



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

**Appunti universitari**

**Tesi di laurea**

**Cartoleria e cancelleria**

**Stampa file e fotocopie**

**Print on demand**

**Rilegature**

NUMERO : 304

DATA : 20/06/2012

# A P P U N T I

STUDENTE : Alessio

MATERIA : Strutture Aeronautiche teoria + esercizi

Prof. Di Sciuva

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

# STRUTTURE AERONAUTICHE

Di Scavina - Giuseppe

## ANNO ACCADEMICO 2011/2012

### CORSO DI STRUTTURE AERONAUTICHE

#### CALENDARIO SINTETICO DI LEZIONI ED ESERCITAZIONI

Sett.	Martedì 08:30 – 11:30 [2N]	Giovedì 14:30 – 17:30 [2N]
1°	06-03	08-03
2°	13-03	15-03
3°	20-03	22-03
4°	27-03	29-03
5°	03-04	05-04
6°	10-04	12-04
7°	17-04	19-04
8°	24-04	26-04
9°	01-05	03-05
10°	08-05	10-05
11°	15-05	17-05
12°	22-05	24-05
13°	29-05	31-05
14°	05-06	07-06
15°	12-06	14-06

15/05/07 - esercitazione

Esercitazione in Aula  
Esercitazione numerica presso LAIB 3

18 aprile  
8.30 - 20.00  
aula 20 c } esercitazione  
laboratoriale


Esame


22/06 8.30-11.00 IL } scritto  
11/06 8.30-11.00 IL }


orale con successive + 25/06 } 3 prof. a fare  
(dal mattino in poi 13/04 o 16/04) fare l'orale  
tutti in 2 giorni)


si può dare lo scritto al 1° appello e dare l'orale al 2°

<sup>1</sup> L'esercitazione sperimentale (prova di trazione) non è indicata nel calendario poichè verrà replicata in più date per le diverse squadre. All'inizio del corso verrà stilato il calendario dettagliato di tali prove.

<b>Scopo del Corso</b>	 Politecnico di Torino Laurea Specialistica in Ingegneria Aerospaziale	Prof. Marco Di Sciuva Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale
	<p>Nella formazione dell'Ingegnere aerospaziale questo Corso svolge un ruolo di ampliamento e approfondimento delle tematiche e metodologie illustrate nei corsi strutturali di base orientati all'analisi dello stato di tensione e deformazione delle strutture aeronautiche.</p> <p>Scopo del corso è fornire agli allievi le basi per poter affrontare in modo critico un calcolo di tipici componenti strutturali aeronautici basato sui metodi analitici classici e sul metodo degli elementi finiti. In particolare, il Corso si propone di fornire le metodologie per l'analisi del comportamento statico (calcolo dello stato di sollecitazione) e ai limiti di stabilità (carichi critici e modi di cedimento) di travi a guscio rinforzato e piastre in materiale metallico, composito e sandwich, irrigidite e non, elementi strutturali tipici delle costruzioni aerospaziali. Il Corso fornisce anche le nozioni fondamentali di dinamica strutturale. Tra le tecniche numeriche attualmente disponibili, particolare enfasi viene data al metodo degli elementi finiti.</p>	
	Corso di Strutture Aeronautiche	Lezione N° 1 Organizzazione Corso

<b>Scopo del Corso</b>	 Politecnico di Torino Laurea Specialistica in Ingegneria Aerospaziale	Prof. Marco Di Sciuva Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale
	<p><b>Prerequisiti:</b></p> <p>Il corso utilizza concetti, nozioni e metodologie dei corsi di meccanica di base, calcolo matriciale e numerico, costruzioni aeronautiche.</p> <p><b>Competenze attese:</b></p> <p>Comprensione delle principali problematiche inerenti la modellizzazione delle strutture aerospaziali; sviluppo delle capacità di eseguire valutazioni preliminari e di dettaglio di stati di tensione e deformazione in tipici componenti strutturali aeronautici.</p>	
	Corso di Strutture Aeronautiche	Lezione N° 1 Organizzazione Corso

Materiale didattico	 Politecnico di Torino Laurea Specialistica in Ingegneria Aerospaziale	Prof. Marco Di Sciuva Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale
	<b>Strumenti didattici e materiale di consumo</b>	
<p>Materiale didattico scaricabile dal sito docente. Traccia delle relazioni di calcolo effettuate durante le esercitazioni numeriche e pratiche. Fotocopie di grafici e tabelle necessari per lo svolgimento delle esercitazioni.</p> <p>Il materiale didattico suggerito copre gran parte degli argomenti trattati nel Corso, ma non tutti. Durante il Corso viene fornito materiale didattico integrativo.</p> <p>Appunti docente.</p> <p><b>Per approfondimenti e ulteriore consultazione</b></p> <p>T.H.G. Megson, <i>Aircraft Structures</i>, E. Arnold Ed., 1990. R.M. Jones, <i>Mechanics of Composite Materials</i>, McGraw-Hill Kogakusha, Ltd., 1975. G.J. Simitses, <i>An Introduction to Elastic Stability of Structures</i>, Printice-Hall, Inc., 1976. H.D. Curtis, <i>Fundamentals of Aircraft Structural Analysis</i>, WCB/McGraw-Hill, Ltd., 1997. J.N. Reddy, <i>An Introduction to the Finite Element Method</i>, McGraw-Hill Book Company, Ltd., 1984.</p>		
Corso di Strutture Aeronautiche		Lezione N° 1 Organizzazione Corso

Modalità esame	 Politecnico di Torino Laurea Specialistica in Ingegneria Aerospaziale	Prof. Marco Di Sciuva Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale
	<b>Controllo dell'apprendimento e modalità d'esame</b>	
<p>Si andrà a verificare la conoscenza adeguata degli aspetti metodologici-operativi insegnati durante il corso e la capacità di interpretare e descrivere i problemi strutturali.</p> <p>L'esame consta di una prova scritta (votazione max 24/30) e di un colloquio orale (<math>\Delta = \pm 6/30</math>). Per poter sostenere il colloquio orale bisogna aver superato lo scritto con almeno 15/30. Il colloquio orale deve essere sostenuto in un appello della sessione in cui si è superata la prova scritta. L'esame si considera superato se la somma algebrica delle votazioni ottenute nelle due prove è non inferiore a 18/30. L'esito negativo del colloquio orale comporta il decadimento del voto ottenuto nella prova scritta.</p> <p>L'esame scritto consiste nella risposta a non più di tre domande nel tempo max di 90 minuti. Il colloquio orale dura circa un quarto d'ora e di norma consiste in due domande poste a ogni candidato, di cui una finalizzata ad approfondire gli argomenti sviluppati nelle esercitazioni.</p>		
Corso di Strutture Aeronautiche		Lezione N° 1 Organizzazione Corso

4)

max sicurezza e min peso fanno un po' a cazzotti, se inoltre voglio avere il costo min e veram. un casino (piu vincoli metto e piu si riduce l'insieme delle soluzioni possibili) -> per soddisfare al meglio questi requisiti servono tecnologie e metodologie di calcolo molto sofisticate.

Politecnico di Torino  
Laurea Specialistica in Ingegneria Aerospaziale

Prof. Marco Di Sciuva  
Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale

**IL PROGETTO STRUTTURALE**

Viene fatto a fronte di una specificazione che elenca i requisiti che debbono essere soddisfatti dal progetto.

Ha come obiettivo lo sviluppo di una struttura di basso peso capace di svolgere il compito assegnato, con la massima sicurezza, al minimo costo.

Corso di Strutture Aeronautiche

Lezione N° 2  
Il progetto strutturale

il progetto strutturale

peso  $w$   
forza di sostentaz.  $S$   
Devo avere  $S \geq w$   
Il peso e composto da:  
• CU (carico utile)  
• peso delle strutture  
• altro  
-> fissato  $w$  voglio che  $CU$  sia max, devo quindi min. mizzare il peso della struttura

altam. peso strutturale  $\approx 25\%$  del peso a vuoto

(\*)  $\frac{P}{A} = \sigma_{\text{carico}}$

se  $\sigma_{\text{car.}} < \sigma_{\text{amm}}$  -> carico no in sicurezza

ovviamente tutto questo vale fino a qnd, per es, l'asta resta attaccata al soffitto (se no l'asta in se tiene ma viene giù tutto cmq)

Politecnico di Torino  
Laurea Specialistica in Ingegneria Aerospaziale

Prof. Marco Di Sciuva  
Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale

**Il tema del progetto strutturale**

Assegnato un certo numero di caratteristiche (requisiti di specifica) ed effettuate alcune scelte su altri parametri, mediante opportuni studi, anche di ottimizzazione multidisciplinare, derivare tutte le incognite del progetto, fra cui principalmente:

- 1 -> I PESI (TOTALE E DEI SINGOLI COMPONENTI)
- 2 -> LE CARATTERISTICHE GEOMETRICHE
- 3 -> TUTTE LE ALTRE CARATTERISTICHE NON FISSATE IN PRECEDENZA

Dipendenza molto complessa e non sempre esplicabile tra incognite e dati e parametri di progetto.

Corso di Strutture Aeronautiche

Lezione N° 2  
Il progetto strutturale

il tema del progetto strutturale

Il progetto e un'ARTE: non esiste una metodologia standard

In realta non e proprio così, per es:



asta di acciaio -> conoscendo il materiale conosco  $\sigma$   
 $P = \sigma_{\text{ammisibile}} A_{\text{min}}$  -> ricavo la sezione minima  
-> data la lunghezza  $h$  calcolo la quantita di acciaio necessaria  
NB. peso usare qnt formula anche per fare una verifica (\*)

Politecnico di Torino  
Laurea Specialistica in Ingegneria Aerospaziale

Prof. Marco Di Sciuva  
Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale

### FASI DEL PROGETTO

**FASE A - STUDIO DI FATTIBILITÀ**  
**FASE B - DEFINIZIONE DEL PROGETTO**  
**FASE C/D - SVILUPPO E COSTRUZIONE**

Non c'è un taglio netto tra una fase e l'altra ma molte operazioni vengono ripetute più volte per dare risultati sempre migliori

Corso di Strutture Aeronautiche

Lezione N° 2  
Il progetto strutturale

Politecnico di Torino  
Laurea Specialistica in Ingegneria Aerospaziale

Prof. Marco Di Sciuva  
Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale

Fasi del progetto

### FASE A - STUDIO DI FATTIBILITÀ

**SCOPI**

- Valutare la fattibilità tecnica
- Identificare le problematiche tecniche
- Fare una stima dei probabili costi e durata della fase di sviluppo

Corso di Strutture Aeronautiche

Lezione N° 2  
Il progetto strutturale



Politecnico di Torino  
Laurea Specialistica in Ingegneria Aerospaziale

Prof. Marco Di Sciuva  
Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale

### FASE B - DEFINIZIONE DEL PROGETTO

Fasi del progetto

**INPUT**

- Risultati dello studio di fattibilità

**OUTPUT**

- Specifiche tecniche
- Definizione del piano e delle prove di sviluppo e qualifica
- Disegni ingegneristici
- Definizione della configurazione e dei materiali
- Stima della durata e delle risorse necessarie al completamento della fase di sviluppo

requisiti preliminari  
valutaz. tecniche che  
identificano le aree  
critiche e le caratteri-  
stiche del tipo di svi-  
luppo proposto  
stima della durata  
e delle risorse necessarie al  
completamento  
della fase di sviluppo

Corso di Strutture Aeronautiche

Lezione N° 2  
Il progetto strutturale

Politecnico di Torino  
Laurea Specialistica in Ingegneria Aerospaziale

Prof. Marco Di Sciuva  
Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale

### FASE C/D - SVILUPPO E COSTRUZIONE

Fasi del progetto

**SCOPI**

- Realizzare il piano di sviluppo e qualifica definito nella fase precedente
- Realizzare l'unità di volo

↑  
certificazione necessaria  
al volo del velivolo

Corso di Strutture Aeronautiche

Lezione N° 2  
Il progetto strutturale

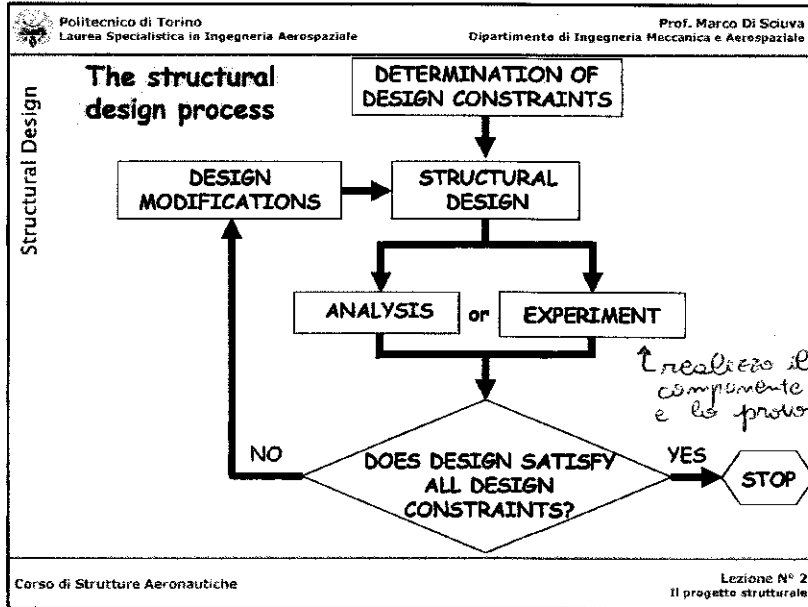
(\*) esempio:

$$I = \frac{bh^3}{12}$$

$$\alpha = \frac{Mh/2}{I}$$

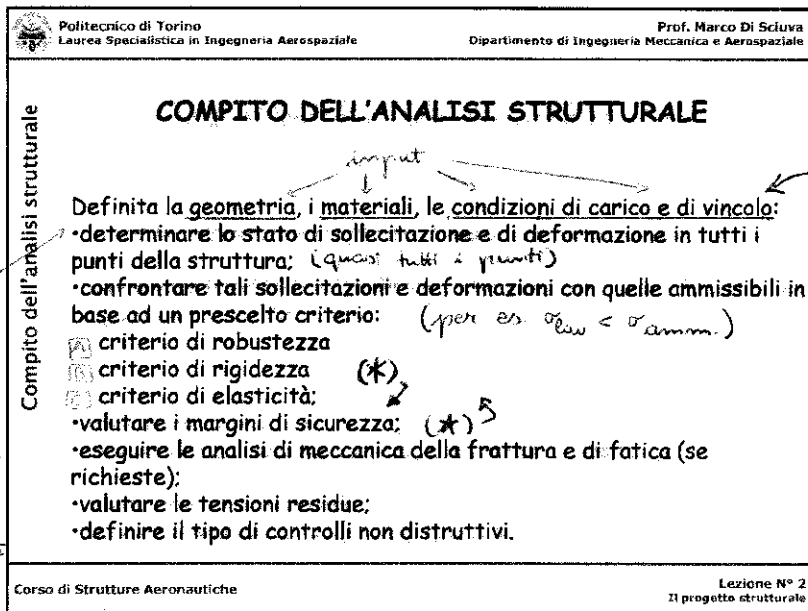
$$\epsilon = \frac{Mh/2}{IE}$$

M = momento flettente



Il processo strutturale consiste in analisi strutturali ripetute fino ad arrivare a convergenza

Trovo quindi una soluzione che soddisfa tutti i requisiti, ma non è detto che, per es, sia quella di peso minimo



robustezza: confronta le tensioni;  
rigidità: confronta le deformazioni;  
l'inverso della rigidità e la flessibilità

N.B. ANALISI ≠ PROGETTO

definisce la configurazione → geometria  
sceglie il materiale → vincoli  
individua le aree critiche

(\*) oltre alle sollecitazioni, deve confrontare anche le deformazioni.  
(per es. la lampadario appeso con molla si può abbassare anche se non si rompe niente → deve porre dei limiti all'abbassarsi del lampadario)

Politecnico di Torino  
Laurea Specialistica in Ingegneria Aerospaziale

Prof. Marco Di Sciuva  
Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale

### CRITERI DI VERIFICA STRUTTURALE A ROBUSTEZZA

tensione di lavoro  $\sigma_L$   
 $\sigma_L$  = tensione prodotta dai carichi a contingenza  
 $K_L$  = fattore di sicurezza (1.0 in molti casi)  
 $K_R$  = fattore di sicurezza a rottura (1.5 in molti casi)

