + 33000 \cdot 50^2) \text{ mm}^4 = 47'119'3182 \text{ mm}^4$$

$$I_{s_1} = (11'790'0000 + 33000 \cdot 80^2) \text{ mm}^4 = 329'100'0000 \text{ mm}^4$$

$$I_{t_1 s_1} = (33000 \cdot 50 \cdot 80) \text{ mm}^4 = 132'000'0000 \text{ mm}^4$$

ESERCIZIO 2.2.4.1 pag 62



	AREA	\bar{x}	\bar{y}
1	100	0	0
2	100	0	300
3	100	300	300

CALCOLARE:

- 1) BARICENTRO
- 2) MOMENTI DI INERZIA ASSIALE e CENTRIFUGO RISPETTO
- 3) AL BARICENTRO e poi RISPETTO \bar{x} e \bar{y}

3) DETERMINARE GLI ASSI PRINCIPALI D'INERZIA (θ) RISPETTO A G
RISPETTO AL BARICENTRO

$$\theta = \frac{1}{2} \text{ARCCOTG} \left(- \frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} \right) = 0,758 \text{ rad}$$

I_ξ I_η $I_{\xi\eta}$ \rightarrow SONO CENTRATI DOVE VOGLIO, SE SONO CENTRATI NEL BARICENTRO DEL SISTEMA AVRÒ I MOMENTI CENTRALI DI INERZIA e I_ξ e I_η SARANNO IL MOMENTO DI INERZIA MINIMO E MASSIMO ASSOLUTI

$$I_\xi = \frac{1}{2} (I_x + I_y) + \frac{1}{2} (I_x - I_y) \cos 2\theta - I_{xy} \sin 2\theta$$

$$I_\eta = \frac{1}{2} (I_x + I_y) - \frac{1}{2} (I_x - I_y) \cos 2\theta + I_{xy} \sin 2\theta$$

$$2 \sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta$$

$$(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = \cos 2\theta$$

$$I_{\xi\eta} = \frac{1}{2} (I_x - I_y) \sin 2\theta + I_{xy} \cos 2\theta = 0$$

$$I_\xi = 9 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\theta = - \frac{\pi}{4}$$

$$I_\eta = 3 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

QUESTO SIGNIFICA CHE POSSO SCRIVERE $\hat{\sigma}$ COME:

$$\hat{\sigma} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

QUESTE SONO LE TENSIONI PRINCIPALI ($\lambda_1 = \sigma_{11}$; $\lambda_2 = \sigma_{22}$; $\lambda_3 = \sigma_{33}$)

CALCOLANDO IL DETERMINANTE DI $\hat{\sigma}$ OTTENGO IL POLINOMIO CARATTERISTICO con soluzioni $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$

$$\det \begin{vmatrix} \sigma_{xx} - \lambda & \sigma_{xy} & \sigma_z \\ \sigma_{yz} & \sigma_{yy} - \lambda & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} - \lambda \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \lambda_1 = \sigma_{11} \\ \lambda_2 = \sigma_{22} \\ \lambda_3 = \sigma_{33} \end{matrix}$$

OTTENGO QUELLA CHE VIENE ANCHE DETTA EQUAZIONE SECOLARE

$$-\lambda^3 + I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda + I_3 = 0$$

dove $I_1 I_2 I_3$ sono invarianti cioè non dipendono dal sistema di riferimento iniziale, e sono di 1, 2 e 3 ordine, (in base al grado di λ a cui sono associati) dipendono solo da $P(x,y,z)$

Posso scrivere nel riferimento principale:

$$\begin{cases} I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \\ I_2 = -\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{11}\sigma_{33} - \sigma_{22}\sigma_{33} \\ I_3 = \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} \end{cases}$$

} DIPENDONO DALLE COMPONENTI SPECIFICHE DI $\hat{\sigma}$

LE DIREZIONI PRINCIPALI DIVENTANO IMPORTANTI NEI FENOMENI RIGUARDANTI LE ROTTURE.

• CASI PARTICOLARI DEL TENSORE DEGLI SFORZI

σ_{ij} se $i \neq j$ HO TENSIONI DI TAGLIO

σ_{ij} se $i = j$ HO TENSIONI NORMALI

• CASO TRIDIMENSIONALE se le TRE tensioni PRINCIPALI sono diverse da zero.

• CASO IDROSTATICO

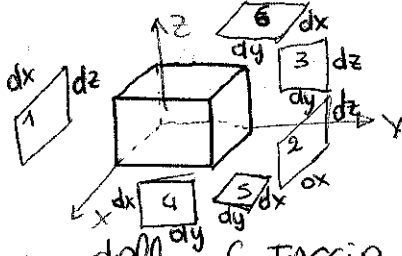
$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{IDR}$$

ho $\sigma_{ij} = 0$ con $i \neq j$
 $\sigma_{ii} = \sigma_{jj}$

$$\Rightarrow \hat{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

Esso è caratteristico dei liquidi, e dei fluidi in assenza di viscosità sono in fatti tutte le componenti di tensioni TAGLIANTI LEGATE
 • ALE AZIONI DI STRISCIAMENTO (UNA SULL'ALTRA DELLE PARTICELLE DEL FLUIDO).

Se δ sono // e PARALLELE AL PIANO xy .

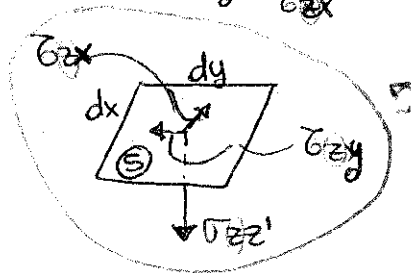
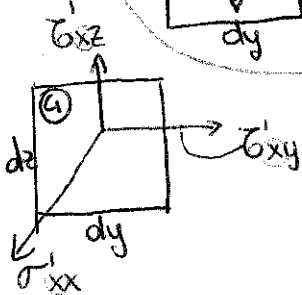
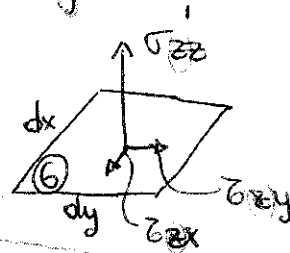
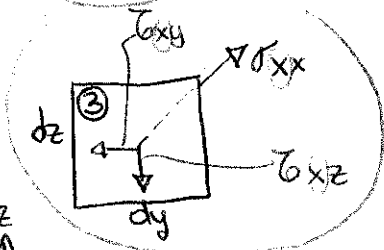
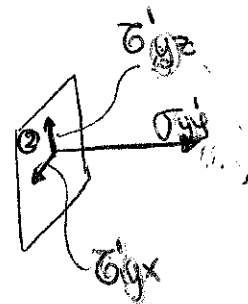
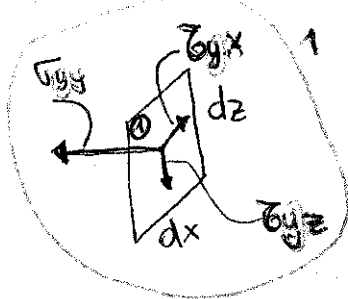


Per ognuna delle 6 FACCIE AVRO' UN VETTORE di TENSIONE t
 Nelle FACCIA 2, 4, 6 HO FACCIE POSITIVE CHE IL RIFERIMENTO
 ESCE SE IL RIFERIMENTO ENTRA SONO FACCIE

(1,3,5)

NEGATIVE. ATTENZIONE CHE NON DEVO GUARDARE LE SINGOLE FACCIE
 MA NEL COMPLESSO!!

σ_{ij} POSITIVE SE SONO USCENTI PER CONVENZIONE!



HO DISEGNATO
 TUTTE LE
 TENSIONI CHE
 AGISCONO
 SULLE FACCIE

→ DIVERGENZE e INERZIALI

SUPPONENDO CHE NON CI SIANO ALTRE FORZE SCRIVIAMO LE SEI
 EQUAZIONI CARDINALI DELLA STATICA.

• TENSIONE LUNGO X: MOLTIPLICO LE COMPONENTI DI TENSIONE DI
 CIASCUNA FACCIA PER LA SUA SUPERFICIE

$$\sigma'_{xx} dy dz + \tau'_{yx} dx dz + \tau'_{zx} dy dx - \sigma_{xx} dy dz - \tau_{yx} dx dz - \tau_{zx} dy dx = 0$$

(4)
(2)
(6)
(3)
(1)
(5)

HO CALCOLATO LE COMPONENTI DELLE FORZE IN DIREZIONE X

Indice

Indice	1
I Equazioni Fondamentali Continui Deformabili	3
1 Introduzione al corpo deformabile	5
1.1 Corpi rigidi e corpi deformabili	5
1.2 Il problema centrale dei corpi deformabili o 'problema elastico'	7
1.3 Definizione e notazioni sul generico corpo deformabile	9
1.4 Configurazione deformata e vettore spostamenti	10
2 Lo stato di tensione	13
2.1 Il vettore tensione	13
2.2 Le nove componenti speciali di tensione	15
2.3 Necessità e sufficienza per la conoscenza dello stato di tensione in un punto	18
2.4 Giaciture principali per le tensioni	20
2.4.1 Invarianti	21
2.5 Forme particolari del tensore degli sforzi	22
2.6 Condizioni di equilibrio per le tensioni: equazioni indefinite di equilibrio	23
2.6.1 Caso stato di tensione uniforme	25
2.6.2 Stato di tensione qualsiasi	26
2.6.3 Equazioni di equilibrio nel caso dinamico	27
2.6.4 Equazioni di equilibrio in presenza di forze di volume	28
2.6.5 Equazioni indefinite di equilibrio: casi mono- e bi-dimensionale	28
2.7 Condizioni di equilibrio sul contorno	29
2.8 Funzioni di tensione	29

FONDAMENTI DI MECCANICA DELLE STRUTTURE

per allievi ingegneri aerospaziali

Erasmus Carrera

Capitolo 1

Introduzione al corpo deformabile

1.1 Corpi rigidi e corpi deformabili

La generica struttura è indicata col termine più generico di 'corpo'. Tale corpo sarà considerato come un 'continuo': non potranno cioè essere presenti al suo interno delle discontinuità, per esempio dovute alla presenza di vuoti.

Un classificazione fondamentale della meccanica è fatta sulla base del comportamento dei corpi. Nella meccanica del corpo rigido le dimensioni relative di punti diversi del corpo si conservano. Nella meccanica dei corpi deformabili, o dei continui deformabili, si tiene in conto della capacità di cambiare forma e volume del corpo in oggetto.

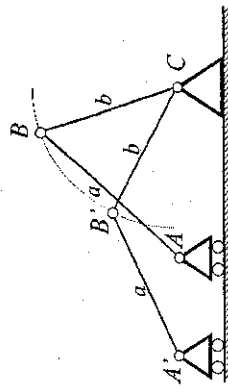


Figura 1.1: Cinematismo con elementi rigidi.

Tutti i materiali conosciuti in natura sono materiali deformabili. Materiali cioè che fanno cambiare forma al corpo quando lo stesso è soggetto ad un forza, ad un sistema di forze o ad una qualunque azione esterna o interna. Ritenerne il corpo rigido è dunque una forzatura, una ipotesi di lavoro, un'assioma. Tale forzatura viene introdotta come ipotesi e permette di risolvere in maniera semplice alcuni problemi la cui risoluzione risulterebbe 'terribilmente' più complicata se il corpo fosse considerato deformabile.