Sono noti i rapporti  $\frac{\sigma_R}{\sigma_S}$  e  $\frac{K_R}{K_L}$

**CRITERI**

(A)  $\frac{\sigma_S}{K_L \sigma_L} \geq 1$  Se (1)  $\frac{\sigma_R}{\sigma_S} = \frac{K_R}{K_L}$  i due criteri coincidono  
 (B)  $\frac{\sigma_R}{K_R \sigma_L} \geq 1$  (2)  $\frac{\sigma_R}{\sigma_S} > \frac{K_R}{K_L}$  più stringente il criterio (A)  
 (3)  $\frac{\sigma_R}{\sigma_S} < \frac{K_R}{K_L}$  più stringente il criterio (B)

verifica a robustezza OK

Lezione N° 2  
Il progetto strutturale

Corso di Strutture Aeronautiche

se  $K_L > 1$  sto sovradimensionato, manda la struttura  $\rightarrow$  la render più pesante  $\Rightarrow K_L$  va preso  $> 1$  solo qui è veramente necessario

$\sigma_R$  e  $\sigma_S$  sono la  $\sigma$  di rottura e  $\sigma$  di ammortamento  $\rightarrow$  se conosco i materiali, conosco anche  $\sigma_R$  e  $\sigma_S$   $\rightarrow$  posso calcolare  $\frac{\sigma_R}{\sigma_S}$   
 $\frac{K_R}{K_L} = 1,5$   
 $\sigma_L$  lo calcoliamo

Solitam. però si dice che si può soddisfare uno qualsiasi dei due criteri perché per le leghe di alluminio  $\frac{\sigma_R}{\sigma_S} \approx 1,5$

$\rightarrow \frac{K_R}{K_L} = \frac{\sigma_R}{\sigma_S}$   
 e quindi i due criteri sono equivalenti

utilizza il criterio più cautelativo

08/03/2012

Politecnico di Torino  
Laurea Specialistica in Ingegneria Aerospaziale

Prof. Marco Di Sciuva  
Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale

### RIGIDEZZA

**CAPACITÀ DI SOPPORTARE I CARICHI DEFORMANDOSI POCO**

**DEFORMAZIONI SOTTO CARICO NON SUPERIORI AD UN CERTO VALORE**

Esempio: rigidità flessionale dell'ala; rigidità torsionale di un albero; rigidità flessio-torsionale delle palette, ecc.

Lezione N° 2  
Il progetto strutturale

Corso di Strutture Aeronautiche

$K_R m = N$   
 $\rightarrow P_R$  carico a robustezza  $\rightarrow \sigma_R$   
 $m \rightarrow P_N$  carico a contingenza  $\rightarrow \sigma_L$   
 $K_R \sigma_L \neq \sigma_R$  perché  $\sigma$  non è lineare (se fosse lineare:  $\frac{P_R}{P_N} = K_R$  e  $\frac{\sigma_R}{\sigma_L} = K_R$ )



14)

Politecnico di Torino  
Laurea Specialistica in Ingegneria Aerospaziale

Prof. Marco Di Sciuva  
Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale

**CRITERI DI PROGETTO STRUTTURALE DAMAGE TOLERANCE**

**Criteri di progetto**

Il nuovo approccio assume la presenza di difetti nella struttura. Esso è basato sul criterio di damage-tolerance, che può essere così enunciato: il progetto strutturale deve garantire che un difetto iniziale, presente nella struttura, non cresca durante la vita di esercizio prevista, fino a provocare rotture catastrofiche.

Prevede anch'esso due approcci:

- **sicurezza nella rottura (fail-safe):** come prima.
- **crescita lenta della cricca (slow crack growth):** verifica la capacità della struttura ad operare in presenza di difetti che crescono, sotto i carichi operativi e le condizioni ambientali, senza però raggiungere nel periodo di tempo specificato le dimensioni critiche. → probl. se conosco la vel. di propagaz. della cricca, quindi

Corso di Strutture Aeronautiche

Lezione N° 2  
Il progetto strutturale

Non è  
Crescita  
lenta della cricca

la vel. di propagaz. era raggiunge una lunghezza  $l_p$  → diventa instabile → per sapere dopo qnt tempo bisogna sostituire il pezzo dovrei conoscere la lunghezza iniziale della cricca  $l_i$ .

Politecnico di Torino  
Laurea Specialistica in Ingegneria Aerospaziale

Prof. Marco Di Sciuva  
Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale

**CRITERI DI PROGETTO STRUTTURALE DAMAGE TOLERANCE**

**From FAR Part 25.571**

**Criteri di progetto**

FAR Part 25.571 and advisory guidelines require that damage tolerance evaluation be made for all commercial aircraft designs.

Simply put, damage tolerance refers to the ability of a structure to prevent preexisting or developing cracks from causing structural failure, which threatens the integrity of the structure.

Structure is typically defined as damage tolerant if damage can be detected and repaired before residual strength falls below the level set by regulatory agencies. This level is defined as the **Limit Load** capability of the aircraft.


Corso di Strutture Aeronautiche


Lezione N° 2  
Il progetto strutturale

Ovviamente si cerca di fare in modo che qnt lunghezza iniziale sia minima, ma va rminimata con strumentaz. di laboratorio. Il probl. era e' la risoluzione minima degli strumenti che utilizzo → se con la mia strumentaz. non trovo difetti, assumo che la dimensione  $l_i$  sia pari alla risoluzione del mio strumento → nel tempo che <sup>avviso</sup> riprevisto essere la vita del compon. la cricca non raggiunge  $l_p$  → posso allora decidere le ore di vita rimaste

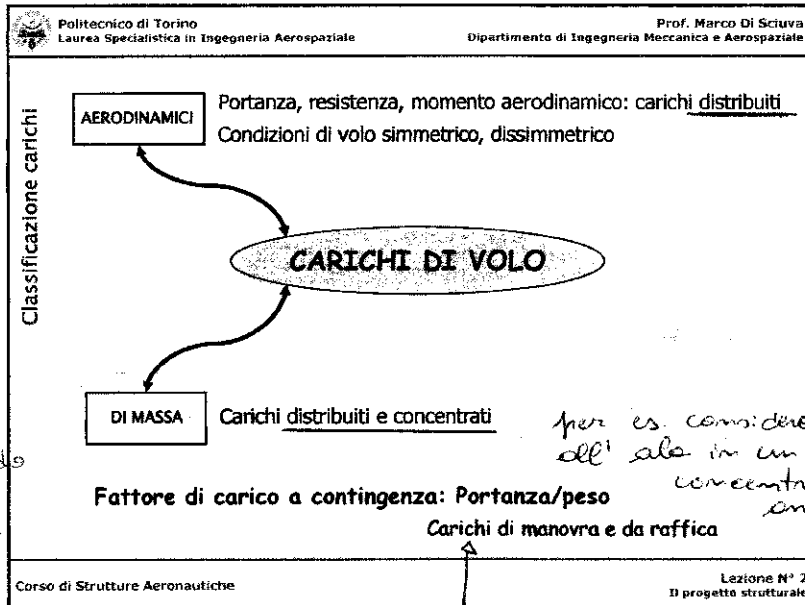
Si usano i 3 criteri di verifica e il progettista cerca di ridurre il rischio che parametri che non si possono controllare in sede di progetto portino alla catastrofe (damage tolerance)

questo modo di pro. cedere purtroppo non è affatto economico → mica → non lo si usa per velivoli civili

Effetti termici	 Politecnico di Torino Laurea Specialistica in Ingegneria Aerospaziale	Prof. Marco Di Sciuva Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale
	<b>EFFETTI TERMICI</b>	
	<p>Per esempio, nei motori i fenomeni legati al riscaldamento, a causa degli elevati valori delle temperature di equilibrio, richiedono accurate valutazioni soprattutto nelle zone soggette a tensioni rilevanti.</p> <p><b>Principali effetti della temperatura sui materiali</b></p> <ul style="list-style-type: none"><li>· Per carichi di breve durata: <u>decadimento delle caratteristiche</u> (tensioni di rottura, fatica e modulo elastico). Si richiedono materiali resistenti alla temperatura.</li><li>· Per carichi di lunga durata: scorrimento viscoso (<u>creep</u>)</li></ul> <p><b>Principali effetti temperatura sulle strutture</b></p> <ul style="list-style-type: none"><li>· Tensioni termiche</li></ul> <p>Lo scorrimento sotto carichi di lunga durata e le tensioni termiche richiedono <u>adeguate soluzioni strutturali</u>:</p> <ul style="list-style-type: none"><li>· <u>consentire le deformazioni termiche</u></li><li>· <u>evitare le concentrazioni di tensioni</u></li></ul>	
	Corso di Strutture Aeronautiche	Lezione N° 2 Il progetto strutturale

Effetti termici	 Politecnico di Torino Laurea Specialistica in Ingegneria Aerospaziale	Prof. Marco Di Sciuva Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale
	<b>CARICHI TERMICI</b>	
	<p><b>Il problema dei carichi termici si compone essenzialmente di tre aspetti:</b></p> <ol style="list-style-type: none"><li>① · <u>determinazione dei flussi di calore incidenti sulla struttura</u></li><li>② · <u>determinazione delle temperature che la struttura raggiunge per effetto di tali flussi</u></li><li>③ · <u>determinazione dello stato di sollecitazione conseguente.</u></li></ol>	
	Corso di Strutture Aeronautiche	Lezione N° 2 Il progetto strutturale

18)



in realtà, secondo la normativa, il fattore di carico a contingenza è il rapporto tra la componente verticale della forza aerodinamica agente sul velivolo ed il peso, ma la differenza è minima!

per es. considerare il motore attaccato all'ala in un pt solo → carichi concentrati, ma x altre analisi m. serve considerare il motore come un carico distribuito (mm e' mica un punto sul serio!)

Generati perché il velivolo si muove

Politecnico di Torino  
Laurea Specialistica in Ingegneria Aerospaziale

Prof. Marco Di Sciuva  
Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale

**Typical limit load factors**

Aircraft loads

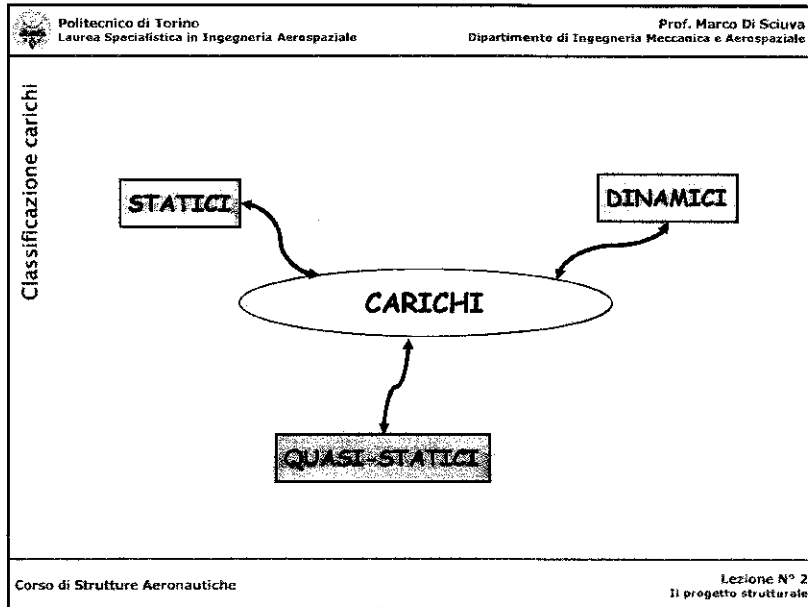
	$n_{\text{positive}}$	$n_{\text{negative}}$
General aviation-normal	2.5 to 3.8	-1 to -1.5
General aviation-utility	4.4	-1.8
General aviation-acrobatic	6	-3
Homebuilt	5	-2
Transport	3 to 4	-1 to -2
Strategic bomber	3	-1
Tactical bomber	4	-2
Fighter	6.5 to 9	-3 to -6

Corso di Strutture Aeronautiche

Lezione N° 2  
Il progetto strutturale

hanno fattori di carico più impattanti

Per qnt riguarda la STORIA TEMPORALE dei CARICHI, la suddivisione è la seguente:



Politecnico di Torino  
Laurea Specialistica in Ingegneria Aerospaziale  
Prof. Marco Di Sciuva  
Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale

Classificazione carichi

**CARICHI STATICI**

Forze costanti applicate alla struttura per tutta o una parte della sua vita.  
Esempio: forza peso. (in realtà varia, ma di poco!)

Normalmente si assimilano a carichi statici anche carichi variabili nel tempo, se la loro applicazione è sufficientemente lenta e dura un tempo sufficientemente lungo.  
Esempio: pressurizzazione, gradienti termici.

Necessità di tenere in conto eventuale affaticamento.

La fusoliera!  
x es si gonfia e si sgonfia durante la salita e la discesa.  
L' anche se qnt variaz. sono lente (carico statico) ci sono cmq dei cicli => fatica


Corso di Strutture Aeronautiche

Lezione N° 2  
Il progetto strutturale

Per la seconda legge di Newton  $F = m \cdot a$

→ un carico può essere considerato statico se non induce accelerazioni sul corpo (opp. induce acceleraz. trascurabili)

↳ per es. dove la struttura si becca i gas di scarico a temp. elevatissime ci sono delle acceleraz. ma poi la struttura si "abituava" a qnt temp. → qnt carico può essere considerato stazionario

Fatica	 Politecnico di Torino Laurea Specialistica in Ingegneria Aerospaziale	Prof. Marco Di Sciuva Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale
	<b>FATICA</b> <b>CONCENTRAZIONI - DENTENIONI</b>	
<p><u>Rottura a carichi inferiori a quello di rottura statica, quando detti carichi variano nel tempo.</u></p> <p>In prima approssimazione, <b>indipendenza del fenomeno della fatica da:</b></p> <ul style="list-style-type: none"><li>- tempo impiegato a compiere ciascuna alternanza di carico</li><li>- eventuali pause tra le alternanze</li></ul> <p><b>Concetti coinvolti:</b> limite di fatica, accumulo del danno, incubazione, propagazione.</p> <ol style="list-style-type: none"><li>① <b>Limite di fatica:</b> valore del carico ciclico al disotto del quale la rottura non si verifica più per quanto si prolunghi la prova.</li><li>② <b>Accumulo del danno:</b> alterazione (degradazione) progressiva del materiale</li><li>③ <b>Incubazione:</b> fase del fenomeno in cui non si ha manifestazione visibile del danno.</li><li>④ <b>Propagazione:</b> fase del fenomeno in cui si ha manifestazione visibile del danno (innesco e conseguente propagazione delle fessure).</li></ol>		
Corso di Strutture Aeronautiche		Lezione N° 2 Il progetto strutturale

normativa → carichi

progettista → vincoli e materiali

materiali e schema di calcolo (modello)

↳ come si scelgono?

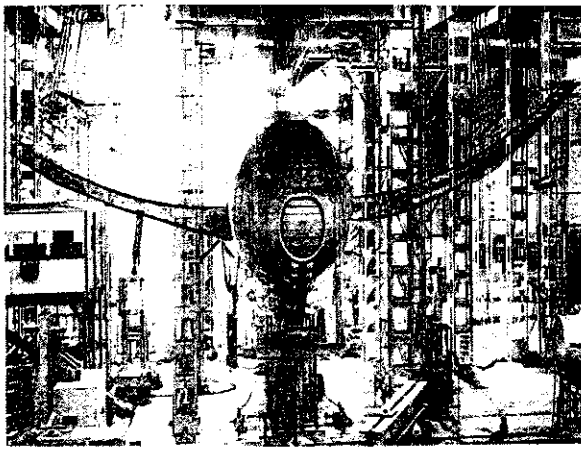


Struttura a guscio rinforzata  $\rightarrow$  skin (rivestim. sottile) + correnti  
 (elementi longitudinali di rinforzo) + costole (elementi trasversali nella dca)  
 e ordinate elem. trasversali nella fusoliera  
 $\rightarrow$  il più semplice modello  $\times$  for opt e il modello TRAVE o SEMIGUSCIO  
 IBEALE; trave = solido allungato in cui 1 direzione e' preponderante

Politecnico di Torino  
 Laurea Specialistica in Ingegneria Aerospaziale

Prof. Marco Di Sciuva  
 Dipartimento di Ingegneria Aeronautica e Spaziale

REGULATIONS - Introduction



Corso di Strutture Aeronautiche

Lezione N° 3  
 Regulations

Politecnico di Torino  
 Laurea Specialistica in Ingegneria Aerospaziale

Prof. Marco Di Sciuva  
 Dipartimento di Ingegneria Aeronautica e Spaziale

REGULATIONS - Introduction


### Factors to Consider


When substantiating the static strength of an aircraft structural design, applicants should consider the following:

- ① Critical load cases and associated failure modes;
- ② Effects of environment, repeated loading, manufacturing tolerance, and material and process variability;
- ③ Manufacturing defects and service damage that are not detectable by the anticipated inspection methods (as well as those defects or damage that are permitted by the quality control or maintenance documents of the product);
- ④ Desired repair scenarios.

Corso di Strutture Aeronautiche

Lezione N° 3  
 Regulations

REGULATIONS - Section 23.305	 <b>Politecnico di Torino</b> Laurea Specialistica in Ingegneria Aerospaziale	<b>Prof. Marco Di Sciuva</b> Dipartimento di Ingegneria Aeronautica e Spaziale
	<b>Sec. 23.305 Strength and deformation.</b> <p>(a) <b>The structure must be able to support limit loads without detrimental, permanent deformation. At any load up to limit loads, the deformation may not interfere with safe operation.</b></p> <p>(b) <b>The structure must be able to support ultimate loads without failure for at least three seconds, except local failures or structural instabilities between limit and ultimate load are acceptable only if the structure can sustain the required ultimate load for at least three seconds. However, when proof of strength is shown by dynamic tests simulating actual load conditions, the three second limit does not apply.</b></p>	
Corso di Strutture Aeronautiche		Lezione N° 3 Regulations

REGULATIONS - Section 23.307	 <b>Politecnico di Torino</b> Laurea Specialistica in Ingegneria Aerospaziale	<b>Prof. Marco Di Sciuva</b> Dipartimento di Ingegneria Aeronautica e Spaziale
	<b>Sec. 23.307 Proof of structure.</b> <p>(a) Compliance with the strength and deformation requirements of Sec. 23.305 must be shown for each critical load condition. <b>Structural analysis may be used only if the structure conforms to those for which experience has shown this method to be reliable. In other cases, substantiating load tests must be made. Dynamic tests, including structural flight tests, are acceptable if the design load conditions have been simulated.</b></p> <p>(b) Certain parts of the structure must be tested as specified in Subpart D of this part.</p>	
Corso di Strutture Aeronautiche		Lezione N° 3 Regulations

Politecnico di Torino  
Laurea Specialistica in Ingegneria Aerospaziale

Prof. Marco Di Sciuva  
Dipartimento di Ingegneria Aeronautica e Spaziale

REGULATIONS - Section 23.613

### Sec. 23.613 Material strength properties and design values (cont.)

(c) The effects of temperature on allowable stresses used for design in an essential component or structure must be considered where thermal effects are significant under normal operating conditions.

(d) The design of the structure must minimize the probability of catastrophic fatigue failure, particularly at points of stress concentration.

(e) Design values greater than the guaranteed minimums required by this section may be used where only guaranteed minimum values are normally allowed if a "premium selection" of the material is made in which a specimen of each individual item is tested before use to determine that the actual strength properties of that particular item will equal or exceed those used in design. MIL-HDBK-5H

Corso di Strutture Aeronautiche

Lezione N° 3  
Regulations

Ogni volta c'è una iterazione, che può anche portare a stravolgere il progetto

Politecnico di Torino  
Laurea Specialistica in Ingegneria Aerospaziale

Prof. Marco Di Sciuva  
Dipartimento di Ingegneria Aeronautica e Spaziale

REGULATIONS - Composites

### Building Block Approach

Corso di Strutture Aeronautiche

Lezione N° 3  
Regulations

Nella prassi di calcolo molti di quei livelli, soprattutto quelli più bassi, vengono saltati (a meno che ci siano prove.)

Componenti → se il disegno non stravolge l'esperienza già presente si può fare tranquillamente riferimento ai modelli di calcolo già sviluppati

caratterizz. dei materiali (provini)

si analizza lo stato di tensione di dettaglio: se mi fido bene, se no faccio delle prove

Politecnico di Torino  
Corsi Specialistici in Ingegneria e Architettura
Prof. Marco Di Giuseppe  
Ingegneria Strutturale e Sismica

### PROVE DI CARATTERIZZAZIONE MATERIALI

Elastica

**Proprietà fisiche:**  
densità, coefficiente di dilatazione termica, conducibilità, calore specifico

**Proprietà meccaniche:**  
tensioni di snervamento in trazione e compressione, tensioni di rottura in trazione e compressione, rapporto di Poisson, moduli di elasticità, allungamento percentuale a rottura, dipendenza dalla temperatura delle caratteristiche

**Meccanismi di rottura:**  
fatica, frattura fragile, corrosione sotto tensione

}  $\rho, \alpha, \kappa, c_p$

}  $\sigma_s, \sigma_c, \nu, E, E_{\infty}$

Corso di Strutture e Sismologia
Lezione N° 2  
11/04/2016

### 3.1 UNIAXIAL THERMOMECHANICAL CONSTITUTION OF SOLIDS

Consider the specimen with load  $P$  as shown in Fig. 3.1a. Experimentation will show that if the specimen is large compared to the size of observable flaws in the material, then for the gage length  $l$  of the specimen, a free-body diagram may be constructed with  $P$  evenly distributed over the surface of the cut sections regardless of whether or not  $P$  is applied evenly at the ends of the bar. Thus, it will be recalled that the state of stress in the free-body section of the bar, called the test section, is uniaxial and homogeneous, and is given by

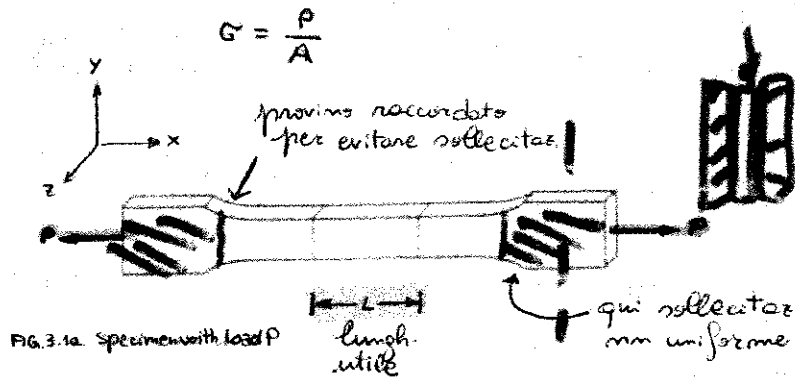


FIG. 3.1a. Specimen with load  $P$

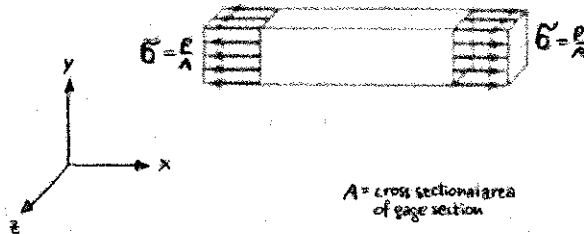


FIG. 3.1b. Free-body diagram of gage section.

Therefore, given the external loading on a uniaxial bar, the internal state of stress can be determined using the above equation and without regard to material makeup of the bar.

Since the strain field is also homogeneous in the gage section, the axial strain  $\epsilon_{xx}$  may be determined assuming small displacements from equation (2.38) by

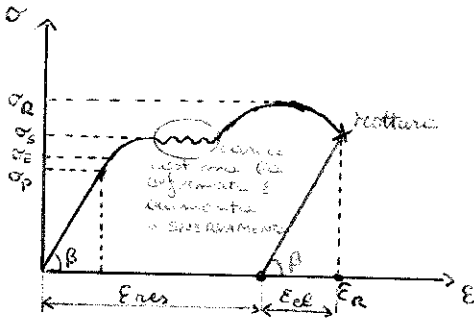
$$\epsilon_{xx} = \frac{u(x=L) - u(x=0)}{L} = \frac{\Delta L}{L}$$

where  $\Delta L$  is the  $x$  component of displacement in the gage section.

La legge di Hooke dà la relazione  $\sigma - \epsilon$  nel campo lineare  $\rightarrow \sigma = E \epsilon$

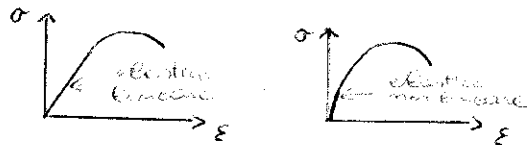
$E =$  modulo di elasticità longitudinale del materiale

$\rightarrow$   $\epsilon$  è il coeff. angolare della semiretta che rappresenta la parte lineare della curva  $\sigma - \epsilon$



$E = \tan \beta$   
 $\sigma_p =$  tensione al limite di proporzionalità  
 $\sigma_s = \sigma$  di snervamento ( $\sigma_y$   $y =$  yield)  
 $\sigma_E =$  tensione al limite di elasticità  
 (tra  $\sigma_p$  e  $\sigma_E \rightarrow$  comportam. elastico  
 non lineare, da  $\sigma_E$  in poi  $\rightarrow$  comportam.  
 non elastico non lineare)  
 di solito  $\sigma_p \approx \sigma_E \rightarrow$  non si fa distinzione

Alcuni materiali hanno un comportam. (elastico) non lineare già da subito



Comportam. elastico  $\rightarrow$  il provino caricato e scaricato torna nella configuraz. iniziale.

Si ha rottura ad un valore inferiore al valore max sopportabile perché nella zona di strizione (dove si ha la max plasticizzazione) si ha una  $A$  molto inferiore ad  $A_0$  (che aveva usato per calcolare  $\sigma$ )  $\rightarrow$  la tensione vera in realtà non è quella del grafico, ma assume un valore maggiore

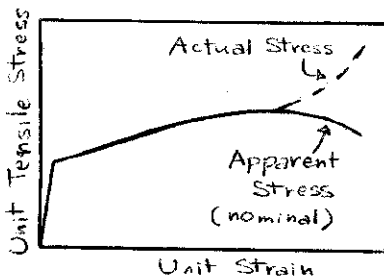


Fig. B4.2

Nei datasheet viene fornito il valore max della curva come  $\sigma_p$ , ma il valore di  $\epsilon_R$  è quello del punto finale della curva!

$\rightarrow$  domanda d'esame (scritto)

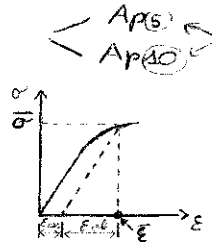
$E_{res} = E_{residua} \rightarrow$  è qll che si ha qnd il provino si rompe (i 2 pezzi si accorciano  $\rightarrow E_{res} < E_R$ ) opp. se scarico il materiale un attimo prima che il provino si rompa  $\rightarrow E_R = E_{res} + E_{el}$  ( $E_{el} = E$  elastica);  $E_{res}$  del punto di rottura (cise-calcolata scaricando il provino appena prima della rottura) moltiplicata per 100 è l'allungam. % di rottura  $A_p$

Domanda d'esame:

dato una certa  $\sigma$  disegnare il valore di deformaz.  $\epsilon$  ed indicare sul diagramma l'aliquota elastica di qll deformazione e l'aliquota residua.

**INCREDIMENTO**

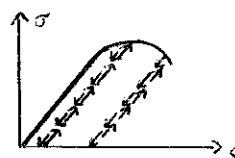
scarico-ricarico il materiale per un po' di cicli  $\rightarrow$  poi in lab. si trova un diagramma in cui si ha una  $\sigma_p$  superiore a qll di partenza  $\rightarrow$  tratto lineare + lungo, ma tratto plastico più corto.



rapporto tra lunghezza utile e diametro del provino (se sezione variabile)

$A_p \uparrow \rightarrow$  migliorano le caratt. di resistenza a fatica

(qnd materiale si plasticizza l'energia serve a far più grande la cricca)



in un certo pt, per montare, avere in equilibrio il sistema, devo scaricare anche la carica (controllo la forza che oppone al movimento) e mi è una sola, c'è una forte attrazione centrale del movimento di aumento di tensione anche se mi c'è aumento di carico

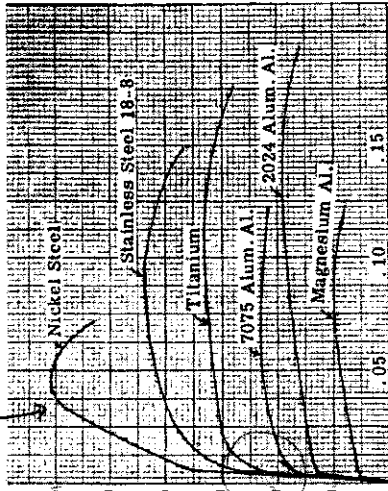


Fig. B1.3 Stress-Strain Curves. Entire Range.

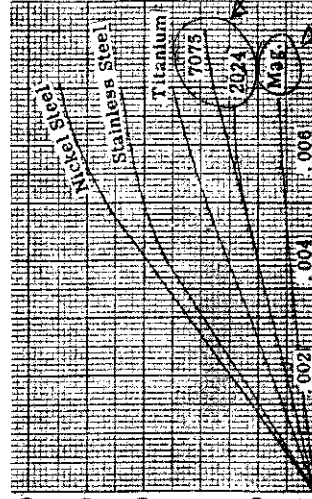


Fig. B1.4 Stress-Strain Curves. Initial Portions.

Il modulo di elasticità (E) cambia da 1 lega all'altra (si parlate di moduli di elasticità più bassi)

Questi acciai non sono ideali per la saldatura; però in alcuni casi, l'aggiunta di elementi particolari fornisce una certa saldabilità.

Un tipico acciaio da bonifica è il 30CD4 (designazione attuale 38NiCrMo); è il molibdeno che conferisce una certa saldabilità. Questo tipo di acciaio è utilizzato per le gambe di forza dei carrelli, per la bulloneria e per gli spinotti (sono l'equivalente della vite senza filettatura; si ricordi che si definisce bullone l'insieme vite-dado); in base al valore di A<sub>p</sub> si possono realizzare con questo acciaio pezzi di forma tormentata (ad esempio, le zone di attacco di sforzi concentrati).

**Acciai saldabili:** si prestano per la realizzazione di giunzioni per saldatura, in aeronautica si utilizza quasi esclusivamente quella autogena ossiacetilenica.

Tipici acciai saldabili sono il 30CD4 (0,3% di carbonio, 1% di cromo e una certa quantità di molibdeno), il 20CD4, il 25MC6 e il 20M6.

Questi tipi di acciai si usano per i tubi a parete sottile delle strutture reticolari delle fusoliere, per le strutture reticolari dei castelli motore, per le aste di comando e per gli attacchi a sforzi concentrati semplici, fatti con elementi in lamiera d'acciaio sovrapposti e successivamente piegati.