La cinematica e la dinamica di meccanismi sono in genere affrontati considerando i diversi elementi in moto fra loro, come elementi rigidi. Analisi di seconda approssimazione, potrebbero essere condotte per rimuovere l'ipotesi di corpo rigido. La differenza fra questi due

La conoscenza di R permette infatti il dimensionamento della molla stessa.

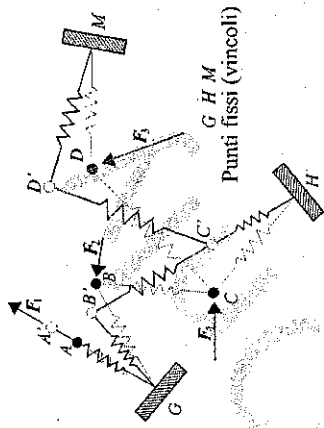


Figura 1.5: Esempio elementare con N molle.

Un corpo reale potrebbe essere pensato come una combinazione più o meno complessa di un numero elevato N di molle che interagiscono fra loro. Note le forze che caricano le diverse molle F_i ($i = 1, N$), e le rigidità delle diverse molle k_i , risolvere il problema elastico significa determinare i valori delle forze interne R_i che agiscono nelle diverse molle e le posizioni dei punti di applicazione delle stesse e di ogni altro estremo della molla (indicate in figura come A', B', C', D').

1.3 Definizione e notazioni sul generico corpo deformabile

Si consideri un corpo

che occupi il volume

dello spazio tridimensionale, con forma e materiale qualsiasi.

Sia x, y, z un sistema di assi cartesiani ortogonali e $P(x, y, z)$ il generico punto appartenente al corpo C .

Sia il corpo C sottoposto ad un assegnato sistema di forze esterne e di vincoli, in condizioni di equilibrio. Le forze esterne potranno essere di natura qualsiasi:

- forze concentrate F_i , applicate in un numero noto di punti $i = 1, N_c$;
- forze distribuite F_i , applicate su un numero noto di linee $l_i = 1, N_l$;
- forze distribuite F_{S_i} , applicate su un numero noto di superfici $S_i = 1, N_S$;
- forze distribuite F_{V_i} , applicate su un numero noto di volumi $V_i = 1, N_V$.

Le zone vincolate potranno interessare

i carichi applicati. Per effettuare tale dimensionamento è essenziale considerare la deformabilità dei corpi stessi e risolvere quello che è spesso riferito come problema elastico. In realtà le equazioni che lo governano sono valide anche per un corpo non elastico. La nomenclatura è pertanto una pura questione di tradizione. Meglio sarebbe dire problema dei continui deformabili.

È questo il problema centrale del calcolo strutturale. Esso può essere enunciato come segue.

Considerato un corpo a comportamento deformabile in una configurazione iniziale, soggetto ad un assegnato sistema di forze e di vincolo (in alcuni punti sono impediti degli spostamenti e/o delle rotazioni), il problema elastico consiste nello stabilire lo stato finale o deformato del corpo stesso.

O con altre parole.

Considerato un qualunque punto iniziale $P(x, y, z)$, in un riferimento cartesiano ortogonale x, y, z , nella configurazione indeformata, risolvere il problema elastico significa determinare la nuova posizione di $P(x, y, z)$, indicata con $P'(x, y, z)$ nella configurazione deformata.

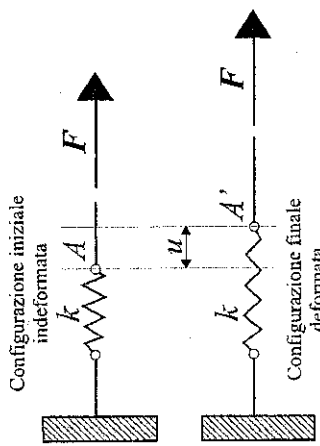


Figura 1.4: Esempio elementare costituito da una molla.

Per introdurre l'argomento si pensi ad una molla lineare di rigidità k . La relazione fra forza applicata F e spostamento u del suo punto di applicazione è

$$u = F / k \tag{1.1}$$

Conoscere lo stato di deformazione della molla significa conoscere lo spostamento u , dunque la posizione del punto A nella configurazione deformata A' .

$$u = \overline{AA'}$$

Dovrà inoltre essere noto il valore della forza interna alla molla:

$$R = F$$

Capitolo 2

Lo stato di tensione

2.1 Il vettore tensione

Si immagini di tagliare il corpo C , descritto nel capitolo precedente, in due parti. Tale taglio sia effettuato lungo un piano π , passante per un punto P ed individuato da una direzione normale a π , tale direzione è qui individuata dal vettore n . Essendo per ipotesi il corpo integro in equilibrio, si può pensare di ripristinare l'equilibrio delle due parti tagliate, introducendo sulle facce tagliate le azioni che sulle stesse erano presenti prima del taglio.

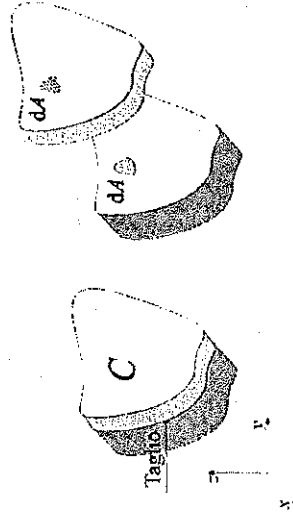


Figura 2.1: Scomposizione del corpo C in due parti.

Prima del taglio, due punti corrispondenti sulle due facce tagliate occupavano la stessa posizione. Tagliare idealmente il materiale in quel punto significa eliminare le azioni che il materiale, per esempio supposto elastico, introduceva in quel punto. Ripristinare l'equilibrio significa andare a mettere sui due punti corrispondenti sulle due facce, le azioni che originariamente il materiale esercitava nella configurazione integra. In conformità al principio di azione e reazione, le due azioni nei due punti corrispondenti sulle sue facce dovranno essere uguali e contrarie.

Si consideri una porzione infinitesima di area dA nell'intorno del punto P , su una delle due

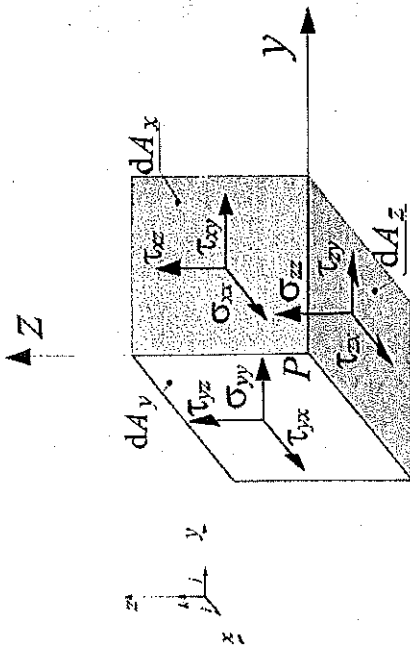


Figura 2.5: *Facce elementari* dA_x , dA_y , dA_z .

1. la giacitura di dA , per esempio attraverso l'indicazione dei *tre* coseni direttori della normale alla dA :

$$n = n_x i + n_y j + n_z k \tag{2.7}$$

2. le *tre* componenti del vettore tensione t_{dA} definito su dA :

$$t_{dA} = t_{xA} i + t_{yA} j + t_{zA} k \tag{2.8}$$

Ci si può domandare se esista una grandezza fisica capace di fornire il vettore tensione t per ogni giacitura dA . Tale grandezza esiste ed è il tensore σ , come si chiarirà in questo e nel prossimo paragrafo.

Si intuisce, infatti, che lo stato di tensione in un punto dipende da 3×3 numeri: è una grandezza fisica rappresentabile da un tensore di ordine 2 e dunque da nove componenti nel caso tridimensionale. Queste componenti sono dette *componenti speciali di tensione*.

All' fine di individuare le nove componenti speciale di tensione si consideri un riferimento cartesiano ortogonale, che per comodità è centrato in P . Su questo riferimento siano introdotte tre facce elementari, ortogonali fra di loro, ed individuate una ad una dalle tre direzioni cartesiane x, y, z . Si indichi con

• dA_x l'areola ortogonale all'asse x ;

• dA_y l'areola ortogonale all'asse y ;

• dA_z l'areola ortogonale all'asse z .

Su ognuna di queste areole elementari sarà definito un vettore tensione, ognuno con tre componenti. Sull' areola dA_x agirà t_{dA_x} , le cui componenti sono indicate con la seguente notazione a doppio pedice:

$$t_{dA_x} = \sigma_{yx} i + \sigma_{zy} j + \sigma_{zx} k. \tag{2.9}$$

In cui:

il primo pedice indica la direzione che individua il piano ortogonale all' areola elementare (in questo caso l'asse x);

il secondo pedice individua la direzione lungo cui spira la componente del vettore tensione (in questo caso le tre direzioni ortogonali).

Quando il pedice si ripete si tratta di componenti normali, pedici diversi indicano componenti tangenziali (o di taglio). La precedente relazione è spesso scritta nella seguente forma:

$$t_{dA_x} = \sigma_{xx} i + \tau_{xy} j + \tau_{xz} k. \tag{2.10}$$

che meglio evidenzia, con un cambio di notazioni le componenti di tensione lungo le normali (schiacciamento, allungamento) rispetto alle componenti taglianti (scorrimento) che agiscono sul piano contenente l' areola dA_x .

Ripetendo quanto sopra per la faccia dA_y , si ha:

$$t_{dA_y} = \sigma_{yx} i + \sigma_{zy} j + \sigma_{zx} k, \tag{2.11}$$

oppure:

$$t_{dA_y} = \tau_{yx} i + \sigma_{yy} j + \tau_{yz} k. \tag{2.12}$$

Ripetendo infine per la faccia dA_z , si ha:

$$t_{dA_z} = \sigma_{zx} i + \sigma_{zy} j + \sigma_{zz} k, \tag{2.13}$$

oppure:

$$t_{dA_z} = \tau_{zx} i + \tau_{zy} j + \sigma_{zz} k. \tag{2.14}$$

Così facendo, nel punto P , sono state introdotte le nove componenti speciali di tensione, che per comodità si riportano nella seguente tabella con tre colonne e tre righe:

$$\hat{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}. \tag{2.15}$$

$\hat{\sigma}$ è detto tensore dello stato di tensione o *tensore degli sforzi* o *tensore caratteristico dello stato di tensione* nel punto P .

Le tensioni normali sono riportate sulla diagonale.

La eq.(2.15) è stata scritta indicando con il simbolo τ le componenti tangenziali. Conservando la notazione σ si avrebbe:

$$\hat{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}. \tag{2.16}$$

In forma trasposta si ha:

$$\hat{\sigma}^T = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}. \tag{2.17}$$

che in forma compatta si scrive

$$t^T = n^T \hat{\sigma} \quad (2.26)$$

La stessa può anche essere scritta nella forma:

$$\begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

che compattata diventa:

$$t = \hat{\sigma}^T n \quad (2.28)$$

Le scritture precedenti stabiliscono in maniera ancora più evidente la necessità e la sufficienza della conoscenza delle nove componenti speciali di tensione al fine di determinare il vettore tensione per ogni giacitura n per il generico punto P .