	γ [kg/dm <sup>3</sup> ]	σ <sub>yk</sub> [kg/mm <sup>2</sup> ]	E [kg/mm <sup>2</sup> ]	A <sub>ps</sub>	L <sub>r</sub> [km]
Leghe di Mg	1,8	28-32	4600	10-15	≈ 16
Leghe di Al	2,8	42-45	7300	14-20	≈ 15
Leghe di titanio	4,5	55-65	7300	7-11	≈ 23
Leghe Fe-C	7,8	100-120	10500	13-18	≈ 24
bonifica saldabili	7,8	≥ 120	21000	14-20	≥ 15
		50-80	21000	≥ 20	≈ 8

L'allungamento percentuale a rottura A<sub>ps</sub> è determinato su una provetta cilindrica il cui tratto utile è cinque volte il diametro.

$$A_p = 100 \cdot \frac{\Delta L_r}{L_r} = A_p \text{ allungamento percentuale}$$

Lunghezza di rottura L<sub>r</sub>

$$L_r = \frac{\sigma_k}{\gamma} \leftarrow \text{peso specifico del materiale [kg/dm<sup>3</sup>]}$$

Andrebbe superato il tratto di linearità - si può avvenire  $\sigma = E \cdot \epsilon$  - modulo tangente (curvatura della retta nel tratto lineare) E<sub>g</sub> = tangente

$$\delta L_A = P = \text{peso massimo volume nella sezione di incontro}$$

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{\delta L_A}{L_r} = \delta L$$

$$\sigma_k = \delta L_r$$

La composizione percentuale

DURAL conobbe migrazione del l'ERGAL, ecc. scelto che per il campo plastico le strutture tese di una lega l'ERGAL (2024) dove c'è fatica

che per Fig. B1.4 Stress-Strain Curves. Initial Portions. che si muove, ma il suo peso è sempre lo stesso e comincia a scivolare in tutto il materiale



**Static Strength Analysis**

**"A" and "B" Basis Allowables.** The conditions for static strength analysis using "A" or "B" basis allowables are as follows:

(A) The part should be designed, analyzed, and tested using "A" basis allowables whenever its failure would result in the loss of the structural integrity of the component involved (i.e., inability of the airplane structure to carry limit load). Such structure is possible when applied loads are distributed within an assembly through a single load path or a single member whose failure is catastrophic.

(B) Damage tolerant or fail-safe structures in which the failure of individual elements would result in applied loads being safely redistributed to other load carrying members without exceeding the limit load capability of the airplane structure, may be designed, analyzed, and tested using "B" basis allowables.

Prof. Marco Di Sciova  
Dipartimento di Ingegneria Aerospaziale e Spaziale  
Pubblicazione di Torino  
Laurea Specialistica in Ingegneria Aerospaziale

Lezione N° 3  
Regolazioni

**REGULATIONS - Section 23.613**

**Sec. 23.613 Material strength properties and design values.**

(a) Material strength properties must be based on enough tests of material meeting specifications to establish design values on a statistical basis.

(b) Design values must be chosen to minimize the probability of structural failure due to material variability. Except as provided in paragraph (c) of this section, compliance with this paragraph must be shown by selecting design values that ensure material strength with the following probability:

(1) Where applied loads are eventually distributed through a single member within an assembly, the failure of which would result in loss of structural integrity of the component; 99 percent probability with 95 percent confidence (basis A).

(2) For redundant structure, in which the failure of individual elements would result in applied loads being safely distributed to other load carrying members; 90 percent probability with 95 percent confidence (basis B).

Prof. Marco Di Sciova  
Dipartimento di Ingegneria Aerospaziale e Spaziale  
Pubblicazione di Torino  
Laurea Specialistica in Ingegneria Aerospaziale

Lezione N° 3  
Regolazioni

MIL-HDBK-5H, Change Notice 1  
1 October 2001

**9.2 ROOM-TEMPERATURE DESIGN PROPERTIES**

**9.2.1 INTRODUCTION** — This section contains detailed procedures for the determination of room-temperature design properties.

**9.2.2 DESIGNATIONS AND SYMBOLS** — Designations and Symbols presented in this section are applicable throughout the MIL-HDBK-5, but are particularly pertinent to computation and presentation of room-temperature mechanical properties.

**9.2.2.1 Data Basis** — There are four types of room-temperature mechanical properties included in MIL-HDBK-5. They are listed here, in order, from the least statistical confidence to the highest statistical confidence, as follows:

*Typical Basis* — A typical property value is an average value and has no statistical assurance associated with it.

*S-Basis* — This designation represents the specification minimum value specified by the governing industry specification (as issued by standardization groups such as SAE Aerospace Materials Division, ASTM, etc.) or federal or military standards for the material. (See MIL-STD-970 for order of preference of specifications.) For certain products heat treated by the user (for example, steels hardened and tempered to a designated  $R_n$ ), the S-basis value may reflect a specified quality-control requirement. Traditionally, the statistical assurance of S-basis values has not been known. However, the statistical assurance associated with S-basis values established since 1975 is known within the limitations of the qualification sample and the analysis method used to evaluate the data. Within those constraints S-basis values established since 1975 may be viewed as estimated A-basis values.

Wherever possible, the statistical validity of these estimated A-basis (S-basis) values should be verified as soon as sufficient tests and lots of material are available from the major producers to establish more rigorous A-basis properties by the methods described in MIL-HDBK-5. If the more rigorous A-basis property exceeds the S-basis value, the major suppliers and users of the material may benefit from updating or replacing the specification because then they will be able to take full advantage of the capabilities of the material within the design allowable tables in MIL-HDBK-5.

In the opposite (and fortunately infrequent) situation where the more rigorous A-basis property falls well below the S-basis value, the repercussions may be greater for both the user and producer. Actual design margins (as compared to originally perceived design margins) on primary structure may be reduced below desirable levels if the S-basis value must be downgraded to a lower A-basis value. The perceived adequacy of a material for a particular application may be reduced if the S-basis value is reduced to match a lower A-basis value. However, under most circumstances, the S-basis value should be reduced to match the A-basis value if process improvements cannot be instituted to raise the A-basis value to the level of the original S-basis value.

*R-Value* — This designation indicates that at least 99 percent of the population of values is expected to equal or exceed the statistically calculated mechanical property value, with a confidence of 95 percent. This statistically calculated number is computed using the procedures specified in Section 9.2.

*A-Basis* — The lower value of either a statistically calculated number, or the specification minimum (S-basis). The statistically calculated number indicates that at least 99 percent of the population is expected to equal or exceed the statistically calculated mechanical property value with a confidence of 95 percent. This statistically calculated number is computed using the procedures specified in Section 9.2.



42

coeff. di dilataz. termica  
 - acciai 12-10-6 °C  
 - leghe Al 24-10-6 °C  
 in 1° appross.  
 Dilataz.  
 $\epsilon_T = \alpha \Delta T$

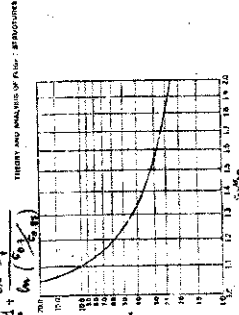


Fig. 14. Heat treatment of a section of an alloy (Al-Cu).  
 Curves show the dependency of these parameters upon temperature for a wide variety of materials may be found in Ref. 7. Tabulations of these parameters are also given in Ref. 8, and the analysis experiments for the length and weight stability from Ref. (8-9) are full and from the (8-3)  
 $R = 1 + \frac{1}{100} \frac{\Delta T}{T_0}$  (8-11)  
 $R = 1 + \frac{1}{100} \frac{\Delta T}{T_0} \frac{1}{100}$  (8-12)  
 These equations, still to be used in China, (11) to (13) for the location of resistance and plasticity in the plastic work.  
 In the third method, the two points at which the empirical equations and the actual experimental curves (Fig. 14). Doubling them is not a good idea, as the material may be anisotropic. It can be shown that  
 $r = \frac{1}{2} + 0.002 \left( \frac{\Delta T}{T_0} \right)^2$  (8-13)  
 $r = \frac{1}{2} + 0.002 \left( \frac{\Delta T}{T_0} \right)^2$  (8-14)  
 $r = \frac{1}{2} + 0.002 \left( \frac{\Delta T}{T_0} \right)^2$  (8-15)

MECHANICAL PROPERTIES OF MATERIALS  
 The mechanical properties of materials have been distributed in a function of temperature for a number of aircraft structural materials with an emphasis on high temperature materials. The data are presented in this section in a form which is suitable for use in the design of aircraft structures. The data are presented in a form which is suitable for use in the design of aircraft structures. The data are presented in a form which is suitable for use in the design of aircraft structures.

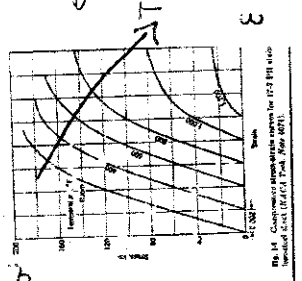


Fig. 14. Comparison of mechanical properties for 2024-T3 aluminum and 7075-T6 aluminum. (Ref. 10, p. 101)

**MATERIALI**

Caratteristiche richieste a un buon materiale per impieghi aerospaziali:

- alto valore del rapporto resistenza/peso e rigidità/peso
  - buona resistenza alle alte temperature
  - alte resistenze statiche residue in presenza di difetti
  - bassa sensibilità alla corrosione sotto tensione
  - alta resistenza a fatica, al creep e agli urti
  - bassa velocità di crescita del difetto
  - Elevati valori di duttilità ( $A_{10}$ )
- In aggiunta:
- disponibilità nel tempo
  - facilità di lavorazione e bassi costi di sviluppo e produzione
  - Bassa Variabilità delle proprietà

o<sub>R</sub> peso specifico del materiale

derivato in tanti elementi e alle caratteristiche meccaniche del materiale  
 es. rigidità e flessione di trave =  $EJ$  ( $J$  = momento d'inerzia della sezione trasversale attorno all'asse neutro) → elevate rapporti  $\frac{E}{\rho}$  (per materiali isotropici)  
 in generale, devono essere elevati i rapporti  $\frac{E}{\rho}$  e  $\frac{\sigma_{lim}}{\rho}$  (vedi grafico pag 34)

CREEP provoca danni alle strutture nei periodi di tempo con carichi statici. Per un lungo periodo di tempo (4-5 anni) la velocità di creep aumenta all'aumentare della temp.

PROPRIETA' DEI MATERIALI:  
 Non sempre i materiali hanno le stesse caratteristiche meccaniche e di compressione

materiali isotropici → si assume  $\nu = 0,33$  → si usa solo la prova di trazione. Servono solo 2 coeff per determinare il comportamento elastico del materiale  $\leq E, \sigma_{lim}$ . Ma essi sono legati tra loro!

$E \rightarrow$  trazione/compr. } caratteristiche elastiche  $G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{E}{2,6} \rightarrow$  di solito  $G \rightarrow$  taglio  $\nu = 0,3$   $\sigma_{lim}$

\* Normalmente, all'aumentare delle temp. le caratteristiche meccaniche dei materiali peggiorano

es.: le curve si appiattiscono → pendenza ↓ →  $E \downarrow \rightarrow G \downarrow$ ;  
 il campo lineare diminuisce → anche  $\sigma_p \downarrow \rightarrow$  il limite di elasticità ↓,  $\sigma_{lim}$  tensione max ↓

se è elevato → è elevata la lunghezza di rottura

deformazione in tanti elementi e alle caratteristiche meccaniche del materiale  
 es. rigidità e flessione di trave =  $EJ$  ( $J$  = momento d'inerzia della sezione trasversale attorno all'asse neutro) → elevate rapporti  $\frac{E}{\rho}$  (per materiali isotropici)  
 in generale, devono essere elevati i rapporti  $\frac{E}{\rho}$  e  $\frac{\sigma_{lim}}{\rho}$  (vedi grafico pag 34)

CREEP provoca danni alle strutture nei periodi di tempo con carichi statici. Per un lungo periodo di tempo (4-5 anni) la velocità di creep aumenta all'aumentare della temp.

Il diagramma dei fattori di carico viene tracciato punto punto secondo la quota ed il peso del velivolo. Poiché il diagramma è  $2D$  (mm è un punto) dovrei fare es. calcoli, ma posso calcolare anche solo dei punti caratteristici (es. vertici)

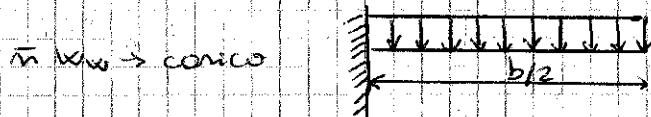
Esame → Supponiamo che, per un certo velivolo di un certo peso e che voli ad una certa quota, questo sia il diagramma di carico. Voglio verificare lo stato di tensione e deformazione di una semiala.

↓  
 Ho il modello TRAVE (trave e stabilizzatori)  
 Ho deciso quale punto del diagramma devo usare per fare i calcoli:



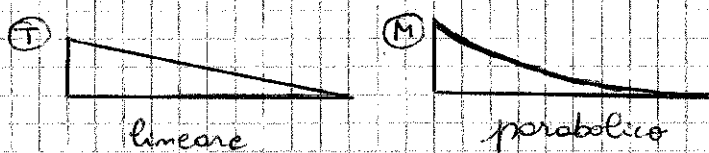
N.B. nel diagramma  $w =$  peso del velivolo

In prima approssimazione suppongo che il peso della semiala  $w$  sia uniformemente distribuito sulla semiala

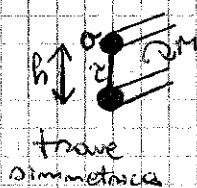


la portanza della semiala è  $L = \bar{m} w$

Ora calcolo i diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione:  $N=0 \rightarrow$  calcolo  $T$  ed  $M$ .



Ora voglio conoscere la sollecitazione in una data sezione, al cui schema è il seguente:



dal diagramma leggo la  $M$  della mia sezione, conosci  $h$ , so che il momento flettente  $M$  si trasforma in 2 sforzi normali:



$$M = N h \rightarrow N = \frac{M}{h}$$

$$A = \frac{N}{\sigma_{amm}}$$

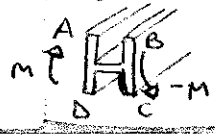
# COMPENDIO EQUAZIONI TRAVI

SOLLECITAZIONE	TENSIONE DEFORMAZIONE	
Trazione / Compressione N	$\sigma = \frac{N}{A}$ $\epsilon = \frac{N}{E \cdot A}$	EA = rigidezza assiale
Taglio T	$\bar{\tau}_m = \frac{T}{A \cdot \chi}$ $\bar{\gamma}_m = \frac{T}{G \cdot A \cdot \chi}$	GA = rigidezza a taglio
Flessione M	$\sigma = \frac{M \cdot y}{J}$ $\epsilon = \frac{M \cdot y}{E \cdot J}$	EJ = rigidezza flessionale
Torsione $M_t$	Sezione circolare: $\tau = \frac{M_t \cdot r}{J_p}$ $\theta = \frac{M_t}{G \cdot J_p}$	$J_p = J_t$ G $J_t$ = rigidezza torsionale $J_t$ = modulo di torsione
	Sezione chiusa a parete sottile: $q = \frac{M_t}{2 \cdot \Omega} \quad q = \tau \cdot s$ $\theta = \frac{M_t}{4 \cdot \Omega^2 \cdot G} \int \frac{dl}{s} = \frac{M_t}{G \cdot J_t}$ $J_t = \frac{4 \cdot \Omega^2}{\int \frac{dl}{s}}$	

*Handwritten notes:*  
 = 2 sezioni  
 come deriva  
 taglio medio  
 o per le linee  
 (arquitto) o  
 a parete  
 invece  
 $\tau_m = \frac{T}{A \cdot \chi}$   
 e un numero  
 o si usa  
 $\tau_m = \frac{T}{A \cdot \chi}$

*Handwritten note:*  
 $\Omega$  = area media della linea media della sezione (→ l'area deve essere chiusa - in grado di resistere alla torsione)

Flessione differenziale dei longheroni per assorbire la torsione nelle strutture in tela



sezione ad I: flessione differenziale



non può esistere M se non c'è T e viceversa

46)  $T \uparrow H \downarrow T$  opp. si può fare il longherone tubolare: area vicina all'ome mentre la zona per

$\vec{R}_F = \rho dV \vec{s}$   
 ↑ risultante forze  
 ↑ massa ↑ acceleraz.

$\vec{R}_M = \text{mom. d'im. angolari} \cdot \text{acceleraz. angolari}$   
 ↑ risultante momenti

$R_F \vec{e}_1 \leftarrow$  risultante forze lungo x  
 $R_F \vec{e}_2 \leftarrow$  " " " y  
 $R_F \vec{e}_3 \leftarrow$  " " " z

**SIMBOLOGIA:**  
 $\dot{\phantom{x}}$  = derivata rispetto al tempo  
 $\phantom{\dot{\phantom{x}}}, x = \phantom{\dot{\phantom{x}}}$  " " " ad x (spazio)

Politecnico di Torino  
 Laurea Specialistica in Ingegneria Aerospaziale  
 Prof. Marco Di Sciuva  
 Dipartimento di Ingegneria Aerospaziale e Spaziale

**Local equations of motion del subetto**

Translation along the x-axis  $\Rightarrow \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + X_x = \rho \frac{\partial u}{\partial t^2}$

Translation along the y-axis  $\Rightarrow \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + Y_y = \rho \frac{\partial v}{\partial t^2}$

Translation along the z-axis  $\Rightarrow \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + Z_z = \rho \frac{\partial w}{\partial t^2}$

Cauchy's reciprocity condition (equilibrium to the rotation with no concentrated couples)

$\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$      $\sigma_{xz} = \sigma_{zx}$      $\sigma_{yz} = \sigma_{zy}$

So, the number of the stress components reduces to six.