2.4 Giaciture principali per le tensioni

Ad ogni giacitura n corrisponde una vettore tensione t che da luogo ad una tensione normale e due tensioni tangenziali. Queste varieranno per n che spazza l'angolo sferico in P . Fra le possibili giaciture, per ragioni di continuità, ve ne saranno alcune che godranno di proprietà notevoli. Innanzitutto vi saranno delle direzioni n lungo le quali il vettore tangenziale totale o la tensione normale saranno in grado di estremo, assumeranno cioè i valori massimo o minimo.

In particolare ci si può domandare se esistono delle direzioni n in cui la tensione tangenziale totale sia nulla: arcole sulle quale agisca la sola componente normale di tensione. Dal punto di vista geometrico, la ricerca di queste direzioni equivale ad imporre il parallelismo fra il corrispondente t e la direzione incognita n . Tale parallelismo potrebbe essere espresso nelle due forme:

$$t^T = \lambda n^T, \quad t = \lambda n \quad (2.29)$$

In cui λ è un parametro. Optando per la notazione che fa uso direttamente del tensore $\hat{\sigma}$ e sostituendo nella Eq.(2.26) si ottiene in forma matriciale,

$$\lambda n = n^T \hat{\sigma} \quad (2.30)$$

che può scriversi:

$$n^T (\hat{\sigma} - \lambda I) = 0 \quad (2.31)$$

In forma esplicita:

$$\begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \lambda & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} - \lambda & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} - \lambda \end{bmatrix} = 0 \quad (2.32)$$

È questo un classico problema agli autovalori del terzo ordine, le cui soluzioni si ottengono annullando il determinante associato. In forma esplicita:

$$\begin{vmatrix} \sigma_{xx} - \lambda & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} - \lambda & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (2.33)$$

Le tre soluzioni $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sono dette tensioni principali. Nel riferimento principale il tensore tensione è per definizione diagonale,

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

Gli autovettori, opportunamente normalizzati, individuano invece le tre direzioni principali e sono indicate con i tre versori:

$$n_1 = n_{1x}i + n_{1y}j + n_{1z}k \quad (2.35)$$

$$n_2 = n_{2x}i + n_{2y}j + n_{2z}k \quad (2.36)$$

$$n_3 = n_{3x}i + n_{3y}j + n_{3z}k \quad (2.37)$$

Tali versori individuano una terna ortogonale lungo cui spirano tre vettori tensioni con componenti puramente normali. Si potrebbe verificare che tali direzioni sono anche direzioni in cui le componenti di tensione sono in grado di estremo.

Introducendo la notazione a doppio indice, nella terna centrale 1, 2, 3, le componenti speciale di tensione si scrivono:

$$\sigma_{11} = \lambda_1, \quad \sigma_{22} = \lambda_2, \quad \sigma_{33} = \lambda_3$$

mentre

$$\sigma_{ij} = 0 \quad \text{se } i \neq j.$$

In tabella si ha:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

2.4.1 Invarianti

L'equazione che permette di determinare le tensioni principali λ_1, λ_2 e λ_3 si ottiene scrivendo in maniera esplicita il determinante dell'equazione Eq.(2.33):

$$-\lambda^3 + I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda + I_3 = 0 \quad (2.39)$$

che corrisponde ad una equazione algebrica del terzo ordine nota anche come equazione secolare. I coefficienti di tale equazione dipendono dalle nove componenti speciali di tensione nel punto P :

$$I_1 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} \quad (2.40)$$

$$I_2 = \tau_{xz}^2 + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy} - \sigma_{xx}\sigma_{zz} - \sigma_{yy}\sigma_{zz} \quad (2.41)$$

$$I_3 = \sigma_{xx}(\sigma_{yy}\sigma_{zz} - \tau_{yz}^2) - \tau_{xy}(\tau_{yz}\sigma_{zz} - \tau_{xz}\tau_{xy}) - \tau_{xz}(\tau_{xy}\tau_{yz} - \sigma_{yy}\tau_{xy}) \quad (2.42)$$

Questi sono noti come invarianti del primo, secondo e terzo ordine punto (I_3 corrisponde al determinante di $\hat{\sigma}$). Essi non dipendono dal riferimento x, y, z ma solo dal punto P . L'equazione secolare dovrà essere la stessa per gli infiniti, possibili, riferimenti cartesiani di partenza.

Nei riferimenti principale gli invarianti assumono la forma semplificata:

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \quad (2.43)$$

$$I_2 = -\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{11}\sigma_{33} - \sigma_{22}\sigma_{33} \quad (2.44)$$

$$I_3 = -\sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} \quad (2.45)$$

In assenza di forze di volume (peso o altre forze di campo) ed inerziali (legate ad eventuali accelerazioni delle particelle costituenti il corpo) le tensioni presenti sulle diverse facce dovranno soddisfare le sei equazioni cardinali della statica: la forza risultante in una data direzione dovrà essere nulla così come il momento attorno ad un generico asse.

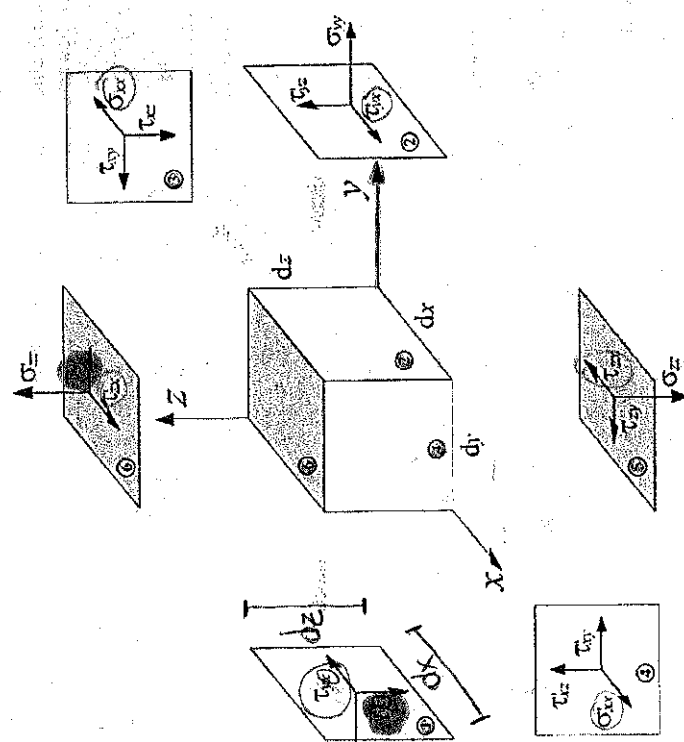


Figura 2.8: Parallelepipedo elementare.

Equazioni di equilibrio alla traslazione. La generica forza elementare sulle sei facce del parallelepipedo di volume:

$$dV = dx dy dz$$

si scrive moltiplicando le componenti di tensione sulla faccia, con la superficie della faccia stessa.

L'equazione di equilibrio alla traslazione lungo la direzione x si scrive:

$$\sigma'_{xx} dy dz + \tau'_{yx} dx dz + \tau'_{zx} dy dx - \sigma_{xx} dy dz - \tau_{yx} dx dz - \tau_{zx} dy dx = 0 \quad (2.51)$$

Equazioni di equilibrio alla rotazione. Scrivendo invece l'equazione di equilibrio alla rotazione lungo l'asse y, si perviene all'equazione:

$$\tau'_{xz} (dxdy) dz - \tau'_{zx} (dxdy) dx - (\sigma'_{xx} - \sigma_{xx}) \frac{dz}{2} dx dy + (\tau'_{yx} - \tau_{yx}) \frac{dx}{2} dz dy - (\sigma'_{zz} - \sigma_{zz}) \frac{dx}{2} dy dz = 0 \quad (2.52)$$

2-6.1 Caso stato di tensione uniforme.

Si consideri per semplicità il caso in cui le tensioni sulle facce 2, 4, 6 siano uguali alle tensioni sulle facce 1, 3, 5, lo stato di tensione è detto costante o uniforme:

$$\sigma'_{ij} = \sigma_j; \quad i, j = x, y, z$$

L'equazione di equilibrio alla traslazione diventa:

$$0 = 0.$$

Allo stesso risultato si perverebbe scrivendo le altre due equazioni di equilibrio alla traslazione scritte lungo le direzioni y e z.

L'equilibrio alla rotazione fornisce invece la seguente condizione:

$$\tau'_{xz} = \tau'_{zx} \quad (2.53)$$

Ragionando similmente per gli assi x e z (o semplicemente permutando gli indici), si ha:

$$\begin{aligned} \tau'_{yz} &= \tau'_{zy} \\ \tau'_{xy} &= \tau'_{yx} \end{aligned} \quad (2.54)$$

Queste uguaglianze possono essere riassunte nell'espressione:

$$\tau'_{ij} = \tau'_{ji} \quad i, j = x, y, z \quad i \neq j \quad (2.55)$$

Essendo per ipotesi lo stato di tensione uniforme, si ha pure:

$$\begin{aligned} \tau'_{xz} &= \tau_{xz} \\ \tau'_{yz} &= \tau_{yz} \\ \tau'_{xy} &= \tau_{yx} \end{aligned} \quad (2.56)$$

Queste uguaglianze possono essere riassunte facilmente dall'espressione:

$$\tau_{ij} = \tau_{ji} \quad i, j = x, y, z \quad i \neq j \quad (2.57)$$

Le relazioni qui trovate, prendono il nome di relazioni di reciprocità o anche Teorema di Cauchy. Le relazioni di reciprocità indicano che per ragioni di equilibrio, due tensioni taglianti concorrenti su due facce ortogonali, dovranno avere lo stesso modulo.

In presenza di forze d'inerzia e di campo si ha:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} = \rho \ddot{u} + g_x \quad (2.82)$$

Nel caso di stato di tensione bidimensionale con

$$\sigma_{ij} = 0, \quad i = x, y, z$$

Le equazioni indefinite di equilibrio diventano:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (2.83)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0 \quad (2.84)$$

In presenza di forze d'inerzia e di campo si ha:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \rho \ddot{u} + g_x \quad (2.85)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = \rho \ddot{v} + g_y \quad (2.86)$$

2.7 Condizioni di equilibrio sul contorno

Le condizioni di equilibrio scritte al paragrafo precedente riguardano il generico punto P all'interno del corpo C . Condizioni di equilibrio devono essere soddisfatte anche nel generico punto P posto sul contorno del corpo C . Ipotizzando che in tale punto agisca una forza di superficie (diretta secondo una normale n) di componenti:

$$f_s = p_x i + p_y j + p_z k, \quad (2.87)$$

per l'equilibrio, nello stesso punto dovrà nascere un vettore tensione t .

$$t = t_x i + t_y j + t_z k, \quad (2.88)$$

uguale e contrario a f_s . Dovranno dunque essere tali da soddisfare le seguenti condizioni.

$$t_x = p_x, \quad t_y = p_y, \quad t_z = p_z \quad (2.89)$$

Sono queste note come *condizioni ai limiti* per le tensioni, pure dette condizioni al contorno di tipo *meccanico*.

2.8 Funzioni di tensione

Le condizioni di equilibrio all'interno del corpo nel caso in cui risultino assenti forze esterne e inerziali possono essere identicamente soddisfatte attraverso l'introduzione di funzioni di tensione.

- dF_i è la forza d'inerzia che agisce sul volume elementare dV , per definizione opposta al moto ed alle accelerazioni \ddot{u}, \ddot{v} e \ddot{w} da esso prodotte;
- ρ indica la massa per unità di volume;
- indica derivazione rispetto al tempo.

Le equazioni indefinite di equilibrio si riscrivano nel caso dinamico come segue:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \rho \ddot{u} \quad (2.71) \quad \text{FORZE X UNITÀ di VOLUME}$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = \rho \ddot{v} \quad (2.72)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \rho \ddot{w} \quad (2.73)$$

2.6.4 Equazioni di equilibrio in presenza di forze di volume

Nel caso in cui all'interno del parallelepipedo elementare siano presenti forze di campo per unità di volume (ad esempio la forza peso) assunte positive se dirette in direzione opposte agli assi cartesiani:

$$g = \frac{dG_V}{dV} = -g_x i - g_y j - g_z k \quad (2.74)$$

Le equazioni indefinite di equilibrio si riscrivono come segue:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = g_x \quad (2.75)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = g_y \quad (2.76)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = g_z \quad (2.77)$$

Nel caso in cui forze di volume si aggiungano a forze d'inerzia si ha:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = g_x + \rho \ddot{u} \quad (2.78)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = g_y + \rho \ddot{v} \quad (2.79)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = g_z + \rho \ddot{w} \quad (2.80)$$

2.6.5 Equazioni indefinite di equilibrio: casi mono- e bi-dimensionale

Si consideri il caso in cui lo stato di tensione sia di tipo unidimensionale e che l'unica componente speciale di tensione diversa da zero sia la tensione lungo la direzione x . L'unica equazione di equilibrio nel caso omogeneo:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} = 0 \quad (2.81) \quad \text{IN UNA DIMENSIONE}$$

Si fanno?

Caso 2D e funzione di Airy. Nel caso bidimensionale, ottenuto eliminando la direzione z, le equazioni indefinite di equilibrio si scrivono:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = 0, \quad (2.112)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0. \quad (2.113)$$

È possibile introdurre una funzione del punto nel piano x-y,

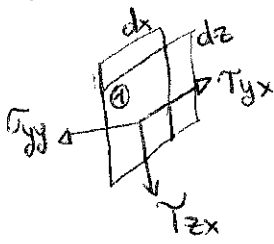
$$F(x, y)$$

tale da fornire le componenti speciale di tensione:

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad (2.114)$$

Questa è detta funzione di Airy e riveste un ruolo importante in molti problemi di analisi dello stato di tensione bidimensionale, quale la valutazione delle tensioni taglianti in travi soggette a pure azioni torcenti.

Equilibrio intorno all'asse x':



$$x') \quad \overset{1}{T_{yz}} dx dz \frac{dy}{2} + \overset{2}{T'_{yz}} dx dz \frac{dy}{2} + 0 - \overset{3}{T_{zy}} dx dy \frac{dz}{2} - \overset{4}{T'_{zx}} dx dy \frac{dz}{2} + 0 = 0$$

Notiamo che per le facce 3 e 4 l'asse x passa proprio per il centro di tensione, quindi il braccio è nullo. Se non fosse uniforme avremmo "".

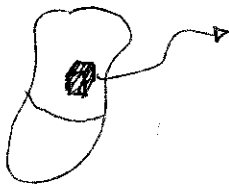
Si ricava che $2 T_{yz} = 2 T_{zy} \Rightarrow T_{yz} = T_{zy}$

Queste informazioni sono note come TEOREMA di CAUCHY e TEOREMA DI RECIPROCA.

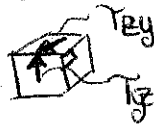
Il tensore degli sforzi è SIMMETRICO cioè le componenti con indici che si scambiano vengono uguali, sono lo stesso numero

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad \text{con } i \neq j$$

Audiziamo il significato fisico.



Prendo in qualsiasi punto un cubetto qualsiasi e considero due facce ortogonali della tensione TAGLIANTI sono le stesse poiché è una condizione di EQUILIBRIO



Nel caso di stato di tensione non uniforme per esempio $\sigma_{xx} \neq \sigma'_{xx}$

$$\hat{\sigma}_{ij} \neq \hat{\sigma}_{ji}$$

$$\sigma'_{xx}(x, y, z) = \sigma_{xx}(x, y, z) + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}(x, y, z) dx \quad \text{in direzione } x \text{ verso}$$

Sostituendo in (*) ho:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}(x, y, z) dx dy dz + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial y}(x, y, z) dx dz \frac{dy}{2} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial z}(x, y, z) dy dx \frac{dz}{2} = 0$$

Se divido per il volume $dV = dx dy dz$ Ho ottenuto l'equazione indefinita di equilibrio lungo l'asse x.

Per ottenere le equazioni ind. di eq. lungo y basta sostituire a $(x \rightarrow y)$ e $(y \rightarrow z)$ e a $(z \rightarrow y)$; per ottenere quella lungo z occorre farlo nuovamente.

Riscrivendole tutte assieme otteniamo:

Queste tre equazioni prendono il nome di EQUAZIONI INDEFINITE di EQUILIBRIO NEL CASO DINAMICO.

Possiamo capire problemi in 3Dimensionali in 2 o in 1.

Nel caso 1D avrò: $\textcircled{\otimes} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} = 0 \Rightarrow \boxed{2 \Rightarrow 1}$ poiché ho un'unica dimensione.

Abbiamo scritto l'eq di equilibrio in un punto P qualsiasi ma all'interno del corpo ecco perché la abbiamo chiamata eq. INDEFINITE.

Il teorema di Cauchy vale anche se lo stato di tensione non è uniforme.

CONDIZIONI DI EQUILIBRIO SUL CONTORNO

Il punto P può trovarsi nel volume del corpo, o sulla superficie o all'esterno del corpo.

Se P si trova all'esterno del corpo considero una superficie più grande che racchiude il corpo stesso e la chiamo S

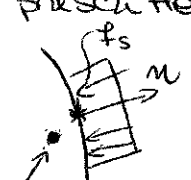
$$\boxed{S = S_1 + S_2}$$

$S_1 \Rightarrow$ DISLOCAMENTO PRESCRITTO

$$\bar{J} = \bar{J}$$

$S_2 \Rightarrow$ FORZE PRESCRITTE

Quando ci sono forze prescritte significa che su questo corpo qui ??



qui valgono le equazioni di prima

Se sulla ~~area~~ superficie suppongo che su essa agisca una forza di superficie f_s su * posso definire $\vec{t}_{dA} = t_x \bar{i} + t_y \bar{j} + t_z \bar{k}$ che nasce x soddisfare l'equilibrio a f_s

Se conosco n riesco a calcolare la componente \vec{t}_{dA}

Deve succedere che $\boxed{t_x = f_x}$ $\boxed{t_y = f_y}$ $\boxed{t_z = f_z}$

essendo $\boxed{f_s = f_x \bar{i} + f_y \bar{j} + f_z \bar{k}} \Rightarrow$ FORZA APPLICATA SULLA SUPERFICIE

È difficile matematicamente.

Queste 3 condizioni sono dette CONDIZIONI AI LIMITI PER LE TENSIONI o CONDIZIONI AL CONTORNO DI TIPO MECCANICO.

● TENSORE DI DEFORMAZIONE

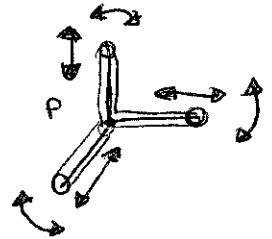
CHIAMEREMO È IL TENSORE DI DEFORMAZIONE.

Voglio caratterizzare la deformazione dei materiali
come posso farlo? Ho bisogno di 9 numeri, quindi di 1
TENSORE!!



PRESE TRE
FIBRE DI
MATERIALE

LE PORTO
=> FUORI ASSIEME
AL PUNTO MATERIALE



Ho bisogno di un modo tensore: immagino di considerare
3 fibre infinitesime di materiale che si possono avvicinare
te, avvicinare ma anche rotare reciprocamente rispetto
al riferimento

Un corpo vincolato è un corpo e cui sono applicati una serie di vincoli.

- a) Se i vincoli non sono sufficienti a bloccare tutti i movimenti
- b) Se i vincoli sono sufficienti a bloccare tutti i movimenti
- c) Se i vincoli sono più di quelli strettamente sufficienti a bloccare tutti i movimenti.

a) CORPO LABILE

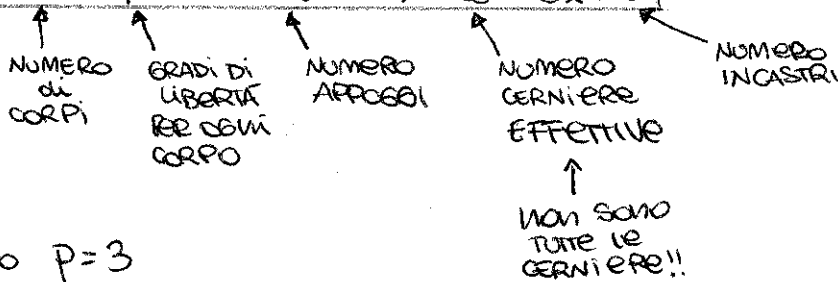
b) CORPO ISOSTATICO

c) CORPO IPERSTATICO

nei casi b e c se applico delle forze esterne posso calcolare le reazioni vincolari e in seguito le sollecitazioni.

● CALCOLO DEI GRADI DI LIBERTÀ RESIDUI:

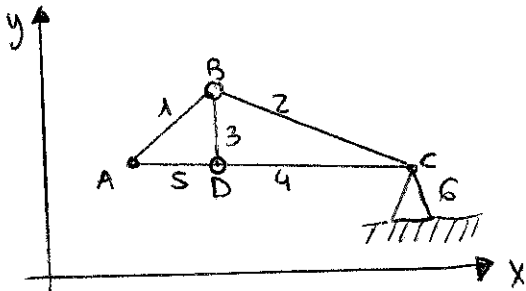
$$G_{dL} = N_c \times p - 1 \times N_a - 2 \times N_{ce} - 3 \times N_i$$



nel piano $p=3$
 nello spazio $p=6$

● le cerniere effettive se ho cerniera interna è il numero dei corpi che confiniscono nella cerniera meno 1, in quelle normali le conto singolarmente

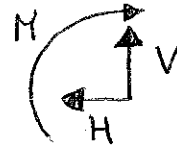
⊕ CORPO LABILE



SE HO UNA CERNIERA LO CONSIDERO COME CORPO AGGIUNTIVO

- $p = 3$
- $N_c = 5$ (non considero la cerniera mobile)
- $N_a = 0$
- $N_i = 0$

- Negli esercizi uso come convenzioni per le reazioni vincolari
 - le V sono positive se verso l'alto
 - le H sono positive se verso sinistra
 - le M sono positive se senso orario

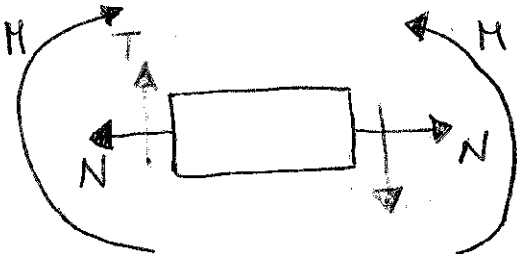


• AVREMO 3 TIPI di SOLLECITAZIONI

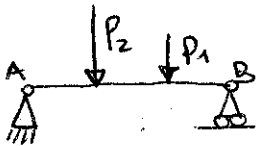
- T = TAGLIO (SFORZO di TAGLIO)
- N = NORMALI (SFORZO NORMALE)
- M = MOMENTI FLETTENTI