Corso di Strutture Aerospaziali    Lesson N° 5 Theory of elastic stability

$\vec{s} = u\vec{e}_1 + v\vec{e}_2 + w\vec{e}_3$

Sistema di un generico pt P

x → axe 1 →  $\vec{e}_1$   
 y → " 2 →  $\vec{e}_2$   
 z → " 3 →  $\vec{e}_3$

$S = \begin{cases} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{cases} \Rightarrow \{s\} = \begin{cases} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{cases}$

$\{e_1\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$ ,  $\{e_2\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$   
 $\{e_3\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$

Se mm ci sono esp. pie concentrate, le eqnz. di equilibrio alla rotaz. sono automaticam. soddisfatte e valgono le condiz. di reciprocità di Cauchy

$\int_V (\sigma_{xx,x} + \sigma_{yx,y} + \sigma_{zx,z} + X_x) dx dy dz = \rho \int_V \ddot{u} dx dy dz \Rightarrow \sigma_{xx,x} + \sigma_{yx,y} + \sigma_{zx,z} + X_x = \rho \ddot{u}$

Forza del campo di massa

caratt. cinematica (spostam.)  
 volume  
 caratt. mecc. (forze)

Politecnico di Torino  
 Laurea Specialistica in Ingegneria Aerospaziale  
 Prof. Marco Di Sciuva  
 Dipartimento di Ingegneria Aerospaziale e Spaziale

**Boundary conditions** → le condiz. servono per

Boundary stress conditions on  $S_1$

$\{\bar{\sigma}_v\} = \{\bar{\sigma}_v\}$

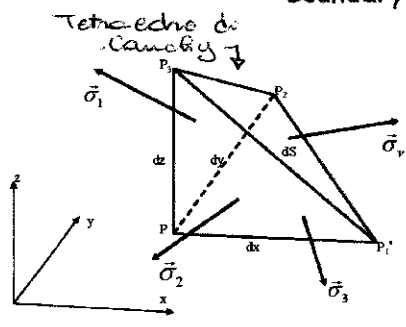
$\bar{\sigma}_1 = \sigma_{11}V_1 + \sigma_{21}V_2 + \sigma_{31}V_3$   
 $\bar{\sigma}_2 = \sigma_{12}V_1 + \sigma_{22}V_2 + \sigma_{32}V_3$   
 $\bar{\sigma}_3 = \sigma_{13}V_1 + \sigma_{23}V_2 + \sigma_{33}V_3$

$\bar{\sigma}_x = \sigma_{xx}l + \sigma_{yx}m + \sigma_{zx}n$   
 $\bar{\sigma}_y = \sigma_{xy}l + \sigma_{yy}m + \sigma_{zy}n$   
 $\bar{\sigma}_z = \sigma_{xz}l + \sigma_{yz}m + \sigma_{zz}n$

Boundary displacement conditions

$u = \bar{u}; v = \bar{v}; w = \bar{w}$  on  $S_u$

Corso di Strutture Aerospaziali    Lesson N° 6 Theory of elastic stability




al contorno calcolano le condiz. di integrazione

NB  $\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_3$  mm sono u agli assi (simpl. ienn. rigide) ma sulle facce che hanno normale  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$

$\bar{\sigma}_v$  agisce sulla faccia che ha normale  $\vec{v}$

$\{v\} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix}$

• incastro = vincolo che blocca freccia ( $w=0$ ) e rotazione ( $\theta=0$ )  
 (grandezze cinematiche) → a noi viene chiesto di calcolare le  
 grandezze mecc T ed M

• appoggio  → vincolo cinematico →  $v_v=0$  → calcolare  $F_v$   
 → vincolo mecc →  $M=0$  → calcolare  $\theta$

Un corpo si deforma quando le posiz. relative dei vari punti variano  
 Se un corpo non si deforma → corpo rigido  
 → deve mantenere le variaz.:

- lungo gli assi →  $x, y$  (2D)
  - di angolo
- ⇒ anche se i lati non si sono allungati o accorciati, possono aver avuto 1 deformazione di angolo

DILATAZIONI → variazioni di lunghezza:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

ROTAZIONI degli assi:

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad \epsilon_{xe} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right), \quad \epsilon_{ye} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

$\alpha = 0$  → angolo non variato  
 $\alpha \neq 0$  → angolo variato



$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= u_{1,1} & \epsilon_{12} &= \frac{1}{2} (u_{1,2} + u_{2,1}) \\ \epsilon_{22} &= u_{2,2} & \epsilon_{13} &= \frac{1}{2} (u_{1,3} + u_{3,1}) \\ \epsilon_{33} &= u_{3,3} & \epsilon_{23} &= \frac{1}{2} (u_{2,3} + u_{3,2}) \end{aligned}$$

NB  $\epsilon_{11} = u_{1,1} = \frac{1}{2} (u_{1,1} + u_{1,1})$  → in generale  $\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \delta_{ij} \quad i \neq j$$

svuotanti a taglio  
 (componenti antisimmetriche  
 → quelle che non risultano dai  
 gli strumenti) = componente  
 a 90° dall'angolo etc 2 fibre  
 vicinissime a tra loro formano  
 un deformazione avvolgenti (d+β sulle slide)

componenti del tensore  
 di deformazione lineare  
 (calcolo per fattori di deformazione  
 anche tra i di wire)

come prima

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \delta_{13} \\ \delta_{23} \\ \delta_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{Bmatrix}$$

per evitare ambiguità,  $\epsilon_4, \epsilon_5, \epsilon_6$  avremmo un  
 pedice 8 quindi calcolate integralmente, non  
 avremmo niente quindi calcolate come  
 $\epsilon_{13}, \epsilon_{23}, \epsilon_{12}$

rigidezza = rapporto tra carico applicato e deformaz. subita → a parità di carico se rigidezza elevata → deformaz. subita e bassa

$$F = k \Delta x \rightarrow k = \frac{F}{\Delta x}$$

$$f = \frac{1}{k} = \frac{\Delta x}{F}$$

Politecnico di Torino  
Laurea Specialistica in Ingegneria Aerospaziale  
Prof. Marco Di Scruva  
Dipartimento di Ingegneria Aerospaziale e Spaziale

### The matrix [C] for different materials

**Anisotropic materials**

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix}$$

**Monoclinic materials**

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ & & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & 0 \\ & & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix}$$

**Orthotropic materials**

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix}$$

**Isotropic materials**

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix}$$

Corso di Strutture Aeronautiche  
Lesson #15  
Theory of elastic stability

materiali monoclinici  
→ 13 coeff.  
simmetria

materiali isotropi  
→  $C_{11} = C_{22} = C_{33}$ ,  
 $C_{44} = C_{55} = C_{66}$ ,  
 $C_{12} = f(C_{11}, C_{66})$   
→ 2 coeff.

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & & & \\ & C_{11} & C_{12} & & & \\ & & C_{11} & & & \\ & & & C_{44} & & \\ & & & & C_{66} & \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix}$$

materiali eterogenei → coeff. funz. del pt (x,y,z)  
omogenei → coeff. indipendenti dal pt in cui si calcolano

Politecnico di Torino  
Laurea Specialistica in Ingegneria Aerospaziale  
Prof. Marco Di Scruva  
Dipartimento di Ingegneria Aerospaziale e Spaziale

### The engineering constants

Young moduli, shear moduli and Poisson's moduli are known as the engineering constants of materials.

Orthotropic materials

$$E_i = \frac{\sigma_i}{\epsilon_i}, \quad i=1,2,3 \quad G_{ij} = \frac{\tau_{ij}}{\gamma_{ij}}, \quad i,j=1,2,3 \quad \nu_{ij} = \frac{\epsilon_j}{\epsilon_i}, \quad i,j=1,2,3$$

FRCM

$$\begin{aligned} E_L &= E_1 \\ E_T &= E_2 = E_3 \\ G_{LT} &= G_{12} = G_{13} \\ G_{TT} &= G_{23} \\ \nu_{LT} &= \nu_{12} = \nu_{13} \\ \nu_{TT} &= \nu_{23} \end{aligned}$$

Isotropic materials

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Corso di Strutture Aeronautiche  
Lesson #15  
Theory of elastic stability

ne tira in direz. a zero una contraz. in direz. j

contraz. in direz. a alle direz. di sollecitazione.

contraz. in direz. a alle direz. di sollecitazione.

27/03/12

15 equaz. in 15 incognite

$$\begin{matrix} \sigma_{ij}(x_e) \\ \mu_j(x_e) \\ \epsilon_{ij}(x_e) \end{matrix}$$



FORMULAZIONE 3D

FORMULAZ. ENERGETICHE

FORMULAZ. DIFFERENZ.

FORMULAZ. APPROSSIMATA

SOLUZ. ESATTA

} un caso "semplice" che si risolve analiticam.

FUNZ. BASE

$F_n(x), G_m(Y), H_k(z)$   
Utilizza funz. algebriche  
metodi energetici, etc.  
Elementi 3D

FUNZ. BASE  $H_k(z)$

Utilizza equaz. diff. alle derivate parziali.  
Elementi 2D, piastre, gusci

FUNZ. BASE

$H_k(z), G_m(Y)$   
Utilizza equaz. diff. Elementi 1D, aste travi

TEORIA BIDIMENSIONALE

piastre - gusci

FORMULAZ. DIFFERENZIALI

FORMULAZ. ENERGETICHE

SOLUZ. ESATTA

SOLUZ. APPROSSIMATA

CON FUNZ. BASE  $G_m(Y)$   
EQUAZ. DIFF.

CON FUNZ. BASE  $F_n(x), G_m(Y)$   
EQUAZ. ALGEBRICHE

TEORIA 1D

aste - trave

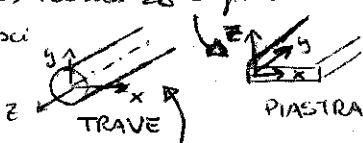
FORMULAZ. DIFFERENZIALI

FORMULAZ. ENERGETICHE

SOLUZ. ESATTA

SOLUZ. APPROSSIMATA

A priori decide l'andam. della funz. lungo un'asse scelto → il problema da 3D diventa 2D. Per es. scegli l'asse z → devo calcolare solo x, y → teoria 2D di piastre e gusci



Se faccio l'approssimazione anche x un altro asse → puro funz. incognite solo x l'asse restante → modelli 1D → travi

Oppure a priori l'andam. della funz. nelle 2 direz. che giacciono sul piano della sezione che sto considerando

NB. la sopraelimitata indica un DATO  $\bar{p}, \bar{q}, \dots$   
 i pedici invece indicano la direzione di applicaz. di un carico  $\bar{p}_x, \bar{q}_y, \dots$

Politecnico di Torino  
 Laurea Specialistica in Ingegneria Aerospaziale  
 Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale  
 Prof. Marco Di Sciuva

### Displacement field

The assumptions: (i) the in-plane displacements  $u$  and  $v$  are assumed to be linear functions of the  $z$  coordinate; (ii) transverse shear strains  $\gamma_{xz}$  and  $\gamma_{yz}$  are assumed to be negligible, yield

**CAMPO DI SPOSTAM.**

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u^{(0)}(x, y) - zw'_{,x}(x, y) \\ v(x, y, z) &= v^{(0)}(x, y) - zw'_{,y}(x, y) \\ w(x, y, z) &= w^{(0)}(x, y) \end{aligned}$$

**KIRCHHOFF**

Corso di Strutture Aeronautiche  
 Lesson N° 3  
 Theory of multilayered plates

Politecnico di Torino  
 Laurea Specialistica in Ingegneria Aerospaziale  
 Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale  
 Prof. Marco Di Sciuva

### Strain field

Plane strain field ( $\epsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ )  
 STATO DI DEFORMAZ. PIANO (piano = xy)

Engineering strains  $\{\epsilon_y\} = \{\epsilon_y^{(0)}\} + z\{K_y\}$

3x4

$$\{\epsilon_y\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_x \\ v_x \\ u_y + v_x \end{Bmatrix}$$

$$\{\epsilon_y^{(0)}\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x^{(0)} \\ \epsilon_y^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_x^{(0)} \\ v_x^{(0)} \\ u_y^{(0)} + v_x^{(0)} \end{Bmatrix}$$

$$\{K_y\} = \begin{Bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w''_{,xx} \\ w''_{,yy} \\ 2w''_{,xy} \end{Bmatrix}$$

Total strains

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_x \\ v_x \\ \frac{1}{2}(u_y + v_x) \end{Bmatrix}$$

Membrane strains

$$\{\epsilon_y^{(0)}\} = \{\epsilon_y\} - z\{K_y\}$$

Curvatures

$$\{\epsilon\} = [T]\{\epsilon_y\} \quad \text{with} \quad [T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Tensor notation

Corso di Strutture Aeronautiche  
 Lesson N° 3  
 Theory of multilayered plates

$\epsilon_y$  è un vettore 3x1  
 $\rightarrow \epsilon_{px}$  piano

$$\{\epsilon_{px}\} = \begin{Bmatrix} u_x^{(0)} - zw'_{,xx} \\ v_x^{(0)} - zw'_{,xy} \\ u_y^{(0)} - zw'_{,xy} + v_x^{(0)} - zw'_{,xy} \end{Bmatrix}$$

variabili primarie  
 $\uparrow$

COMPONENTI MEMBRANALI

deformaz. di  $w$  (e la curvatura della superficie deformata in piano  $xz$ ); curvatura  $\rightarrow$  lettera  $K$

$w_{,xy} = 0 \Rightarrow$  superf. cilindrica  
 $\neq 0 \Rightarrow$  sverg. lin. o torz. sione della superf. me. dia

**VETTORE DELLE CURVATURE**

$\downarrow$   
 variabili secondarie



Politecnico di Torino  
Laurea Specialistica in Ingegneria Aerospaziale  
Prof. Marco Di Sciuva  
Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale

### Stress resultants and moment resultants

Note: They are forces and moments per unit length.