Prendo un elemento di TRAVE:

- Prendo positivi gli sforzi normali di TRAZIONE
- IL TAGLIO viene considerato POSITIVO QUANDO FA RUOTARE IN SENSO ORARIO
- I MOMENTI sono POSITIVI se hanno le fibre tese verso l'alto



- SE HO PIÙ FORZE APPLICATE AL MIO CORPO POSSO USARE LA SOVRAPPOSIZIONE degli EFFETTI.



$$Gde = 3 \times 1 - 1 \times 1 - 2 \times 1 - 0 = 0$$

↳ LA STRUTTURA È ISOSTATICA

- POSSIAMO SOSTITUIRE AI VINCOLI le reazioni vincolari E scomporlo in due sistemi usando la SOVRAPPOSIZIONE degli EFFETTI

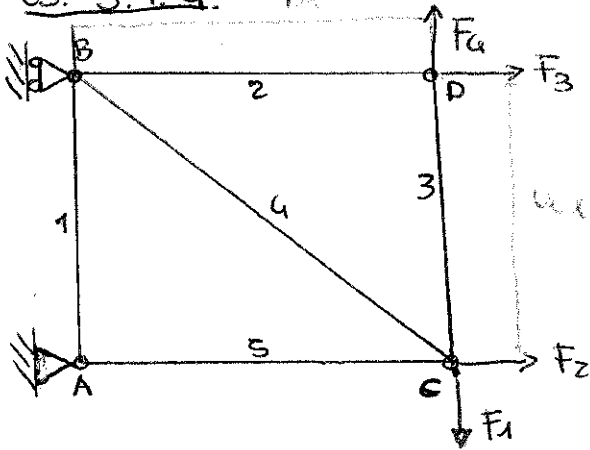


$$H_A = H_{A1} + H_{A2}$$

$$V_B = H_{B1} + H_{B2}$$

$$V_A = V_{A1} + V_{A2}$$

ES. 3.1.4.



$$F_1 = -20'000 \text{ N}$$

$$F_2 = 20'000 \text{ N}$$

$$F_3 = -25'000 \text{ N}$$

$$F_4 = 15'000 \text{ N}$$

$$a_1 = 800 \text{ mm}$$

$$b_1 = 700 \text{ mm}$$

① Calcoliamo le Gde

$$p = 3$$

$$Gde = 5 \times 3 - 1 \times 1 - 2 \times 7 - 0 = 15 - 15 = 0$$

$$N_c = 5$$

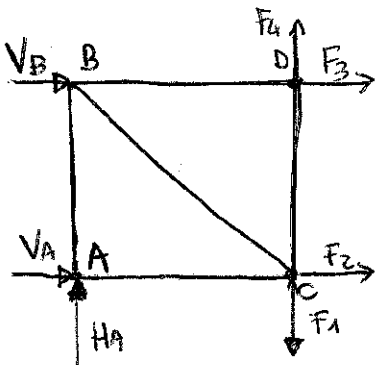
$$N_e = 1$$

$$N_i = 0$$

$$N_{ce} = \underset{\substack{\uparrow \\ A}}{2} + \underset{\substack{\uparrow \\ D}}{1} + \underset{\substack{\uparrow \\ C}}{2} + \underset{\substack{\uparrow \\ B}}{2} = 7$$

↓
IL SISTEMA È ISOSTATICO

② PASSO AL CALCOLO DELLE REAZIONI VINCOLARI



③ EQ. DI EQUILIBRIO

$$\rightarrow: V_B + F_3 + V_A + F_2 = 0$$

$$\uparrow: H_A + F_4 - F_1 = 0$$

$$\curvearrow A: V_B a_1 - F_4 b_1 + F_3 a_1 + F_1 b_1 = 0$$

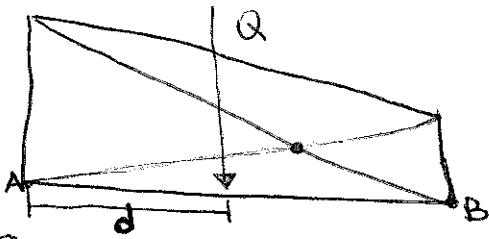
$$\hookrightarrow V_B = \frac{F_4 b_1 - F_3 a_1 - F_1 b_1}{a_1} = 55625 \text{ N}$$

$$V_A = -V_B - F_2 - F_3 = -50625 \text{ N}$$

$$H_A = -F_1 - F_4 = -35'000 \text{ N}$$

$$Q = \frac{(P_1 + P_2) \cdot a_1}{2}$$

Il punto di applicazione della forza concentrata equivalente lo trovo graficamente tracciando due triangoli.



Q è posizionato nel baricentro del TRAPEZIO.

$$\textcircled{Q} = (P_1 + P_2) \cdot a_1 \cdot \frac{1}{2} = 200000 \text{ N}$$

$$\textcircled{d} = \frac{P_1 \frac{a_1}{3} + P_2 \frac{a_1 \cdot 2}{3}}{P_1 + P_2} = 373,333 \text{ mm}$$

$$\rightarrow \textcircled{H_B} = 0$$

$$\uparrow \textcircled{V_A} + V_B - Q = 0 \quad \Rightarrow \textcircled{V_A} = Q - V_B = 1067 \cdot 10^3 \text{ N}$$

$$\textcircled{A} \quad Q \cdot d - V_B \cdot a_1 = 0$$

$$\Rightarrow \textcircled{V_B} = \frac{Q \cdot d}{a_1} = 93 \cdot 333,333 \text{ N}$$

$$\boxed{\epsilon_{xx} \quad \epsilon_{yy} \quad \epsilon_{zz}}$$

→ TENSIONI LINEARI DI DEFORMAZIONE

$$\begin{matrix} \epsilon_{xz} & \epsilon_{yz} & \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{yx} \end{matrix}$$

→ DETTI SCORRIMENTI O DEFORMAZIONI ANGOLARI

$$\boxed{\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}}$$

PROPRIO COME ACCADEVA NEL TENSORE DEGLI SFORZI

POSSIAMO METTERE IN UNA TABELLA $\hat{\epsilon}$ E LE SUE TENSIONI

$$\hat{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{yx} & \epsilon_{zx} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{zy} \\ \epsilon_{xz} & \epsilon_{yz} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

ANCHE $\hat{\epsilon}$ COME $\hat{\sigma}$ È UN TENSORE SIMMETRICO LE SUI COMPONENTI

SONO LE COMPONENTI SPECIALI DI DEFORMAZIONE E SONO 9.

● RELAZIONI FRA DEFORMAZIONI E SPOSTAMENTI

VOLIAMO ORA SCRIVERE DELLE EQUAZIONI TIRANDO IN BALLO IL VETTORE SPOSTAMENTO (O STATO DI SPOSTAMENTO) E LE COMPONENTI SPECIALI DI DEFORMAZIONE. QUESTE RELAZIONI SONO DETTE RELAZIONI GEOMETRICHE E ESPRIMONO $\hat{\epsilon}$ IN FUNZIONE DI \vec{u} $\hat{\epsilon} = \hat{\epsilon}(\vec{u})$ UTILizzeremo LE DERIVATE DEGLI SPOSTAMENTI PARZIALI u, v, w IN FUNZIONE DI x, y, z .

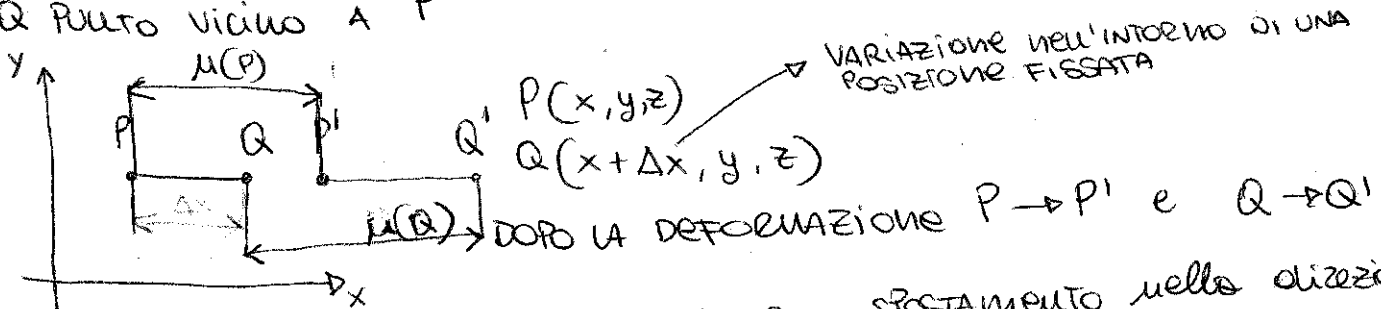
DEFORMAZIONI LINEARI
 CASO IN CUI GLI SPOSTAMENTI SONO PICCOLI: RELAZIONI GEOMETRICHE LINEARI

CIOÈ IPOTIZZIAMO CHE IL CORPO DEFORMATO NON È MOLTO LONTANO DALLA CONFIGURAZIONE NON DEFORMATA, E LE RELAZIONI GEOMETRICHE FRA LE DIVERSE QUANTITÀ POSSANO ESSERE LINEARIZZATE.

CERCHIAMO DI CARATTERIZZARE ϵ_{xx} IN FUNZIONE DI \vec{u} .

CONSIDERIAMO PER SEMPLICITÀ IL PIANO xy , PER IL CORPO E

Q PUNTO VICINO A P



PER SEMPLICITÀ IPOTIZZO CHE CI SIA SOLO SPOSTAMENTO NELLA DIREZIONE x .

RICORDO CHE $\vec{u} = (u, v, w)$ IN QUESTO CASO STO ANALIZZANDO SOLO LO SPOSTAMENTO u !!

$$\mu(Q) - \mu(P) = \Delta\mu = \text{VARIAZIONE DEGLI SPOSTAMENTI DI P e Q}$$

$$\Delta\mu = \overline{P'Q'} - \overline{PQ} \quad \overline{PQ} = \Delta x$$

VARIAZIONE DI LUNGHEZZA DELLA FIBRA PQ

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \gamma_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$\epsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$\epsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

LE RELATIVE COMPONENTI SPECIALI DI DEFORMAZIONI A TAVOLO ϵ_{ij} SONO DEFINITE COME META' DELLO SCORRIMENTO ANGOLARE γ_{ij}

ABBIAMO TROVATO TUTTE LE 9 COMPONENTI SPECIALI DI DEFORMAZIONE!! (8 * 10/15 + 1 * 16/20)

● GIACITURE PRINCIPALI PER LE DEFORMAZIONI

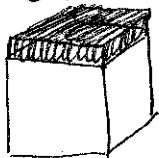
SE CONOSCIAMO LE TRE FUNZIONI SCALARI di u, v, w che sono funzioni di x, y, z derivabile ricavo le deformazioni.

$\hat{\epsilon} - \lambda I = 0$ RISOLVENDO QUESTO PROBLEMA DI AUTVALORI RICOVO LE CONDIZIONI DI SCORRIMENTO NULLO, (di max o min deformazione lineare) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ che sono le TRE DEFORMAZIONI PRINCIPALI nelle DIREZIONI PRINCIPALI m_x, m_y, m_z . (POSSIBILITÀ CHE ESSE SIANO ANCHE LE DIREZIONI DUE LE COMPONENTI DI DEFORMAZIONE SONO DI GRADO ESTREMO MA NON È DETTO)

$$\hat{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{bmatrix}$$

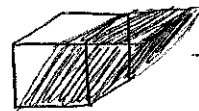
⇒ IN QUESTO CASO IL TENSORE DI DEFORMAZIONE È DIAZIONALE e $\epsilon_{11} = \lambda_1 \quad \epsilon_{22} = \lambda_2 \quad \epsilon_{33} = \lambda_3$ con $\epsilon_{ij} = 0$ se $i \neq j$

Geometricamente significa che PRESO, PER ESEMPIO UN CUBETTO ELEMENTARE dx SI ALLUNGA SOLO.



MODIFICO IL VOLUME

e non fa



MODIFICO LA GEOMETRIA

PURA SCORRIMENTO

PURA DILATAZIONE

È INTUITIVO PENSARE CHE OGNI DEFORMAZIONE CONSISTERA' DI DUE COMPONENTI:

$$\hat{\epsilon}_{\text{generico}} = \text{DILATAZIONE} + \text{SCORRIMENTO}$$

(ALLUNGA/ACCORCIA) (CAMBIA ANGOLAZIONE)

Il rotture in cui la rottura è causata dallo scorrimento e altri in cui dipende dalla dilatazione.

ESISTONO ANCHE CASI BIDIMENSIONALI DI DEFORMAZIONE:

(esempio)

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{yx} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_{yy} \end{bmatrix}$$

SE UNA DELLE TRE COMPONENTI DI DEFORMAZIONE PRINCIPALE SI ANNULLA

$\hat{\epsilon}$ è TENSORE DI 2° ORDINE AGENTE NELLO SPAZIO 2D

ESISTONO ANCHE CASI MONODIMENSIONALI DI DEFORMAZIONE

(esempio)

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \end{bmatrix}$$

SE SI ANNULLANO DUE DUE TRE DEFORMAZIONI PRINCIPALI

$\hat{\epsilon}$ è TENSORE DI 2° ORDINE AGENTE NELLO SPAZIO 1D

LEZIONE 27-03-2012

~~CONDIZIONI DI COMPATIBILITÀ~~

Se conosciamo $\hat{\epsilon} = \hat{\epsilon}(x, y, z)$ vuol dire che conosciamo $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}(x, y, z)$
 Abbiamo detto che per poter ricavare da $\hat{\epsilon}$ il vettore spostamento
 devono essere valide le EQ. COMPATIBILITÀ.

Ricordando che $\gamma_{ij} = 2\epsilon_{ij}$ scrivo 3 EQ. DI COMPATIBILITÀ

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (1)$$

$x \rightarrow y$

$y \rightarrow z$

$z \rightarrow x$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{zz}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} \quad (3)$$

RICAVO ALTRE 3 EQ DALLA n°4 CHE DIAMO PER BUONA

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\gamma_{xy}}{\partial z} \right] = 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{zz}}{\partial x \partial y} \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right] = 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y \partial z} \quad (5)$$

$x \rightarrow y$

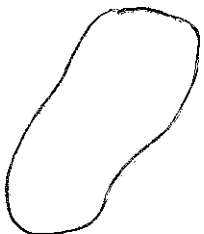
$y \rightarrow z$

$z \rightarrow x$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right] = 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial x \partial z} \quad (6)$$

LA COMPATIBILITÀ e l'EQUILIBRIO SONO DUE MODI DI SCRIVERE
 LO STESSO CONCETTO FISICO, E SONO CONCETTI MOLTO IMPORTANTI.

QUESTE EQ. VALGONO NEL GENERICO PUNTO NEL CORPO.
 COSA SUCCEDDE SUL BORDO?



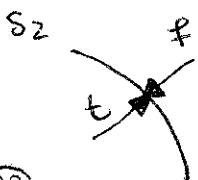
C, V

S_1 = CONDIZIONI AL CONTORNO DI TIPO MECCANICO

S_2 = CONDIZIONI AL CONTORNO DI TIPO GEOMETRICO

CONTORNO IN CUI SONO PRESCRITTI GLI SPOSTAMENTI

Se S_2 gli spostamenti dovremmo invece rispettare le condizioni di vincolo:



$$\bar{J} \equiv \bar{\theta}^*$$

IMPOSTO

dove \bar{J}^* INDICA LE CONDIZIONI DI SPOSTAMENTO
 SUL CONTORNO DEL CORPO CHE SONO ANCHE
 DETTE CONDIZIONI AL CONTORNO DI TIPO
 GEOMETRICO.

• RELAZIONI GEOMETRICHE NON LINEARI

MA USEREMO QUELLE DETTE QUADRATICHE

$$\epsilon_{xx} = \mu_{,x} + \frac{1}{2} \left[\mu_{,x}^2 + \nu_{,x}^2 + w_{,x}^2 \right]$$

\uparrow
 $\frac{d\mu}{dx}$ ← CON LA VIRGOLA INTENDO LA DERIVATA PARZIALE

$$\epsilon_{yy} = \mu_{,y} + \frac{1}{2} \left[\mu_{,y}^2 + \nu_{,y}^2 + w_{,y}^2 \right]$$

$$\epsilon_{zz} = \mu_{,z} + \frac{1}{2} \left[\mu_{,z}^2 + \nu_{,z}^2 + w_{,z}^2 \right]$$

$$2\epsilon_{xy} = \nu_{,x} + \mu_{,y} + \mu_{,x}\mu_{,y} + \nu_{,x}\nu_{,y} + w_{,x}w_{,y}$$

$$2\epsilon_{xz} = w_{,x} + \mu_{,z} + \mu_{,x}\mu_{,z} + \nu_{,x}\nu_{,z} + \nu_{,x}\nu_{,z}$$

$$2\epsilon_{yz} = \nu_{,z} + w_{,y} + \mu_{,y}\mu_{,z} + w_{,y}w_{,z} + \nu_{,y}\nu_{,z}$$

ESISTONO DIVERSE ESPRESSIONI SEMPLIFICATE DELLE RELAZIONI NON LINEARI.

QUANDO PARLEREMO DI STRUTTURE 2D, 1D USEREMO LE RELAZIONI SEMPLIFICATE DI VON KÄRMÄN. ESSE SONO RELATIVE A PIASTRE & GUSCI IN CUI LO SPOSTAMENTO PIÙ IMPORTANTE È MISURATO NELLA DIREZIONE TRASVERSALE ALLA SUPERFICIE.

$$\epsilon_{xx} = \mu_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2$$

$$\epsilon_{yy} = \mu_{,y} + \frac{1}{2} w_{,y}^2$$

$$2\epsilon_{yz} = w_{,y} + \nu_{,z}$$

$$2\epsilon_{xz} = \mu_{,z} + w_{,x}$$

$$2\epsilon_{xy} = \nu_{,x} + \mu_{,y} + w_{,x}w_{,y}$$

CON (z) HO INDICATO LA DIREZIONE TRASVERSALE ALLO SPOSTAMENTO MENTRE CON

(w) HO INDICATO LO SPOSTAMENTO RELATIVO.

NOTIAMO CHE LE ROTAZIONI SONO CONSIDERATE PICCOLE E QUINDI ESPRIMIBILI DA RELAZIONI LINEARI.

LE RELAZIONI ESSENDO RIFERITE A STRUTTURE SOTTILI (CON SPESORE MISURATO UNGO z) NON TENGONO CONTO DELLA DEFORMAZIONE ϵ_{zz} .

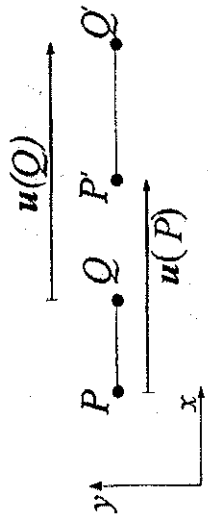


Figura 1.2. Notazioni per il calcolo di una deformazione lineare.

Lo spostamento nella direzione x di P sia,

$$u(P) = u(x, y, z), \tag{1.8}$$

mentre quello di Q varrà,

$$u(Q) = u(x + \Delta x, y, z) = u(P) + \Delta u \tag{1.9}$$

Nella configurazione deformata le posizioni dei due punti P e Q , varranno,

$$P'(x, y, z) = P(x, y, z) + u(x, y, z), \tag{1.10}$$

$$Q'(x + \Delta x, y, z) = Q(x + \Delta x, y, z) + u(x + \Delta x, y, z) = u(P) + \Delta u$$

La variazione di lunghezza della fibra \overline{PQ} varrà,

$$\overline{P'Q'} - \overline{PQ} = u(x + \Delta x, y, z) - u(x, y, z) = \Delta u. \tag{1.11}$$

Rapportando rispetto alla distanza PQ (Δx):

$$\frac{\overline{P'Q'} - \overline{PQ}}{\overline{PQ}} = \frac{u(x + \Delta x, y, z) - u(x, y, z)}{\Delta x} \tag{1.12}$$

Sostituendo la relazione Eq.(1.11), si ha:

$$\frac{\overline{P'Q'} - \overline{PQ}}{\overline{PQ}} = \frac{\Delta u}{\Delta x} \tag{1.13}$$

Si definisce deformazione lineare.

$$\epsilon_{xx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \tag{1.14}$$

Per spostamenti piccoli e tenendo conto che lo spostamento u nel caso generale è funzione delle tre coordinate cartesiane, la deformazione lineare è da scriversi come derivata parziale.

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \tag{1.15}$$

Ripetendo le considerazioni sopra fatte per le altre due direzioni coordinate si ottengono le espressioni delle deformazioni lineari lungo gli assi y e z .

$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \tag{1.16}$$

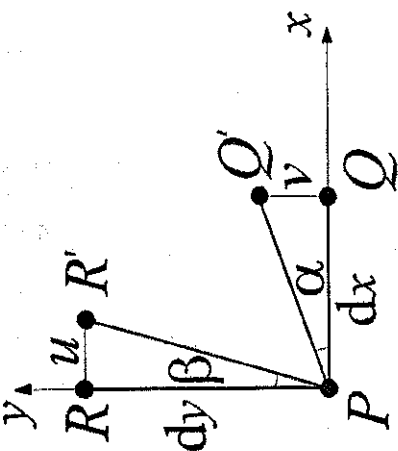


Figura 1.3. Notazioni utilizzate per il calcolo di una deformazione angolare.