Lesson N° 3  
Theory of multilayered plates

$dM = z dN_x$   
 $M_x = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_x dz$   
 $\{M\} = \langle z \{ \sigma_p \} \rangle = \int_{-h/2}^{h/2} \dots dz$   
 $\{N\} = \langle \{ \sigma_p \} \rangle$   
 $= \langle [Q_p] \{ \epsilon_p^{(0)} \} \rangle + \langle \epsilon [Q_p] \{ \kappa_p \} \rangle$   
 $\{M\} = \langle z \{ \sigma_p \} \rangle = \langle [Q_p] \{ \epsilon_p^{(0)} \} \rangle + \langle \epsilon [Q_p] \{ \kappa_p \} \rangle$   
 $\{N\} = [A] \{ \epsilon_p^{(0)} \}$   
 $\{M\} = [B] \{ \epsilon_p^{(0)} \} + [D] \{ \kappa_p \}$

forza di azione per unità di lunghezza  
 in tutta la faccia agisce una forza  $N_x \cdot b$   
 $\{N\} = \langle [Q_p] \{ \epsilon_p^{(0)} \} \rangle + \langle \epsilon [Q_p] \{ \kappa_p \} \rangle$   
 $= \langle [A] \{ \epsilon_p^{(0)} \} \rangle + \langle [B] \{ \epsilon_p^{(0)} \} \rangle + \langle [D] \{ \kappa_p \} \rangle$

Se  $[B] = 0$   $\{N\} = [A] \{ \epsilon_p^{(0)} \}$  → curvature membrane  
 $\{M\} = [D] \{ \kappa_p \}$  → curvature legate a momenti flettenti / ingobbiam. legate a momenti torcenti

Politecnico di Torino  
Laurea Specialistica in Ingegneria Aerospaziale  
Prof. Marco Di Sciuva  
Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale

### Plate Constitutive Equations

Evaluating the above integrals, gives the constitutive equations for the multilayered plate

$$\{N\} = [A] \{ \epsilon_p^{(0)} \} + [B] \{ \kappa_p \}$$

$$\{M\} = [B] \{ \epsilon_p^{(0)} \} + [D] \{ \kappa_p \}$$

$[A] = \langle [Q_p] \rangle$  Membrane stiffness matrix  
 $[B] = \langle z [Q_p] \rangle$  Coupling stiffness matrix  
 $[D] = \langle z^2 [Q_p] \rangle$  Bending-torsion stiffness matrix

where (NS is the number of layers)

$$[A] = \langle [Q_p] \rangle = \sum_{k=1}^{NS} \int_{z^{(k)}}^{z^{(k+1)}} [Q_p^{(k)}] dz = \sum_{k=1}^{NS} [Q_p^{(k)}] (z^{(k+1)} - z^{(k)}) = \sum_{k=1}^{NS} [Q_p^{(k)}] h^{(k)}$$

$$[B] = \langle z [Q_p] \rangle = \sum_{k=1}^{NS} \int_{z^{(k)}}^{z^{(k+1)}} z [Q_p^{(k)}] dz = \sum_{k=1}^{NS} [Q_p^{(k)}] \left( \frac{z^{(k+1)^2} - z^{(k)^2}}{2} \right)$$

$$[D] = \langle z^2 [Q_p] \rangle = \sum_{k=1}^{NS} \int_{z^{(k)}}^{z^{(k+1)}} z^2 [Q_p^{(k)}] dz = \sum_{k=1}^{NS} [Q_p^{(k)}] \left( \frac{z^{(k+1)^3} - z^{(k)^3}}{3} \right)$$

Corso di Strutture Aeronautiche  
 Lesson N° 3  
 Theory of multilayered plates

matrice delle rigidità membranali  
 matrice di accoppiam. tra effetti membranali e flessione-torsione  
 matrice delle rigidità flessione-torsionali

$[Q_p]$  resta cost. all'interno di uno strato ma può variare da 1 strato all'altro  
 $\rightarrow \sum_{k=1}^{NS} [Q_p^{(k)}]$

$\epsilon^{(k+1)} = \epsilon_{k+2}$   
 $\epsilon^{(k)} = \epsilon_{k-1}$

$$\left. \begin{aligned} (N_x^+ - N_x^-) dy + (N_{xy}^+ - N_{xy}^-) dx &= 0 \\ N_x^+ &= N_x^- + N_{x,x} dx \\ N_{xy}^+ &= N_{xy}^- + N_{xy,y} dy \end{aligned} \right\} N_{x,x} + N_{xy,y} = 0$$

$$\left. \begin{aligned} (T_x^+ - T_x^-) dy + (T_y^+ - T_y^-) dx + \bar{q}_z dx dy &= 0 \\ T_x^+ &= T_x^- + T_{x,x} dx \\ T_y^+ &= T_y^- + T_{y,y} dy \end{aligned} \right\} T_{x,x} + T_{y,y} + \bar{q}_z = 0$$

**Equilibrium Equations**

We consider an elementary parallelepiped having sides  $dx$  and  $dy$  and thickness  $h$ .

**Translation**

Along x-axis)  $N_{x,x} + N_{xy,y} = 0$   
 Along y-axis)  $N_{xy,y} + N_{yy} = 0$   
 Along z-axis)  $T_{x,x} + T_{y,y} + \bar{q}_z = 0$

**Rotation**

Along x-axis)  $M_{x,x} + M_{xy,y} - T_x = 0$   
 Along y-axis)  $M_{xy,x} + M_{y,y} - T_y = 0$

$T_{x,x} = M_{x,xx} + M_{xy,xy}$   
 $T_{y,y} = M_{xy,xy} + M_{y,yy}$   
 $M_{x,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{y,yy} + \bar{q}_z = 0$

Corso di Strutture Aeronautiche Lesson N° 3  
Theory of multilayered plates

da reciprocity del  
le  $\tau$  deriva da  
condiz. di equil.  
brno alla rotaz.  
↳ in qnt caso è  
automaticam. sod.  
di fatto l'equil.  
brno alla rotaz.  
attorno all'asse  
z → mancano le  
altre 2 equaz. di  
equilibrio alla  
rotazione → le  
calcolo considerando 2 assi  
passanti per il baricentro

→ e' scom.  
passo formel.  
mente il taglio  
(calcolo tutte le  
grandezze stria.  
verso le variab. li  
primarie) → il  
modello è com.  
forme alla teoria  
di Kirchhoff

↓  
otengo 1 sist.  
3 eq. iperstatico

**Boundary conditions**

$x=0, a:$   $u^{(0)}$  or  $N_x$   
 $v^{(0)}$  or  $N_{xy}$   
 $w^{(0)}$  or  $T_x$   
 $w_{xx}^{(0)}$  or  $M_x$   
 $w_y^{(0)}$  or  $M_{xy}$

$y=0, b:$   $u^{(0)}$  or  $N_{xy}$   
 $v^{(0)}$  or  $N_y$   
 $w^{(0)}$  or  $T_y$   
 $w_x^{(0)}$  or  $M_{xy}$   
 $w_y^{(0)}$  or  $M_y$

Corso di Strutture Aeronautiche Lesson N° 3  
Theory of multilayered plates

$$\begin{cases} N_{x,x} + N_{xy,y} = 0 \\ N_{xy,y} + N_{yy} = 0 \\ M_{x,xx} + M_{y,yy} + 2M_{xy,xy} + \bar{q}_z = 0 \end{cases}$$

<b>Politecnico di Torino</b> Laurea Specialistica in Ingegneria Aerospaziale	<b>Prof. Marco Di Sciuva</b> Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale
<p>Let us assume the transverse load be expanded in Fourier series</p> $\bar{q}_z(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \text{sen}(\lambda_m x) \text{sen}(\lambda_n y) \quad \text{with } \lambda_m \equiv \frac{m\pi}{a} \quad \text{e } \lambda_n \equiv \frac{n\pi}{b}$ <p>Then, it is easy shown that a solution for the problem at hand is</p> $w^{(0)}(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \text{sen}(\lambda_m x) \text{sen}(\lambda_n y) \quad \text{con } \lambda_m \equiv \frac{m\pi}{a} \quad \text{e } \lambda_n \equiv \frac{n\pi}{b}$ <p>Substituting the expression for <math>w^{(0)}</math> and <math>\bar{q}_z</math> into the equilibrium equation, yields</p> $D_{11} \lambda_m^4 w_{mn} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \lambda_m^2 \lambda_n^2 w_{mn} + D_{22} \lambda_n^4 w_{mn} = q_{mn} \quad \forall (m,n)$ <p>from which</p> $w_{mn} = \frac{q_{mn}}{D_{11} \lambda_m^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \lambda_m^2 \lambda_n^2 + D_{22} \lambda_n^4}$ <p>The explicit expression for <math>q_{mn}</math> will depend on the transverse load.</p> <p>Uniform transverse load of intensity <math>\bar{q}_z^0 \Rightarrow q_{mn} = \begin{cases} 16\bar{q}_z^0 / \pi^2 mn &amp; \Leftarrow m,n \text{ odd} \\ 0 &amp; \Leftarrow m \text{ or } n \text{ even} \end{cases}</math></p> <p>Point load in <math>P(x_c, y_c)</math> of intensity <math>Q_c \Rightarrow q_{mn} = (4Q_c / ab) \text{sen}(\lambda_m x_c) \text{sen}(\lambda_n y_c)</math></p>	
Corso di Strutture Aeronautiche <span style="float: right;">Lesson N° 3 Theory of multilayered plates</span>	

<b>Politecnico di Torino</b> Laurea Specialistica in Ingegneria Aerospaziale	<b>Prof. Marco Di Sciuva</b> Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale
<p>From the displacement field <math>w^{(0)}(x,y)</math>, we compute the strain field</p> $u^{(0)}(x,y) = v^{(0)}(x,y) = 0 \quad \left\{ \begin{matrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{matrix} \right\} = -Z \left\{ \begin{matrix} w_{,xx}^{(0)} \\ w_{,yy}^{(0)} \\ 2w_{,xy}^{(0)} \end{matrix} \right\}$ <p>Note that the strain distribution along the thickness is linear and vanishes for <math>z=0</math>.</p> <p>The stress field follows from the Hooke's law.</p> $\left\{ \begin{matrix} \sigma_x^{(k)} \\ \sigma_y^{(k)} \\ \tau_{xy}^{(k)} \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} Q_{11}^{(k)} & Q_{12}^{(k)} & Q_{16}^{(k)} \\ Q_{12}^{(k)} & Q_{22}^{(k)} & Q_{26}^{(k)} \\ Q_{16}^{(k)} & Q_{26}^{(k)} & Q_{66}^{(k)} \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{matrix} \right\}$ <p>The thickness distribution of the stress is piecewise linear due to the different mechanical characteristics of the layers. Also the stresses vanish for <math>z=0</math>.</p> <p><b>The reference plane is neutral plane.</b></p>	
Corso di Strutture Aeronautiche <span style="float: right;">Lesson N° 3 Theory of multilayered plates</span>	

02

Politecnico di Torino  
Laurea Specialistica in Ingegneria Aerospaziale

Prof. Marco Di Sciuva  
Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale

Corso di Strutture Aeronautiche

Lesson N° 7  
Stiffened Plates

Politecnico di Torino  
Laurea Specialistica in Ingegneria Aerospaziale

Prof. Marco Di Sciuva  
Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale

Con riferimento al piano medio del rivestimento, nell'ambito del modello piastra di Kirchhoff, possiamo scrivere

$$\frac{h}{2} \leq z \leq h_c + \frac{h}{2} \Rightarrow \begin{cases} u_c = u^{(0)} - z w_{,x}^{(0)} \\ w_c = w^{(0)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \epsilon_{xx}^c = u_{,x}^{(0)} - z w_{,xx}^{(0)} = \epsilon_{xx}^{(0)} + z k_{xx} \\ \sigma_{xx}^c = E_c \epsilon_{xx}^c = E_c \epsilon_{xx}^{(0)} + z E_c k_{xx} \end{cases}$$

Per il generico irrigidimento "i", posto

$$N_{xx,i}^c = \int_{A_c} \sigma_{xx,i}^c dA \quad M_{xx,i}^c = \int_{A_c} z \sigma_{xx,i}^c dA$$

si ha

$$N_{xx,i}^c = E_c A_c \epsilon_{xx}^{(0)} + E_c A_c e_c k_{xx}$$

$$M_{xx,i}^c = E_c A_c e_c \epsilon_{xx}^{(0)} + E_c (I_{G_c} + e_c^2 A_c) k_{xx}$$


con  $I_{G_c} = \frac{b_c h_c^3}{12}$

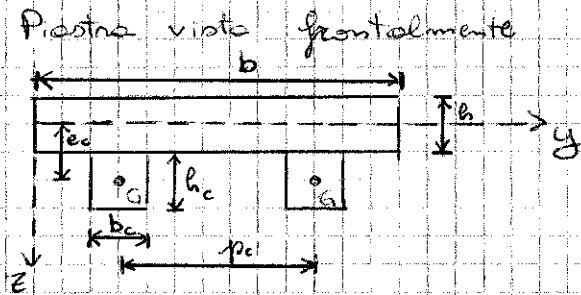
dove  $e_c A_c = S_{yc}$  momento statico del corrente rispetto all'asse y

$I_{G_c} + e_c^2 A_c = I_{yc}$  momento d'inerzia del corrente rispetto all'asse y

Corso di Strutture Aeronautiche

Lesson N° 7  
Stiffened Plates

 <p><b>Politecnico di Torino</b> Laurea Specialistica in Ingegneria Aerospaziale</p>	<p><b>Prof. Marco Di Sciuva</b> Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale</p>
<p>Per il caso trattato, per il solo rivestimento, si ha <math>[B] = [0]</math></p> <p>Inoltre per irrigidimenti simmetrici rispetto al piano medio del rivestimento</p> $[B_x^c]_i = [0]; \quad [B_y^c]_j = [0]$ <p>Quindi, si ottiene <math>[B^c] = [0]</math>.</p> <p><b>Energia di deformazione elastica</b></p> $\Phi^l = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left( \{N^l\}^T \{\epsilon_p^{(0)}\} + \{M^l\}^T \{k\} \right) dx dy$ $= \Phi + \sum_{i=1}^I \Phi_i^c + \sum_{j=1}^J \Phi_j^c$ <p>con <math>\Phi_i^c = \frac{1}{2} \int_0^a (N_{xx,i}^c \epsilon_{xx}^{(ij)} + M_{xx,i}^c k_{xx}) dx;</math>      <math>\Phi_j^c = \frac{1}{2} \int_0^b (N_{yy,j}^c \epsilon_{yy}^{(ij)} + M_{yy,j}^c k_{yy}) dy</math></p>	
Corso di Strutture Aeronautiche	Lesson N° 7 Stiffened Plates



ipotesi:

- correnti identiche
- correnti distribuite uniformemente (però  $\rho_c = \text{cost}$ )
- n° elevato di correnti (se n° effetto troppo locale)
- le correnti non danno rigidità torsionale

Provo ad applicare la teoria di Kirchhoff se mi mette in una posizione

$$\frac{h}{2} < z < \frac{h}{2} + h_c$$

Lo spostam. del corrente in direz. x è  $w_c$ , in direz. z è  $w_z$

$$\begin{cases} u_c = u^{(0)} - z w_{,xx}^{(0)} \\ w_c = w^{(0)} \end{cases}$$

immagino che i correnti siano travi che non sbandano ed è fuori del loro piano ( $w_c = 0$ ) e che si muovono solo parallelamente e trasversalmente.

NB  $u^{(0)}, w^{(0)}$  sono sempre gli di prima  $\rightarrow$  spostam. dei pt del piano medio della piastra

Lo sforzo normale in direz. x dipendente dal corrente è:

$$N_{xx}^c \equiv \int_{A_c} \sigma_{xx}^c dA$$

Il momento flettente è:

$$M_{xx}^c \equiv \int_{A_c} \sigma_{xx}^c z dA$$

$$E_{xx}^c = u_{,xx}^{(0)} - z w_{,xxx}^{(0)} = \underbrace{E_{xx}^{(0)}}_{\text{deformazione}} + z \underbrace{k_{xx}}_{\text{curvatura}} \quad \text{matriciale}$$

6b)  $\sigma_{xx}^c = E_{xx}^c \epsilon_{xx}^c$  in un materiale isotropo  $Q_{11} = \frac{E}{1-\nu^2}$  (\*)

In maniera sintetica:

$$\begin{aligned} \{N^c\} &= [A^c] \{ \varepsilon_p^{(c)} \} + [B^c] \{k\} \\ \{M^c\} &= [B^c] \{ \varepsilon_p^{(c)} \} + [D^c] \{k\} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \{N\} &= \{N_{\text{libera}}\} + \sum_{i=1}^{N_x} \{N_i^c\} + \dots \\ \{M\} &= \{M_{\text{libera}}\} + \sum_{i=1}^{N_x} \{M_i^c\} + \dots \end{aligned} \right\} \text{gli sforzi si ripartiscono tra} \\ & \text{matra libera e corrente}$$

$$\begin{aligned} \{N\} &= \{N_{\text{libera}}\} + \sum_{i=1}^{N_x} \{N_i^c\} + \sum_{j=1}^{N_y} \{N_j^c\} & N_x = \text{n}^\circ \text{ correnti in} \\ & & \text{direz. x} \\ \{M\} &= \{M_{\text{libera}}\} + \sum_{i=1}^{N_x} \{M_i^c\} + \sum_{j=1}^{N_y} \{M_j^c\} & N_y = \text{n}^\circ \text{ correnti in} \\ & & \text{direz. y} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} [A] &= [A_{\text{libera}}] + \sum_{i=1}^{N_x} [A_i^c] + \sum_{j=1}^{N_y} [A_j^c] \\ [B] &= [B_{\text{libera}}] + \sum_{i=1}^{N_x} [B_i^c] + \sum_{j=1}^{N_y} [B_j^c] \\ [D] &= [D_{\text{libera}}] + \sum_{i=1}^{N_x} [D_i^c] + \sum_{j=1}^{N_y} [D_j^c] \end{aligned} \right\} \text{matrici complessive} \\ & \text{da usare nelle formule} \\ & \text{della teoria della piastra} \\ & \text{di Kirchhoff.}$$