Deformazioni a taglio. Per ottenere la relazione fra spostamenti e scorrimenti angolari si considerino due fibre ortogonali infinitesime in P , individuate dai segmenti Q ed R . Siano per semplicità tali fibre coincidenti con le direzioni x e y della terna infinitesima fondamentale.

$$P(x, y, z), \quad Q(x + \Delta x, y, z), \quad R(x, y + \Delta y, z). \tag{1.17}$$

Nella configurazione indeformata i tre punti si sposteranno in generale nei punti P', Q', R' . L'interesse è qui circoscritto alla determinazioni dello scorrimento angolari nel piano $x - y$. A tal fine, senza perder di generalità, può essere considerato il caso in cui P' coincida con P e Q' ed R' si spostino rispettivamente solo nelle direzioni y e x . In formule,

$$\begin{aligned} P'(x, y, z) &= P(x, y, z), \\ Q'(x + \Delta x, y, z) &= Q(x + \Delta x, y, z) + \Delta v(x + \Delta x, y, z), \\ R'(x, y + \Delta y, z) &= R(x, y + \Delta y, z) + \Delta u(x, y + \Delta y, z). \end{aligned} \tag{1.18}$$

Le due fibre, inizialmente ortogonali, hanno dunque subito due rotazioni che si indicano con α e β , rispetto al punto P . Nelle ipotesi di deformazioni piccole, scambiando le lunghezze sull'arco con quelle sulla tangente allo stesso, tali rotazioni valgono,

$$\alpha \approx \tan \alpha = \frac{\overline{P'Q'}}{\overline{PQ}} = \frac{\Delta v}{\Delta x} \tag{1.19}$$

Introducendo il passaggio al limite e la derivata parziale, la rotazione della fibra \overline{PQ} nel punto P si scrive:

$$\alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{\partial v}{\partial x} \tag{1.20}$$

Con lo stesso ragionamento si ha:

$$\beta = \frac{\partial u}{\partial y} \tag{1.21}$$

Lo stato di tensione è detto idrostatico ed il tensore di deformazione si scrive:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{idr} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{idr} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{idr} \end{bmatrix} \quad (1.40)$$

Tale stato di tensioni è tipico dei fluidi in assenza di viscosità. Sono difatti nulle tutte le componenti di deformazione taglianti legate alle azioni di strisciamento delle particelle fluide l'una sull'altra.

Stato di deformazione bidimensionale. Lo stato di deformazione è detto *bidimensionale*, se una delle tre deformazioni principali si annulla. Questo succede ogni qualvolta il determinante del tensore di deformazione si annulla, dunque:

$$I_3 = 0$$

L'invariante del terzo ordine si annulla quando la generica *i*-esima riga e *i*-esima colonna si annullano. Sono possibili i tre seguenti casi:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{yx} & \epsilon_{yz} \\ 0 & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & 0 & \epsilon_{zx} \\ 0 & 0 & 0 \\ \epsilon_{xx} & 0 & \epsilon_{zx} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & 0 \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.41)$$

Il generico vettore di tensione agisce sempre e solo su un piano. Il tensore degli sforzi resta un tensore del secondo ordine ma agente nello spazio bidimensionale. Le componenti di deformazione non nulle sono

$$d'' = 2^2 = 4$$

Introducendo una notazione compatta si hanno i seguenti casi di stato di deformazione piano:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} \end{bmatrix} \quad (1.42)$$

Un esempio di stato di deformazione bidimensionale è relativo al tensore degli sforzi che si ingenera in una membrana. E questa una struttura caricata solo da forze che agiscono nel piano della membrana.

Stato di deformazione unidimensionale. Lo stato di deformazione è detto *unidimensionale*, se due deformazioni principali si annullano. Questo succede ogni qualvolta:

$$I_2 = I_3 = 0$$

Sono possibili i tre seguenti casi:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (1.43)$$

Si ha deformazione lineare solo lungo una direzione. Il tensore di deformazione resta un tensore del secondo ordine ma agente nello spazio unidimensionale. Le componenti non nulle saranno:

$$d'' = 1^2 = 1$$

In tabella si ha:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (1.36)$$

1.3.1 Invarianti

L'equazione che permette di determinare le deformazioni/direzioni principali μ_1, μ_2 e μ_3 si ottiene servendo in maniera esplicita il determinante dell'equazione Eq.(1.34):

$$-\mu^3 + I_1\mu^2 + I_2\mu + I_3 = 0 \quad (1.37)$$

che corrisponde ad una equazione algebrica del terzo ordine nota anche come *equazione secolare*. I coefficienti di tale equazione dipendono dalle nove componenti speciali di deformazione:

$$\begin{aligned} I_1 &= \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz} \\ I_2 &= \epsilon_{xx}\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}\epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}\epsilon_{zz} - \epsilon_{xx}\epsilon_{yy} - \epsilon_{xx}\epsilon_{zz} - \epsilon_{yy}\epsilon_{zz} \\ I_3 &= \epsilon_{xx}(\epsilon_{yy}\epsilon_{zz} - \epsilon_{yz}\epsilon_{zy}) - \epsilon_{xy}(\epsilon_{yz}\epsilon_{zz} - \epsilon_{yz}\epsilon_{zx}) + \epsilon_{xz}(\epsilon_{yz}\epsilon_{zy} - \epsilon_{zy}\epsilon_{yx}) \end{aligned} \quad (1.38)$$

Questi sono noti come *invarianti del primo, secondo e terzo ordine* punto (I_3 corrisponde al determinante di $\hat{\epsilon}$). Essi non dipendono dal riferimento *x, y, z* ma solo dal punto *P*. Essendo infatti le direzioni principali corrispondenti ai valori massimi e minimi delle componenti speciali di tensione, la equazione secolare dovrà essere la stessa per gli infiniti, possibili, riferimenti cartesiani di partenza.

Nel riferimento principale gli invarianti valgono:

$$\begin{aligned} I_1 &= \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33} \\ I_2 &= -\epsilon_{11}\epsilon_{22} - \epsilon_{11}\epsilon_{33} - \epsilon_{22}\epsilon_{33} \\ I_3 &= \epsilon_{11}\epsilon_{22}\epsilon_{33} \end{aligned} \quad (1.39)$$

1.4 Forme particolari del tensore di deformazione

Si discutono brevemente alcuni casi particolari del tensore di deformazione. Si anticipa che essi si dimostreranno essere incompatibili con le equazioni costitutive dei materiali reali. Ciò nonostante, la teoria delle strutture fa largo uso di tali casi particolari.

Stato di deformazione tridimensionale. Lo stato di tensione è detto *tridimensionale*, se tutte e tre le deformazioni principali sono diverse da zero. Esistono cioè deformazioni lineari e scorrimenti diversi da zero per una qualsiasi direzione o coppia di direzioni inizialmente ortogonali.

Stato di deformazione idrostatico. Un caso notevole è quello in cui nel generico riferimento si abbia:

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{idr} \quad \text{se } i = j \quad \text{e} \quad \epsilon_{ij} = 0 \quad \text{se } i \neq j$$

o le

$$R_{xz} = R_{yz} = R_{xy} = 0$$

Si noti ancora che le equazioni di compatibilità esprimono le R_{ij} in funzione delle deformazioni ϵ_{ij} attraverso operatori differenziali che coincidono con gli operatori differenziali che permettono di esprimere le componenti speciali di tensione in funzione delle funzioni di tensione di Maxwell e Morera introdotte nella Eq.(3.8). È questa una dualità fra equilibrio e congruenza persistente nello studio di tutte le equazioni fondamentali dei continui deformabili ed evidenzia il fortissimo legame fisico fra deformazione e congruenza che sarà alla base del Principio dei Lavori Virtuali.

1.6 Relazioni nonlineari fra deformazioni e spostamenti

In molti dei problemi dell'analisi delle strutture i corpi si deformano in maniera significativa e/o gli spostamenti dei diversi punti assumono valori confrontabili con le dimensioni caratteristiche del corpo stesso.

In questi casi le relazioni lineari fra deformazioni e spostamenti non sono sufficienti a descrivere lo stato di deformazione del corpo C ed occorre introdurre relazioni che permettano di descrivere spostamenti finiti dei punti del corpo deformato. Per completezza si annota che in molti altri casi, qui non considerati, occorre cambiare il modo di misurare le deformazioni, introducendo definizioni assai diverse della deformazione stessa.

1.6.1 Relazioni nonlineari al secondo ordine

Son queste relazioni non lineari, una forma approssimata ai termini del secondo ordine, assume la seguente forma (la derivazione sarà presentata al prossimo paragrafo):

$$\epsilon_{xx} = u_x + \frac{1}{2}(u_x^2 + v_x^2 + w_x^2),$$

$$\epsilon_{yy} = v_y + \frac{1}{2}(v_y^2 + w_y^2 + w_z^2),$$

$$\epsilon_{zz} = u_z + \frac{1}{2}(u_z^2 + v_z^2 + w_z^2),$$

$$2\epsilon_{xy} = v_x + u_y + u_x u_y + v_x v_y + w_x w_y \quad (1.64)$$

$$2\epsilon_{xz} = w_x + u_z + u_x u_z + v_x v_z + w_x w_z$$

$$2\epsilon_{yz} = w_y + v_z + u_y u_z + v_y v_z + w_y w_z$$

Si è introdotta la notazione, ad indicare la derivata parziale. Le relazioni lineari, scritte nei paragrafi precedenti, sono facilmente ottenibili trascurando i termini nonlineari.

1.6.2 Relazioni non lineari di von Kármán

Esistono diverse espressioni semplificate delle relazioni nonlineari. Fra queste di particolare rilevanza sono quelle che portano il nome di von Kármán. Esse sono relative a strutture a parete sottili (piastre/gusci) in cui lo spostamento più importante è misurato nella direzione

In cui s^* indica le condizioni di spostamento sul contorno del corpo. Queste sono anche note come condizioni al contorno di tipo "geometrico".

1.5.2 Condizioni sulle equazioni di congruenza

Le equazioni di congruenza possono anche essere scritte nella forma

$$R_{xx} = \frac{\partial^2 \epsilon_{xy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{xz}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} = 0 \quad (1.52)$$

$$R_{yy} = \frac{\partial^2 \epsilon_{xz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{xy}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} = 0 \quad (1.53)$$

$$R_{zz} = \frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 \quad (1.54)$$

$$R_{yz} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right] - 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{xz}}{\partial y \partial z} = 0 \quad (1.55)$$

$$R_{xz} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right] - 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{xy}}{\partial x \partial z} = 0 \quad (1.56)$$

$$R_{xy} = \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right] - 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{zz}}{\partial x \partial y} = 0 \quad (1.57)$$

$$R_{zz} = \frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 \quad (1.58)$$

Si può facilmente verificare che fra le equazioni di compatibilità sussistono le seguenti tre identità:

$$\frac{\partial R_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial R_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial R_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (1.59)$$

$$\frac{\partial R_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial R_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial R_{yz}}{\partial z} = 0 \quad (1.60)$$

$$\frac{\partial R_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial R_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial R_{zz}}{\partial z} = 0 \quad (1.61)$$

Si noti che introducendo il tensore:

$$\hat{R} = \begin{bmatrix} R_{xx} & R_{xy} & R_{xz} \\ R_{xy} & R_{yy} & R_{yz} \\ R_{xz} & R_{yz} & R_{zz} \end{bmatrix} \quad (1.62)$$

Le condizioni sulle equazioni di compatibilità sono formalmente identiche a quelle scritte sul tensore degli sforzi attraverso le equazioni indefinite di equilibrio scambiando:

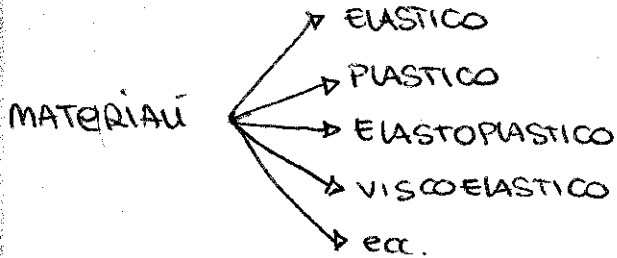
$$\hat{R} \rightarrow \hat{\sigma} \quad (1.63)$$

Si conclude che le sei equazioni di congruenza nel generico punto interno al corpo C non sono fra loro indipendenti. Porranno essere usate indifferentemente le

$$R_{xx} = R_{yy} = R_{zz} = 0$$

● RELAZIONE FISICA FRA TENSIONE E DEFORMAZIONE

Fin ora abbiamo analizzato $\hat{\epsilon}$ e $\hat{\sigma}$ separatamente ma nella REALTÀ ESISTE UN LEGAME BEN PRECISO FRA TENSIONI E DEFORMAZIONI CHE DIPENDE DAL MATERIALE COSTITUENTE IL CORPO. TENSIONI E DEFORMAZIONI SONO QUINDI LEGATE DA UNA RELAZIONE FISICA CONNESSA AL COMPORTAMENTO DEL MATERIALE.



INTRODUCO UN NUOVO VETTORE (PER COMODITÀ di VETTORI)

$$\left\{ \sigma \right\}^T = \left\{ \sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}, \sigma_{xy} \right\}$$

COMPACTO GIÙ SCORRIMENTI ANGOLARI DI TABELLO

$$\left\{ \varepsilon \right\}^T = \left\{ \varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}, \gamma_{xy} \right\} = \left\{ \varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, 2\varepsilon_{xz}, 2\varepsilon_{yz}, 2\varepsilon_{xy} \right\}$$

SE RIESCO A CALCOLO $6 \times 6 = 36$ COSTANTI \Rightarrow TROVO $\hat{\varepsilon}$ e le $\hat{\sigma}$ IN BASE ALLE ESIGENZE

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix}$$

HO SCRITTO $\sigma = C \varepsilon$ cioè LA LEGGE DI HOOK IN FORMA COMPATTA

C è UNA MATRICE COMPOSTA DA 36 COEFFICIENTI DETTI COEFFICIENTI DI RIGIDEZZA o COSTANTI ELASTICHE DEL MATERIALE

La matrice C è ASSOCIATA A UN COMPORTAMENTO ANISOTROPO DEL MATERIALE.

- IL MATERIALE PRESENTA cioè delle PROPRIETÀ MECCANICHE CHE DIPENDONO DALLE DIREZIONI LUNGO LE QUALI TAU PROPRIETÀ SONO MISURATE.
- IL MATERIALE È NON OMOGENEO SE C_{ij} CAMBIANO DA PUNTO A PUNTO
- DA CONSIDERAZIONI SULL'ENERGIA ELASTICA $\Rightarrow C_{ij} = C_{ji}$ se $i \neq j$
 \Rightarrow LE COSTANTI ELASTICHE INDIPENDENTI SONO 21

ANALIZZO ORA IL CASO IN CUI SOLO NELLA ZONA LINEARE ELASTICO CHE SIGNIFICA ANALIZZARE IL PRIMO TRATTO DEL GRAFICO.

INTRODUCO DUE APPROSSIMAZIONI:

• SE IL MATERIALE HA ASPETTO OMOGENEO $\Rightarrow [C]$ COSTANTE PER OGNI PUNTO P.

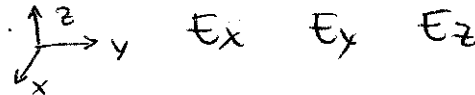
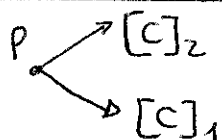
SE HO MATERIALI "MISTI" $[C]$ È COSTANTE NEI PUNTI DELLO STESSO MATERIALE. IN NATURA NON ESISTONO MATERIALI OMOGENEI, TUTTO DIPENDE DALLA SCALA IN CUI OSSERVO IL MATERIALE.

NOI CONSIDERIAMO OMOGENEI I MATERIALI COME APPROSSIMAZIONE DEL MODELLO REALE.

• LE IMPERFEZIONI DEI MATERIALI POSSONO O MENO OSTACOLARE LE ROTTURE ANALIZZANDO LE COMPOSIZIONI INTERNE DEI MATERIALI E TESTANDOLI CON PROVE DI FATICA.

• SUPPONIAMO CHE I NOSTRI MATERIALI SIANO ISOTROPI CIOÈ CHE $[C]$ NON DIPENDE DALLA DIREZIONE DI CARICO.

NEI MATERIALI REALI I MATERIALI SONO ANISOTROPI CIOÈ IN BASE ALE DIREZIONI DI SOLLECITAZIONI HO MODULO DI YOUNG DIVERSO.

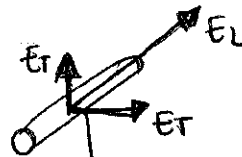
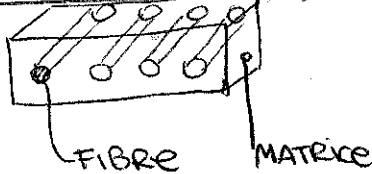


• IN NATURA ESISTONO MATERIALI DETTI ORTOTROPI CIOÈ SONO COMPOSTI DA FIBRE CHE HANNO DUE MODULI DI YOUNG.

E_L = MODULO YOUNG LONGITUDINALE

E_T = MODULO YOUNG TRASVERSALE

(LAMINA UNIDIREZIONALE)



3 ASSI DI SIMMETRIA DETTI ASSI MATERIALE

• SE IL MATERIALE È ISOTROPO $[C]$ È INDIPENDENTE DALLA DIREZIONE.

Nelle nostre analisi supponiamo che il materiale sia:

- LINEARE
- ELASTICO
- OMOGENEO
- ISOTROPO

Nei casi particolari ovvero n numeri caratteristici del materiale:

ANISOTROPO $n = 21$

ORTOTROPO $n = 9 \div 6$

ISOTROPO $n = 3 \div 2$

$n_{max} = 6 \times 6 = 36$

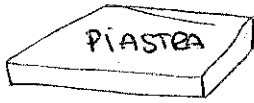
↑
COMPONENTI MATRICE C

INTRODUCIAMO DUE APPROSSIMAZIONI CHE USEREMO NELLA LEGGE DI HOOK:

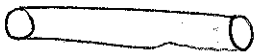
PAG 61
STATO DI DEFORMAZIONE PIANO o "PLAIN STRAIN"

In questa approssimazione vale che $C_{11} = E$

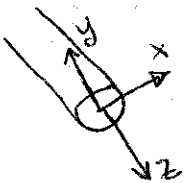
Posso avere una PIASTRA o un GUSCIO



Posso anche avere delle STRUTTURE ANIMATE



Prendo una sezione faccio come fatto nel profilo



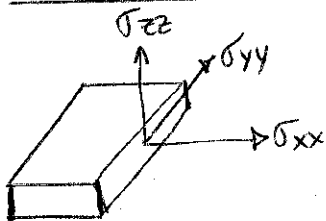
$$\begin{aligned} \sigma &\equiv \sigma_{zz} \\ \epsilon_{zx} &= \epsilon \\ \epsilon_{xx} &= \epsilon_{yy} = 0 \end{aligned}$$

⇔ STATO DI DEFORMAZIONE PIANO
 È STATO DI DEFORMAZIONE
 BIDIMENSIONALE
 ACCADE QUANDO UNA DELLE
 3 DEFORMAZIONI PRINCIPALI
 SI ANNULLA

$$C_{11}^{PS} = E$$

⇔ RISULTATO DELLA LEGGE DI HOOK NEL CASO DI PLAIN STRAIN

PAG 62
STATO DI TENSIONE PIANO o "PLANE STRESS"



$$\sigma_{zz} = 0$$

$$C_{11} = C_{11}^{PS}$$

o STATO DI TENSIONE BIDIMENSIONALE
 Succede ogni volta che una
 delle TRE TENSIONI PRINCIPALI
 SI ANNULLA

con

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

I coefficienti S_{ij} sono noti come coefficienti di deformabilità nel punto. Esse conservano le proprietà di simmetria delle costanti elastiche C_{ij} .

2.2 Comportamento isotropo

Molti dei materiali metallici impiegati nelle strutture aerospaziali presentano un comportamento che può, con buona approssimazione, essere assimilato al *comportamento isotropo*: i coefficienti C_{ij} non dipendono cioè dalla direzione che si considera nel punto, sono invarianti rispetto alla direzione.

La matrice C_{ij} assume la seguente forma:

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{21} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Si osservi quanto segue:

- ① Le costanti elastiche sono pari a tre. Dovendo essere le stesse invarianti rispetto al riferimento i coefficienti elastici dovranno conservarsi per le tre direzioni. Rispetto alla scrittura generale si ha:

$$C_{22} = C_{33} = C_{11}, \quad C_{13} = C_{23} = C_{12}, \quad C_{55} = C_{66} = C_{44} \quad (2.14)$$
- ② Non esiste alcun accoppiamento fra tensioni normali e deformazioni a taglio.
- ③ Le tensioni di taglio sono puramente dipendenti dallo scorrimento angolare relativo.
- ④ Come conseguenza, le direzioni principali di tensione coincidono con quelle di deformazione.
- ⑤ Nei materiali isotropi non è possibile annullare le tensioni normali σ_{yy} e σ_{zz} pur in presenza di sole deformazioni lineari ϵ_{xx} , infatti:

$$C_{31} \neq 0 \quad e \quad C_{32} \neq 0.$$

Ragionando sulle deformabilità si potrebbe estendere la considerazione alle deformazioni normali ϵ_{yy} e ϵ_{zz} causate da sole tensioni lineari σ_{yy} . Ne consegue che la relazione unidimensionale scritta per la prova di trazione ha carattere puramente astornatico: *non esiste alcun material in natura che produca deformazioni lineari in una sola direzione.*

Per comodità di scrittura le componenti speciali di tensione e deformazione sono organizzate nei seguenti vettori:

$$\sigma^T = \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}, \sigma_{xy}\} \quad (2.3)$$

$$\epsilon^*T = \{\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, 2\epsilon_{xz}, 2\epsilon_{yz}, 2\epsilon_{xy}\} \quad (2.4)$$

$$\epsilon^{*T} = \{\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}, \gamma_{xy}\} \quad (2.5)$$

Spesso si preferisce fare riferimento al seguente vettore per le deformazioni:

$$\epsilon^T = \{\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, 2\epsilon_{xz}, 2\epsilon_{yz}, 2\epsilon_{xy}\} \quad (2.6)$$

$$\epsilon^T = \{\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}, \gamma_{xy}\} \quad (2.7)$$

$$\epsilon^T = \{\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}, \gamma_{xy}\} \quad (2.8)$$

In cui compaiono gli scorrimenti angolari a taglio γ , parametri quest'ultimi maggiormente diffusi nella prove sperimentali di caratterizzazione del materiale.

La legge di Hooke in forma compatta si scrive

$$\sigma = C \epsilon \quad (2.9)$$

In cui C è la matrice composta da 36 coefficienti:

$$C_{ij}, \quad \text{con } i, j = 1, 6$$

detti coefficienti di rigidezza o costanti elastiche del materiale.

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Questa matrice C è associata ad un *comportamento anisotropo* del materiale. Il materiale presenta cioè proprietà meccaniche che dipendono dalle direzioni lungo le quali tali proprietà sono misurate.

Il materiale è detto invece *non omogeneo* se i coefficienti C_{ij} cambiano da punto a punto e dunque dalla posizione $P(x, y, z)$ nel corpo C .

Considerazioni sull'energia elastica ci garantiscono la simmetria della matrice C :

$$C_{ij} = C_{ji}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Le costanti elastiche indipendenti sono dunque 21.

La legge di Hooke è in maniera alternativa scrivibile esprimendo le deformazioni in termini delle tensioni, nella seguente forma:

$$\epsilon = S \sigma \quad (2.11)$$