ENERGIA DI DEFORMAZIONE ELASTICA

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_0^a \int_0^b (\{N\}^T \{ \varepsilon_p^{(c)} \} + \{M\}^T \{k\}) dx dy = \\ &= \int_0^a \int_0^b (\{N_{\text{libera}}\}^T \{ \varepsilon_p^{(c)} \} + \{M_{\text{libera}}\}^T \{k\}) dx dy + \\ & \quad + \sum_{i=1}^{N_x} \Phi_i^c + \sum_{j=1}^{N_y} \Phi_j^c \end{aligned}$$

$$\Phi_i^c \equiv \int_0^a (N_{xx}^c \varepsilon_{xx}^{(c)} + M_{xx}^c k_{xx}) dx$$

$$\Phi_j^c \equiv \int_0^b (N_{yy}^c \varepsilon_{yy}^{(c)} + M_{yy}^c k_{yy}) dy$$

Politecnico di Torino  
Laurea Specialistica in Ingegneria Aerospaziale

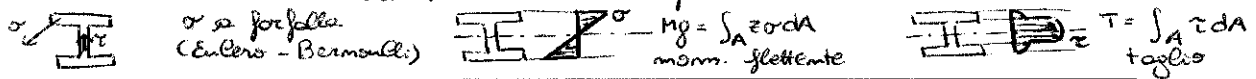
Prof. Marco Di Sciuva  
Dipartimento di Ingegneria Aeronautica e Spaziale

### Assumptions

- ✓ The core and face sheets have constant thickness.
- ✓ The face sheets are constructed of an arbitrary number of layers of orthotropic material perfectly bonded together. However, the orthotropic axes of material symmetry of an individual ply need not coincide with the  $x$ - $y$  axes of the plate.
- ✓ The core and each ply of the face sheets obey Hooke's law. (compositam. lineare)
- ✓ The core material is transversely isotropic and of much greater thickness than the face sheets, i.e.,  $h \gg h_f, h_b$ .
- ✓ The transverse displacement  $w$  is independent of the  $z$  coordinate, i.e.,  $\epsilon_z$  is negligible.
- ✓ In-plane displacements  $u$  and  $v$  are uniform through-the-thickness of the face sheets. (qst' ipotesi è valida se ci sono solo concchi distribuiti)
- ✓ The in-plane core displacements  $u^{(c)}$  and  $v^{(c)}$  are assumed to be linear functions of the  $z$  coordinate; (Se concchi concentrati  $\rightarrow$  si usano inserti molto grossi)

Corso di Strutture Aeronautiche Lesson N° 4  
Theory of sandwich plates

Queste ipotesi trovano abbastanza riscontro se noi facciamo riferim. all. trave ad I (con una trave sandwich ma ha s. compositam. simile)



Ipotesi:

- $\sigma$  cost in facce superiore e inferiore, lineare nel core
- qst' ipotesi è soddis. fatta se  $h \gg h_f, h_b$  e delle facce e  $\epsilon$   $E$ , idem per  $\sigma$  e  $A \rightarrow$  se trasuro il contributo dell'Ani, ma al momento flettente, commetto un errore del 10%  $\rightarrow$  il 10% di  $M_f$  che assorbe l'anima x me viene assorbito dalle solette  $\rightarrow$  sono conservativo

Politecnico di Torino  
Laurea Specialistica in Ingegneria Aerospaziale

Prof. Marco Di Sciuva  
Dipartimento di Ingegneria Aeronautica e Spaziale

### Assumptions cont.d

- ✓ The in-plane stresses  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  of the core are assumed to be negligible;
- ✓ The transverse shear stresses  $\tau_{xz}$  and  $\tau_{yz}$  are negligible in the face sheets;
- ✓ The plate displacements are small compared to the plate thickness.
- ✓ The plate in-plane strains are small compared to unity.

Corso di Strutture Aeronautiche Lesson N° 4  
Theory of sandwich plates

è trascurabile nelle solette

anche qui errore del 10% in T ma anche qui sono cautelativo

12)



Politecnico di Torino  
Laurea Specialistica in Ingegneria Aerospaziale

Prof. Marco Di Sciuva  
Dipartimento di Ingegneria Aeronautica e Spaziale

### Strain field

Upper face  $\{\epsilon^{(i)}\} \equiv \{\epsilon^{(0)}\} + \frac{h}{2} \{\kappa\}$

Core  $\{\gamma^{(c)}\} \equiv \{\gamma^{(0)}\}$

Lower face  $\{\epsilon^{(b)}\} \equiv \{\epsilon^{(0)}\} - \frac{h}{2} \{\kappa\}$

$$\{K\}^T = [\psi_{x,x} \quad \psi_{y,y} \quad \psi_{x,y} + \psi_{y,x}]$$

$$\begin{cases} \epsilon_x^{(i)} \equiv \epsilon_x^{(0)} + \frac{h}{2} \kappa_x \equiv u_{,x}^{(0)} + \frac{h}{2} \psi_{x,x} \\ \epsilon_y^{(i)} \equiv \epsilon_y^{(0)} + \frac{h}{2} \kappa_y \equiv v_{,y}^{(0)} + \frac{h}{2} \psi_{y,y} \\ \gamma_{xy}^{(i)} \equiv \gamma_{xy}^{(0)} + \frac{h}{2} \kappa_{xy} \equiv (u_{,y}^{(0)} + v_{,x}^{(0)}) + \frac{h}{2} (\psi_{x,y} + \psi_{y,x}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma_{xz}^{(c)} \equiv \psi_{x,z} + w_{,x}^{(0)} \\ \gamma_{yz}^{(c)} \equiv \psi_{y,z} + w_{,y}^{(0)} \end{cases} \quad (\gamma = \text{cost} \rightarrow \text{abbiamo una approssimazione a parabola con 1 retta})$$

$$\begin{cases} \epsilon_x^{(b)} \equiv \epsilon_x^{(0)} - \frac{h}{2} \kappa_x \equiv u_{,x}^{(0)} - \frac{h}{2} \psi_{x,x} \\ \epsilon_y^{(b)} \equiv \epsilon_y^{(0)} - \frac{h}{2} \kappa_y \equiv v_{,y}^{(0)} - \frac{h}{2} \psi_{y,y} \\ \gamma_{xy}^{(b)} \equiv \gamma_{xy}^{(0)} - \frac{h}{2} \kappa_{xy} \equiv (u_{,y}^{(0)} + v_{,x}^{(0)}) - \frac{h}{2} (\psi_{x,y} + \psi_{y,x}) \end{cases}$$

The strains are constant along the thickness, both in the faces and core.

Corso di Strutture Aeronautiche

Lesson N° 4  
Theory of sandwich plates

14/04/12

Politecnico di Torino  
Laurea Specialistica in Ingegneria Aerospaziale

Prof. Marco Di Sciuva  
Dipartimento di Ingegneria Aeronautica e Spaziale

### From the assumptions on the stress state:

- the transverse shear stresses ( $\tau_{xz}$  and  $\tau_{yz}$ ) are negligible in the face sheets;
- the in-plane stresses ( $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  and  $\tau_{xy}$ ) of the core are negligible.
- the normal ( $\sigma_z$ ) is negligible in the face sheets and core.

come una piastra di Kirchhoff →

come uno strato di materiale ortotropo →

Upper face  $\{\sigma^{(i)}\} = [Q_P^{(i)}] \{\epsilon^{(i)}\}$

$$\begin{cases} \sigma_x^{(i)} \\ \sigma_y^{(i)} \\ \tau_{xy}^{(i)} \end{cases} = \begin{bmatrix} Q_{11}^{(i)} & Q_{12}^{(i)} & Q_{16}^{(i)} \\ Q_{12}^{(i)} & Q_{22}^{(i)} & Q_{26}^{(i)} \\ Q_{16}^{(i)} & Q_{26}^{(i)} & Q_{66}^{(i)} \end{bmatrix} \begin{cases} \epsilon_x^{(i)} \\ \epsilon_y^{(i)} \\ \gamma_{xy}^{(i)} \end{cases}$$

Note that  $[Q_P]$  matrices are the same as those for monolithic plates.

Core  $\{\tau^{(c)}\} = [Q_T] \{\gamma^{(c)}\}$

$$\begin{cases} \tau_{xz}^{(c)} \\ \tau_{yz}^{(c)} \end{cases} = \begin{bmatrix} Q_{44}^{(c)} & 0 \\ 0 & Q_{55}^{(c)} \end{bmatrix} \begin{cases} \gamma_{xz}^{(c)} \\ \gamma_{yz}^{(c)} \end{cases}$$

The shear reduced stiffnesses  $Q_{44}$  and  $Q_{55}$  are the engineering constants  $G_{13}$  and  $G_{23}$ .

Lower face  $\{\sigma^{(b)}\} = [Q_P^{(b)}] \{\epsilon^{(b)}\}$


$$\begin{cases} \sigma_x^{(b)} \\ \sigma_y^{(b)} \\ \tau_{xy}^{(b)} \end{cases} = \begin{bmatrix} Q_{11}^{(b)} & Q_{12}^{(b)} & Q_{16}^{(b)} \\ Q_{12}^{(b)} & Q_{22}^{(b)} & Q_{26}^{(b)} \\ Q_{16}^{(b)} & Q_{26}^{(b)} & Q_{66}^{(b)} \end{bmatrix} \begin{cases} \epsilon_x^{(b)} \\ \epsilon_y^{(b)} \\ \gamma_{xy}^{(b)} \end{cases}$$

Strain not appearing in the constitutive equations are negligible, but not zero.

Corso di Strutture Aeronautiche

Lesson N° 4  
Theory of sandwich plates

44



Politecnico di Torino  
Laurea Specialistica in Ingegneria Aerospaziale

Prof. Marco Di Sciuva  
Dipartimento di Ingegneria Aeronautica e Spaziale

### Constitutive Equations for sandwich plates

A cursory examination of the expressions for the elements of the introduced stiffness matrices reveals that if the top and bottom face sheets are identical, then


$$[A^{(b)}] = [A^{(t)}], \quad [C^{(b)}] = -[C^{(t)}] \quad \text{Identical face sheets}$$

and as a result

$$\begin{aligned}
 [A] &= 2[A^{(t)}], & [D] &= h[C^{(t)}] & \Rightarrow & \begin{cases} \{N\} = [A]\{\epsilon^{(0)}\} \\ \{M\} = [D]\{\kappa\} \end{cases} \\
 [B] &= [C] = [0]
 \end{aligned}$$

Thus, for such cases the in-plane and bending problems uncouple.

Corso di Strutture Aeronautiche
Lesson N° 4  
Theory of sandwich plates

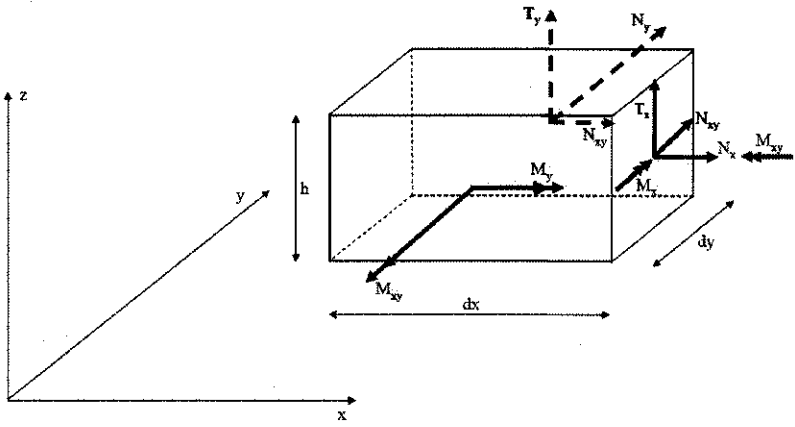


Politecnico di Torino  
Laurea Specialistica in Ingegneria Aerospaziale

Prof. Marco Di Sciuva  
Dipartimento di Ingegneria Aeronautica e Spaziale

### Equilibrium Equations

*Stress resultants and moment resultants*



Corso di Strutture Aeronautiche
Lesson N° 4  
Theory of sandwich plates

$$\begin{aligned}
 \{N\} &= \int_{-h/2}^{-h/2-h_b} \{\sigma^{(b)}\} d\epsilon + \int_{h/2}^{h/2+h_t} \{\sigma^{(t)}\} d\epsilon = \int_{-h/2}^{-h/2-h_b} [Q_P^{(b)}] \{\epsilon^{(b)}\} d\epsilon + \int_{h/2}^{h/2+h_t} [Q_P^{(t)}] \{\epsilon^{(t)}\} d\epsilon = \\
 &= \int_{-h/2}^{-h/2-h_b} [Q_P^{(b)}] \left( \{\epsilon^{(0)}\} - \frac{h}{2} \{k\} \right) d\epsilon + \int_{h/2}^{h/2+h_t} [Q_P^{(t)}] \left( \{\epsilon^{(0)}\} + \frac{h}{2} \{k\} \right) d\epsilon = \\
 &= \left( \int_{-h/2}^{-h/2-h_b} [Q_P^{(b)}] d\epsilon \right) \{\epsilon^{(0)}\} - \frac{h}{2} \left( \int_{-h/2}^{-h/2-h_b} [Q_P^{(b)}] d\epsilon \right) \{k\} + \left( \int_{h/2}^{h/2+h_t} [Q_P^{(t)}] d\epsilon \right) \{\epsilon^{(0)}\} + \\
 &+ \frac{h}{2} \left( \int_{h/2}^{h/2+h_t} [Q_P^{(t)}] d\epsilon \right) \{k\} = [A^{(b)}] \{\epsilon^{(0)}\} - \frac{h}{2} [A^{(b)}] \{k\} + [A^{(t)}] \{\epsilon^{(0)}\} + \frac{h}{2} [A^{(t)}] \{k\} = \\
 &= \underbrace{([A^{(b)}] + [A^{(t)}])}_{[A]} \{\epsilon^{(0)}\} + \frac{h}{2} \underbrace{([A^{(t)}] - [A^{(b)}])}_{[B]} \{k\} = [A] \{\epsilon^{(0)}\} + [B] \{k\}
 \end{aligned}$$

Se ripeto tutto qst per il momento flettente ricavo:

$$\{M\} = \underbrace{([C^{(t)}] + [C^{(b)}])}_{[C]} \{\epsilon^{(0)}\} + \frac{h}{2} \underbrace{([C^{(t)}] - [C^{(b)}])}_{[D]} \{k\} = [C] \{\epsilon^{(0)}\} + [D] \{k\}$$

Per il taglio:

$$\begin{aligned}
 \{T\} = \begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \end{Bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2} \{\tau\} d\epsilon = \int_{-h/2}^{h/2} [Q_T] \{\gamma^{(c)}\} d\epsilon = [Q_T] \{\gamma^{(c)}\} \int_{-h/2}^{h/2} d\epsilon = \\
 &= h [Q_T] \{\gamma^{(c)}\} = [A_T] \{\gamma^{(c)}\} = [A_T] \{\gamma^{(0)}\}
 \end{aligned}$$

const.  $\nearrow$

Piastra simmetrica:

$$\begin{aligned}
 [A^{(t)}] = [A^{(b)}] &\rightarrow [B] = 0 \\
 [C^{(t)}] = -[C^{(b)}] &\rightarrow [C] = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \{N\} &= [A] \{\epsilon^{(0)}\} \\
 \{M\} &= [D] \{\epsilon^{(0)}\} \\
 \{T\} &= [A_T] \{\gamma^{(0)}\}
 \end{aligned}$$

← disaccoppiam. tra  
effetti membranali ed  
effetti fless-torsionali  
se piastra simm.

$$\begin{aligned}
 A_{44} = h Q_{44} \\
 \tau_{xz} = Q_{44} \gamma_{xz} \\
 \tau = G \gamma
 \end{aligned}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \rightarrow \begin{aligned} \tau_{13} &= G_{13} \gamma \text{ pedice?} \\ \tau_{23} &= G_{23} \gamma \text{ pedice?} \end{aligned} \quad Q_{44} = G_{13}$$

Ho i carichi → mi calcolo T, N, M (modello trave).

Ma la mia struttura non è una trave! → applico il modello del semiguscio rettilo e calcolo lo stato di tensione.

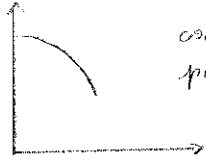
Poi vado ancora + in dettaglio → piastra di Kirchhoff → piastra sandwich

NB tutto qst è stato creato sull'ipotesi che tutto sia lineareizzato.

Però bisogna tener conto dei fenomeni di instabilità delle strutture in pareti sottili.

In linea puram. teorica, se io fossi in grado di fare un'analisi un lineare della mia struttura, mettendoci dentro tutto, io sarei in grado di tracciare le curve dei diagrammi (con tutti i punti di biforcazione) ma ad oggi non siamo ancora in grado di fare così  
 → almeno possiamo individuare l'esistenza dei pt di biforcazione, anche senza saper tracciare il diagramma

caso semplice → piastra rettangolare piana caricata su 4 lati



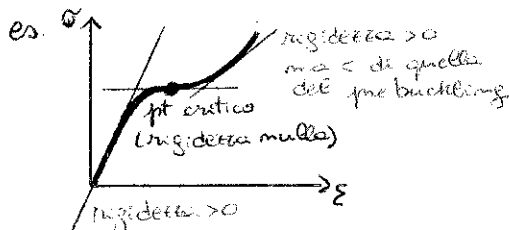
comportamento post-buckling instabile

sist. a sgdl → con uno strumento semplificato ottengo solo a parte dei risultati (rispetto alla soluz. esatta) ma le info importanti le ho comq.

- comportamento
- 1) prebuckling
  - 2) buckling
  - 3) post-buckling

Dopo il carico di buckling, può succedere che il sist. sia ancora stabile, anche se ha cambiato la sua configurazione

- post-buckling
- instabile → il sist. cede repentinam. (dovrei diminuire il carico ma non posso farlo)
  - stabile → cambia la rigidità (pendenza della curva) quindi cambia il rapporto tra carico e deformazione ma la struttura non cede ancora

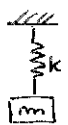


In letteratura sono disponibili 4 metodi per l'analisi dei criteri di stabilità:

- 1) criterio degli stati di equilibrio adiacenti (criterio di Euler)
- 2) criterio energetico (criterio di Lagrange)
- 3) criterio delle imperfezioni
- 4) criterio dinamico/cinetico

CRITERIO DINAMICO / CINETICO:

sist. massa-molla



il sist. oscilla con frequenza propria  $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$   
 qst è un risultato di natura generale!

infatti, ho sempre  $\sqrt{\frac{\text{rigidità}}{\text{inerzia}}} = \text{frequenza propria}$

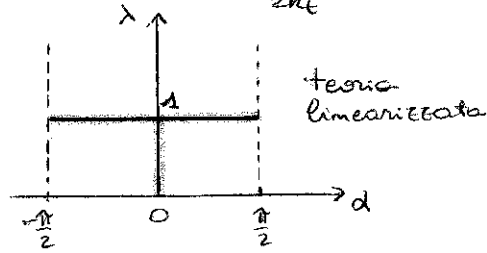
pt limite → rigidità = 0 } → se faccio l'analisi dinamica del sistema al variare del carico (es. corda di chitarra: se tensione ↑  $\omega_n$  ↑)  
 massa ≠ 0 } → la frequenza si riduce e arriva a zero nel pt. limite

È se linearizzato?

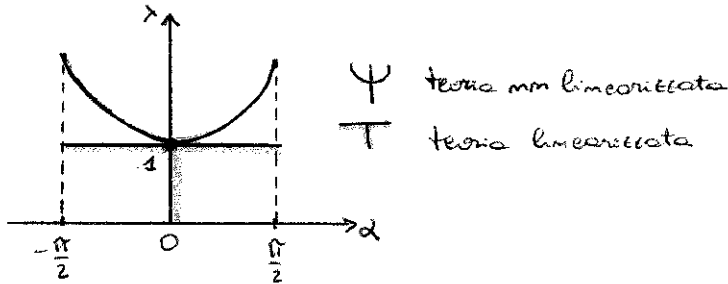
- non posso considerare indeformata la geometria del sistema (come farei per es nel calcolo di 1 trave  $\leftarrow \downarrow$ ) se no troverei solo la soluz.  $d=0$   
 → sarebbe come fare l'analisi a robustezza
- se voglio far vedere le situaz. critiche devo usare la config. deformata!

→  $(2PL \sin d - 4k_t d) = 0$

considero  $d$  piccoli →  $\sin d \approx d$  →  $(2PLd - 4k_t d) Sd = 0$   $\left\{ \begin{array}{l} d=0 \\ \frac{PL}{2k_t} = \lambda = 1 \quad \forall d \end{array} \right.$



cioè si ha:




per  $\lambda < 1$  le 2 teorie danno gli stessi risultati  
 per  $\lambda = 1$  entrambe danno un warning, ma

teoria non linearizzata  
 ↳ sist. ancora stabile  
 (per  $\lambda > 1$  poi può rimanere stabile o diventare instabile)

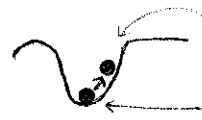
teoria linearizzata  
 ↳ non ci dice nulla  
 (comq sono a  $\lambda = 1$  e il sist. può cedere in qualz. suoi momenti)

⇒ se  $\lambda < 1$  posso usare anche la teoria linearizzata (costa meno e ottengo gli stessi risultati);  
 se, invece, faccio un'analisi  $\forall$  livello di carico devo usare la teoria non linearizzata.

d'analisi grafica, cmq, è utilizzabile solo per  $gde \leq 3$  (poi non vedo più nulla dai diagrammi) → altrimenti posso usare il criterio energetico (di Lagrange)

 •  $\equiv$  valore dell'energia posseduta dal sistema in funz. della quota

se sposto la pallina, questa non è in condiz. di equilibrio → torna indietro (non in maniera statica perché oscilla)

 • config. di non equilibrio  
 • config. di equilibrio stabile

↳ mostra sistemi sono molto sensibili alle IMPERFEZIONI DI FORMA (vedi p. 86)  
se c'è un disassamento iniziale  $\rightarrow E_t = \frac{1}{2} K_t (2d - 2d_0)^2 - 2PL (\cos d_0 - \cos d)$   
etc. etc.

Quindi:

- se vogliamo solo alcune info, soprattutto se vogliamo sapere se ci sono punti di biforcaz., possiamo usare la teoria lineare.
- il metodo basato sul criterio di Lagrange è efficace, ma ha il limite: i carichi devono essere CONSERVATIVI (se no non si può parlare di energia potenziale totale), se questa condiz. non è verificata si può usare il metodo di Eulero (vedi p. 88).

\* All'equilibrio  $\frac{\alpha}{\sin \alpha} = \frac{PL}{2K_t}$  :

$$4K_t - \frac{4\alpha K_t}{\operatorname{tg} \alpha} > 0 \Rightarrow \frac{\alpha}{\operatorname{tg} \alpha} < 1$$

sempre verificata per  $0 < \alpha < \pi/2$

Il carico critico calcolato con la teoria esatta corrisponde al punto di separazione fra il tratto di equilibrio ad asse rettilineo e quello ad  $\alpha \neq 0$ , cioè:

$$\frac{dE_t}{d\alpha} = 0; \frac{d^2E_t}{d\alpha^2} = 0 \Rightarrow \left(\frac{PL}{2K_t}\right)_{cr} = 1$$

Con la teoria linearizzata, si ha

$$\frac{d^2E_t}{d\alpha^2} = 4K_t - 2PL \quad \text{indip. da } \alpha$$

stabile  $> 0$  se  $PL/2K_t < 1$   
 $= 0$  se  $PL/2K_t = 1$  equil. indiff.

**SI CONCLUDE CHE PER PICCOLI VALORI DI  $\alpha$  LA TEORIA LINEARIZZATA FORNISCE INFORMAZIONI IN BUON ACCORDO CON QUELLE DELLA TEORIA ESATTA.**

### Effetto delle imperfezioni di forma

$\alpha_0 =$  imperfezione iniziale:  $u_0 = L \sin \alpha_0$   
 $\eta_0 = L(1 - \cos \alpha_0)$

Energia pot. totale

$$E_t = \frac{1}{2} K_t (2\alpha - 2\alpha_0)^2 - 2PL (\cos \alpha_0 - \cos \alpha)$$

## METODO DI EULERO / DEGLI STATI DI EQUILIBRIO ADIACENTI / DELLE PICCOLE PERTURBAZIONI:

perturbo poco la config. di equilibrio

NB la stabilità è una proprietà delle config. di equilibrio  
→ per parlare di stabilità devo poter prima calcolare le config. di equilibrio

Se il sist. ammette 2 o più config. di equil. → almeno 1 di esse è instabile → trova il carico critico.





Your complimentary use period has ended. Thank you for using PDF Complete.

Se sviluppo in serie di Taylor in un intorno del pt di biforcaz. (ε) confronto tutte le curve con la tan → la retta λ=1 e la parabola sono la stessa cosa.

Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Exports

Politecnico di Torino  
 Laurea Specialistica in Ingegneria Aerospaziale  
 Dipartimento di Ingegneria Aeronautica e Spaziale  
 Prof. Marco Di Sciuva

### Stability Analysis

#### Method of adjacent equilibrium states

**A) Perfect system**  
**A2) Linear analysis** (analisi lineare della config. di equilibrio)

Equilibrium equation  $(1-\lambda)\alpha = 0 \Rightarrow \alpha_{eq} = 0 \text{ for } \forall \lambda$

Substituting  $\alpha_{eq} \rightarrow \alpha = \alpha_{eq} + \varepsilon \alpha^{(1)}$  yields

~~$(1-\lambda)\alpha_{eq} + \varepsilon(1-\lambda)\alpha^{(1)} = 0$~~  equaz. di stabilità = equaz. di equilibrio

Stability equation  $(1-\lambda)\alpha^{(1)} = 0 \Rightarrow \lambda = 1$

giunto di biforcaz. (curva critica) } opt mm e la fisica del problema! e una conseguenza della linearizzazione del probl.

Corso di Strutture Aeronautiche  
 Lesson N° 8  
 Theory of elastic stability

Se siamo certi che il sist. ha campo post critico stabile → lo facciamo lavorare in campo post-critico (es. pannelli sottoposti a taglio)

Politecnico di Torino  
 Laurea Specialistica in Ingegneria Aerospaziale  
 Dipartimento di Ingegneria Aeronautica e Spaziale  
 Prof. Marco Di Sciuva

### Stability Analysis

#### Method of adjacent equilibrium states

**B) Imperfect system**  
**B1) Non-linear analysis**

Equilibrium equation  $(\alpha - \alpha_0) - \lambda \sin \alpha = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{\alpha_{eq} - \alpha_0}{\sin \alpha_{eq}}$

Substituting  $\alpha_{eq} \rightarrow \alpha = \alpha_{eq} + \varepsilon \alpha^{(1)}$  yields  $1 - \lambda \cos \alpha_{eq} = 0$  Stability equation

Substituting  $\lambda = \frac{\alpha_{eq} - \alpha_0}{\sin \alpha_{eq}} \Rightarrow 1 = \frac{\alpha_{eq} - \alpha_0}{\tan \alpha_{eq}}$

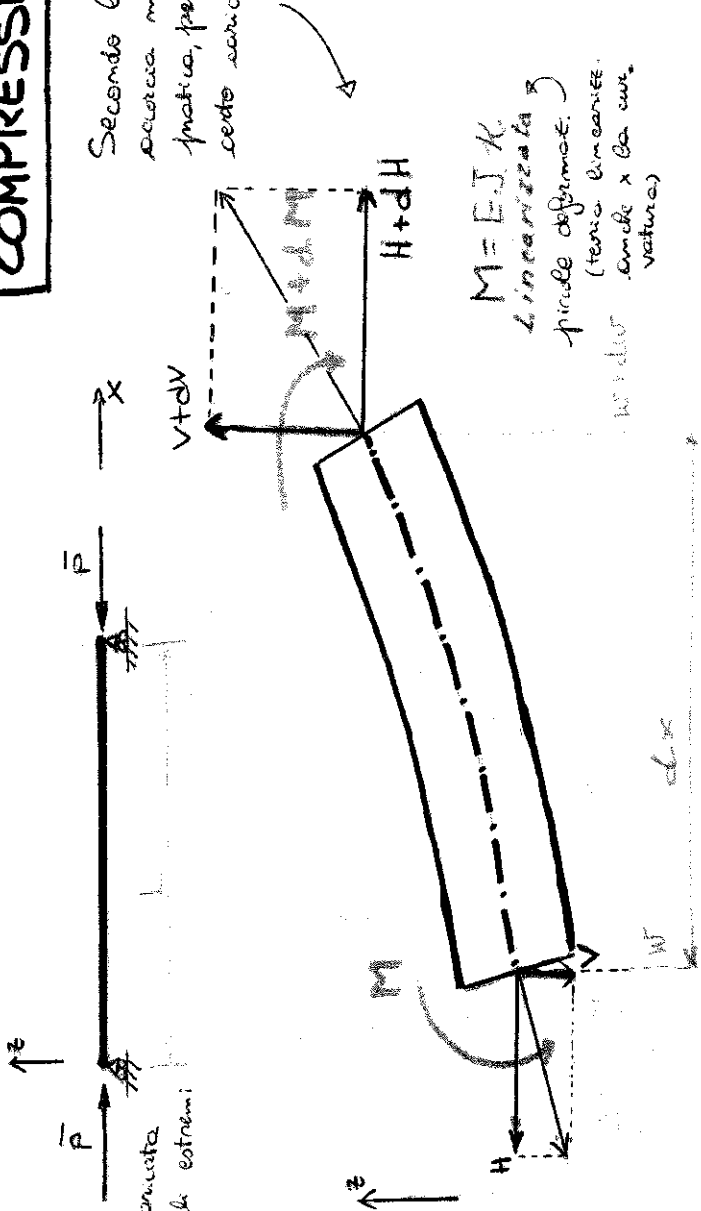
Never verified being  $\frac{\alpha_{eq} - \alpha_0}{\tan \alpha_{eq}} < 1$  for  $\forall \alpha_{eq} \geq \alpha_0$ .

Corso di Strutture Aeronautiche  
 Lesson N° 8  
 Theory of elastic stability

# ASTE COMPRESSE

Secondo la teoria opt'asta si ricerca una mm si flette; nella pratica, però, mm e cost e dopo a certo carico l'asta si flette.

$N$  e  $T$  mm assis + parallele agli assi  $x, y \rightarrow$  introduce  $H$  e  $V$ , risultanti delle componenti delle forze lungo  $x$  e  $y$ .  $(V, w$  spostam. lungo  $x, z)$



$M = EJ \kappa$   
 linearizzata  $\rightarrow$  piccole deformate.  
 (teoria lineare: simile a la curvatura)

Scrivo le equat. di equilibrio dell'asta deformata

$$\begin{cases} \rightarrow) dH = 0 \Rightarrow H = \text{cost} \\ 1) dV = 0 \Rightarrow V = \text{cost} \\ 2) dM - V dx + H dx = 0 \Rightarrow \frac{d^2 M}{dx^2} + \frac{d}{dx} (H w') = 0 \end{cases}$$

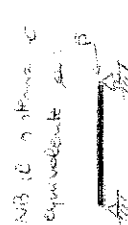
$\Rightarrow \frac{d^2 M}{dx^2} + H \frac{d^2 w}{dx^2} = 0$  Eq. di equilibrio (trasuro gli infinitesimi di ordine superiore, come  $dH dx$ )

cond. al B. e.  $x=0, L$ :  $w = 0; w' = 0; H = -P = -\lambda P_0$

$$\frac{d^2 M}{dx^2} - \lambda P_0 \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \Rightarrow EJ w'''' + \lambda P_0 w'' = 0$$

cond. al contorno  $w = 0$   $w' = 0$

Eq. a 4° ordine iperstatica (2 incognite  $M$  e  $w$ )  $\rightarrow$  us. le equat. costitutive  $\rightarrow -\frac{d^4 w}{dx^4} EI - \lambda w_0 \frac{d^2 w}{dx^2} = 0$



Equat. omogenee, ma mm tutte le cond. al contorno sono omogenee  $\rightarrow$  PROBLEMA DI RISPOSTA  $\rightarrow$  soluz. unica